

## Розділ 3. ВИМІРЮВАЧІ КУТОВОЇ ШВИДКОСТІ

### ЗМІСТ

Розділ 3. ВИМІРЮВАЧІ КУТОВОЇ ШВИДКОСТІ .....	1
<i>ЛЕКЦІЯ 17</i> .....	2
3.1. ДВОСТЕПЕНЕВІ ГІРОСКОПІЧНІ ТАХОМЕТРИ .....	3
3.1.1. Рівняння руху гіротахометра з механічною пружиною .....	3
3.1.2. Динамічні характеристики гіротахометра .....	5
<i>ЛЕКЦІЯ 18</i> .....	7
3.1.3. Похибки вимірювань кутової швидкості .....	7
<i>ЛЕКЦІЯ 19</i> .....	11
3.1.4. Гідростатичний підвіс чутливого елемента .....	11
3.1.5. Компенсаційні гіротахометри .....	12
<i>ЛЕКЦІЯ 20</i> .....	15
3.2. РОТОРНІ ВІБРАЦІЙНІ ГІРОСКОПИ .....	15
3.2.1. Двоступеневий роторний вібраційний гіроскоп .....	15
<i>ЛЕКЦІЯ 21</i> .....	21
3.2.2. Рух ротора в опорній системі координат .....	21
3.2.3. Роторний вібраційний гіроскоп в інтегровальному режимі .....	24
<i>ЛЕКЦІЯ 22</i> .....	26
3.2.4. Триступеневий роторний вібраційний гіроскоп .....	26
3.2.5. Триступеневий ДНГ як вимірювач кутової швидкості .....	28
<i>ЛЕКЦІЯ 23</i> .....	31
3.3. ОСЦИЛЯТОРНІ ГІРОСКОПИ .....	31
3.3.1. Принцип дії і різновиди осциляторних гіроскопів .....	31
<i>ЛЕКЦІЯ 24</i> .....	36
3.3.2. Рівняння руху одномасового ММГ L-L типу .....	36
3.3.3. Рух основи з постійною кутовою швидкістю .....	38
<i>ЛЕКЦІЯ 25</i> .....	42
3.3.4. Рух основи з змінною кутовою швидкістю .....	42
<i>ЛЕКЦІЯ 26</i> .....	45
3.4. ХВИЛЬОВИЙ ТВЕРДОТІЛЬНИЙ ГІРОСКОП .....	45
3.4.1. Пружні коливання тонкого нерозтяжного кільця .....	45
3.4.2. Системи збудження коливань резонатора .....	48
<i>ЛЕКЦІЯ 27</i> .....	51
3.4.3. Схема і принцип роботи хвильового твердотілого гіроскопа .....	51
3.4.4. Система обчислення кута повороту діаграми вібрації .....	52
3.4.5. Основні похибки ХТГ .....	53
3.4.6. Режим вимірювача кутової швидкості .....	54

## ЛЕКЦІЯ 17

В залежності від природної вхідної величини (кутової швидкості) методи вимірювання кутових параметрів руху (кута повороту або кутової швидкості) можуть бути розділені на дві групи.

До першої групи відносять методи, які засновані на здійсненні безпосереднього контакту між об'єктом, що рухається, і нерухомою системою відліку. Цей контакт не обов'язково повинен бути механічним, він може здійснюватися оптичними, акустичними методами та ін. До цієї групи вимірювальних перетворювачів відносять усі пристрої, що призначені для вимірювання параметрів відносного кутового руху.

До другої групи відносять методи, які не потребують здійснення безпосереднього контакту з нерухомою системою відліку. Прилади, що реалізують цей метод, називають інерційними, тому що природною вхідною величиною для них є сили інерції, що сприймається корпусом приладу. Ця особливість робить їх дуже зручними для вимірювання кутової швидкості рухомих об'єктів, які крім кутового руху мають ще й швидкість поступального руху відносно нерухомої системи відліку. В подальшому будуть розглянуті особливості побудови цієї групи вимірювальних перетворювачів – гіроскопічних, оптичних та хвильових.

### 3.1. ДВОСТЕПЕНЕВІ ГІРОСКОПІЧНІ ТАХОМЕТРИ

#### 3.1.1. Рівняння руху гіротахометра з механічною пружиною

Гіроскопічні тахометри (гіротахометри) - це гіроскопічні прилади для вимірювання абсолютної кутової швидкості основи, які побудовані на основі двостепеневого гіроскопа.

Для того, щоб перетворити двостепеневий гіроскоп в вимірювач кутової швидкості його потрібно спорядити пружним зв'язком, що створюватиме момент сил пружності  $M_{пр} = -C\beta$  відносно вимірювальної осі (рис. 3.1а).

При обертанні основи з кутовою швидкістю  $U$ , спрямованою вздовж осі  $X_c$  (осі чутливості) виникне гіроскопічний момент  $M_\Gamma = HU$ , спрямований вздовж вимірювальної осі  $Z_c$ , який викличе поворот головної осі на кут  $\beta$  та деформацію пружини. В положенні рівноваги гіроскопічний момент врівноважується моментом  $C\beta$  пружного зв'язку. З рівності двох моментів випливає:

$$\beta = \frac{H}{C} \cdot U. \quad (3.1)$$

Таким чином, кут  $\beta$  повороту головної осі двостепеневого гіроскопу містить інформацію про величину кутової швидкості обертання основи навкруг осі чутливості  $X_c$ , перпендикулярної до осі підвісу та головної осі гіроскопу. Коефіцієнт пропорційності  $k = H/C$  між вимірюваною кутовою швидкістю та кутом повороту  $\beta$  називають статичним коефіцієнтом передачі гіротахометра.

В гіротахometrі з механічним пружним зв'язком вхідна величина  $U$  перетворюється в вихідну  $\beta$  за схемою:

$$U \rightarrow M_\Gamma = H \cdot U \rightarrow \beta = \frac{H}{C} \cdot U.$$

Рівність (3.1) має силу за умов обертання основи з сталою кутовою швидкістю та відсутності збурюючих моментів після закінчення перехідного процесу встановлення положення рівноваги.

Для забезпечення згасання вільних коливань гіроскопу він споряджається демпфером  $D$  (заспокоювачем коливань), який створює протидіючий момент, пропорційний швидкості повороту гіроскопу навкруг вимірювальної осі.

Розглянемо поведінку двостепеневого гіротахометра при умові довільного обертання основи. Зв'яжемо з основою систему координат  $x_c, y_c, z_c$ , з рамкою гіроскопу систему координат  $x_{yz}$  (рис. 3.1б). Взаємне розташування цих систем координат визначається кутом  $\beta$ . Основа обертається з довільною кутовою швидкістю  $U$ , визначену проекціями  $U_{x_c}$ ,  $U_{y_c}$  та  $U_{z_c}$  на відповідні осі. Для складання рівнянь руху використаємо метод кінестатики, утримуючи в рівняннях тільки моменти

сил інерції обертального прискорення, гіроскопічні моменти та зовнішні моменти - збурювальні та ті, що створюються пружним зв'язком та демпфером.

Згідно з рис. 3.1б гіроскопічний момент має дві складові, обумовлені обертанням основи з кутовими швидкостями  $U_{xc}$  та  $U_{yc}$ :

$$M_{\Gamma 1} = -H \cdot U_{xc} \cos\beta \text{ та } M_{\Gamma 2} = -H \cdot U_{yc} \sin\beta, \quad (3.2)$$

спрямовані вздовж від'ємного напрямку вимірювальної осі.

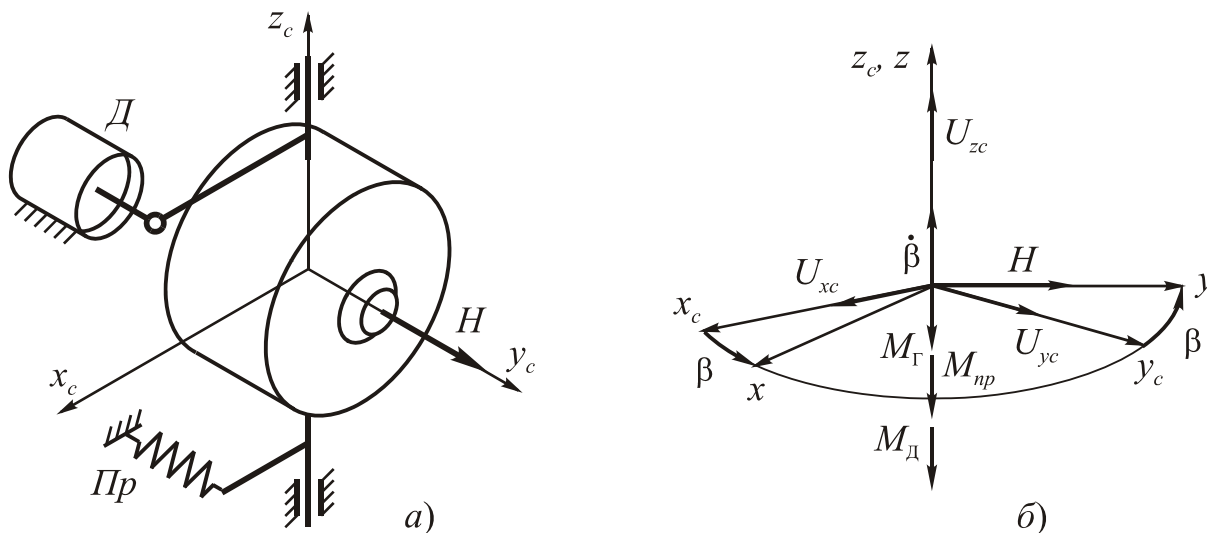


Рис. 3.1.

Поява моменту сил інерції обертального прискорення обумовлена рухом гіроскопу з прискоренням  $\varepsilon = \ddot{\beta} + \dot{U}_{zc}$  в інерціальному просторі відносно вимірювальної осі  $z_c$ . Величина цього моменту дорівнює

$$M_o = -I_1(\ddot{\beta} + \dot{U}_{zc}),$$

де  $I_1$  - момент інерції ротора гіроскопу спільно з рамкою підвісу відносно осі  $z_c$ .

Зовнішній момент сил пружності пружин дорівнює  $M_{np} = -C\beta$ , момент сил демпфірування  $M_D = -f\dot{\beta}$ . Головним збурюючим моментом відносно вимірювальної осі є момент сил сухого тертя  $M_T = M_{T0} \text{sign}\beta$ .

Згідно з методом кінетостатики проекція всіх моментів на вимірювальну вісь повинна дорівнювати нулю, тому одержимо:

$$I_1(\ddot{\beta} + \dot{U}_{zc}) + f\dot{\beta} + C\beta = -H \cdot U_{xc} \cos\beta - H \cdot U_{yc} \sin\beta - M_{T0} \text{sign}\beta,$$

або

$$I_1\ddot{\beta} + f\dot{\beta} + C\beta = -H \cdot U_{xc} \cos\beta + M_{II}, \quad (3.3)$$

де  $M_{II} = -H_{zc} \sin\beta - I_1 \dot{U}_{zc} - M_{T0} \text{sign}\beta$  - сума моментів-перешкоджань, діючих вздовж вимірювальної осі.

В вірно спроектованих приладах кут повороту  $\beta$  не перевищує одиниць градусів, тому можна вважати, що  $\cos\beta \approx 1$ , а момент перешкод значно менший вимірюваного моменту  $H U_{xc}$ . Тому при дослідженні динаміки руху гіротахометра можна використовувати рівняння руху (2.11) у вигляді:

$$I_1 \ddot{\beta} + f \dot{\beta} + C \beta = -H \cdot U_{xc}. \quad (3.4)$$

Лінеарізоване рівняння (3.4) часто записують також у вигляді:

$$\ddot{\beta} + 2h \dot{\beta} + \omega_0^2 \beta = \frac{H}{I_1} \cdot U_{xc}, \quad (3.5)$$

де  $h = \frac{f}{2I_1}$  - коефіцієнт згасання власних коливань;  $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{I_1}}$  - частота власних незгасаючих коливань гіротахометра.

Розв'язок рівняння (3.5) за умов  $U_{xc} = \text{const}$ ,  $\beta(0) = \dot{\beta}(0) = 0$  має вигляд:

$$\beta = \frac{H \cdot U_{xc}}{C} \left[ 1 - e^{-ht} \left( \frac{h}{\omega_1} \sin \omega_1 t + \cos \omega_1 t \right) \right], \quad (3.6)$$

де  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}$  - частота власних згасаючих коливань рухомої частини.

В одержаному розв'язку складова  $\frac{H}{C} \cdot U_{xc}$  визначає усталене відхилення головної осі від положення рівноваги, що відповідає вимірюваній кутовій швидкості  $U_{xc}$ . Складова  $-\frac{H}{C} \cdot U_{xc} \cdot e^{-ht} \left( \frac{h}{\omega_1} \sin \omega_1 t + \cos \omega_1 t \right)$  визначає власні коливання, що проводжують процес переходу рухомої частини в положення рівноваги. За умов оптимального вибору коефіцієнта згасання  $h$  ця складова згасає за досить короткий проміжок часу. В такому випадку розв'язок рівняння (3.5) співпадає з формулою (3.1).

### 3.1.2. Динамічні характеристики гіротахометра

Розглянемо вимушений рух гіротахометра, якщо вимірювана кутова швидкість змінюється по гармонійному закону  $U = U_0 \sin \omega_u t$ . Частковий розв'язок рівняння (3.5), який визначає вимушений рух має вигляд:

$$\beta = \frac{H}{I_1} \cdot \frac{U_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_u^2)^2 + 4h^2 \omega_u^2}} \cdot \sin[\omega_u t - \varphi(\omega_u)], \quad (3.7)$$

де  $\varphi(\omega_u) = \arctg \frac{2h\omega_u}{\omega_0^2 - \omega_u^2}$  - відставання за фазою коливань головної осі від частоти кутової швидкості  $U$ .

Розв'язок (3.7) можна записати також у вигляді

$$\beta = \frac{H}{C} \cdot U_0 \cdot K^* \sin[\omega_u t - \varphi(\omega_u)] = k \cdot K^* \cdot U_0 \sin[\omega_u t - \varphi(\omega_u)], \quad (3.8)$$

де  $K^* = \frac{1}{\sqrt{(1-v^2)^2 + 4\xi^2 v^2}}$  - коефіцієнт динамічності, який показує, у скільки разів амплітуда коливань рухомої частини приладу перевищує її відхилення при сталому значенні  $\omega_u = 0$  вимірюваної швидкості  $U_0$ ;  $v = \omega_u / \omega_0$  - відносна частота вимірюваної швидкості;  $\xi = h / \omega_0$  - відносний коефіцієнт згасання.

На рис. 3.2 наведені графіки змінювання коефіцієнта динамічності  $K^*$  в залежності від відносної частоти  $v$  та фазова частотна характеристика  $\varphi(v)$ .

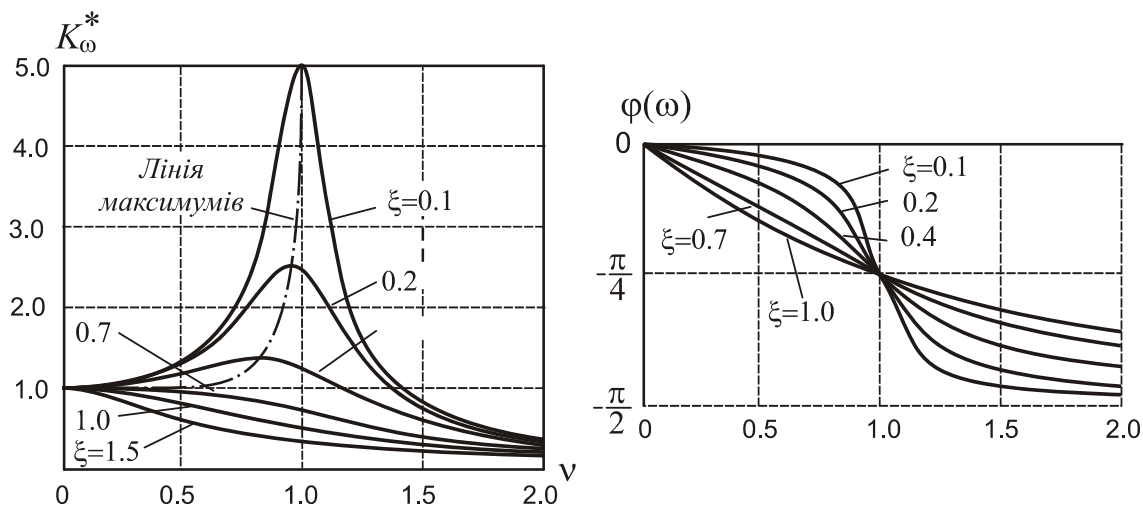


Рис. 3.2.

## ЛЕКЦІЯ 18

## 3.1.3. Похибки вимірювань кутової швидкості.

Похибки гіротахметра, як всякого вимірювального приладу, розділяють на методичні та інструментальні. Розглянемо спершу фізичну сутність основних складових методичної похибки.

Основними складовими методичної похибок в вимірюванні кутової швидкості  $U_{xc}$  є:

1. Похибка, обумовлена залежністю коефіцієнта передачі від куту відхилення рухомої частини від положення рівноваги. Згідно з (3.3) значення гіроскопічного моменту, що виникає при обертанні основи з вимірюваною кутовою швидкістю  $U_{xc}$ , залежить від співмножника  $\cos\beta$ .

Ця залежність обумовлена тим, що при повороті рухомої частини приладу на кут  $\beta$  його вісь чутливості (вісь  $x$ ) теж відхилиться від напрямку дії вимірюваної кутової швидкості на такий самий кут. Тому прилад буде вимірювати не повну складову кутової швидкості  $U_{xc}$ , а її проекцію на вісь чутливості  $U_{xc}\cos\beta$ .

Формулу максимальної абсолютної похибки від цієї мультиплікативної завади можна обрахувати, якщо порівняти значення кута  $\beta_{\max}$  для ідеалізованої та реальної залежностей цього кута від вимірюваної кутової швидкості:

$$\Delta\beta_{\cos\beta}^{\beta} = \frac{H}{C} (\cos\beta_{\max} - 1) U_{xc}^{\max},$$

або після розкладання множника  $\cos\beta$  в ряд Маклорена з утриманням двох членів ряду

$$\Delta\beta_{\cos\beta}^{\beta} = -\frac{H}{2C} \beta_{\max}^2 U_{xc}^{\max}. \quad (3.9)$$

Приведена відносна похибка вимірювання швидкості  $U_{xc}$  дорівнює

$$\delta_{\cos\beta} = \frac{\Delta\beta_{\cos\beta}^{\beta}}{\beta_{\max}} = -\frac{1}{2} \beta_{\max}^2 \quad (3.10)$$

Зменшення впливу співмножника досягається обмеженням кута  $\beta_{\max}$ , що відповідає граничному значенню вимірюваної кутової швидкості. Так, наприклад, для того, щоб вказана похибка вимірювань не перевищувала 0,004 (0,4%), максимальний кут повороту згідно з (3.10) повинен бути обмежений величиною  $\approx 5^\circ$ .

