

Ю. Ф. Лазарєв

**ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ
ЧУТЛИВИХ ЕЛЕМЕНТІВ
СИСТЕМ ОРІЄНТАЦІЇ**

Лабораторний практикум

Електронний навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою НТУУ "КПІ"

Київ – КПІ – 2011

УДК 681.3(0.75)
Л17**Лазарєв Ю. Ф.**

Л17

Дослідження властивостей чутливих елементів систем орієнтації. Лабораторний практикум / Електронний навчальний посібник. – Київ: НТУУ "КПІ", 2011. – 157 с.

Наведено опис одинадцяти лабораторних робіт, виконання яких спирається на програмне (в середовищі Matlab) моделювання поведінки основних вимірювачів кутів орієнтації (перш за все – гіроскопічних). Головне призначення лабораторних робіт – прищепити студентам вміння проводити наукові (теоретичні і модельні) дослідження нелінійних систем.

Призначено для студентів технічних університетів. Може бути використано для курсового і дипломного проектування.

Іл. 65, табл. 6

Зміст

ВСТУП.....	5
1. ЦИКЛ "НЕЛІНІЙНІ ВЛАСТИВОСТІ ФІЗИЧНОГО МАЯТНИКА"	8
Мета циклу.....	8
Склад циклу	8
ЗАГАЛЬНА ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА.....	8
ОПИС ПРОГРАМНИХ ЗАСОБІВ.....	10
1.1. Дослідження залежності частоти власних коливань маятника від їх амплітуди.....	14
1.1.1. Мета роботи.....	14
1.1.2. Сценарій роботи.....	14
1.1.3. Теоретична частина. Неізохронність власних коливань. Скелетні криві...14	14
1.1.4. Контрольні запитання.....	20
1.2. Дослідження амплітудно-частотних характеристик маятника при горизонтальній вібрації точки його підвісу.....	21
1.2.1. Мета роботи.....	21
1.2.2. Сценарій роботи.....	21
1.2.3. Теоретична частина. Амплітудно-частотні характеристики маятника	21
1.2.4. Завдання.....	24
1.2.5. Методичні вказівки до виконання.....	24
1.2.6. Контрольні запитання.....	24
1.3. Дослідження випрямного ефекту маятника при вібрації точки його підвісу	25
1.3.1. Мета роботи.....	25
1.3.2. Сценарій роботи.....	25
1.3.3. Теоретична частина. Випрямний ефект	26
1.3.4. Завдання.....	28
1.3.5. Контрольні запитання.....	28
1.4. Дослідження параметричних коливань маятника при вертикальній вібрації точки його підвісу.....	29
1.4.1. Мета роботи.....	29
1.4.2. Сценарій роботи.....	29
1.4.3. Теоретична частина. Параметричні коливання маятника	30
1.4.4. Завдання.....	35
1.4.5. Методичні вказівки до виконання.....	35
1.4.6. Контрольні запитання.....	35
2. ЦИКЛ "ДИНАМІКА ГІРОСКОПІВ"	37
Вступ.....	37
2.1. Дослідження поведінки симетричного зрівноваженого гіроскопа.....	38
2.1.1. Мета роботи.....	38
2.1.2. Сценарій роботи.....	38
2.1.3. Теоретична частина.....	38
2.1.4. Опис програмних засобів	46
2.1.5. Завдання.....	53
2.1.6. Методичні вказівки до виконання.....	55
2.1.7. Контрольні запитання.....	57
2.2. Дослідження поведінки громаятника.....	58
2.2.1. Мета роботи.....	58
2.2.2. Сценарій роботи.....	58
2.2.3. Теоретична частина.....	58
2.2.4. Опис програмних засобів	66
2.2.5. Завдання.....	71
2.2.6. Методичні вказівки до виконання.....	71
2.2.7. Контрольні запитання.....	73
2.3. Дослідження поведінки гіроскопа у кардановому підвісі.....	74
2.3.1. Мета роботи.....	74
2.3.2. Сценарій роботи.....	74
2.3.3. Теоретична частина.....	74
2.3.4. Опис програмних засобів	79
2.3.5. Завдання.....	82

