НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«Київський політехнічний інститут»

Кафедра приладів і систем орієнтації та навігації

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання розрахункової роботи

з дисципліни

«МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ»

для напрямку підготовки бакалаврів
051003 – приладобудування
(спеціальність 7. 05100303- прилади і системи орієнтації та навігації)

Рекомендовано кафедрою
приладів і систем орієнтації і навігації

Протокол №7/11 від 29.06.2011

Завідувач кафедри

_________________**Бурау Н.І.**

Київ-2011

Вступ

Мета даного навчального видання – допомогти студентам в освоєнні методів аналізу фізичних процесів та в набутті практичних навичок по визначенню основних характеристик фізичних процесів.

Розрахункова робота виконується як різновид самостійної роботи студента. Виконання розрахункової роботи з дисципліни «Математичні моделі фізичних процесів» сприятиме закріпленню, поглибленню та узагальненню теоретичних основ курсу, а також сприятиме розвитку навичок самостійної творчої роботи студентів у процесі їх навчання.

Тематика розрахункових робіт присвячена питанням аналітичного аналізу детермінованих та аналізу на ЕОМ випадкових процесів, які можуть протікати в приладах та системах орієнтації, навігації, керування.

1. Мета і завдання розрахункової роботи

Тема розрахункової роботи:
«Аналіз енергетичних характеристик детермінованих та випадкових процесів»

Метою розрахункової роботи є набуття студентами практичних навичок по визначенню енергетичних характеристик детермінованих та випадкових фізичних процесів

Завдання розрахункової роботи.

1. Для заданих детермінованих процесів x(t) та y(t) визначити аналітично:
   - автокореляційні функції;
   - спектральні щільності потужності;
2. Визначити за допомогою ПЕОМ:
   - автокореляційні функції;
   - спектральні щільності потужності.
3. Задані детерміновані процеси перетворити у випадкові та сформувати адитивну суміш вузькосмугових складових x(t)+y(t) і білого шуму n(t):

$$z(t)=x(t)+y(t)+n(t).$$

4. Визначити та проаналізувати автокореляційну функцію та спектральну щільність потужності сформованого випадкового процесу z(t).

Варіанти заданих процесів наведено у Додатку 1.

2. Методичні вказівки до виконання завдань розрахункової роботи.

2.1. Визначення авто кореляційної функції детермінованого процесу

При виконанні даного пункту завдання необхідно використовувати конспект лекцій та рекомендовані літературні джерела.

Детерміновані процеси – це процеси, які можна описати явними математичними формулами. Детермінований опис процесу передбачає, що є всі дані для того, щоб відтворити процес у будь-який момент часу, тобто точно передбачити часове протікання процесу x(t). Розв'язання детермінованої задачі визначається у вигляді конкретної математичної функції часу

$$x(t) = f(t). \tag{1}$$

Детерміновані процеси класифікуються наступним чином:

- **періодичні –** гармонічні; полігармонічні;
- **неперіодичні –** майже періодичні; перехідні.

В розрахунковій роботи необхідно вказати, до якого з класів відносяться задані детерміновані процеси.

Для виконання даного пункту необхідно визначити аналітичні вирази автокореляційних функцій заданих завданням детермінованих процесів

Автокореляційною функцією (АКФ) називається функція, що визначає ступінь зв'язку між значенням процесу x(t) в кожний даний момент часу t та його значеннями в моменти часу, що зміщені відносно t на величину τ.

Для обмежених у часі процесів АКФ визначається залежністю:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)dt. \tag{2}$$

Для τ=0 :

$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = E_x,$$

що збігається з енергією процесу.

Таким чином, фізично $R_x(\tau)$ - це енергія взаємодії коливань x(t) та x(t+τ). Максимум енергії має місце при τ=0 і дорівнює енергії коливань x(t). Тому часто на практиці АКФ нормують по енергії:

$$\rho_x(\tau) = \frac{R_x(\tau)}{E_x} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)dt}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt} \qquad (3)$$

Для необмежених за часом процесів (наприклад, періодичних) інтеграл (2) розходиться, тому АКФ для таких процесів визначається за виразом:

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \int\limits_{-T/2}^{+T/2} x(t)x(t+\tau)dt \,. \qquad (4)$$

2.2. Визначення спектральної щільності потужності детермінованого процесу

Для виконання даного пункту необхідно визначити аналітичні вирази спектральної щільності (СЩ) потужності заданих завданням детермінованих процесів.