2. Похибка від впливу перехресної кутової швидкості  $U_{yc}$ , діючої вздовж осі  $y_c$ . Згідно з (3.3) вона викликає появу додаткового гіроскопічного моменту  $H U_{yc} \sin\beta$ . Математичну модель реакції приладу на перехресну кутову швидкість можна одержати з цього рівняння у вигляді

$$C\beta = -H \cdot U_{xc} - H \cdot U_{yc} \sin\beta,$$

згідно з якою сумарний кут  $\beta^*$  повороту головної осі гіроскопу через спільну дію складових  $U_{xc}$  та  $U_{yc}$  дорівнює

$$\beta^* = -\frac{H \cdot U_{xc}}{C + H \cdot U_{yc}} \approx -\frac{H \cdot U_{xc}}{C} \cdot \left(1 - \frac{H \cdot U_{yc}}{C}\right) = \beta + \Delta\beta. \quad (3.11)$$

Додатковий кут повороту  $\Delta\beta_{\sin\beta}$ , що обумовлює похибку вимірювання кутової швидкості  $U_{xc}$ , буде

$$\Delta\beta_{\sin\beta} = -\frac{H^2}{C^2} \cdot U_{xc} U_{yc} = \frac{U_{yc}}{U_{xc}} \cdot \beta^2. \quad (3.12)$$

Приведена відносна похибка вимірювання швидкості  $U_{xc}$  в даному разі дорівнюватиме:

$$\delta_{\sin\beta} = \frac{\Delta\beta_{\sin\beta}}{\beta_{\max}} = \frac{U_{yc}}{U_{xc}} \cdot \beta_{\max}. \quad (3.13)$$

Найбільш радикальний засіб зменшення цієї похибки - зменшення кутів  $\beta_{\max}$  граничного відхилення рухомої частини приладу від положення рівноваги за рахунок збільшення кутової жорсткості пружного зв'язку. Так, наприклад, для того, щоб вказана похибка вимірювань не перевищувала 0,004 (0,4%), максимальний кут повороту за умови  $U_{yc} = U_{xc}$  згідно з (3.13) повинен бути обмежений величиною  $\approx 3,6^\circ$ .

3. Динамічна похибка, суть якої полягає в змінюванні коефіцієнта передачі гіротахметра, що дорівнює  $k_1 = k \cdot K^* = \frac{H}{C} \cdot K^*$  (див. формулу 3.8), при зміні частоти коливань основи відносно осі чутливості.

Для точного вимірювання кутової швидкості в заданому діапазоні частот коливань основи потрібно виконати умови  $K^* = 1$ ;  $\varphi(\omega_u) = 0$ . В такому разі коефіцієнт пропорційності між величиною вимірюваної кутової швидкості  $U$  та кутом повороту  $\beta$  буде завжди дорівнювати відношенню  $H/C$ , тобто виконується умова

$$1 - K^* = 1 - \frac{1}{\sqrt{(1-v^2)^2 + 4\xi^2 v^2}} = 0. \quad (3.14)$$

З умови (3.14) випливає

$$(1-v^2)^2 + 4\xi^2 v^2 - 1 = 0,$$

або

$$v^2(v^2 + 4\xi^2 - 1) = 0. \quad (3.15)$$

Умова (3.15) виконується якщо  $v = 0$ , або коли



$$v^2 + 4\xi^2 - 1 = 0. \quad (3.16)$$

Випадок  $v = 0$  є тривіальним. В іншому випадку умова (3.15) може бути виконана тільки приблизно за умови  $v \ll 1$ :

$$\xi^2 = 0,5. \quad (3.17)$$

Таким чином, найкраща наближеність коефіцієнта динамічності  $K^*$  до 1, тобто незалежність коефіцієнта передавання гіротахометра від частоти гармонічної вхідної величини забезпечується при відносному коефіцієнті згасання

$$\xi = \frac{h}{\omega_0} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707. \quad (3.18)$$

В такому разі коефіцієнт динамічності акселерометра повинен дорівнювати

$$K^* = \frac{1}{\sqrt{1+v^4}}, \quad (3.19)$$

тому відносне відхилення  $K^*$  від одиниці буде

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{1+v^4}} - 1. \quad (3.20)$$

Використавши відомі формули наближених обчислень  $\sqrt{1 \pm \Delta} \approx 1 \pm 0,5\Delta$  та

$\frac{1}{1 \pm \Delta} \approx 1 \mp \Delta$  формулу (3.20) можна записати так:

$$\delta \approx \frac{1}{1+0,5v^4} - 1 \approx (1-0,5v^4) - 1 = -0,5v^4. \quad (3.21)$$

Одержана формула дозволяє вибирати мінімальну власну частоту коливань гіротахометра, за якої похибка вимірювань з-за змінності коефіцієнту динамічності не перевищує заданої. Так, наприклад, для того, щоб динамічна похибка вимірювань не перевищувала 0,004 (0,4%), відносна частота  $v$  згідно з (3.21) повинна бути меншою 1/3, тобто  $\omega_0 \geq 3\omega$ .

Інструментальні похибки виникають в першу чергу з-за моментів тертя в опорах підвісу чутливого елемента та нестабільності коефіцієнта передавання  $k$ .

1. Похибки, обумовлені дією моментів сил сухого тертя. Вплив сил сухого тертя виявляється як в виникненні порогу чутливості приладу, так і в появі деякої зони невизначеності його показань (зони застою) в межах кутів, що визначаються з рівності  $C\beta = \pm M_T$ , тобто значень кутів  $\beta$  в межах

$$\frac{M_T}{C} \leq \beta \leq +\frac{M_T}{C}. \quad (3.22)$$

Поріг чутливості приладу визначається такою обставиною. При незначних кутових швидкостях обертання основи виникаючий гіроскопічний момент мен-

ший за момент тертя, тому рух головної осі не відбувається. Момент тертя  $M_T = M_{T0} \text{sign} \dot{\beta}$  утримує гіроскоп в нерухомому стані.

Поворот рухомої частини приладу буде відбуватися лише за умовою  $|H \cdot U_{xc}| \geq M_T$ , тому поріг чутливості дорівнює

$$|U_{nop}| = \frac{M_T}{H}. \quad (3.23)$$

2. Похибка від нестабільності статичного коефіцієнту передачі. Коефіцієнт передачі  $k$  гіротахметра згідно з (3.8) дорівнює

$$k = \frac{H}{C} = \frac{I_0 \dot{\gamma}}{C}. \quad (3.24)$$

Неконтрольовані змінювання коефіцієнту передачі виникають внаслідок змінювання температури, тиску, параметрів джерел живлення. Змінювання температури впливає на величину моменту інерції ротора  $I_0$ , моментів опору на валу гіромотора, геометричних розмірів та модуля пружності матеріалу пружини. При змінюванні параметрів джерел живлення в першу чергу змінюється швидкість обертання ротора. Детальний розгляд похибок вказаного типу був зроблений при дослідженні аналогічної похибки гіроскопа напрямку.

## ЛЕКЦІЯ 19

## 3.1.4. Гідростатичний підвіс чутливого елемента

З метою зменшення моменту тертя в конструкціях гіротахometrів використовують спеціальні типи підвісів, що не створюють таких моментів, зокрема пружний або гідростатичний (поплавковий) підвіси чутливого елемента, за допомогою якого розвантажують опори підвісу від дії сил ваги (рис. 3.3).

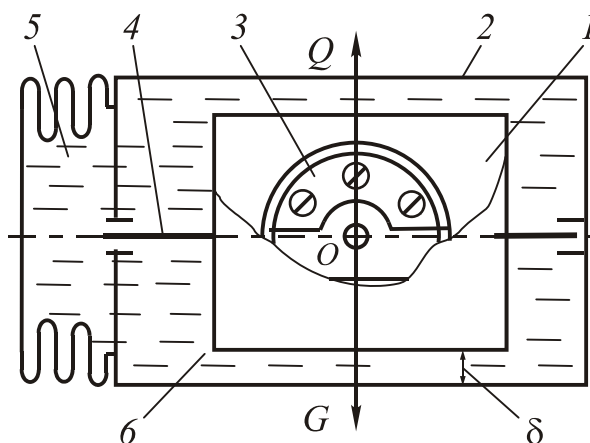


Рис. 3.3.

Рамка підвісу такого гіроскопа виконується у вигляді герметичного поплавця циліндричної форми 1, на торцевих поверхнях якого закріплені цапфи опор підвісу 4. Поплавець розміщений в корпусі 2 циліндричної форми таким чином, що між ним та корпусом створюється рівномірний зазор  $\delta$ , який заповнюється рідиною 6 з заданою густиною. На занурений в таку рідину поплавець діє виштовхуюча сила  $Q$ , яка дорівнює вазі рідини, витисненої поплавцем. Об'єм поплавця вибирають таким, щоб вага поплавця  $G = mg$  дорівнювала вазі витисненої рідини. В такому разі на опори підвісу діє мала різниця між цими двома силами, що створює досить малий момент тертя. Сифон 5 призначений для компенсації температурного змінювання об'єму рідини.

Підтримуюча рідина одночасно використовується для створення моменту демпфіруючих сил. Протидіючий момент переважно створюється циліндричною поверхнею поплавця. Щоб одержати необхідне значення коефіцієнту згасання власних коливань (тобто коефіцієнту  $h$ ), відстань  $\delta$  між корпусом та бічною поверхнею поплавця роблять незначною (0,1...0,3 мм.). В ГТ використовується рідина з коефіцієнтом динамічної в'язкості  $\mu = 10^{-3}$  Н·с/м.

Для обрахування коефіцієнту заспокоєння використовують формулу

$$f = \frac{M}{\beta} = 2\pi\mu \frac{R_n^3 L}{\delta}, \quad (3.23)$$

де  $R_n$ ,  $L$  – радіус та довжина поплавця відповідно.

### 3.1.5. Компенсаційні гіротахметри.

При розробці гіротахметрів потрібно вирішити суттєве протиріччя: для зменшення похибок вимірювання кутової швидкості потрібно якомога зменшувати максимальний кут повороту рухомої частини, однак при цьому утрудняється збереження потрібної точності вимірювання цих кутів.

З метою подолання цих протиріч потрібно використати таку схему вимірювань, яка не потребує вимірювань механічної величини - кута  $\beta$ , що можливо при застосуванні так званого компенсаційного методу вимірювань гіроскопічного моменту.

Розглянемо схему та принцип дії гіротахметра з компенсаційним методом вимірювання гіроскопічного моменту (рис. 3.4). Сутність такого методу полягає в тому, що гіроскопічний момент врівноважується компенсаційним моментом, що створюється електричним оберненим перетворювачем (датчиком моменту), керуваним від електричного вимірювача кута повороту  $\beta$ .

Рівняння руху компенсаційного гіротахметра має вигляд

$$I_1\ddot{\beta} + f\dot{\beta} = HU_{xc} + M_{\text{дм}}, \quad (3.25)$$

де  $M_{\text{дм}}$  - момент, прикладений з боку датчика моменту.

Рівняння датчика кутів та безінерційного підсилювача мають вигляд

$$U_{\text{ок}} = k_{\text{ок}}\beta; U_n = k_y U_{\text{ок}}. \quad (3.26)$$

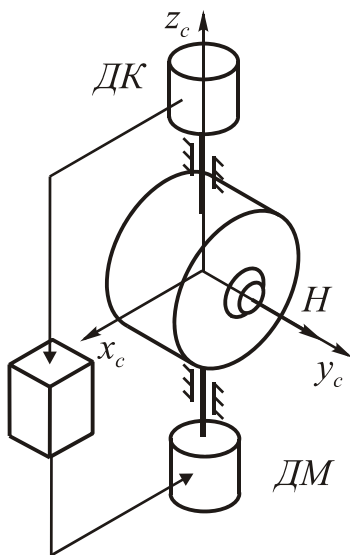


Рис. 3.4.

В сучасних конструкціях гіротахметрів використовують магнітоелектричні датчики моменту з сталими магнітами, рівняння руху яких можна записати як рівняння двигуна сталого струму з керуванням в ланцюгу якоря:

$$U_n = L \frac{di}{dt} + ri + n\dot{\beta}; M_{\text{дм}} \approx mi - I_{\text{дв}}\ddot{\beta}, \quad (3.27)$$

де  $i$ ,  $L$ ,  $r$  – струм, коефіцієнт самоіндукції та активний опір ланцюгу керування і вихідного ланцюгу підсилювача;  $n$ ,  $m$  – коефіцієнт протиелектрорушійної сили і електро механічна стала;  $I_{\text{дв}}$  – момент інерції рухомої частини датчика моменту.

Запишемо рівняння елементів компенсаційного ГТ в операторній формі з урахуванням співвідношення між

електричними параметрами датчика моментів  $\frac{L}{r} \ll 1$ :

$$\begin{aligned}(I_1 p + f)p\beta &= HU_{xc} + M_{\text{ом}}; \quad U_{\text{ок}} = \pm k_{\text{ок}}\beta; \\ U_n &= k_n U_{\text{ок}}; U_n \approx ri + np\beta; M_{\text{ом}} = mi - I_{\text{ов}} p^2 \beta.\end{aligned}\quad (3.28)$$

Знайдемо розв'язок системи (3.28) відносно вихідної величини – струму  $i$ . Для цього спочатку зведемо її до системи двох рівнянь відносно змінних  $i$  та  $\beta$ :

$$\begin{aligned}(Ip + f)p\beta - mi &= HU_{xc}; \\ (np \mp k_{\text{ок}} k_n)\beta + ri &= 0,\end{aligned}\quad (3.29)$$

де  $I = I_1 + I_{\text{ов}}$ .

Характеристичне рівняння даної системи має вигляд:

$$(Ip + f)rp + m(np \mp k_{\text{ок}} k_n) = 0.$$

Для того, щоб система була стійкою, останній член характеристичного рівняння повинен мати позитивний знак. Тому в другому рівнянні системи (3.29) потрібно враховувати нижній знак.

В результаті отримаємо

$$i(p) = \frac{-k_{\text{ок}} k_n \frac{1}{r} (T_\kappa p + 1) HU_{xc}}{f(T_e p + 1) + mk_{\text{ок}} k_n \frac{1}{r} (T_\kappa p + 1)},\quad (3.30)$$

де  $T_e = \frac{I}{f}$ ,  $T_\kappa = \frac{n}{k_{\text{ок}} k_n}$  - сталі часу гіроскопа та ланцюгу зворотного зв'язку.

Таким чином, вихідною величиною, що містить інформацію про вимірювану кутову швидкість, є не тільки кут повороту  $\beta$ , а й сила струму  $i$ , що споживається датчиком моменту. За рахунок раціонального вибору коефіцієнта підсилення підсилювача можна значно зменшити максимальну величину кута повороту  $\beta_{\text{max}}$ , тобто зменшити похибки, обумовлені відхиленням осі чутливості від напрямку вимірюваної кутової швидкості.

Суттєвою є також та обставина, що статичний коефіцієнт передачі компенсаційного гіротахometру  $k = \frac{H}{m}$  залежить тільки від двох параметрів, що спрощує забезпечення його стабільності.

Двостепеневі гіротахometри широко використовують в системах керування рухомих об'єктів, безплатформових інерціальних системах навігації та керування. В таких системах приріст кутів просторової орієнтації основи визначають шляхом інтегрування сигналів кутової швидкості, одержаних за допомогою гіротахometрів.

В системах керування рухом найбільш поширені гіротахometри для вимірювання кутових швидкостей в межах  $10^{-1} \dots 10^2$  градусів за секунду. Існують гіротахometри, які спроможні вимірювати кутові швидкості, що дорівнюють кутовій швидкості обертання Землі ( $10^{-4} \dots 10^{-5}$  1/с).

На рис. 3.5 наведена конструкція компенсаційного гіротахметра з магнітним підвісом поплавця.

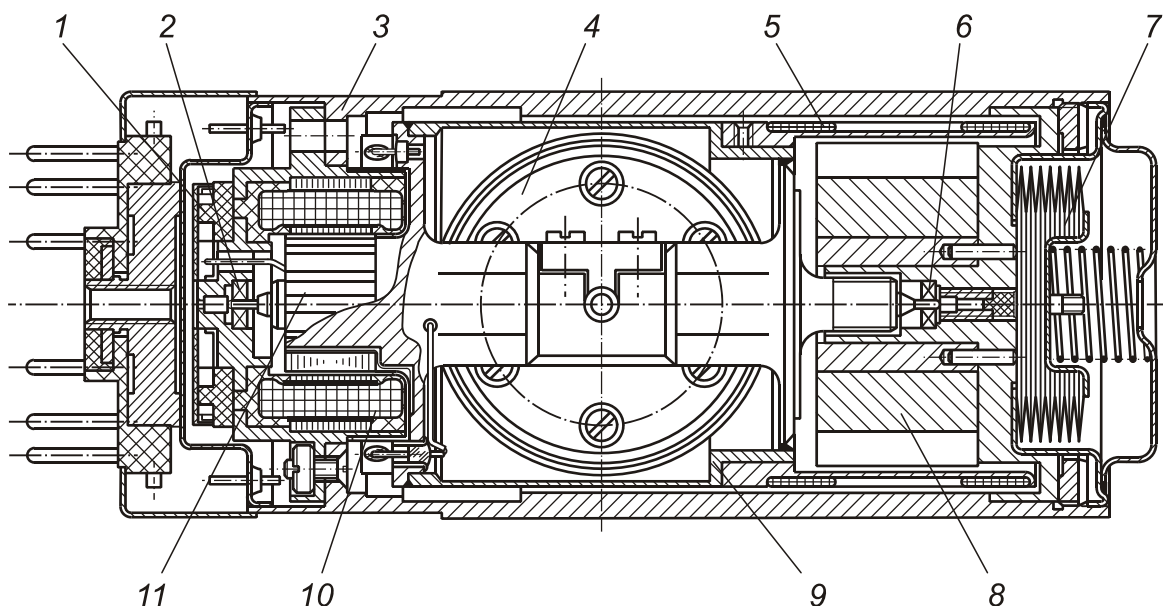


Рис. 3.5.

Основними елементами приладу є гіромотор 4, закріплений в герметичному поплавці 9. Поплавець встановлений в корпусі 3 на двох шарикопідшипникових опорах 2 і 6. Ротор 11 трансформаторного датчика кута закріплений на чутливому елементі, статор 10 - в корпусі. Магнітоелектричний датчик моменту складається з рухомих обмоток 5 і нерухомого багатополюсного магніту 8 циліндричної форми.

Електричне живлення на рухому частину передається за допомогою гнучких струмопідводів 1. Сильфон 7 призначений для компенсації теплового розширення підтримуючої рідини.

## ЛЕКЦІЯ 20.

## 3.2. РОТОРНІ ВІБРАЦІЙНІ ГІРОСКОПИ

## 3.2.1. Двостепеневий роторний вібраційний гіроскоп

В попередніх лекціях була розглянута поведінка двостепеневого гіротахометра з зовнішнім кардановим підвісом, вільність руху якого відносно осі підвісу рамки була обмежена пружним зв'язком - механічною або електричною пружиною. Опори головної осі гіроскопу та рамка вважалися абсолютно жорсткими, тобто взаємне розташування ротору та рамки завжди залишалось незмінним.

Можлива інша схема побудови двостепеневого гіроскопу, в якому для забезпечення необхідної кількості ступенів вільності використовується внутрішній карданов підвіс (рис. 3.6), елементи якого обертаються разом з ротором гіроскопу. Протидіючий пружний момент створюється за рахунок пружності елементів підвісу. В такому гіроскопі ротор 1 закріплений на валу 2 приводного двигуна 3 за допомогою пружного підвісу 4 (торсіонів), які повинні мати малу жорсткість на скручування навкруг осі їх симетрії та дуже велику жорсткість вздовж та навкруг всіх інших осей Торсіони зображені на рисунку умовно у вигляді стержнів або спиць. Насправді вони мають більш складну форму, щоб задовольняти поставленим до них вимогам. Деякі з перетинів торсіонів, які задовольняють цим вимогам, показані на рисунку. Вал двигуна обертається з сталою кутовою швидкістю  $\Omega$ .