2.3.6. Методичні вказівки до виконання.....	84
2.3.7. Контрольні запитання.....	86
3. ЦИКЛ "ДИНАМІКА ЧУТЛИВИХ ЕЛЕМЕНТІВ СИСТЕМ ОРІЄНТАЦІЇ НА РУХОМІЙ ОСНОВІ"	88
Вступ	88
3.1. Дослідження поведінки двоступеневого гірокомпаса на рухомій основі.....	89
3.1.1 Мета роботи.....	89
3.1.2. Теоретична частина.....	89
3.1.3. Опис програмного забезпечення.....	95
3.1.4. Завдання.....	97
3.1.5. Методичні вказівки до виконання.....	98
3.1.6. Контрольні запитання.....	99
3.2. Дослідження поведінки гіроскопа напрямку на рухомій основі.....	101
3.2.1 Мета роботи.....	101
3.2.2 Теоретична частина.....	101
3.2.3. Опис програмного забезпечення.....	115
3.2.4. Завдання.....	119
3.2.5. Методичні вказівки до виконання.....	119
3.2.6. Контрольні запитання.....	121
3.3. Дослідження поведінки гіромаятника на рухомій основі	122
3.3.1. Мета роботи.....	122
3.3.2 Теоретична частина.....	122
3.3.3. Опис програмного забезпечення.....	128
3.3.4. Завдання.....	132
3.3.5. Методичні вказівки до виконання.....	132
3.3.6. Контрольні запитання.....	133
3.4. Дослідження поведінки маятникового гірокомпаса на рухомій основі.....	135
3.4.1. Мета роботи.....	135
3.4.2 Теоретична частина.....	135
3.4.3. Опис програмного забезпечення.....	139
3.4.4. Завдання.....	143
3.4.5. Методичні вказівки до виконання.....	143
3.4.6. Контрольні запитання.....	144
ДОДАТОК. ЗРАЗОК ЗВІТУ З ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ.....	146

Вступ

Лабораторний практикум «Основи теорії чутливих елементів систем орієнтації» призначений для:

- ознайомлення з головними властивостями гіроскопічних приладів та пристроїв шляхом моделювання їх поведінки по програмних моделях;
- ознайомлення з головними нелінійними властивостями чутливих елементів систем орієнтації і методами їх теоретичного досліджування;
- набуття вмінь і навичок критичного відношення до результатів як теоретичного дослідження, так і моделювання, особливо, до результатів власних розрахунків і вимірювань; вмінь зіставляти результати, одержані шляхом моделювання по програмних моделях, з результатами, одержаними шляхом теоретичного аналізу, і володіти способами підвищення їх достовірності;
- набуття вмінь переносити результати теоретичного дослідження і програмного моделювання на реальну поведінку відповідних пристроїв;
- набуття вмінь і навичок робити обґрунтовані висновки щодо можливих причин розходження результатів теоретичного дослідження і моделювання, джерел цього розходження, критичного відношення до власних вимірювань і розрахунків, встановлювання степеня адекватності теоретичної моделі;
- набуття навичок аналізу причин виникнення похибок власних експериментальних вимірювань і вживання заходів з їх усунення.

Лабораторні роботи проводяться по програмних моделях на персональних комп'ютерах у середовищі Matlab. Для їх виконання студент має опанувати основні операції роботи з цією комп'ютерною системою, вміти «читати» програми, написані на М-мові, здійснювати у разі необхідності корегування у бажаному напрямку цих програм.

Метою кожної лабораторної роботи є зіставлення результатів вивчення поведінки гіроскопа через програмне моделювання і через теоретичне дослідження. Тому необхідною передумовою виконання студентом відповідної лабораторної роботи є попереднє вивчення результатів теоретичного аналізу поведінки відповідного пристрою в умовах, що задані завданням. На основі "експериментальних" вимірювань при моделюванні студент робить висновки про адекватність одержаних ним результатів, про їх збіжність із передбаченими теорією, корегує власні дії, прагнучи досягнути максимального зближення результатів теоретичного аналізу з «експериментальними дослідженнями». При цьому студент повинен чітко розуміти причини виявлених розходжень, виявити їх джерело і обґрунтувати зроблені висновки.

Студентові

Пам'ятайте! Головною метою у проведенні вами цих лабораторних робіт є те, щоб теоретичний математичний опис руху певних пристроїв у типових обставинах, наближених до реальних, "ожив" для вас. Щоб ви навчилися "читати" формули, які описують властивості нелінійних систем. Щоб за кожним позна-

ченням, що входить у відповідну формулу, ви уявили його фізичний зміст (який саме цей параметр (постійна складова, амплітуда, частота чи початкова фаза коливань) і якої саме фізичної величини). Щоб ви з'ясували фізичну причину (силу чи момент сил) того явища, яке ви вивчаєте, наочно уявили рух пристрою у просторі. Щоб ви уявили собі реальні обставини, в яких може проявитися досліджуване явище (характер руху основи, початкові умови руху, дія тих чи інших моментів сил), а також ті обставини, в яких воно буде відсутнє. Щоб ви навчилися критично (але не скептично) відноситися до результатів дослідження (перш за все – отриманих вами особисто), як теоретичних, так й експериментальних (у тому числі – через моделювання), чітко уявляли переваги й недоліки тих чи інших методів досліджування і моделей, вміли обирати з них ті, що дають за даних умов найдостовірніші результати.