Енергія будь-якого фізичного процесу x(t) визначається за виразом:

$$E = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt \,, \qquad (5)$$

Запишемо вираз для **x(t)** у вигляді інтегралу Фур'є:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\exp(j\omega t)d\omega \,,$$

де **X(ω) -** спектральна характеристика процесу.

З урахуванням **x(t)** вираз (5) для енергії запишемо у вигляді:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\exp(j\omega t)d\omega]dt.$$

Замінимо порядок інтегрування:

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\exp(j\omega t)dt]d\omega,$$

інтеграл в квадратних дужках має значення:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\exp(j\omega t)dt = X(-j\omega) = X^*(j\omega),$$

тому вираз для енергії набуває вигляду

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)X^*(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left| X(\omega) \right|^2 d\omega \qquad (6)$$

Вираз (6) – це загальне подання (зображення) теореми Парсеваля (теореми енергії), причому E – повна енергія.

Якщо врахувати, що $\omega = 2\pi f$, то можна записати:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| X(f) \right|^2 df \qquad (7)$$

Вирази (5)- (7) – це формулювання закону збереження енергії відповідно в часовій та частотній областях.

З (6) та (7) запишемо функцію

$$S_x(\omega) = \frac{\left|X(\omega)\right|^2}{2\pi} = S_x(f) = \left|X(f)\right|^2. \qquad (8)$$

Функція (8) описує розподіл енергії за частотою для детермінованого процесу і називається **спектральною щільністю енергії (потужності) чи спектральною енергетичною функцією**.

Квадрат модуля – це парна функція частоти, тоді можна в (6) перейти до інтегрування від 0 до ∞, відповідно подвоївши значення інтеграла:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left| X(\omega) \right|^2 d\omega = 2\int_0^{+\infty}\left| X(f) \right|^2 df = \int_0^{+\infty} G_x(f)df$$

$G_x(f) = \left|X(f)\right|^2 = S_x(f)$ - відповідає **фізичній спектральній щільності**.

Спектральну щільність потужності аналітично доцільно визначати за визначеною авто кореляційною функцією, використавши пару перетворень Фур‘є:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|X(\omega)\right|^2 \exp(j\omega\tau)d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega)\exp(j\omega\tau)d\omega \qquad (9)$$

$$S_x(\omega) = \left|X(\omega)\right|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)\exp(-j\omega\tau)d\tau . \qquad (10)$$

Згідно теореми Парсеваля, вираз (10) – це СЩ енергії (потужності) процесу x(t). **Вирази (9) та (10) – це пара перетворень Фур‘є, якими встановлюється зв‘язок між АКФ та СЩ потужності для детермінованих процесів.**

2.3. Перетворення заданих процесів у випадковий процес, визначення його енергетичних характеристик.

Ці пункти розрахункової роботи виконуються на ЕОМ з використанням програмного забезпечення Матлаб [4].

2.4. Висновки по роботі

У висновках наводяться основні результати проведеного аналізу фізичних процесів, дається оцінка отриманих результатів.

3. Рекомендації по оформленню розрахункової роботи

1. Розрахункова робота повинна бути оформлена на аркушах паперу формату А4 (заповнюється один бік аркушу).
2. Рукопис роботи (виведення формул, пояснення, висновки) виконується студентом від руки.
3. Графіки характеристик, визначених на ЕОМ, роздруковуються безпосередньо з програми. У рукописі наводяться лістинги програм.
4. Титульний лист повинен бути встановленого зразку.
5. Пояснювальна записка містить завдання на розрахункову роботу, зміст, текстову частину, список літературних джерел.
6. Текст повинен бути розділеним на розділи (відповідно до завдання), підрозділи, пункти. Порядкові номери розділів позначаються арабськими цифрами, підрозділи нумеруються по порядку в межах розділу. Номер підрозділу складається з номеру розділу та підрозділу, які розділяються крапкою.
7. Текст пояснювальної записки повинен бути чітким і послідовним, формулювання короткими.
8. Ілюстраціями в розрахунковій роботі є графіки процесів, спектральних та кореляційних характеристик. В тексті графіки наводяться після посилання на них, нумерація рисунків – наскрізна, арабськими цифрами..