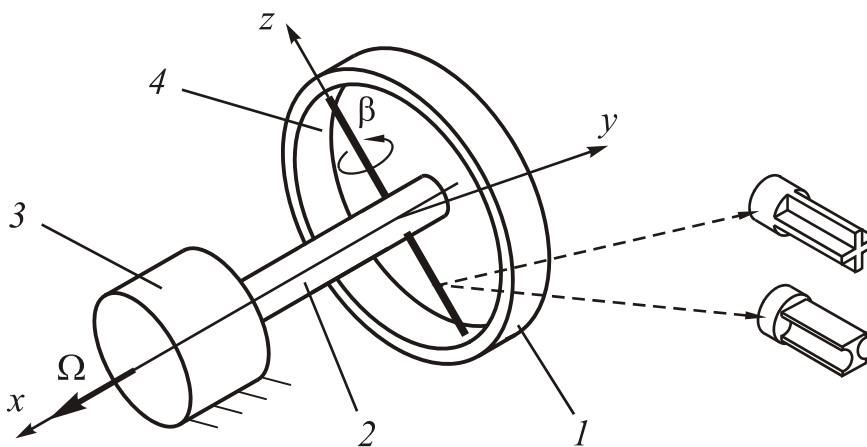


Рис. 3.6

Розглянемо особливості роботи такого гіроскопа. При обертанні основи з кутовою швидкістю  $U$  виникає гіроскопічний момент  $M_G$ , проекція якого на вісь  $OZ$  підвісу ротора (вісь торсіону) дорівнює

$$M_{GZ} = (\vec{H} \times \vec{U})_Z = H \cdot U \cos \gamma = I_o \Omega \cdot U \cos \gamma, \quad (3.31)$$

де  $I_o$  - осьовий момент інерції ротору;  $\gamma = \Omega t$  - поточне значення куту повороту ротора разом з валом двигуна відносно основи.

Проекція гіроскопічного моменту  $M_G$  на вісь  $ou$  викликає лише малий згин торсіонів, який практично не впливає на динаміку гіроскопа.

Складова гіроскопічного моменту  $M_{GZ}$  викликає поворот ротору відносно поздовжньої осі торсіонів. При цьому zdeформовані торсіони будуть створювати момент протидії, дорівнюючий  $M_{PP} = -C\beta$ , де  $\beta$  - кут повороту ротора, що дорівнює куту закручування торсіонів.

Таким чином, вздовж осі  $z$  одночасно діють два моменти - гіроскопічний  $M_{GZ}$  та пружний  $M_{PP}$ . Якщо враховувати виникаючий при такому русі ротора момент сил інерції оберտального прискорення  $M_o = -I_e \ddot{\beta}$ , можна записати

$$M_o + M_{GZ} + M_{PP} = HU \cos \Omega t - J_e \ddot{\beta} - C\beta = 0. \quad (3.32)$$

Кут повороту ротора  $\beta$  в його усталеному русі буде дорівнювати частинному розв'язку одержаного диференційного рівняння

$$\beta = \frac{H}{C - I_e \Omega^2} \cdot U \cos \Omega t. \quad (3.33)$$

З аналізу одержаного розв'язку можна зробити висновок, що при обертанні основи з кутовою швидкістю  $U$  ротор буде коливатися відносно стану рівноваги з частотою  $\omega_0$ , що дорівнює швидкості його власного обертання  $\Omega$ , та амплітудою, пропорційною швидкості обертання основи

$$A_0 = \frac{H}{C - I_e \Omega^2} \cdot U = K \cdot U.$$

Всі інші складові гіроскопічного моменту не призведуть до зміни положення ротору завдяки вище означеним механічним властивостям торсіонів.

Завдяки особливостям вимушеного руху ротора при обертанні основи такі гіроскопи одержали назву *роторних вібраційних (РВГ)*.

На основі аналізу повних рівнянь руху вивчимо більш детально роботу таких гіроскопів. Для складання рівнянь руху використаємо теорему моментів. Якщо припустити, що торсіон має кінцеву жорсткість  $C$  тільки на скручування, то гіроскоп буде мати два ступеня вільності. Зв'яжемо з основою систему координат  $Ox_c y_c z_c$  (рис. 3.7), з валом приводного двигуна -  $Ox_b y_b z_b$ , а з ротором гіроскопа -  $Ox_k y_k z_k$ . Вісь обертання вала приводного двигуна спрямуємо вдвож осі  $x_c$ .

Перший поворот на кут  $\gamma$  зручно задавати відносно осі  $x_c$  обертання вала двигуна, а другий - на кут  $\beta$  відносно осі симетрії торсіонів  $z_b$ . Припустимо, що основа, на яку встановлено гіроскоп, здійснює обертання в інерціальному просторі



з кутовою швидкістю  $\vec{U}$ , заданою її проекціями  $U_{xc}$ ,  $U_{yc}$  і  $U_{zc}$  на осі системи координат  $Ox_c y_c z_c$ .

Як рухому систему координат оберемо систему  $Ox_k y_k z_k$ .

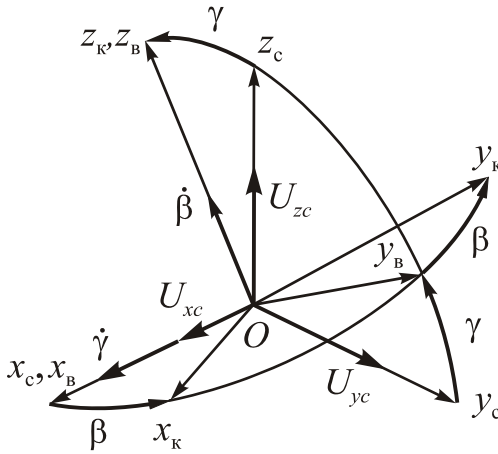


Рис. 3.7.

Рівняння руху РВГ відносно осі  $Oz_k$  симетрії торсіону

$$\frac{dK_{OZ_k}^\omega}{dt} + \omega_{X_k}^k K_{OY_k}^\omega - \omega_{Y_k}^k K_{OX_k}^\omega = M_{Z_k}, \quad (3.34)$$

Осі  $Oz_k$  і  $Oy_k$  є головними осями інерції ротора РВГ, бо лежать в його екваторіальній площині. Моменти інерції гіроскопа відносно цих осей однакові і дорівнюють екваторіальному моменту інерції  $J_e$ . Тому проекції обертальної частини моменту імпульсу

$$K_{OX_k}^\omega = J\omega_{X_k}; \quad K_{OY_k}^\omega = J_e\omega_{Y_k}; \quad K_{OZ_k}^\omega = J_e\omega_{Z_k}. \quad (3.35)$$

Оскільки у розглядуваному випадку переносна кутова швидкість обертання системи координат  $Ox_k y_k z_k$  в інерціальному просторі дорівнює абсолютній кутовій швидкості обертання ротора, запишемо рівняння (3.34) з урахуванням формул (3.35) у вигляді

$$J_e \frac{d\omega_{Z_k}^k}{dt} + (J_e - J)\omega_{X_k}^k \omega_{Y_k}^k = M_{Z_k}, \quad (3.36)$$

Проекції переносної та абсолютної кутових швидкостей на відповідні осі становлять

$$\begin{aligned} \omega_{X_k} &= \Omega \cos \beta + (U_{Y_c} \cos \gamma + U_{Z_c} \sin \gamma) \sin \beta + U_{X_c} \cos \beta; \\ \omega_{Y_k} &= -\Omega \sin \beta + (U_{Y_c} \cos \gamma + U_{Z_c} \sin \gamma) \cos \beta - U_{X_c} \sin \beta; \\ \omega_{Z_k} &= \dot{\beta} - U_{Y_c} \sin \gamma + U_{Z_c} \cos \gamma. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Момент  $M_{Z_k}$  складається з моменту пружності торсіонів  $-C\beta$  та моменту сил демпфірування  $-f\dot{\beta}$ .

З урахуванням виразів (3.37) рівняння (3.36) можна записати так:

$$J_e (\ddot{\beta} - \dot{U}_{yc} \sin \gamma + \dot{U}_{zc} \cos \gamma - \Omega U_{yc} \cos \gamma - \Omega U_{zc} \sin \gamma) - (J_e - J) \left[ \frac{1}{2} (\Omega + U_{xc})^2 \sin 2\beta - (\Omega + U_{xc}) (U_{yc} \cos \gamma + U_{zc} \sin \gamma) \cos 2\beta - \frac{1}{2} (U_{yc} \cos \gamma + U_{zc} \sin \gamma)^2 \sin 2\beta \right] = -C\beta - f\dot{\beta}.$$

Оскільки  $\beta \ll 1$ ;  $\sin 2\beta \approx 2\beta$ ;  $\cos 2\beta \approx 1$ ;  $|U| \ll \Omega$  рівняння руху можна спростити, наближено подаючи його у вигляді

$$J_e \ddot{\beta} + f\dot{\beta} + [C + (I - I_e)\Omega^2] \beta = J\Omega (U_{yc} \cos \gamma + U_{zc} \sin \gamma) + J_e (\dot{U}_{yc} \sin \gamma - \dot{U}_{zc} \cos \gamma). \quad (3.38)$$

В припущенні  $|\dot{U}| \ll |\Omega \cdot U|$  це рівняння матиме вид:

$$J_e \ddot{\beta} + f\dot{\beta} + [C + (I - I_e)\Omega^2] \beta = J\Omega (U_{yc} \cos \gamma + U_{zc} \sin \gamma),$$

або

$$\ddot{\beta} + 2h\dot{\beta} + \omega_0^2 \beta = \frac{H}{J_e} (U_{yc} \cos \gamma + U_{zc} \sin \gamma), \quad (3.39)$$

де

$$\omega_0^2 = \frac{1}{J_e} [C + (J - J_e)\Omega^2]; \quad 2h = \frac{f}{J_e}; \quad H = J\Omega. \quad (3.40)$$

Частинний розв'язок рівняння (3.39) має вигляд

$$\beta = \frac{H [U_{yc} \cos(\Omega t - \mu) + U_{zc} \sin(\Omega t - \mu)]}{I_e \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2) + 4h^2 \Omega^2}}, \quad (3.41)$$

$$\text{де } \mu = \arctg \frac{2h\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

Якщо забезпечити резонансну настройку приладу, тобто забезпечити виконання умови  $\Omega^2 = \omega_0^2$ , амплітуда вихідного сигналу, що відповідає вимірюваній кутовій швидкості, буде найбільшою. Коефіцієнт передачі в такому випадку буде дорівнювати

$$k_r = \frac{H}{2h\Omega I_e} = \frac{1}{2h} \cdot \frac{I_o}{I_e} = \frac{I_o}{f}, \quad (3.42)$$

а характер змінювання кута  $\beta$  з урахуванням значення фазового зсуву ( $\mu = \pi/2$ ) буде мати вигляд

$$\beta = \frac{I}{f} \cdot (U_{yc} \sin \Omega t - U_{zc} \cos \Omega t). \quad (3.43)$$

Таким чином, передавальний коефіцієнт роторного вібраційного гіроскопу за умови резонансного налагодження залежить від співвідношення  $I/f$  і за малих

$f$  може досягати значних величин. Суттєвим є те, що він не залежить від швидкості  $\Omega$  власного обертання ротора, тобто в резонансному режимі можна працювати з малими швидкостями обертання.

Розглянемо можливість технічного забезпечення умови резонансного налагодження. З урахуванням значення частоти власних коливань  $\omega_0$  одержимо

$$\frac{1}{I_e} \cdot [C + (I_o - I_e) \cdot \Omega^2] = \Omega^2,$$

звідки після нескладних перетворень одержимо кінцевий результат

$$\Omega = \sqrt{\frac{C}{2I_e - I_o}}. \quad (3.44)$$

Оскільки для будь-якого тіла сума моментів інерції відносно двох осей завжди більше моменту інерції відносно третьої осі, одержана рівність виконується для будь-якої форми ротору.

Але ця обставина накладає певні обмеження на вибір конфігурації ротору.

Для циліндричного кільця осьовий момент інерції  $I_o = m \frac{R^2 + r^2}{2}$ , а екваторіальний

$I_e = \frac{3R^2 + 3r^2 + h^2}{12}$ . Тому умову (3.44) можна записати у вигляді

$$\Omega^2 = \frac{6C}{mh^2}.$$

*Роторний вібраційний гіроскоп, в якому виконується рівність (3.44), в технічній літературі називають динамічно налагодженим гіроскопом (ДНГ).*

З формули (3.43) випливає, що вихідний сигнал гіроскопа в системі координат, що обертається, залежить від проекцій вимірюваної кутової швидкості на площину  $Oy_cz_c$  і являє собою амплітудно-модульовані коливання на частоті обертання ротору  $\Omega$ .

З розгляду одержаного розв'язку можна також зробити висновок, що роторний вібраційний гіроскоп є двокомпонентним вимірювачем кутової швидкості: амплітуда коливань ротору ДНГ пропорційна модулю вектора кутової швидкості  $U = \sqrt{U_{Yc}^2 + U_{Zc}^2}$ , що знаходиться в площині  $Oy_cz_c$ . Вісь чутливості в разі динамічного налагодження співпадає з напрямком миттєвої кутової швидкості  $U$ , тобто відхилена від осі  $y$  на кут  $\psi = \text{arctg}(U_{Zc}/U_{Yc})$ .

Розглянемо тепер характер руху ротора в обертовій системі координат, якщо кутова швидкість обертання основи змінюється за гармонічним законом  $U_{Yc} = U_0 \cos \omega t$ ;  $U_{Zc} = 0$ .

Рівняння руху РВГ у даному випадку, згідно з формулою (3.38)

$$\ddot{\beta} + 2h\dot{\beta} + \omega_0^2\beta = U_0 \left( \frac{H}{I_e} \cos\Omega t \cos\omega t - \omega \sin\Omega t \sin\omega t \right). \quad (3.50)$$

Перетворимо праву частину одержаного рівняння, використавши теорему додавання

$$\begin{aligned} \cos\Omega t \cos\omega t &= \frac{1}{2} [\cos(\Omega - \omega)t + \cos(\Omega + \omega)t]; \\ \sin\Omega t \sin\omega t &= \frac{1}{2} [\cos(\Omega - \omega)t - \cos(\Omega + \omega)t]. \end{aligned}$$

Після підставлення одержаних виразів в рівняння руху (3.50), одержимо

$$\ddot{\beta} + 2h\dot{\beta} + \omega_0^2\beta = \frac{1}{2} U_0 \left( \frac{H - I_e\omega}{2I_e} \cos\lambda_1 t + \frac{H + I_e\omega}{2I_e} \cos\lambda_2 t \right), \quad (3.51)$$

де  $\lambda_1 = \Omega - \omega$ ;  $\lambda_2 = \Omega + \omega$ .

Частинний розв'язок по аналогії з розв'язком (3.45) за умови динамічного настроювання має вид

$$\beta = U_0 \frac{H - I_e\omega}{2I_e} \frac{\cos(\lambda_1 t + \varphi_1)}{\sqrt{(\Omega^2 - \lambda_1^2)^2 + 4h^2\lambda_1^2}} + U_0 \frac{H + I_e\omega}{2I_e} \frac{\cos(\lambda_2 t + \varphi_2)}{\sqrt{(\Omega^2 - \lambda_2^2)^2 + 4h^2\lambda_2^2}}; \quad (3.52)$$

$$\varphi_i = \arctg \frac{-2h\lambda_i}{\Omega^2 - \lambda_i^2}; i = 1, 2.$$

Будемо вважати, що частота змінювання кутової швидкості значно менше кутової швидкості обертання ротора, тобто  $\Omega \gg \omega$ . У даному випадку близькість частот  $\lambda_1$  та  $\lambda_2$  частоті обертання ротора  $\Omega$  дозволяє суттєво спростити одержаний розв'язок, поклавши в ньому  $\varphi_1 = \varphi_2 = -\pi/2$ , тому

$$\beta_e \approx \frac{HU_0}{2I_e\Omega^2\sqrt{\nu^2 + \xi^2}} (\sin\lambda_2 t + \sin\lambda_1 t) \quad (3.53)$$

Тут  $\nu = \omega/\Omega$ ;  $\xi = h/\Omega$ .

Таким чином, у коливальній системі, якою є роторний вібраційний гіроскоп, виникають *биття*, які можна розглядати як коливання зі змущеною частотою  $\Omega$  й змінною амплітудою, що є гармонійною функцією частоти  $\omega$ .

## ЛЕКЦІЯ 21.

## 3.2.2. Рух ротора в опорній системі координат

Технічно забезпечити вимірювання кута відхилення ротора  $\beta$  в обертовій системі координат  $Ox_B y_B z_B$  досить складно, тому в більшості конструкцій приладів визначають поточне кутове положення ротора відносно корпусу за допомогою датчиків, що реєструють відхилення  $\delta_1$  й  $\delta_2$  (рис. 3.8) торцевої поверхні ротора від нейтрального положення в певних точках корпусу (поблизу осей  $y_c$  й  $z_c$ ). Покажемо, що ці відхилення є функцією кутів повороту ротора навколо відповідних осей зв'язаної з корпусом системи координат.

Позначимо через  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  кути відхилення екваторіальної площини ротора відносно осей  $y_c$  і  $z_c$  корпусу приладу. Ці два кути характеризують положення координатної системи  $Ox y z$ , осі  $z$  та  $y$  якої лежать в екваторіальній площині ротора, але на відміну від осей  $x_k$  та  $z_k$  не беруть участі в обертанні ротора гіроскопа з кутовою швидкістю  $\Omega$  відносно системи  $Ox_c y_c z_c$ .

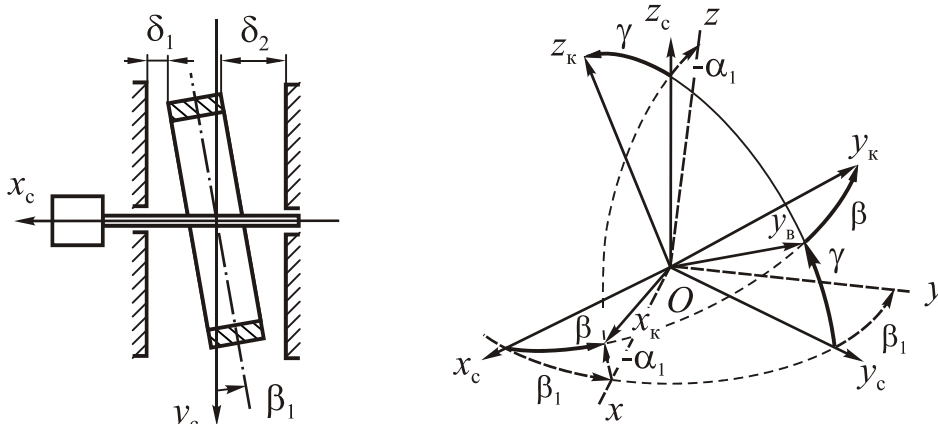


Рис. 3.8.