Тому прийміть наступні поради.

Починайте з уточнення завдання і його мети. Перш за все замислитесь над тим, який саме параметр вам потрібно експериментально "виміряти" або розрахувати.

Ознайомтеся з формою подання результатів експерименту за використовуваною програмною моделлю, – що вона дозволяє вивчити, і де межі у завданні зовнішніх дій і параметрів системи, яка вивчається. Подумайте, як здійснити "вимірювання" і розрахунок потрібного вихідного параметра руху пристрою на основі тих результатів, що висвітлюються на екрані комп'ютера

Будь-який експеримент, включаючи модельний, не може бути якісно проведений, якщо попередньо не передбачити, який саме результат ви маєте отримати. Суть наукового експерименту завжди полягає у перевірці деякої гіпотези, яка апріорі висувається експериментатором (у розглядуваному випадку – вами). Наприклад: "Цей пристрій у цих заданих умовах буде вести себе ось таким певним чином". Причому це поводження має бути максимально конкретизовано, впритул до приблизних значень параметрів очікуваного руху.

Тому перш за все ознайомтеся з тим, що у цьому випадку передбачає теорія. Знайдіть відповідну формулу, уясніть значення усіх параметрів, що входять у неї. Бажано, щоб ще до проведення модельного експерименту ви уявили собі характер очікуваного руху і обчислили очікуване значення вихідної величини за тих значень, які ви вводите для моделі. Тоді ви будете готові до сприйняття результатів моделювання.

Очікуйте, що попервах результати моделювання не збігатимуться з результатом попередніх розрахунків. Це є нормальним явищем. Воно пояснюється вашою недосвідченістю і з набуттям досвіду поступово зникає. Незбіг може бути викликаний наступними обставинами:

- 1) ви неправильно розумієте ту інформацію, яка надана вам на екрані монітору; ви не те вимірюєте, або не в тих одиницях виміру, які використали при попередньому розрахунку по формулі; перевірте, чи збігаються розмірності розрахованої вами величини і величини, яку ви виміряли по модельних графіках;

- 2) ви неправильно записали формулу при розрахунку, або невірно розумієте її зміст; перевірте фізичну розмірність величин, що входять у формулу; перевірте, чи збігаються розмірності правої і лівої частин формули;
- 3) дані в розрахунку і в моделі не збігаються; перевірте, чи збігаються значення даних, які ви ввели в модель, з даними, які ви використали при розрахунку, і, перш за все, чи збігаються фізичні розмірності відповідних величин в моделі і в розрахунку;
- 4) якщо характер руху моделі різко відрізняється від очікуваного, перевірте, чи не виходять параметри руху за межі, всередині яких є слушною прийнята математична модель пристрою; якщо виходять, потрібно змінити значення вхідних параметрів у такий спосіб, щоб цього не було.

Незначне (до 30%) розходження розрахованого і виміряного значень можуть бути викликані:

- 1) недбалим виконанням вами розрахунків;
- 2) неточним вимірюванням потрібних характеристик руху; задля підвищення точності вимірювання на графіках використовуйте функцію *Zoom in*, яка є у меню графічного вікна *Matlab* і збільшуйте модельний час в експерименті (збільшить кількість максимальних періодів);
- 3) неточним чисельним інтегруванням диференціальних рівнянь у програмній моделі; для підвищення точності збільшить кількість кроків інтегрування на мінімальному періоді;
- 4) неточністю прийнятої теоретичної моделі; перевірте, які саме припущення покладені в основу теоретичної моделі і чи справджуються вони при прийнятих значеннях параметрів;
- 5) неточністю прийнятої програмної моделі; перевірте рівняння, закладені у процедуру правих частин, на предмет, чи немає в ній помітних помилок.