Список рекомендованої літератури

1. Бублик Г.Ф. Фізичні процеси в приладах і системах: Навч. Посібник/ Г.Ф. Бублик. – К.: Либідь, 1997. – 200 с.

2. Бендат Дж. Применения корреляционного и спектрального анализа: Пер. с англ./ Дж. Бендат, А. Пирсол . – М.: Мир, 1983. – 312 с.

3. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника/ В.И. Тихонов. – М.: Сов.радио, 1966. – 678 с.

4. Лазарєв Ю.Ф. Моделювання на ЕОМ: Навчальний посібник/ Ю.Ф. Лазарєв. – К.: Корнійчук, 2007. – 290 с.

Додаток 1.

Варіанти детермінованих процесів x(t) та y(t) для розрахункової роботи.

Варіант	x(t)	y(t)
1	$x(t)=1{,}5e^{-0{,}2t}\sin 62t$	$y(t)=0{,}5\sin 7t$
2	$x(t)=3{,}2e^{-0{,}5t}\sin 1{,}2t$	$y(t)=\cos 2t$
3	$x(t)=1{,}2e^{-0{,}1t}\sin 3t$	$y(t)=0{,}5\cos 10t$
4	$x(t)=0{,}5e^{-0{,}5t}\sin 20t$	$y(t)=0{,}05\sin 10t$
5	$x(t)=e^{-2t}\sin 0{,}3t$	$y(t)=0{,}5\cos 5t$
6	$x(t)=2\cos 30t$	$y(t)=3e^{-1{,}2t}\cos 15t$
7	$x(t)=1{,}2e^{-2t}\sin 0{,}5t$	$y(t)=0{,}2\sin 31{,}4t$
8	$x(t)=1{,}2\sin 63t$	$y(t)=0{,}5e^{-t}\cos 100t$
9	$x(t)=5e^{-0{,}4t}\sin 250t$	$y(t)=2{,}5\cos 250t$
10	$x(t)=5e^{-1{,}5t}\sin 20t$	$y(t)=3{,}5\sin 10t$
11	$x(t)=2e^{-0{,}8t}\sin 50t$	$y(t)=\sin 314t$
12	$x(t)=2e^{-0{,}5t}\sin 64t$	$y(t)=2\cos 32t$
13	$x(t)=0{,}5\sin 628t$	$y(t)=e^{-2t}\cos 628t$
14	$x(t)=0{,}2e^{-0{,}1t}\cos 200t$	$y(t)=0{,}1\cos 150t$
15	$x(t)=1{,}5\sin 200t$	$y(t)=e^{-2t}\cos 200t$
16	$x(t)=\cos 4t$	$y(t)=e^{-3t}\cos 60t$
17	$x(t)=3{,}5\sin 10t$	$y(t)=e^{-5t}\cos 60t$
18	$x(t)=0{,}8e^{-4t}\sin 64t$	$y(t)=1{,}5\sin 100t$
19	$x(t)=3\sin 180t$	$y(t)=5e^{-5t}\sin 100t$

20	$x(t) = 30e^{-2t}\cos 13t$	$y(t) = 25\sin 25t$
21	$x(t) = e^{-t}\cos 20t$	$y(t) = 0{,}5\sin 100t$
22	$x(t) = 5\cos 20t$	$y(t) = 2e^{-0{,}2t}\cos 60t$
23	$x(t) = 2\sin 25t$	$y(t) = 3e^{-3t}\cos 25t$
24	$x(t) = 10\cos 6{,}5t$	$y(t) = 15e^{-5t}\sin 38t$
25	$x(t) = e^{-4t}\sin 80t$	$y(t) = \cos 33t$
26	$x(t) = 10\cos 4t$	$y(t) = 15e^{-3t}\sin 62t$
27	$x(t) = 2{,}5\cos 100t$	$y(t) = 3{,}5e^{-5t}\cos 150t$