Визначимо залежність між кутом повороту ротора  $\beta$  і кутами  $\alpha_1$  й  $\beta_1$ . Внаслідок мализни розглянутих кутів сферичний трикутник  $\beta\beta_1\alpha_1$  на рис. 3.8 можна наближено вважати плоским, з чого випливає

$$\alpha_1 \approx -\beta \sin \gamma; \quad \beta_1 \approx \beta \cos \gamma.$$

Відповідно до формули (3.43) шукані кути повороту  $\alpha_1$  й  $\beta_1$  дорівнюватимуть:

$$\alpha_1 = -\beta \sin \Omega t = -\frac{J}{f} (U_{y_c} \sin^2 \Omega t - U_{z_c} \sin \Omega t \cos \Omega t) ;$$

$$\beta_1 = \beta \cos \Omega t = \frac{J}{f} (U_{y_c} \sin \Omega t \cos \Omega t - U_{z_c} \cos^2 \Omega t) ,$$

або після деяких перетворень

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -\frac{J}{2f}U_{yc} + \frac{J}{2f}(U_{yc} \cos 2\Omega t + U_{zc} \sin 2\Omega t) = \alpha_1^0 + \tilde{\alpha}_1 \cos(2\Omega t - \varepsilon); \\ \beta_1 &= -\frac{J}{2f}U_{zc} + \frac{J}{2f}(U_{yc} \sin 2\Omega t - U_{zc} \cos 2\Omega t) = \beta_1^0 + \tilde{\beta}_1 \sin(2\Omega t - \varepsilon),\end{aligned}\quad (3.54)$$

де  $\varepsilon = \operatorname{arctg} \frac{U_{zc}}{U_{yc}}$ .

Із цих залежностей випливає, що кутовий рух ротора гіроскопа відносно основи можна подати у вигляді двох складових (рис. 3.9 б, в). Перша складова – коливання з подвоєною частотою власного обертання ротора, причому амплітуди  $\tilde{\alpha}_1$  й  $\tilde{\beta}_1$  цих коливань залежать від обох складових  $U_{yc}$  і  $U_{zc}$  вимірюваної кутової швидкості

$$\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\beta}_1 = \frac{J}{2f} \sqrt{(U_{yc})^2 + (U_{zc})^2},$$

а самі коливання відбуваються з фазовим зсувом  $90^\circ$  між ними.

Друга складова – відхилення ротора РВГ відносно корпусу приладу на сталі (не модульовані) кути  $\alpha_1^0$  й  $\beta_1^0$ , кожний з яких окремо є пропорційним відповідній складовій вимірюваної кутової швидкості  $U_{yc}$  і  $U_{zc}$

$$\alpha_1^0 = -\frac{J}{2f}U_{yc}; \quad \beta_1^0 = -\frac{J}{f}U_{zc}. \quad (3.55)$$

Отже, на відміну від двоступеневих гіротахometrів двоступеневий РВГ дозволяє вимірювати не одну складову кутової швидкості обертання основи, а дві складові, *тобто проекцію вектора кутової швидкості на екваторіальну площину ротора*. При цьому всі кути повороту ротора  $\alpha_1$  й  $\beta_1$  відносно корпусу приладу за умови резонансного настроювання збігаються з напрямком вимірюваних складових кутової швидкості  $u_{yc}^c$  й  $u_{zc}^c$ .

Для вимірювання складових кутової швидкості можна використовувати як сталі складові  $\alpha_1^0$  і  $\beta_1^0$  кутів повороту  $\alpha_1$  і  $\beta_1$ , так й амплітуди гармонічних складових відхилення ротора  $\tilde{\alpha}_1$  та  $\tilde{\beta}_1$ . Обрання того чи іншого методів вимірювання залежить від типу датчиків, конструкції приладу.

Відхилення торцевих поверхонь ротора від корпусу (тобто сталі складові  $\alpha_1^0$  й  $\beta_1^0$ ) вимірюють ємнісними або індуктивними датчиками. За допомогою генераторних індукційних датчиків, що вимірюють швидкість змінювання кутів, вимірюють також кутові швидкості коливань ротора:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_1 &= -2\Omega \tilde{\alpha}_1 \sin(2\Omega t - \varepsilon); \\ \dot{\beta}_1 &= 2\Omega \tilde{\beta}_1 \cos(2\Omega t - \varepsilon).\end{aligned}\quad (3.56)$$

З першого погляду використання інформаційних сигналів  $\alpha_1^0$  і  $\beta_1^0$  для визначення складових кутової швидкості є кращим, тому що кожен з них залежить тільки від однієї конкретної складової -  $U_{Yc}$  або  $U_{Zc}$ . Але в зв'язку з малістю не модульованих кутів  $\alpha_1^0$  і  $\beta_1^0$  (одиниці кутових хвилин) їх вимірювання пов'язано з значними технічними труднощами.

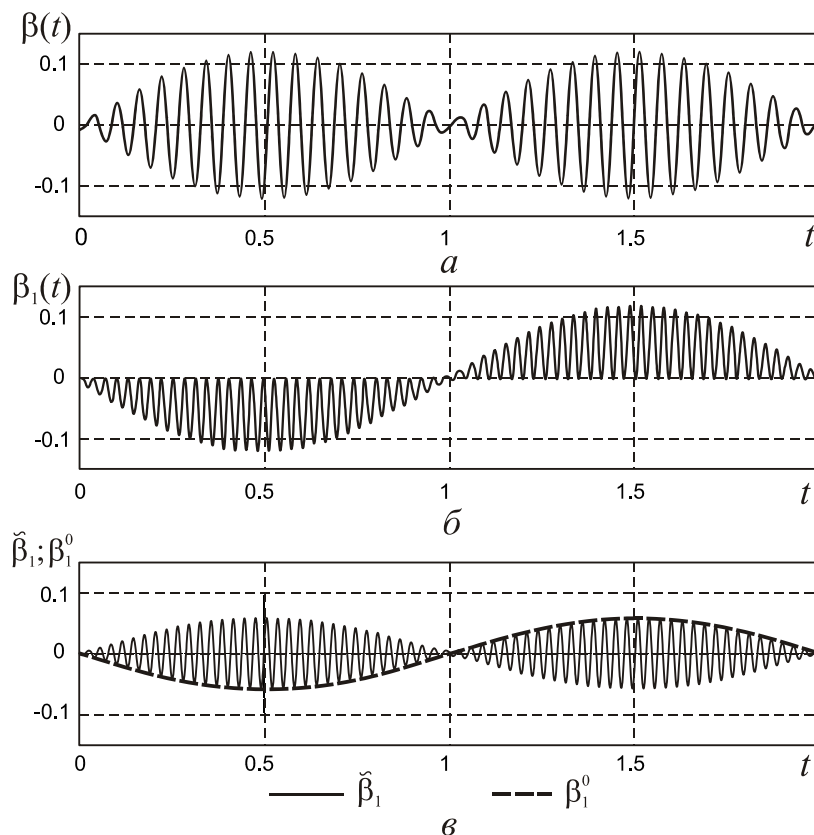


Рис. 3.9.

Вимірювання на основі гармонічних складових вихідних сигналів потребує використання фазочутливих систем для розподілення сигналів  $\tilde{\alpha}_1$  і  $\tilde{\beta}_1$  з метою визначення складових  $U_{Yc}$  або  $U_{Zc}$ . В разі відхилення від умови резонансного налагодження такий розподіл сигналів порушується, що суттєво ускладнює вимірювання складових швидкості обертання основи.

В той же час замість вимірювання досить малих амплітуд коливань в даному разі для визначення складових кутової швидкості обертання основи можна проводити вимірювання кутових швидкостей коливань ротора, які є набагато більшими, з огляду на простоту та точність вимірювання є більш доцільним. До числа найбільш суттєвих методичних похибок двоступеневого ДНГ відносять похибку, обумовлену кутовою вібрацією основи з частотою  $2\Omega$  відносно осей  $O_{Yc}$  та  $O_{Zc}$ , тобто коли вимірювана кутова швидкість змінюється за законом

$U = U_0 \sin 2\Omega t$ , а також складовою кутової швидкості обертання  $U_{\chi c}$ , спрямовану вздовж осі обертання вала приводного двигуна.

В першому випадку в рівняннях руху (3.38) вже не можна нехтувати збурюючими моментами, викликаними дією моментів сил інерції доцентрового прискорення  $I_e \dot{U} \sin \Omega t = 2I_e \Omega U \sin \Omega t \cos 2\Omega t$ , тому що вони за величиною не поступаються вимірюваним інформаційним моментам  $I_o \Omega U \sin \Omega t \sin 2\Omega t$ . Викликана цим моментом похибка має назву синхронної похибки і може бути зменшена за рахунок раціонального вибору конфігурації ротора.

Фізичний зміст другої складової методичної похибки такий же самий, що і похибки двостепеневих гіротахometrів, обумовленою дією кутової швидкості навкруг перехресної осі чутливості: в обох випадках при повороті ротора на кут  $\beta$  з'являється проекція кутової швидкості  $U_{\chi c}$  на екваторіальну площину ротора, яка в свою чергу викликає появу додаткового гіроскопічного моменту, прикладеного до ротора з боку торсіонів.

Інструментальні похибки двостепеневого ДНГ виникають головним чином внаслідок статичної незбалансованості ротора.

Двостепеневий роторний вібраційний гіроскоп одержав назву гіроскопа Сейвета. Порівняно невеликий розмір, висока чутливість до кутових швидкостей обертання основи та малі дрейфи дозволяють використовувати такий прилад як чутливий елемент систем орієнтації.

### 3.2.3. Роторний вібраційний гіроскоп в інтегрувальному режимі

Якщо в РВГ у якийсь спосіб позбутися моменту сил в'язкого тертя, тобто припустити  $f = 0$ , його поведження якісно зміниться.

Для з'ясування особливостей поведження РВГ без урахування моментів демпфірування запишемо рівняння руху (3.39), припустивши в ньому задля спрощення  $U_{yc} = 0$  й  $U_{zc} = U_0 = \text{const}$ , у вигляді

$$\ddot{\beta} + \Omega^2 \beta = \frac{H}{J_e} U_0 \sin \Omega t. \quad (3.57)$$

Досліджуваному рівнянню відповідає характеристичне рівняння  $\lambda^2 + \Omega^2 = 0$ , корені якого дорівнюють  $\lambda_{1,2} = \pm i\Omega$ , тому частинний розв'язок рівняння (3.49) матиме вид

$$\beta_r = t(A \sin \Omega t + B \cos \Omega t).$$

Підставивши функцію  $\beta_r = f(t)$  в рівняння (3.57), отримаємо

$$\beta_r = -\frac{HU_0}{2J_e \Omega} t \cos \Omega t.$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (3.57) має вигляд:

$$\beta = C_1 \sin \Omega t + C_2 \cos \Omega t + \beta_r,$$



де  $C_1, C_2$  – довільні сталі, залежні від початкових умов.

Якщо за нульові початкові умови брати  $\beta(0) = \dot{\beta}(0) = 0$ , тоді

$$\beta = \frac{HU_0}{2J_e\Omega^2} \sin\Omega t - \frac{H}{2J_e\Omega} U_0 t \cos\Omega t. \quad (3.58)$$

Через досить малий проміжок часу ( $t > 1/\Omega$ ) друга складова в розв'язку (3.58) перевищить першу, після чого можна наближено вважати

$$\beta \approx \beta_r = -\frac{H}{2J_e\Omega} U_0 t \cos\Omega t = -\frac{J}{2J_e} U_0 t \cos\Omega t.$$

Отже, без демпфірування ДНГ набуває інтегрувальних властивостей: амплітуда коливань ротора

$$\beta_A \approx -\frac{J}{2J_e} \int_0^t U_0 dt = -K(\psi_t - \psi_0)$$

стає пропорційною куту відхилення основи від заданого в інерціальному просторі.

Характер руху ротору гіроскопа в системі координат  $Ox_p y_p z_p$  показаний на рис. 3.10.

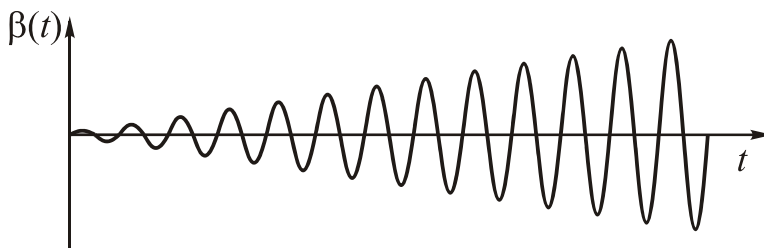


Рис. 3.10.

## ЛЕКЦІЯ 22.

**3.2.4. Треступеневий роторний вібраційний гіроскоп**

Треступеневий роторний вібраційний гіроскоп (рис. 3.11) являє собою механічну систему, що складається із трьох тіл – ротора гіроскопа 1, внутрішнього кільця 3 і вала 5 привідного двигуна 6.

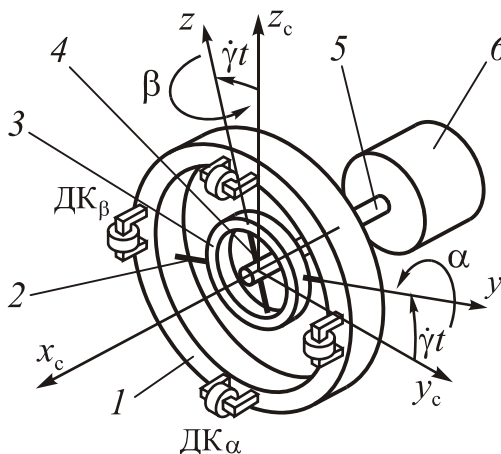


Рис. 3.11.

Як й у двоступеневому гіроскопі, двигун установлено в корпусі приладу. Вал 5 обертається з постійною кутовою швидкістю  $\dot{\gamma} = \Omega$ . Вал через пружні елементи (внутрішні торсіони) 4 передає обертання внутрішньому кільцю, яке, у свою чергу, зв'язане з ротором за допомогою зовнішніх торсіонів 2.

Поздовжні осі внутрішніх і зовнішніх торсіонів перетинаються між собою й віссю обертання вала двигуна під кутами  $90^\circ$ . Внаслідок цього ротор гіроскопа має три ступеня вільності: він може обертатися навколо осі вала двигуна з кутовою швидкістю  $\dot{\gamma} = \Omega$ , навколо поздовжньої осі внутрішніх торсіонів з кутовою швидкістю  $\dot{\beta}$  й навколо осі зовнішніх торсіонів (осі підвісу ротора) з кутовою швидкістю  $\dot{\alpha}$ .

Кути повороту ротора навколо осей  $y$  і  $z$  торсіонів (осей рухомої системи координат) або навколо осей зв'язаної системи координат  $Ox_c y_c z_c$ , як й у випадку двоступеневого гіроскопа, містять інформацію про складові кутової швидкості  $u_{x_c}^c$ ,  $u_{y_c}^c$  обертання основи. Їх вимірюють датчиками кутів  $ДК_\alpha$  й  $ДК_\beta$ .

Як і в попередньому випадку треступеневий роторний вібраційний гіроскоп піддається динамічному налагодженню. Потрібно відзначити, що умова динамічного настроювання не залежить від інерційних характеристик ротора гіроскопа, а цілком визначається співвідношеннями між моментами інерції кілець підвісу, жорсткістю торсіонів та швидкістю обертання ротора

Похибки такого приладу в значній мірі аналогічні похибкам двоступеневого РВГ.

Схема ДНГ з одним кардановим кільцем (див. рис. 3.11) має назву однокільцевої. В такій схемі поряд з сталими складовими відхилень ротора має місце складові, які змінюються з подвійною частотою обертання  $2\Omega$ .

Зазначені гармонічні складові можуть бути усунуті конструктивними методами, які полягають у застосуванні симетричних двокільцевих підвісів ротора. Дві можливі схеми побудови підвісу – з паралельним і послідовним з'єднанням кілець показано на рис. 3.12. Широкого застосування набула перша схема. Відповідно до неї ротор гіроскопа з'єднаний з привідним валом двома однаковими кільцями, повернутими відносно один одного на кут  $90^\circ$ . Кожне з кілець має по парі однотипних внутрішніх і зовнішніх торсіонів.

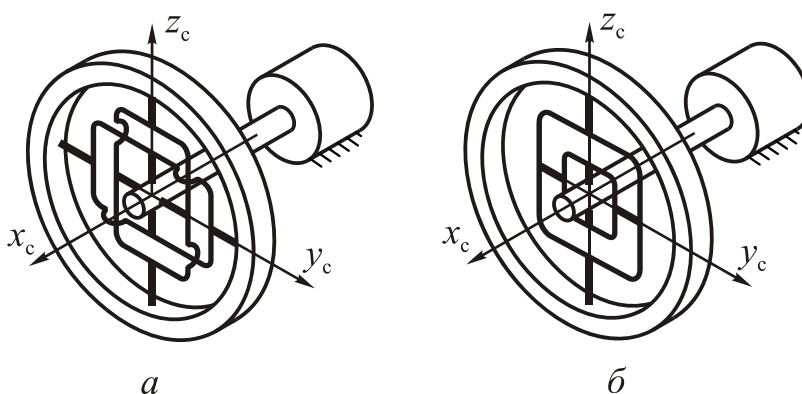


Рис. 3.12.

Фізичний зміст усунення періодичних складових моментів у двокільцевій схемі полягає в такому. Оскільки торсіони другого кільця підвісу повернуті відносно торсіонів першого кільця на кут  $90^\circ$ , то періодичні моменти, створювані цим кільцем, маючи таку саму амплітуду, матимуть фазовий зсув на кут  $90^\circ$  відносно моментів, створюваних першим кільцем. Тому до складових рівнянь, що містять співмножники  $\sin 2\Omega$  або  $\cos 2\Omega$ , потрібно додати аналогічні складові зі співмножниками  $\sin 2(\Omega - \pi/2) = -\sin 2\Omega$  або  $\cos 2(\Omega - \pi/2) = -\cos 2\Omega$ . Це в кінцевому підсумку приведе до взаємної компенсації всіх періодичних складових моменту, що змінюються із частотою  $2\Omega$ .

За умови ідеального виконання динамічного налагодження та усунення періодичних складових моментів рівняння руху триступеневого РВГ з двокільцевим підвісом будуть

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha}_1 + f_e\dot{\alpha}_1 + H\beta_1 &= -B\Omega U_{z_c}; \\ A\ddot{\beta}_1 + f_e\dot{\beta}_1 - H\dot{\alpha}_1 &= B\Omega U_{y_c}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

де  $A, B$  – екваторіальний і осьовий моменти інерції ротора та рамок підвісу;  $H$  – кінетичний момент;  $\alpha_1$  та  $\beta_1$  – сталі складові кутів повороту ротора в опорній системі координат.

Розглянемо лише усталений режим роботи ДНГ. Частинний розв’язок рівнянь (3.59) має вигляд:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_{1\text{уст}} &= -\frac{Bf_e}{H^2}\Omega u_{Zc}^c - \frac{B}{H}\Omega u_{Yc}^c; \\ \dot{\beta}_{1\text{уст}} &= \frac{Bf_e}{H^2}\Omega u_{Yc}^c - \frac{B}{H}\Omega u_{Zc}^c.\end{aligned}\quad (3.60)$$

Отже, за характером реакції на рух основи триступеневий ДНГ нагадує дво-ступеневий РВГ, розглянутий у п. 3.2.3, – його вихідні сигнали в усталеному режимі пропорційні кутам повороту основи. Прилад реагує на дві ортогональні складові кутової швидкості обертання основи, які лежать в екваторіальній площині ротора. Недоліком такого приладу є те, що датчики кута, які встановлені на корпусі відтворюють сигнали, пропорційні кутам  $\alpha_1$  й  $\beta_1$ , і одночасно вимірюють обидві складові кутової швидкості –  $U_{Yc}$  і  $U_{Zc}$ .