1. Цикл "Нелінійні властивості фізичного маятника"

Мета циклу

Вивчити за програмною чисельною моделлю на персональному комп'ютері головні нелінійні властивості поведінки фізичного маятника і порівняти їх з тими, що випливають з теоретичного аналізу. Зробити висновки з адекватності програмної моделі і результатів, одержаних шляхом наближених теоретичних досліджень.

Склад циклу

Цикл складається з таких лабораторних робіт.

1. Дослідження залежності частоти власних коливань маятника від їх амплітуди.
2. Дослідження амплітудно-частотних характеристик маятника при горизонтальній вібрації точки його підвісу.
3. Дослідження випрямного ефекту маятника при вібрації точки його підвісу.
4. Дослідження параметричних коливань маятника при вертикальній вібрації точки його підвісу.

Лабораторні роботи виконуються на персональних комп'ютерах на основі того самого програмного забезпечення з використанням середовища MatLAB.

Загальна теоретична частина

Нелінійні властивості фізичного маятника можна вивчати за математичною моделлю, що описується наступним диференціальним рівнянням другого порядку:

$$J\ddot{\varphi} + R \cdot \dot{\varphi} + mgl[1 + n_y(t)] \sin \varphi = -mgl n_x(t) \cos \varphi, \quad (0.1)$$

де J – момент інерції ФМ відносно осі Z обертання маятника; R – коефіцієнт кутового демпфірування; m – маса маятника; l – відстань від центра мас C (рис. 1) до осі обертання маятника; $n_y(t)$, $n_x(t)$ – перевантаження (відношення прискорень до прискорення вільного падіння g) точки підвісу відповідно у вертикальному і горизонтальному напрямках; φ – кут відхилення маятника від вертикалі.

Теоретичне дослідження зручно здійснювати по дещо перетворених рівняннях, перш за все приведених до так званого "безрозмірного" вигляду. Для цього слід ввести у розгляд "безрозмірний" час τ , наприклад, за формулою:

$$\tau = \omega_0 \cdot t, \quad (0.2)$$

де позначено

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}} \quad (0.3)$$

частота власних малих коливань маятника.



Рис. 0.1. Кінематика фізичного маятника

Тепер рівняння (0.1) можна подати у наступному виді:

$$\varphi'' + 2\zeta\varphi' + [1 + n_y(\tau)]\sin\varphi = -n_x(\tau)\cos\varphi \quad (0.4)$$

Тут використані такі позначення: $\zeta = R/(2\sqrt{mgl \cdot J})$ - відносний коефіцієнт загасання; $\varphi' = d\varphi/d\tau$ - безрозмірна кутова швидкість; $\varphi'' = d^2\varphi/d\tau^2$ - безрозмірне кутове прискорення.

Крім того, для деяких випадків диференціальні рівняння важливо подавати у так званій "нормальній формі Коші", тобто у вигляді сукупності диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно похідних.

Це, по відношенню до рівняння (0.4) можна здійснити, наприклад, вводячи наступні нові змінні

$$y_1 = \varphi; \quad y_2 = \varphi' \quad (0.5)$$

Тоді рівняння (0.4) можна подати у вигляді системи з двох рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{d\tau} = y_2; \\ \frac{dy_2}{d\tau} = -2\zeta y_2 - [1 + n_y(\tau)] \sin y_1 - n_x(\tau) \cos y_1. \end{cases} \quad (0.6)$$

Головні висновки про нелінійні особливості поведіння ФМ найзручніше робити, аналізуючи рівняння (0.4) або (0.6).

Опис програмних засобів

Дослідження нелінійних властивостей фізичного маятника здійснюється шляхом чисельного інтегрування диференціальних рівнянь ФМ у середовищі MatLAB. Для цього розроблений пакет програм і процедур мовою системи MatLAB, який складається з наступних програмних одиниць:

- 1) керуючого script-файла *FizmayatnU.m* - головної програми, яка по чергово викликає на запуск програми *FizmayatnU_Zastavka*, *FizmayatnU_Menu* та *FizmayatnU_Yadro* і забезпечує повернення на початок програми для повторювання дій;
- 2) script-файла *FizmayatnU_Zastavka.m*, який здійснює введення первісних даних і виведення числової і текстової інформації про програму до екрану дисплею;
- 3) script-файла *FizmayatnU_Menu.m*, який забезпечує змінювання даних у діалоговому режимі;
- 4) script-файла *FizmayatnU_Yadro.m*, який здійснює чисельне інтегрування диференціальних рівнянь маятника і організує виведення графічної, текстової і числової інформації на екран дисплею в окреме графічне вікно; чисельне інтегрування здійснюється за допомогою стандартної програми *ode45*, яке використовує авторську процедуру *FM2*;
- 5) файл-функції *FM2.m*, яка містить процедуру *FM2* для обчислення значень правих частин диференціальних рівнянь маятника.