Якщо припустити, що  $H \gg f_e$ , вирази (3.60) можна спростити:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_{1\text{уст}} &= -\frac{B}{H}\Omega u_{Yc}^c = -K_{\text{ст}} u_{Yc}^c; \\ \dot{\beta}_{1\text{уст}} &= -\frac{B}{H}\Omega u_{Zc}^c = -K_{\text{ст}} u_{Zc}^c.\end{aligned}$$

Якщо моменти інерції карданового кільця малі порівняно з моментами інерції ротора, то статичний коефіцієнт передачі  $K_{\text{ст}} \approx 1$  й ДНГ стає подібним астатичному гіроскопу: головна вісь ротора, зберігаючи початкову орієнтацію в інерціальній системі координат, повертається відносно основи на кути  $\psi_{Yc} = -\int_0^t U_{Yc} dt$  і

$\psi_{Zc} = -\int_0^t U_{Zc} dt$ , тобто в протилежний бік від повороту основи.

### 3.2.5. Триступеневий ДНГ як вимірювач кутової швидкості

У конструкції ДНГ зазвичай передбачено датчики моментів, які використовуються для керування положенням ротора (усунення дрейфів гіроскопа). Ці датчики можна також використати для побудови на базі ДНГ двокомпонентних датчиків кутової швидкості, сформувавши на їхній основі системи силової компенсації моментів  $B\Omega U_{Yc}$  і  $B\Omega U_{Zc}$  керувальними моментами  $M_{Yc}^k$  й  $M_{Zc}^k$ . Для практичної реалізації таких систем досить сформувати перехресні електричні зв’язки датчиків моменту з відповідними датчиками кута (рис. 3.13).

Керувальні моменти у сформованих каналах при цьому можна визначати співвідношеннями

$$M_{Y_c}^k = -K\beta_1; \quad M_{Z_c}^k = K\alpha_1,$$

де  $K = k_{ду}k_yk_{дм}$  – коефіцієнт передачі каналу силової компенсації.

Рівняння руху ДНГ із силовою компенсацією запишемо, використовуючи вихідні рівняння (3.59):

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha}_1 + f_e\dot{\alpha}_1 + H\dot{\beta}_1 &= -B\Omega U_{Z_c} - K\beta_1; \\ A\ddot{\beta}_1 + f_e\dot{\beta}_1 - H\dot{\alpha}_1 &= B\Omega U_{Y_c} + K\alpha_1. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Для пояснення принципу роботи приладу прийемо, що демпфірування відсутнє, тобто  $f_e = 0$ .

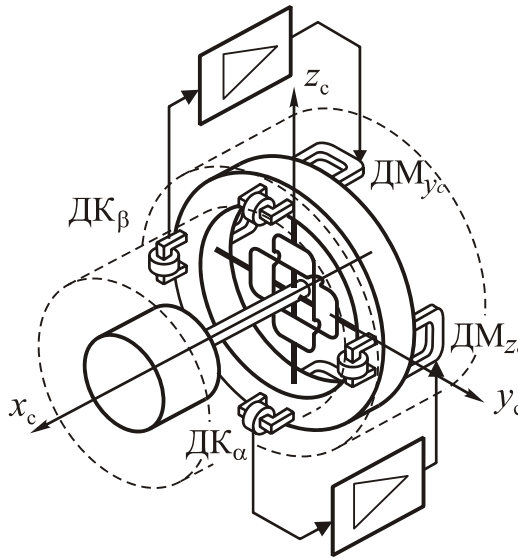


Рис. 3.13.

Якщо знехтувати ще й власними коливаннями, тобто в рівняннях (3.61) не враховувати інерційні складові  $A\ddot{\alpha}_1$  і  $A\ddot{\beta}_1$ , для визначення кутів відхилення ротора можна скористатися прецесійними рівняннями

$$\begin{aligned} H\dot{\beta}_1 + K\beta_1 &= -BU_{Z_c}; \\ H\dot{\alpha}_1 + K\alpha_1 &= -BU_{Y_c}. \end{aligned}$$

Звідси випливає

$$\begin{aligned} \beta_{1уст} &= -\frac{B}{K}U_{Z_c}; \\ \alpha_{1уст} &= -\frac{B}{K}U_{Y_c}. \end{aligned}$$

Отже, кути відхилення ротора відносно корпусу приладу є пропорційними складовим кутової швидкості обертання основи, тобто прилад працює в режимі датчика кутової швидкості. Сам прилад тому скорочено називають ДНГ-ДКШ.

Триступеневий РВГ із внутрішнім кардановим підвісом має істотні переваги порівняно з «класичним» триступеневим гіроскопом із зовнішнім кардановим підвісом. Основні з них такі – більш раціональне використання об'єму приладу завдяки розміщенню підвісу не ззовні, а всередині ротора, а також усунення моментів сил сухого тертя за рахунок використання пружного підвісу.

Головними недоліками РВГ вважають незначну вібростійкість і ударостійкість, тому в системах орієнтації, в яких вони використовуються, передбачають додаткові системи місцевої амортизації.

Характерною особливістю ДНГ є малий кут повороту ротора (одиниці кутових хвилин), тому для вимірювання довільних кутів повороту основи його встано-

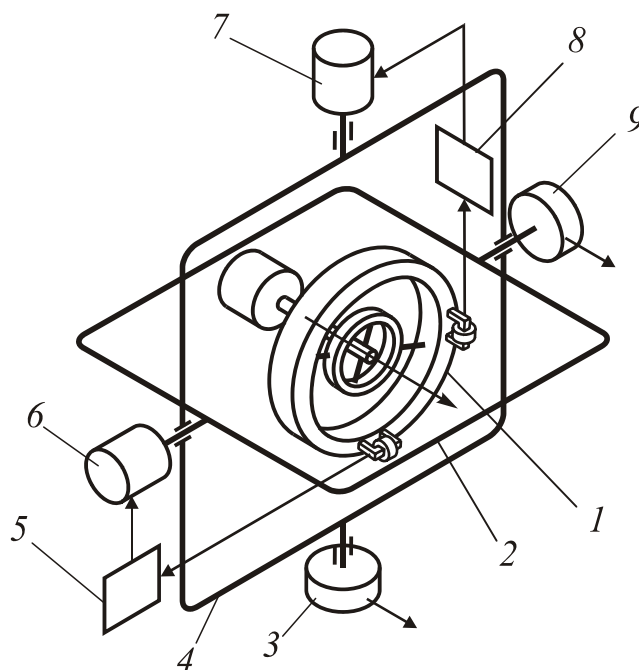


Рис. 3.14.

влюють в двовісний кардановий підвіс (рис. 3.14). Підвіс складається з платформи 2 та зовнішньої рамки 3, осі підвісу яких співпадають з осями чутливості ДНГ 1. При повороті основи платформа за допомогою слідкуючих приводів синхронно повертається на кут повороту основи відносно осей чутливості гіроскопа, тому положення головної осі відносно корпусу зберігається незмінним.

## ЛЕКЦІЯ 23.

## 3.3. ОСЦИЛЯТОРНІ ГІРОСКОПИ

## 3.3.1. Принцип дії і різновиди осциляторних гіроскопів

У роторному вібраційному гіроскопі власна швидкість обертання ротора є постійною ( $\Omega = \text{const}$ ), обертання основи викликає вимушений коливальний рух ротора відносно осей симетрії пружних елементів підвісу. У РВГ можна умовно виділити зосереджені елементи маси (ротор і кільця підвісу) і елементи зосередженої жорсткості (торсіони підвісу).

Осциляторні гіроскопи відрізняються від роторних тим, що швидкість їх власного руху є знакозмінною, тобто має характер коливань. Цей рух може бути не тільки кутовим, але і поступальним. Таким чином, в осциляторних гіроскопах використовується віброюча маса замість обертового ротора.

Якщо тіло маси  $m$ , примусово, яке примусово рухається зі змінною відносною швидкістю  $V_r$ , помістити на основу, що обертається з переносною кутовою швидкістю  $\omega_e$ , то до нього буде прикладене прискорення Коріоліса, яке визначається виразом

$$\vec{W}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r. \quad (3.62)$$

Відповідна цьому прискоренню сила інерції Коріоліса

$$\vec{F}_c = -m\vec{W}_c = -2m\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r$$

теж має коливальний характер. При кінцевої жорсткості підвісу віброючої маси в напрямку дії сили, остання викличе вимушені коливання, амплітуда і фаза яких буде залежати від величини і напрямку кутової швидкості обертання основи.

Основи роботи гіроскопа зі змінним кінетичним моментом були закладені в дослідях Фуко по використанню маятника, що зберігає незмінне положення площини хитань в інерціальній просторі. Серед осциляторних вібраційних гіроскопів одним з перших промислових зразків є камертонний гіроскоп - гіротрон фірми Sperry (США), розроблений у 1937 р.

Чутливий елемент цього гіроскопа (рис. 3.15) – камертон, гілки якого здійснюють незатухаючі коливальні рухи, збуджені і підтримувані системою управління, що складається з датчика переміщень 2, тягових електромагнітів 3 і підсилювача 4. Камертон зв'язаний з підставою пружною стійкою 7. При збудженні коливань в гілках камертону встановиться стояча хвиля, вузол якої збігається з місцем кріплення (стійкою). Таким чином, ніжки камертона будуть коливатися в протифазі і миттєві значення відносних швидкостей їх центрів мас мають протилежні напрямки ( ).

При повороті основи, на якому встановлений камертон, з кутовою швидкістю  $U$ , кожна ніжка камертона зазнає впливу протилежно спрямованих коріолісових сил інерції, що визначаються виразом 1.13. Сили утворюють пару сил, момент якої

спрямований по осі  $\zeta$  і змінюється з частотою згинальних коливань ніжок і тим самим викликає крутильні коливання стійки камертона. Амплітуда цих коливань пропорційна вимірюваній кутовій швидкості.

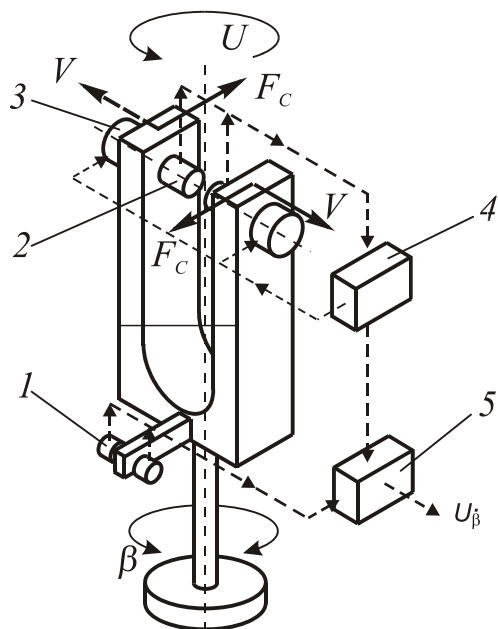


Рис. 3.15.

Прогрес у галузі мікроелектроніки привів до появи нового класу приладів - мікромеханічних гіроскопів (ММГ). Поява мікромеханічних пристроїв (MEMS - Micro Electromechanical Systems) значно розширила межі використання цих приладів як у військовій, так і в цивільній галузях.

Сучасні ММГ значно поступаються за точністю традиційним електромеханічним гіроскопам, але перевершують їх за масогабаритними характеристиками, показниками собівартості і енергоспоживання. Розроблені зразки ММГ характеризуються надмалою масою (частки грамів) і габаритами (одиниці міліметрів), низькою собівартістю і енергоспоживанням, високою стійкістю до механічних-ським (ударні впливи до 105 g) і тепловим впливам (від - 40 до 85 ° C) і достатньою точністю. Дрейф сучасних ММГ знаходиться на рівні 10 - 1000 град / год., а механічна частина датчиків повністю інтегрується з сервісною електронікою і дозволяє створювати збірки на одному чіпі об'ємом до 10 см<sup>3</sup> і енергоспоживанням до 1 Вт.

Схеми побудови більшості ММГ засновані на принципі роботи осциляторного вібраційного гіроскопа. До інерційної маси, що має пружний зв'язок з основою, прикладаються сили  $F_g$  або моменти  $M_g$  і збуджуються гармонійні коливання (лінійної або кутові) постійної амплітуди й частоти. При обертанні основи із переносною кутовою швидкістю  $U$  виникають сили  $F_c$  або моменти сил Кориоліса  $M_c$ , що діють на інерційну масу й створюють тиск на пружний зв'язок маси з основою. Ці сили приводять до коливань маси в напрямку, перпендикулярному її



відносній швидкості й переносній кутовій швидкості. Амплітуда виникаючих коливань є мірою вимірюваної кутової швидкості.

За способом реалізації руху в ММГ схеми побудови можна розділити на схеми з поступальними рухами по координаті збудження  $x$  і по координаті вихідного сигналу  $z$  (так звані LL - гіроскопи, linear - linear); з кутовими рухами по обидва координатам (RR - гіроскопи, rotate - rotate); з різними комбінаціями поступальних і кутових рухів (LR - гіроскопи).

У більшості ММГ вимірювання і збудження коливань здійснюється електростатичними датчиками положення й сили. У ряді конструкцій застосовуються електромагнітні способи збудження коливань і знімання сигналу.

Для збільшення чутливості параметри гіроскопа вибирають таким чином, щоб частота вимушених коливань по координаті збудження збігалася з частотою власних коливань і частота вихідних коливань була також близька до частоти вимушених коливань. У конструкції використовують високодобротні матеріали, що мають низькі внутрішні втрати на тертя. У цьому випадку здійснюється резонансне посилення сигналу.

Однією з основних особливостей ММГ є використання при їх виробництві матеріалів і технологій сучасної твердотільної електроніки. Електромеханічні вузли ММГ формуються з неметалевих матеріалів (монокристалічний кремній, плавлений кварц, карбід кремнію та ін.) методами фотолітографії, ізотропного або анізотропного травлення, дифузійного зварювання.

Відмітною ознакою ММГ є *інтеграція механічних й електричних компонентів*, що виготовляють одночасно й з використанням одноманітних технологічних процесів. Механічна частина датчика виготовляється разом з елементами електроніки збудження первинних коливань, датчиками знімання й перетворення корисного сигналу, елементами формування зворотних зв'язків і дозволяє створювати закінчені електромеханічні вузли.

Особливістю ММГ є *мініатюризація* чутливого елемента, що забезпечує зниження масогабаритних характеристик. Мініатюризація ММГ приводить до того, що внаслідок малої маси й розмірів віброуючі маси мають високу частоту власних коливань (одиниці кілогерц). При цьому амплітуда коливань мас дуже мала й становить частки мікрометрів. Для збільшення амплітуди коливань при виготовленні ММГ використають матеріали з низькими внутрішніми втратами, такі як кварц і кремній.

Розглянемо основні схеми побудови мікромеханічних гіроскопів.

### Мікромеханічні гіроскопи L-L типу.

До числа найпростіших LL – гіроскопів відноситься одномасовий мікромеханічний гіроскоп, схема якого показана на рис. 3.16.

Інерційна маса 2 кріпиться до основи 1 за допомогою пружних елементів 4. Квадратний або близький до нього переріз елементів підвісу дозволяє інерційній масі переміщуватися в напрямку осей  $x$  й  $z$ . Поступальні періодичні коливання уз-

довж осі  $x$  збуджуються гребінчастим електростатичним приводом (актюатором) 3. При обертанні основи відносно осі  $y$  з кутовою швидкістю  $U$  інерційна маса під дією коріолісових сил  $F_c$  буде здійснювати вторинні коливання уздовж осі  $z$ .

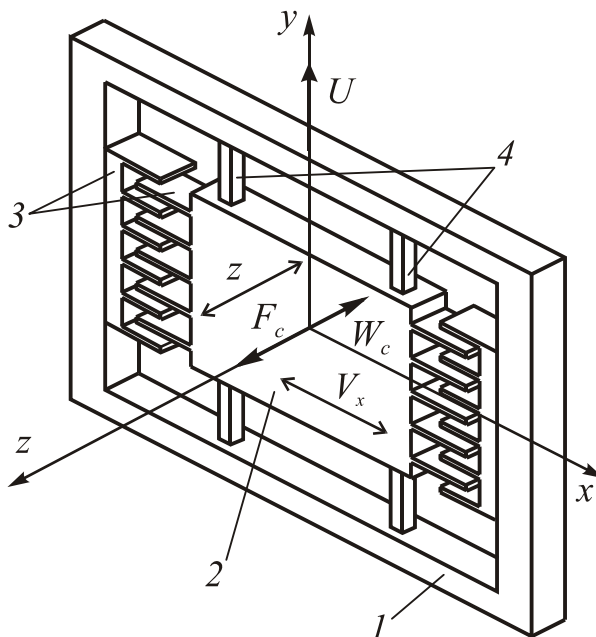


Рис.3.16.

На рис 3.17 показана функціональна схема ММГ. Основними елементами є система збудження коливань та вимірювальний канал.

Опорний генератор ОГ створює напругу заданої форми і частоти, яка подається на гребінчасту електростатичну систему ГЕС. Створювана нею сила  $F_x$  розгойдує інерційну масу (ЧЕ) в напрямку первинних коливань. Амплітуду і напрямки руху цих коливань реєструє вимірювальний канал ВКХ. Для стабілізації амплітуди призначена система детектування, яка вносить зміни в формування сигналу збудження, що поступає на ГЕС.

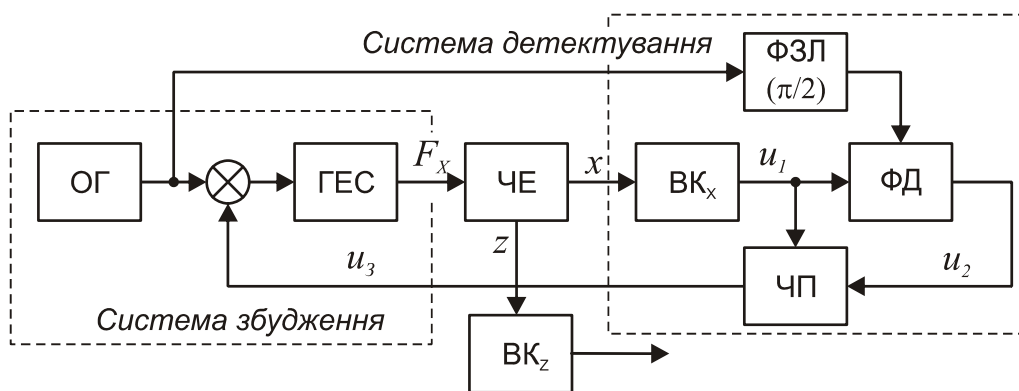


Рис. 3.17.

**Мікромеханічні гіроскопи R-R типу**

Типовим прикладом побудови такого гіроскопа є дисковий мікромеханічний гіроскоп (рис. 3.18).

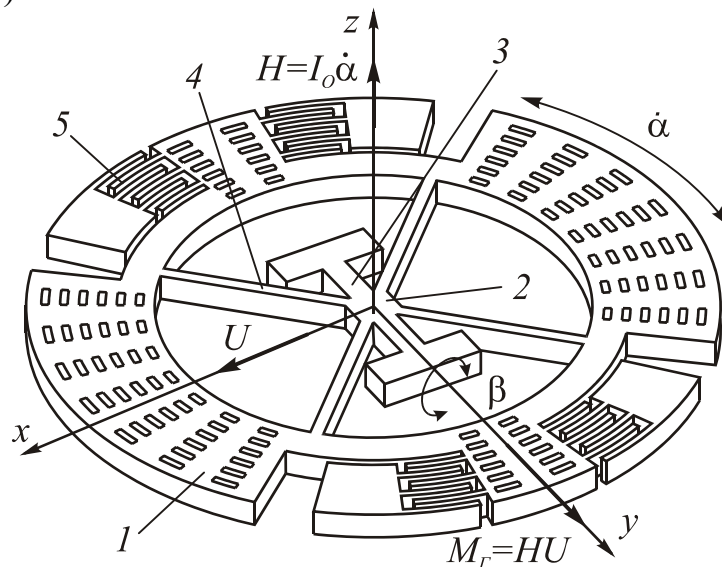


Рис. 3.18.

У такій схемі кутові рухи диска 1 навколо осі  $z$  збуджуються гребінчастим двигуном 5 на частоті, рівній частоті власних кутових коливань. При кутовій швидкості основи виникають сили Коріоліса, що викликають коливання диска по осі  $y$ , перпендикулярній його відносній швидкості й переносній кутовій швидкості основи  $U$ .

## ЛЕКЦІЯ 24.

## 3.3.2. Рівняння руху одномасового ММГ L-L типу

Розглянемо коливання найпростішої одномасової механічної системи, побудованої за L-L схемою. Динамічна схема моделі показана на рис. 3.19. Система складається з інерційної маси  $m$ , яка може зміщуватися вздовж осей  $x$  та  $z$  обмежених пружинами з жорсткостями  $c_x$  і  $c_z$  відповідно.

Для аналізу руху інерційної маси використаємо узагальнені координати:  $x$  – у напрямку осі  $Ox$  і  $y$  – у напрямку коливань уздовж вимірювальної осі  $Oz$ . Основа обертається з кутовою швидкістю  $\vec{U}$  уздовж осі  $Oy$ .

Положення центра мас інерційної маси задамо вектором  $\vec{r} = \{x, 0, z\}$ .

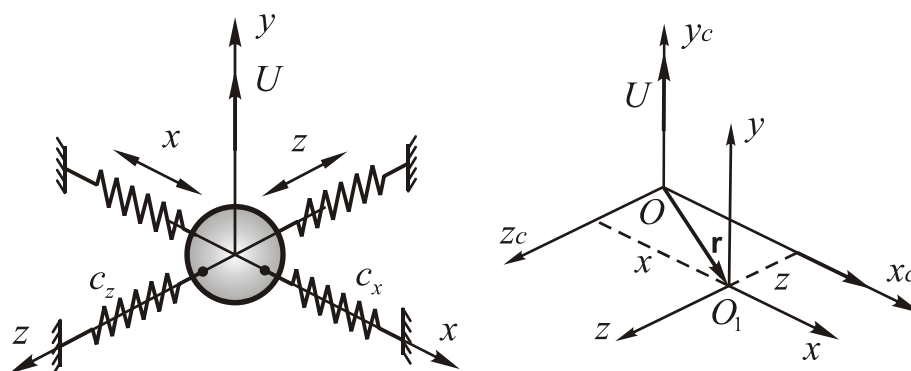


Рис. 3.19.

Абсолютна лінійна швидкість інерційної маси:  $\vec{V} = (\dot{\vec{r}} + \vec{U} \times \vec{r})$ , або в проекціях на осі  $O_1x_cy_cz_c$ :

$$\vec{V} = \{\dot{x} + Uz; 0; \dot{z} - Ux\} \quad (3.63)$$

Для складання рівнянь руху використаємо рівняння Лагранжа II роду у вигляді

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = Q_i - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_i}, (i = 1, 2),$$

де  $L = T - P$  – функція Лагранжа;  $Q_i$  – узагальнені сили;  $\Phi$  – дисипативна функція, що визначається формулою

$$\Phi = \frac{1}{2} (f_1 \dot{x}^2 + f_2 \dot{z}^2) \quad (3.64)$$

Потенційна енергія пружного підвісу дорівнює

$$P = \frac{c_1}{2} x^2 + \frac{c_2}{2} z^2 \quad (3.65)$$

Кінетична енергія інерційної маси з урахуванням (3.63) дорівнює

$$T = \frac{m}{2} \vec{V}^2 = \frac{m}{2} [(\dot{x} + Uz)^2 + (\dot{z} - xU)^2]. \quad (3.66)$$

Визначимо необхідні частинні похідні:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m(\dot{x} + Uz); & \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} &= m(\dot{z} - Ux); \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= m(\ddot{x} + U\dot{z} + \dot{U}z); & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) &= m(\ddot{z} - U\dot{x} - \dot{U}x); \\ \frac{\partial L}{\partial x_1} &= -mU(\dot{z} - Ux) - c_1 x_1; & \frac{\partial L}{\partial x_2} &= mU(\dot{x} + Uz) - c_2 x_2. \end{aligned}$$

Узагальнені сили  $Q_1$  та  $Q_2$  складаються з сил інерції лінійних прискорень  $mW_x$ ,  $mW_z$  та штучно створюваної (збуджуючої) сили  $F_x$ , що прикладається до інерційної маси в напрямку осі  $Ox$ .

Після підстановки знайдених виражень у рівняння Лагранжа одержимо рівняння руху у вигляді

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + f_1\dot{x} + (c_1 - mU^2)x + 2mU\dot{z} + m\dot{U}z &= -mW_x + F_x; \\ m\ddot{z} + f_2\dot{z} + (c_2 - mU^2)z - 2mU\dot{x} - m\dot{U}x &= -mW_z. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Кожне з отриманих рівнянь за формою запису збігається з рівнянням руху коливальної системи з одним ступенем вільності. Однак зміст правих частин розглянутих рівнянь відрізняється від змісту відповідних членів рівняння руху коливальної системи з одним ступенем вільності. Дійсно, узагальнені сили рівнянь (3.67) є не тільки функціями узагальненої координати і її похідних, для якої написане рівняння, але й функцією другої узагальненої координати і її похідних. Таким чином, маємо зв'язану систему двох рівнянь із двома узагальненими координатами.

Для полегшення розкриття фізичного змісту членів, що входять у рівняння руху, будемо формально розглядати кожне рівняння системи як рівняння руху деякої парціальної коливальної системи з одним ступенем вільності з накладеними в'язями. У такий спосіб, коливальну систему із двома ступенями вільності будемо подавати у вигляді двох пов'язаних між собою коливальних систем з одним ступенем вільності. «Зв'язок» між парціальними системами виражається в тому, що коливання однієї парціальної системи впливають на коливання іншої парціальної системи, і навпаки.

З урахуванням зазначеного, перетворимо рівняння до виду

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 2h_1\dot{x} + (k_1^2 - U^2)x + 2U\dot{z} + \dot{U}z &= q_1 - 2U\dot{z} - \dot{U}z; \\ \ddot{z} + 2h_2\dot{z} + (k_2^2 - U^2)z - 2U\dot{x} - \dot{U}x &= q_2 + 2U\dot{x} + \dot{U}x,\end{aligned}\quad (3.68)$$

де  $2h_1 = f_1/m$ ;  $2h_2 = f_2/m$  – коефіцієнти загасання за відповідними узагальненими координатами;  $k_1 = \sqrt{c_1/m}$ ;  $k_2 = \sqrt{c_2/m}$  – парціальні частоти;  $q_1 = F_x/m - W_x$ ;  $q_2 = -W_z$  – узагальнені прискорення.

З системи диференціальних рівнянь (3.68) видно, що рухи інерційної маси в напрямку обраних узагальнених координат при ідеальному пружному підвісі пов'язані між собою тільки членами, що залежать від переносної кутової швидкості  $U$ .

В отримані рівняння переносна кутова швидкість входить як параметр. Знайти аналітичний розв'язок рівнянь зі змінними коефіцієнтами дуже складно.

За умови  $\vec{U} \approx \text{const}$  рівняння руху приймуть вид

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 2h_1\dot{x} + (k_1^2 - U^2)x &= -2U\dot{z} + q_1; \\ \ddot{z} + 2h_2\dot{z} + (k_2^2 - U^2)z &= 2U\dot{x}_1 + q_2.\end{aligned}\quad (3.69)$$

Якщо виконується умова  $k_i^2 \gg U^2$  рівняння руху будуть такими

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 2h_1\dot{x} + k_1^2 x &= -2U\dot{z} + q_1; \\ \ddot{z} + 2h_2\dot{z} + k_2^2 z &= -2U\dot{x} + q_2.\end{aligned}\quad (3.70)$$

### 3.3.3. Рух основи з постійною кутовою швидкістю

Розглянемо рух чутливого елемента ММГ за умови  $U = \text{const}$  і  $W_{zc} = 0$ . Для цього спочатку запишемо рівняння (3.69) в операторній формі, використовуючи оператор Лапласа  $p$ :

$$\begin{aligned}(p^2 + 2h_1p + k_1^2 - U^2)x + 2Upz &= q_1(p); \\ -2Upx + (p^2 + 2h_2p + k_2^2 - U^2)z &= 0.\end{aligned}\quad (3.71)$$

Розв'язок отриманих рівнянь в операторній формі:

$$\begin{aligned}x(p) &= \frac{[p^2 + 2h_2p + (k_2^2 - U^2)]q_1(p)}{[p^2 + 2h_1p + (k_1^2 - U^2)][p^2 + 2h_2p + (k_2^2 - U^2)] + 4U^2p^2}; \\ z(p) &= \frac{2U[pq_1(p)]}{[p^2 + 2h_1p + (k_1^2 - U^2)][p^2 + 2h_2p + (k_2^2 - U^2)] + 4U^2p^2}.\end{aligned}\quad (3.72)$$

З урахуванням характеру змінювання  $q_1(t) = q_{10} \sin \lambda t$  перетворимо розв'язки до вигляду

$$x(u) = A_{11}(\lambda, U)U \sin(\lambda t + \varphi_1);$$

$$z(u) = A_{21}(\lambda, U)U \sin(\lambda t + \varphi_2),$$

де

$$A_{11} = \frac{q_{10} \sqrt{(k_2^2 - \lambda^2 - U^2)^2 + 4h_2^2 \lambda^2}}{\sqrt{\Delta^2}} = K_x(U, \lambda); \quad A_{21} = \frac{2q_{10} \lambda}{\sqrt{\Delta^2}} = K_z(U, \lambda)$$

– амплітудно-частотні характеристики;

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{2h_2 \lambda}{k_2^2 - U^2 - \lambda^2} - \operatorname{arctg} \frac{2\lambda [h_1(k_2^2 - U^2 - \lambda^2) + h_2(k_1^2 - U^2 - \lambda^2)]}{(k_1^2 - U^2 - \lambda^2)(k_2^2 - U^2 - \lambda^2) - 4\lambda^2(h_1 h_2 + U^2)};$$

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{2\lambda [h_1(k_2^2 - U^2 - \lambda^2) + h_2(k_1^2 - U^2 - \lambda^2)]}{(k_1^2 - U^2 - \lambda^2)(k_2^2 - U^2 - \lambda^2) - 4\lambda^2(h_1 h_2 + U^2)};$$

$$\Delta^2 = [\lambda^4 - (k_1^2 + k_2^2 + 2U^2 + 4h_1 h_2)\lambda^2 + (k_1^2 - U^2)(k_2^2 - U^2)]^2 + 4\lambda^2 [h_1(k_2^2 - U^2) + h_2(k_1^2 - U^2) - (h_1 + h_2)\lambda^2]^2.$$

Останній вираз після деяких перетворень можна звести до вигляду

$$\Delta^2 = [(k_1^2 - U^2 - \lambda^2)(k_2^2 - U^2 - \lambda^2) - 4\lambda^2(h_1 h_2 + U^2)]^2 + 4\lambda^2 [h_1(k_2^2 - U^2 - \lambda^2) + h_2(k_1^2 - U^2 - \lambda^2)]^2 \quad (3.73)$$

Як бачимо, рух чутливого елемента ММГ з координати  $z$  являє собою вторинні коливання із частотою сили збудження й амплітудою, яка залежить від величини проекції кутової швидкості обертання основи  $\vec{U}$  на вісь чутливості  $y_c$ .

На практиці часто використовується резонансний режим збудження вимушених коливань, тобто виконується умова  $k_1 = \lambda$ . При цьому зазвичай друга парціальна частота більша за першу парціальну частоту ( $k_2 > k_1$ ).

Графіки залежності амплітуди  $z_m$  вторинних коливань від кутової швидкості за частоти збудження  $\lambda = k_1$  для різних значень відношення парціальних частот  $k_2/k_1$  зображено на рис. 3.20.

Як випливає з цих графіків, лінійна залежність амплітуди коливань від вимірюваної швидкості має місце на дуже обмеженій ділянці частот, яка значно менша від найменшої з парціальних частот ( $k_1$ ). При цьому діапазон лінійної залежності тим менший, а крутизна характеристики тим більша, чим менша різниця парціальних частот  $k_2$  і  $k_1$  і менший коефіцієнт загасання первинних коливань. З урахуванням цього розглянемо більш докладно роботу ММГ при виконанні умови  $U/\lambda \ll 1$ .

Початкові ділянки статичних  $z_m = f_x(u/\lambda)$  і фазових характеристик  $\varphi_2 = f(u/\lambda)$  для різних співвідношень парціальних частот ( $k_2 = 1,05k_1, k_2 = 1,1k_1$  і  $k_2 = 1,2k_1$ ) для  $h_i = 0,0005k_i$  показано на рис. 3.21. Згідно з цими графіками вто-

ринні коливання за малих вимірюваних швидкостей ( $U/\lambda \leq 0,0005$ ) відбуваються практично у протифазі щодо сили збудження. Зі збільшенням відносної швидкості  $u/\lambda$  до одиниці зсув фаз наближується до  $90^\circ$ .

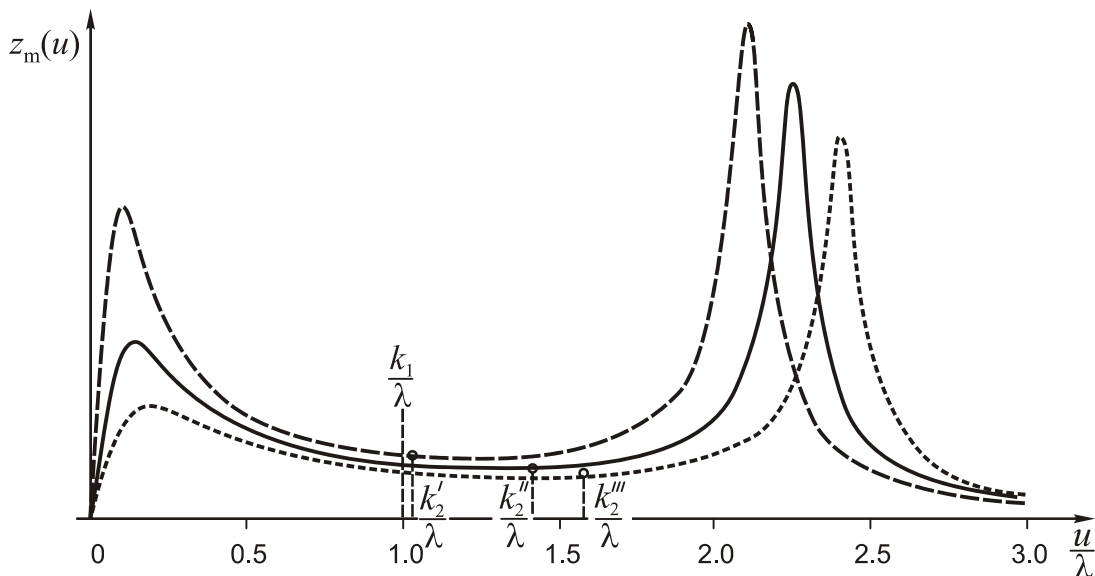


Рис. 3.20.

Діапазон вимірювань ММГ визначається лінійною залежністю амплітуди вторинних коливань від вимірюваної кутової швидкості, яку можна отримати з формули (3.64), якщо  $U = 0$ :

$$K(0) = \frac{2q_1\lambda}{2h_1\lambda\sqrt{(k_2^2 - \lambda^2)^2 + 4h_2^2\lambda^2}} \approx \frac{q_1}{h_1(k_2^2 - \lambda^2)} \quad (3.74)$$

Лінійна залежність амплітуди вторинних коливань від вимірюваної швидкості для цього випадку показана на рис. 14.19, а пунктиром.

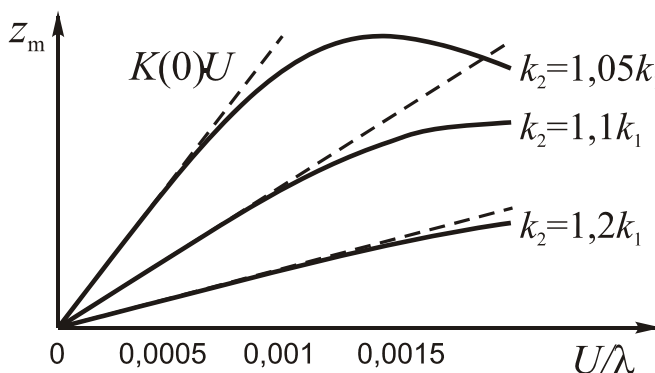


Рис. 3.21.

Ступінь відносної нелінійності коефіцієнта передачі можна визначити за формулою



$$\delta K(0) = \left| \frac{K(u) - K(0)}{K(0)} \right|.$$

У реальних конструкціях частота збудження первинних коливань становить 3 – 15 кГц (18000 – 90000 1/с). Діапазон вимірюваної кутової швидкості для  $\delta K \leq 0,5\%$  не перевищує 360°/с.

Така нелінійна залежність амплітуди вторинних коливань від вимірюваної кутової швидкості зумовлена впливом руху з координати  $z_c$  на рух по координаті  $x_c$ . Цей вплив здійснюється через гіроскопічний перехресний зв'язок (член  $2U\dot{z}$  у першому рівнянні системи (3.60)).

За малих відносних кутових швидкостей обертання  $U/\lambda$  вимушені коливання чутливого елемента в напрямку осі  $x_c$  відбуваються з постійною амплітудою, яка визначається переважно силою збудження  $Q_2$ . Коливання зсунуті за фазою на 90° відносно цих сил. Вплив гіроскопічного перехресного зв'язку несуттєвий і ним можна знехтувати.

Зменшити вплив гіроскопічного перехресного зв'язку при відносно великій швидкості обертання основи можна, застосовуючи системи автоматичного регулювання амплітуди первинних коливань.

## ЛЕКЦІЯ 25.

## 3.3.4. Рух основи з змінною кутовою швидкістю

Розглянемо рух чутливого елемента ММГ за кутової вібрації основи навколо вимірювальної осі  $y_c$  за законом  $U = U_0 \sin \omega t$  із частотою  $\omega$ , набагато меншої частоти первинних коливань  $\lambda$  й амплітудою  $U_0$ , при якій можна знехтувати нелінійністю коефіцієнта передачі  $K(U, \lambda)$ .

Рух чутливого елемента подамо системою рівнянь (3.70), що відповідно до умов набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2h_1\dot{x} + k_1^2x &= q_{10} \sin \lambda t; \\ \ddot{z} + 2h_2\dot{z} + k_2^2z &= 2U_0\dot{x} \sin \omega t + U_0x\omega \cos \omega t. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Частинний розв'язок першого рівняння сукупності (3.75) за умови резонансного настроювання на частоті первинних коливань ( $\lambda^2 = k_1^2$ ) має вид

$$x(t) = \frac{q_{10}}{2h_1\lambda} \cos \lambda t.$$

Швидкість первинного руху

$$\dot{x}(t) = -\frac{q_{10}}{2h_1} \sin \lambda t.$$

З урахуванням значень  $x(t)$  і  $\dot{x}(t)$  запишемо рівняння руху чутливого елемента по координаті  $z$  у формі:

$$\ddot{z} + 2h_2\dot{z} + k_2^2z = -u_0 \frac{q_{10}}{h_1} \sin \omega t \sin \lambda t + u_0 \frac{q_{10}\omega}{2h_1\lambda} \cos \omega t \cos \lambda t.$$

Зробивши заміну добутків тригонометричних функцій, отримаємо:

$$\ddot{z} + 2h_2\dot{z} + k_2^2z = \frac{q_{10}}{2h_1} u_0 \left[ \left(1 + \frac{\omega}{2\lambda}\right) \cos(\lambda + \omega)t - \left(1 - \frac{\omega}{2\lambda}\right) \cos(\lambda - \omega)t \right].$$

Частинний розв'язок одержаного рівняння має вигляд

$$z = \frac{q_{10}}{2h_1} u_0 \left[ \frac{\left(1 + \frac{\omega}{2\lambda}\right) \cos[(\lambda + \omega)t + \varphi_1]}{\sqrt{[k_2^2 - (\lambda + \omega)^2]^2 + 4h_2^2(\lambda + \omega)^2}} - \frac{\left(1 - \frac{\omega}{2\lambda}\right) \cos[(\lambda - \omega)t + \varphi_2]}{\sqrt{[k_2^2 - (\lambda - \omega)^2]^2 + 4h_2^2(\lambda - \omega)^2}} \right], \quad (3.76)$$

$$\text{де } \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{2h_2(\lambda + \omega)}{k_2^2 - (\lambda + \omega)^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{2h_2(\lambda - \omega)}{k_2^2 - (\lambda - \omega)^2}$$

У реальних конструкціях ММГ для забезпечення стабільності коефіцієнта передачі виконують умову

$$k_2^2 - (\lambda + \omega)^2 \gg h_2^2.$$

У цьому випадку можна припустити  $\varphi_1 \approx \varphi_2 \approx 0$ , що дозволяє істотно спростити вираз (3.76):

$$z \approx \frac{q_{10}}{2h_1} U_0 \left[ \frac{\left(1 + \frac{\omega}{2\lambda}\right) \cos(\lambda + \omega)t}{k_2^2 - (\lambda + \omega)^2} - \frac{\left(1 - \frac{\omega}{2\lambda}\right) \cos(\lambda - \omega)t}{k_2^2 - (\lambda - \omega)^2} \right],$$

або після деяких перетворень

$$z = -\frac{q_{10}}{2h_1} \cdot \frac{2U_0 \left[ (k_2^2 - \lambda^2) \sin \omega t \sin \lambda t - \frac{\omega}{2\lambda} (3\lambda^2 + k_2^2 - \omega^2) \cos \omega t \cos \lambda t \right]}{(k_2^2 - \lambda^2)^2 - 2\omega^2 (k_2^2 + \lambda^2) + \omega^4}.$$

Отже, у вихідному сигналі ММГ є корисна складова, синфазна вимірюваній кутовій швидкості, і завада, зсунута по фазі на  $90^\circ$  відносно вимірюваної кутової швидкості (квадратурна складова сигналу). Одночасно корисний сигнал і сигнал завади зсунуті за фазою на  $90^\circ$  з частотою модуляції  $\lambda$ .

Вигляд вторинних коливань для випадку  $k_2 = 1,05\lambda$ ,  $\omega = 0,01\lambda$  показано на рис. 3.22. Як видно, амплітуда квадратурної складової має значну величину й за великої частоти коливань  $\omega$  може навіть перевищувати амплітуду корисного сигналу.

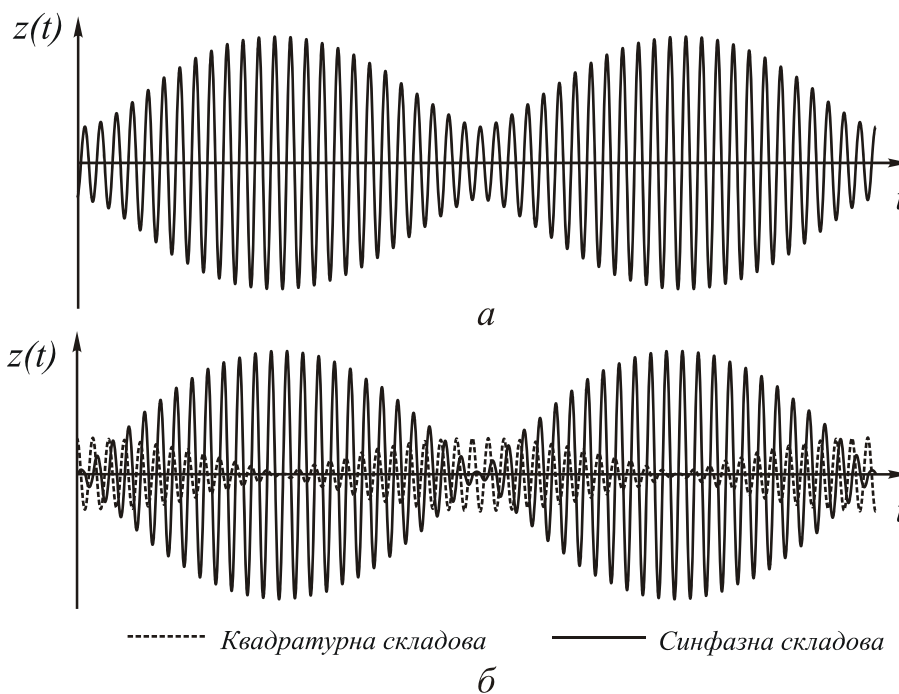


Рис. 3.22.

Однак зсув її за фазою на кут  $90^\circ$  на частоті модуляції дозволяє легко вирізнити корисну інформацію на фоні завади.

Подамо інформаційну складову сигналу у вигляді

$$z = -K(0) \cdot K^*(\omega) \cdot U_0 \sin \omega t \sin \lambda t,$$

де  $K(0)$  – статичний коефіцієнт передачі, визначений формулою (3.74);

$$K^*(\omega) = \frac{1}{\frac{\omega^4}{(k_2^2 - \lambda^2)^2} - 2 \frac{\omega^2}{k_2^2 - \lambda^2} \cdot \frac{k_2^2 + \lambda^2}{k_2^2 - \lambda^2} + 1} \text{ – коефіцієнт динамічності.}$$

Вважаючи частоту коливань  $\omega$  досить малою порівняно з модулем різниці частот  $k_2$  й  $\lambda$ , тобто припустивши  $\frac{\omega^2}{|k_2^2 - \lambda^2|} \ll 1$ , подамо коефіцієнт динамічності у вигляді розкладання за малим параметром  $\varepsilon$ :

$$K^*(\omega) \approx 1 + 2\omega^2 \left( \frac{\lambda^2 + k_2^2}{k_2^2 - \lambda^2} \right)^2.$$

З урахуванням цього інформативну складову вторинних коливань можна подати у вигляді

$$z \approx \frac{q_{10} U_0}{h_1 (k_2^2 - \lambda^2)} \cdot \left[ 1 + \frac{2(\lambda^2 + k_2^2)}{(k_2^2 - \lambda^2)^2} \omega^2 \right] \sin \omega t \sin \lambda t.$$

Відносна похибка коефіцієнта передачі, зумовлена коливальним характером руху основи з частотою  $\omega$ , дорівнює

$$\delta K(\omega) = |1 - K^*(\omega)| \cdot 100\% = \frac{2(\lambda^2 + k_2^2)}{(k_2^2 - \lambda^2)^2} \omega^2 \cdot 100\%.$$

Можна показати, що зменшення відношення  $k_2/k_1$  при  $k_1 = \lambda$  приводить до істотного збільшення відносної похибки, тобто до зменшення динамічного діапазону вимірів. Так, зменшення відношення частот з 1,2 до 1,05 за припустимої нелінійності характеристики 1% зменшує динамічний діапазон учетверо – з  $\omega_{\max} = 0,02\lambda$  до  $\omega_{\max} = 0,005\lambda$ . Водночас, відповідно до формули (3.74), коефіцієнт передачі збільшується більш ніж у четверо.

## ЛЕКЦІЯ 26.

## 3.4. ХВИЛЬОВИЙ ТВЕРДОТІЛЬНИЙ ГІРОСКОП

## 3.4.1. Пружні коливання тонкого нерозтяжного кільця

Хвильовий твердотільний гіроскоп (ХТГ) – датчик інерціальної інформації, дія якого ґрунтується на інертних властивостях пружних хвиль, які збуджуються в кільцевому резонаторі. Основним елементом ХТГ є резонатор у виді пружної осесиметричної оболонки, яку наближено можна розглядати як пружне нерозтяжне кільце.

Розглянемо радіальні коливання тонкого пружного кільця, за наявності яких осьова лінія кільця являє собою коло з радіусом, що періодично змінюється, тобто усі поперечні перерізи рухаються тільки в радіальних напрямках.

В загальному випадку згинальних коливань радіальне переміщення довільної точки з кутовою координатою  $\varphi$  можна записати у вигляді

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\varphi, \quad (3.77)$$

де коефіцієнти  $a_k$  та  $b_k$  є функціями часу.

Таким чином, в пружному кільці його власні коливання мають вид стоячої хвилі.

Диференційне рівняння пружних коливань

$$\pi R \rho S \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \ddot{a}_k + \frac{EI\pi}{R^3} (1 - k^2)^2 a_k = 0,$$

або

$$\ddot{a}_k + \frac{EI}{S\rho R^4} \frac{k^2(1 - k^2)^2}{1 + k^2} a_k = 0. \quad (3.78)$$

Таке ж саме рівняння можна одержати і для узагальненої координати  $b_k$ .

З наведеного рівняння (3.78) частота довільної моди коливань дорівнює

$$\omega_{0k} = \frac{k(k^2 - 1)}{\sqrt{1 + k^2}} \sqrt{\frac{EI}{S\rho R^4}}, \quad (3.79)$$

Якщо  $k = 1$ , одержимо  $\omega_{01} = 0$ , тобто кільце рухається в площині  $xy$ .

Якщо  $k = 2$ , кільце здійснює згинальні коливання на основній частоті, що дорівнює

$$\omega_{02} = \sqrt{0,6} \frac{h}{R^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Для розрахунку частоти вільних коливань півсферичної оболонки використовується формула Релея

$$\omega_{0k} = l(k) \frac{h}{R^2} \sqrt{\frac{E}{3(1+\nu)\rho}}, \quad (3.80)$$

де  $l(k)$  залежить від форми коливань кільця, (для  $k=2$ ,  $l(k)=2,62$ );  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона.

Найбільш важливі власні форми коливань резонатора ( друга і третя моди) показані на рис. 3.23. Вони має назву діаграми вібрації (ДВ) резонатора.

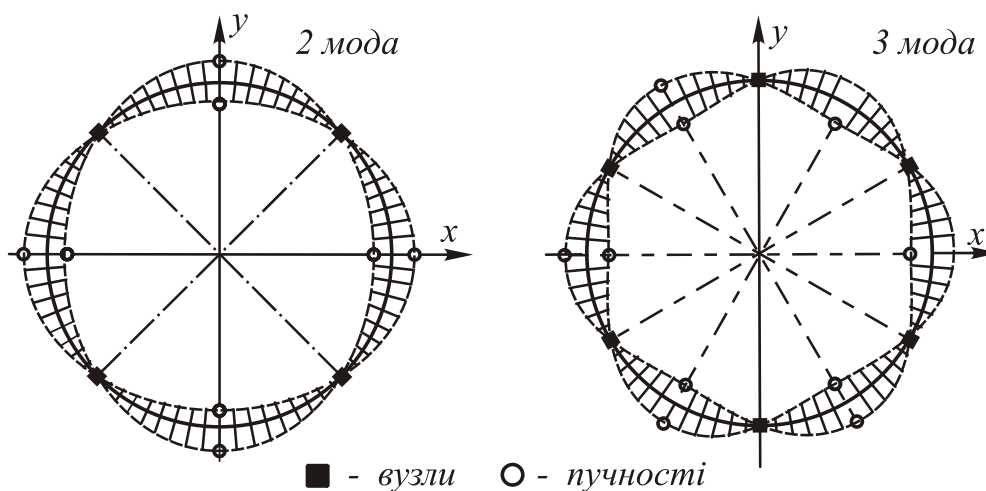


Рис. 3.23.

Для другої моди коливання здійснюються по двох взаємно перпендикулярних осях  $x$  та  $y$ ; точки, які не зміщуються при коливаннях, називають вузлами діаграми, а точки, які коливаються з максимальною амплітудою – пучностями. Друга мода коливань має 4 вузли і 4 пучності, зміщені на кут  $90^\circ$ .

В 1890 р. Дж. Брайаном було встановлено, що при обертанні пружного кільця внаслідок дії сил інерції Коріоліса відбувається розщеплення частот власних форм згинальних коливань, що призводить до прецесії стоячих хвиль та биття механічних коливань.

Розглянемо цей факт більш детально.

При обертанні основи з абсолютною кутовою швидкістю  $\Omega_z$  ДВ змінює своє розташування завдяки коріолісовим силам інерції. Матеріальні точки  $a$ ,  $a'$  та  $b$ ,  $b'$  (рис. 3.24) здійснюють коливання з відносною лінійною швидкістю  $\dot{r} = A\omega_0 \cos \omega_0 t$  і беруть участь в переносному русі з кутовою швидкістю  $\Omega_z$ . Це викликає появу коріолісового прискорення  $W_c = 2\Omega_z \dot{r}$  та коріолісової сили для маси  $F_c = -\Delta m W_c$ . Ці сили в один з півперіодів коливань стискають пружний резонатор в межах другого та четвертого квадрантів ДВ і розтягують його в першому і третьому квадрантах; в другому півперіоді ці сили змінюють свій напрямок на

протилежний. З'являється розбіжність напрямків сил збудження з напрямком коливань резонатора.

Наявність сил коріолісового прискорення зменшує швидкість обертання ДВ навкруг осі z в інерціальному просторі, тобто обертання ідеального резонатора з кутовою швидкістю  $\Omega_z$  приводить до розладу його власних частот коливань.

Таким чином, у кільці, що обертається, стоячі хвилі неможливі. Але виявляється, що у цьому випадку у кільці існують такі коливання, які в деякій єдиній си-

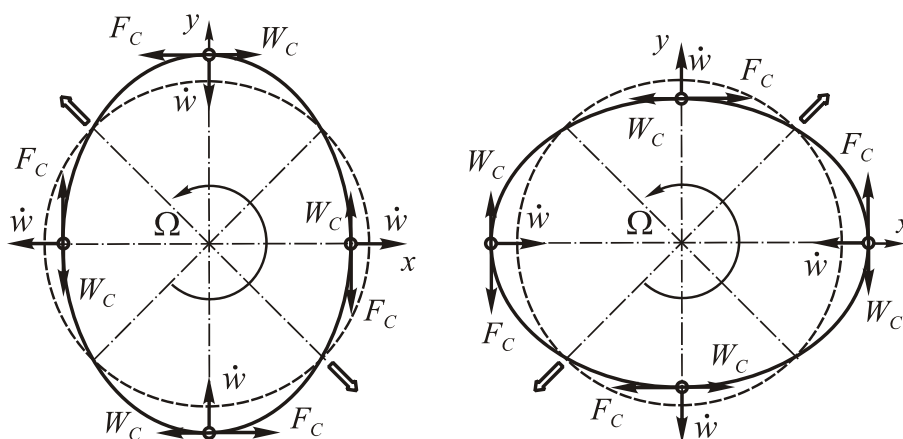


Рис. 3.24

стемі координат  $Ox_{x_0}y_{x_0}z_{x_0}$ , що обертається відносно нього, мають вигляд стоячих хвиль. Ці хвилі називають хвилями, що прецесують. Швидкість обертання  $\omega_{06}$  відповідної рухомої системи координат будемо називати швидкістю прецесії хвилі.

Вона дорівнює 
$$\omega_{06} = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} \Omega.$$

Кут  $\gamma(t)$ , який визначає положення рухомої системи координат відносно кільця, дорівнює

$$\gamma(t) = \int (\Omega - \omega_{06}) dt = \frac{2}{k^2 + 1} \int \Omega(t) dt = K_\gamma \cdot \psi. \tag{3.81}$$

Для другої форми коливань  $K_\gamma = 0,4$ .

Ефект, котрий встановлено для коливань кільця без будь-яких наближень, з різним ступенем точності істинний і для довільних пружних тіл, що мають осьову симетрію. Різниця буде тільки у величині масштабного коефіцієнта  $K_\gamma$ .

Так, для півсферичної оболонки цей коефіцієнт залежить від властивостей матеріалу оболонки (коефіцієнта Пуассона) і в разі її виготовлення з плавленого кварцу дорівнюватиме для першої моди коливань 0,312. Це означає, що в разі повороту оболонки на кут  $90^\circ$  вузли коливань повернуться на кут  $\gamma = 28,1^\circ$  відносно оболонки або на кут  $\alpha = 61,9^\circ$  в інерціальному просторі.

Таким чином, якою б не була залежність кутової швидкості осесиметричної пружної оболонки (кільця) від часу існує і єдина система координат  $x_{хв}y_{хв}$  (рис. 3.25), що обертається відносно оболонки, в якій при деяких початкових умовах коливання оболонки сприймаються як стояча хвиля.

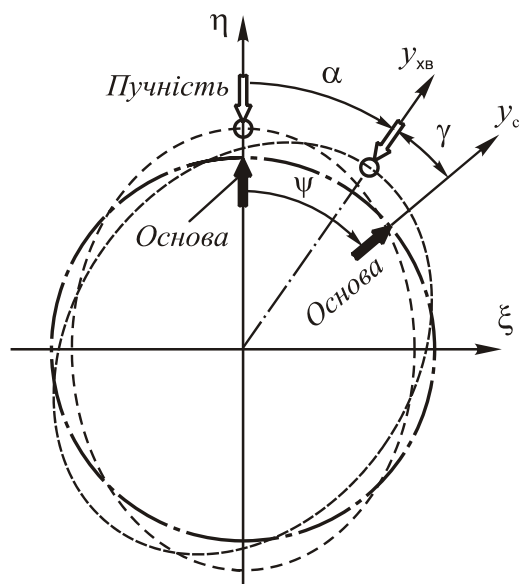


Рис. 3.25

Врахування розтяжності кільця при обертанні основи призводить до деякого збільшення масштабного коефіцієнта  $K_\gamma$  та його залежності від характеристик матеріалу та розмірів кільця. Але залежність ця дуже слабка.

У реальних матеріалах, з яких виготовлені резонатори, на відміну від ідеальних присутні дисипативні сили, які призводять до згасання вільних коливань кільця. Основною причиною згасань є сили в'язкого тертя між сусідніми частинками кільця, обумовлені різницею в їх швидкості руху. Але теоретичні дослідження доводять, що еволюція стоячої хвилі під дією дисипативних сил в оболонці не змінює положення її вузлів,

тобто не знищує основне джерело одержання інформації про кутове положення основи. Дисипація викликає тільки зменшення з часом амплітуди стоячої хвилі.

Радикальною відмінністю хвилі як датчика інерціальної інформації від механічного гіроскопа з ротором, що швидко обертається, є те, що в'язке тертя "тягне" гіроскоп за основою, в той час як на положення стоячої хвилі воно ніяк не впливає. Через це хвиля має серйозну перевагу перед інертним тілом.

### 3.4.2. Системи збудження коливань резонатора

Внаслідок згасання хвиль виникає потреба підтримувати коливання кільця зовнішніми силами. На практиці для початкового збудження та підтримання незгасаючих коливань кільця найчастіше використовують змінні електричні сили, для чого до самого кільця, а також до зовнішніх відносно нього електродів підводиться змінна напруга. Існує дві основні схеми електричного збудження: позиційне, коли напруга між резонатором та зовнішніми електродами змінюється за законом

$U = U_0 \cos \varphi \cos\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)$ , та параметричне, коли напруга не залежить від кута  $\varphi$ :

$$U = U_0 \cos \omega_0 t.$$

Схема позиційного збудження показана на рис. 3.26. На два протилежних електроди подається змінна електрична напруга з частотою, у два рази меншою за власну частоту коливань кільця. Поверхні кільця й електродів покриті електро-



провідним шаром і являють собою обкладинками циліндричного конденсатора. Обкладинки зарядженого конденсатора притягуються, тому з боку електродів на кільце діють сили електричного притягання.

Режим позиційного збудження характеризується тим, що силове поле, створене дискретними силовими електродами, незмінно орієнтоване відносно основи, а розподіл сили за кутом відповідає збудженню потрібної форми коливань. Він має ту перевагу, що коливання резонатора підтримуються при будь-якій, навіть дуже малій амплітуді напруги. Від неї залежить тільки амплітуда коливань, які встановлюються в кільці.

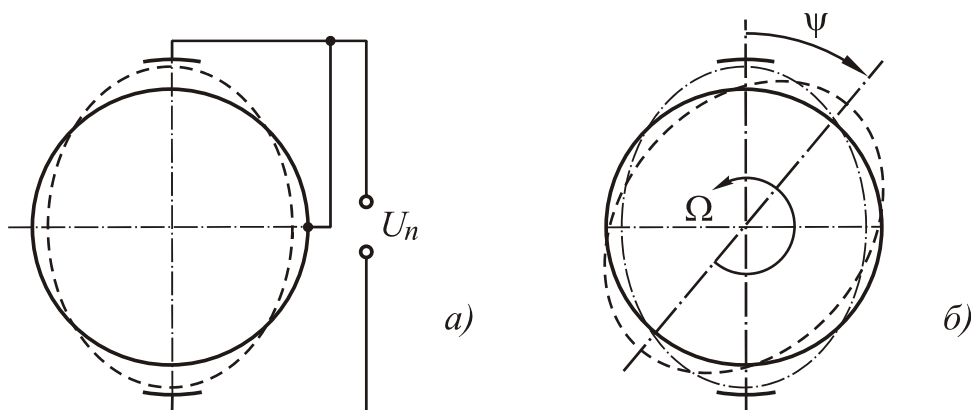


Рис. 3.26

Але це збудження “прив’язує” стоячу хвилю до основи, строго орієнтуючи її за “осями” напруги. При такому збудженні кільце може використовуватися тільки як датчик кутової швидкості, воно перетворюється в різновид вібраційного гіроскопу.

Обертання основи з кутовою швидкістю  $\Omega$  викликає появу додаткових коріолісових сил збудження, які прагнуть розвернути діаграму вібрації відносно основи. Спільна дія двох систем силового впливу на кільце призведе до повороту стоячої хвилі відносно корпусу на кут  $\psi$  (рис. 3.26,б). Величина цього кута залежить від кутової швидкості обертання основи  $\Omega$ , частоти власних коливань резонатора  $\omega_{02}$  та відносного коефіцієнта згасання  $\xi$  власних коливань:

$$\psi = 2K \frac{\Omega}{\omega_{02}^2 \xi}. \quad (3.82)$$

Тут  $K$  – масштабний коефіцієнт, який залежить від конструктивних особливостей системи збудження коливань.

Таким чином, ефект, який визначає принципову особливість твердотілого гіроскопа, при застосуванні позиційного збудження не зберігається, тому такий тип збудження використовується тільки для “розкачки” власних коливань. Після

досягнення амплітудою стоячої хвилі потрібного значення таке збудження відключається.

Параметричне збудження застосовується для підтримання коливань кільця зі збереженням інтегруючого ефекту, тому напруга збудження, що подається на кільцевий силовий електрод, не залежить від кута  $\varphi$ .

Такий тип збудження має потрібну інваріантність, він не “прив`язує” хвилю до основи, тобто зберігає основну властивість кільця як датчика інерціальної інформації. Проте, як і будь-яке параметричне збудження він має свою особливість: існує поріг  $U_0^{\min}$ , такий, що якщо напруга  $U_0 < U_0^{\min}$ , то коливання кільця не збуджуються, якщо ж  $U_0 > U_0^{\min}$ , то збуджуються нестійкі коливання.

## ЛЕКЦІЯ 27.

**3.4.3. Схема і принцип роботи хвильового твердотільного гіроскопа**

Розглянемо схему побудови ХТГ, що працює в інтегровальному режимі.

Типовий ХТГ (рис. 3.27) має півсферичний резонатор 1 з ніжкою, яка закріплена в корпусі приладу. З метою одержання стабільної частоти пружних коливань резонатор виготовляється з плавленого кварцу. Конструкція резонатора має зубчасте обрамування у вигляді кільця, за допомогою додаткової обробки якого здійснюють динамічне балансування та налагодження.

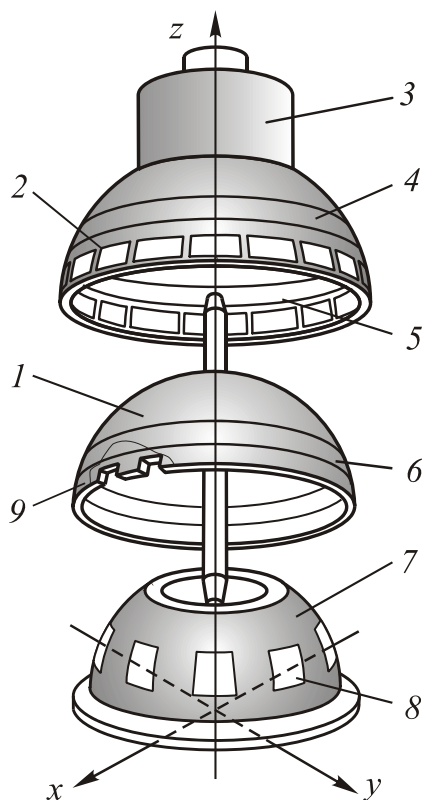


Рис. 3.27

Півсфера розміщена над восьми електродами 8 знімання інформації, які відстоять один від одного на кут  $45^\circ$ . Резонуючу півсферу охоплює корпус 3, який містить один кільцевий силовий електрод 5 та 16 дискретних силових електродів 2.

При коливаннях резонатора, що відбуваються за основною формою, коловими переміщеннями точок 1, 2, 3, 4, (рис. 3.28) можна знехтувати. Ці точки є вузлами діаграми вібрації. Якщо основа нерухома, то при коливанні оболонки пучності ДВ знаходяться в перший півперіод коливань на лінії II - II. При обертанні резонатора з кутовою швидкістю  $\Omega_\zeta$  змінюється положення ДВ відносно корпусу приладу в залежності від величини і знака  $\Omega_\zeta$ . Фіксуючи їх, можна визначити кутову швидкість або кут повороту основи, на якій встановлений ХТГ. Реєстрація амплі-

туда коливань краю резонатора здійснюється за допомогою системи знімання інформації. Ця система містить ємнісні або оптичні датчики переміщень 8. Схема збудження коливань резонатора з постійною амплітудою на частоті резонансу визначає принцип формування вихідного сигналу ХТГ.

При позиційному збудженні вихідний сигнал пропорційний кутовій швидкості  $\Omega_c$ , при параметричному збудженні (наприклад, за допомогою кільцевого електроду 2) вихідний сигнал буде пропорційний куту повороту основи.

### 3.4.4. Система обчислення кута повороту діаграми вібрації

Розглянемо принцип вимірювання, а точніше, обчислювання кута повороту ДВ відносно корпусу приладу.

Вимірювання “прецесії” пружної форми коливань здійснюється за рахунок реєстрації поточної величини зазору між фіксованими точками корпусу та резонатора.

В першому наближенні пружна “заморожена” форма коливань, що відповідає основній формі коливань, являє собою еліпс, осі якого співпадають з осями системи координат  $x$  та  $y$  (рис. 3.28). З урахуванням цього пружна форма коливань може бути визначена рівняннями

$$x = (R + \varepsilon)\cos\alpha; \quad y = (R - \varepsilon)\sin\alpha, \quad (3.83)$$

де  $R$  – зовнішній радіус недеформованого резонатора,  $\varepsilon$  – амплітуда стискування або розтягнення пружної форми.

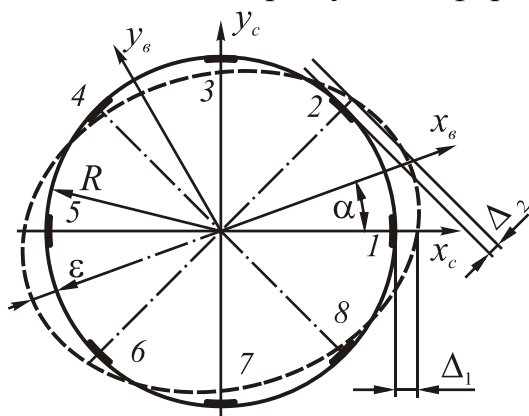


Рис. 3.28

Оскільки ми розглядаємо статичну картину коливань, в рівняннях (3.83) не враховані множники  $\cos(\omega_0 t + \psi)$ , що визначають коливальний характер руху елементів резонатора.

Напрямки 2, 4, 6 та 8 визначають напрямки вузлів на поверхні резонатора, в яких при відсутності обертання основи амплітуди коливань, а також сигнали з датчиків зазору дорівнюють нулю.

При обертанні резонатора ДВ повернеться на кут  $\alpha$  відносно осей  $x$  та  $y$ , напрямки 2, 4, 6 та 8 вже не будуть відповідати положенню вузлів, тому з датчиків зазору, які встановлені вздовж цих напрямків, буде зніматися сигнал, який не дорівнюватиме нулю.

Знайдемо амплітуду цих сигналів. Для цього використаємо рівняння пружної форми коливань (3.77), на основі яких визначимо, наприклад, положення точки пружної поверхні, що знаходиться на напрямку 2

$$\begin{aligned}x'_2 &= (R + \varepsilon) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (R + \varepsilon)(\cos \alpha + \sin \alpha); \\y'_2 &= (R - \varepsilon) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (R - \varepsilon)(\cos \alpha - \sin \alpha).\end{aligned}\quad (3.84)$$

Зазор, який вимірює датчик в точці 2, дорівнює

$$\Delta_2 = \sqrt{(x'_2)^2 + (y'_2)^2} - R = \sqrt{(R^2 + \varepsilon^2) + 2R\varepsilon \sin 2\alpha} - R \approx \varepsilon \sin 2\alpha,$$

тобто є функцією кута повороту ДВ відносно основи.

Можна також довести, що малий кут повороту основи  $\gamma(t) = \int_0^t \Omega dt$  визначається двома координатами стоячої хвилі, які можна виміряти двома датчиками зазору, розміщеними під кутом  $45^\circ$ :

$$\gamma(t) = \frac{1}{2} K \arctg \frac{\Delta_2}{\Delta_1}. \quad (3.85)$$

Якщо кут повороту основи не можна вважати малим, алгоритми обчислень будуть значно складніше, ніж алгоритм (3.85).

### 3.4.5. Основні похибки ХТГ

На положення стоячої хвилі в резонаторі в значній мірі впливають багато факторів інструментального характеру. Вони призводять до додаткової прецесії стоячої хвилі, яка вже не залежить від обертання основи. Така прецесія відіграє роль “дрейфу”, якщо використати термінологію для класичних гіроскопів, тобто є похибкою в вимірюванні кута повороту.

1. Похибки параметричного збудження. Вони в першу чергу обумовлені наявністю паразитної сталої складової в електричному живленні та неоднаковістю зазорів між електродам параметричного збудження та резонатором. Для зменшення відходу треба збільшувати радіус резонатора, амплітуду коливань, а також механічні характеристики матеріалу резонатора - модуль пружності  $E$  та густину  $\rho$ . За допомогою таких заходів похибку можна зменшити до  $0,01$  градуса за годину, але для цього потрібно витримати овальність резонатора в межах  $10^{-5}$  м, а сталу складову напруги в межах  $0,01$  В.

2. Похибки інструментального виготовлення. Поява похибок викликана неоднорідністю густини та модуля пружності на окремих ділянках резонатора, які обумовлюють різницю в частотах стоячої хвилі в залежності від орієнтації вузлів та пучностей. Крім того, напрямок ДВ повільно змінює своє положення, що сприймається як “відхід” ХТГ. Для забезпечення потрібної точності різниця в частотах коливань не повинна перевищувати  $10^{-2}$  Гц.

Механізм виникнення похибок ХТГ від таких дефектів резонатора, як овальність, неоднаковість товщини резонуючого кільця, теж обумовлений різницею частот коливань стоячої хвилі в двох напрямках, що відрізняються на  $45^\circ$  та похибкою налагодження частоти збудження.

### 3.4.6. Режим вимірювача кутової швидкості

Як вже згадувалось вище, при побудові ХТГ в режимі датчика кутової швидкості можливо використовувати метод зрівноважування хвилі (компенсаційний метод). При його реалізації використовується замкнений контур зворотного зв'язку.

Систему керування гіроскопом для визначення кутової швидкості основи, на якій встановлено прилад зображено на рис. 3.29. Відповідно до рисунку п'єзоелектричні елементи Д1 і Д5 отримують сигнали керування у вигляді синусоїдальної

**напруги**  $U = U_0 \cos\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)$ , де  $\omega_0$  частота другої форми коливань. Стояча хвиля ге-

нерується з чотирма пучностями, орієнтованими вздовж п'єзоелементів Д1, Д5 і Д3, Д7, а також з чотирма вузловими точками, розташованими вздовж електродів Д2, Д6 і Д4, Д8. Для підтримання постійної амплітуди коливань резонатору, сигнали пропорційні амплітуді коливань (сигнали п'єзоелементів Д3 і Д7) сумуються і подаються на вхід генератору (блок 2), який забезпечує додатній зворотній зв'язок керування. Підсилений вихідний сигнал з генератору поступає на п'єзоелементи Д1 і Д5. Отже, сигнал генератора необхідний для збудження і стабілізації коливань резонатору.

Коли кутова швидкість відсутня ( $\Omega=0$ ), сигнал у вузлах стоячої хвилі (вимірюється п'єзоелементами Д2, Д6 і Д4, Д8) є мінімальним (в основному включає дрейф нуля гіроскопу). Коли під дією кутової швидкості резонатор обертається навколо своєї осі симетрії, п'єзоелементи Д2, Д6 і Д4, Д8 вимірюють сигнали, які перейшли у фазу на  $90^\circ$  по відношенню до сигналу  $A \sin(\Omega_0 t)$ , тобто вимірюється сигнал  $A_1 \cos(\Omega_0 t)$ , амплітуда  $A_1$  якого пропорційна вхідній кутовій швидкості  $\Omega$ . Цей сигнал подається від п'єзоелементів Д2, Д6 і де модулюється, після обробки пропорційно-інтегральним регулятором модулюється по сигналу з тією ж частотою, як і управляючі частоти для формування компенсаційного сигналу (сигнал надходить на п'єзоелементи Д1 і Д5).

Ці операції виконуються блоком 6. Інвертований компенсаційний сигнал подається на керування п'єзоелементами Д4 і Д8 для компенсації у вузлах. Сигнал зворотного зв'язку з ПІ-регулятора пропорційний кутовій швидкості вектору  $\Omega$ .

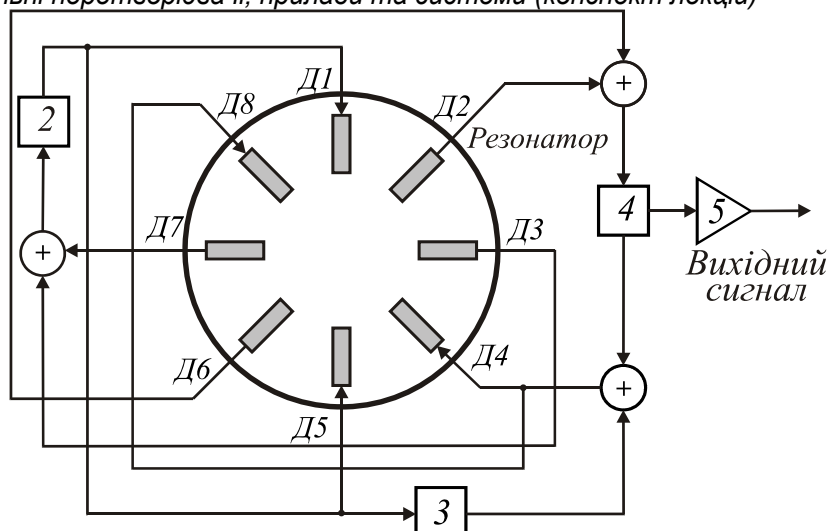


Рис. 3.19.

Для зменшення нульового дрейфу гіроскопа використовується підсистема визначення мінімальних сигналів 8, у якій визначаються мінімальні сигнали вузлів стоячої хвилі, після операції калібрування гіроскопу. Ці сигнали надходять на входи п'єзoeлектродів Д4 і Д8 у протифазі до сигналів в цих електродах (сигналів від дефектів виробництва резонатора). Такий підхід дозволяє компенсувати дебаланс мас, викликаний різною товщиною стінок циліндру.

У ХТГ, що працює в режимі силового зрівноважування хвилі (компенсаційний метод), реалізується контур, що утримує кут повороту стоячої хвилі на фіксованому значенні. Збуджувана мода коливань підтримується на заданому значенні амплітуди, а вібрація, що виникає у вимірюваній моді в результаті інерційного обертання приводиться в нуль. Сила, необхідна для обнуління вібрації вимірюваної моди, у цьому випадку, пропорційна вхідній кутовій швидкості.

Амплітуда додаткової хвилі, збуджувана коріолісовими силами, вимірюється електродом, встановленим у вузлі коливань основної хвилі, і за допомогою електроніки зворотного зв'язку демпфіюється, шляхом подачі сигналу, що компенсується, на другий з чотирьох вузлів основної хвилі. При цьому, сигнал зворотного зв'язку пропорційний вимірюваній кутовій швидкості.