Тексти усіх зазначених файлів наведено нижче

Файл *FizmayatnU.m*

```
% FizMayatnU
% Головна (керуюча) програма моделювання руху маятника

% Ю.Ф.Лазарев, кафедра ПСОН, КПІ, Україна, 7-10-1998р.
% Останні змінення - 01-02-2001

FizMayatnU_Zastavka % Виклик програми Заставки
pause(3)
k = menu(' Що робити ? ',' Продовжити роботу ',' Закінчити роботу ');
if k==1,
    while k==1
        FizMayatnU_Menu % Виклик програми Меню
        FizMayatnU_Yadro % Виклик Ядра програми
        k=menu(' Що робити ? ',' Продовжити роботу ',' Закінчити роботу ');
    end
end
10
```

```
clear global % Очищення пам'яті
clear % Завершення FizMayatnU
```

Файл FizmayatnU_Zastavka.m

```
% FizMayatnU_Zastavka
% Частина програми FizMayatnU,
% що містить виведення заставки на екран

% Ю.Ф.Лазарев, кафедра ПСОН, КПИ, Україна, 24-09-1998р.
% Останні змінення - 01-02-2001
clc,echo on
% Це - програма FizMayatnU.
% Вона здійснює інтегрування рівнянь Фізичного Маятника
% при поступальній вібрації точки його підвісу:
%
% 
$$fi'' + 2*dz*fi' + (1+nmy*\sin(nu*t+ey))*\sin(fi) =$$

% 
$$= - nmx*\sin(nu*t+ex)*\cos(fi)$$

%
% де fi - кут відхилення маятника від вертикалі,
% dz - відносний коефіцієнт згасання,,
% nu - відносна частота вібрації точки підвісу,
% nmy,nmx - амплітуди віброперевантаження у вертикальному
% і горизонтальному напрямках відповідно,
% ey,ex - початкові фази коливань у вертикальному
% і горизонтальному напрямках відповідно.
%
% У подальшому позначено KM1 = [dz,nmy,nmx,nu,ey,ex] -
% матриця коефіцієнтів цього рівняння.
echo off
disp('-----')
% Введення "вшитих" значень
global KM1 MPFUN
sprogram = 'FizMayatnU.m'; sname ='Лазарев Ю.Ф.'; KM1 = [0 0 0 0 0 0];
MPFUN = 'MomFm1'; tfinal =2*pi*5;
fi0 =pi/180;fit0 = 0; % Завершення FizmayatnU_Zastavka
```

Файл FizmayatnU_Menu.m

```
% FizMayatnU_Menu
% Частина програми FizMayatnU,
% що здійснює діалогове введення і змінювання даних

% Ю.Ф.Лазарев, кафедра ПСОН, КПИ, Україна, 24-09-1998р.
% Останні змінення - 01-02-2001
k=1;
sname=input('Введіть прізвище І. Б. ');
while k<10
disp(' ')
disp(' Зараз встановлено ')
disp([sprintf(' Початковий відхил = %g град.', fi0*180/pi),...
sprintf(' Початкова швидкість = %g', fit0)])
disp(sprintf(' Кількість періодів = %g', tfinal/2/pi))
disp(' dz nmy nmx nu ey ex ')
disp(KM1)
k = menu(' Що змінити ? ', ...
sprintf(' Відносн. к-нт згасання = %g', KM1(1)),...
sprintf(' Перевантаж.(вертикаль) = %g', KM1(2)),...
sprintf(' Перевантаж.(горизонт.) = %g', KM1(3)),...
sprintf(' Відносна частота вібрації = %g', KM1(4)),...
sprintf(' Фаза (вертикаль) = %g град.', KM1(5)*180/pi),...
sprintf(' Фаза (горизонт.) = %g град.', KM1(6)*180/pi),...

```

```

sprintf(' Початковий відхил = %g град.', fi0*180/pi),...
sprintf(' Початкова швидкість = %g', fit0),...
sprintf(' Кількість періодів = %g', tfinal/2/pi),...
' Нічого не змінювати ');
disp(' ')
if k<7,
    KM1(k) = input( ['Зараз KM1(',num2str(k),sprintf(') = %g', KM1(k)),...
    ' Введіть нове значення = ']);
elseif k==7
    fi0 = input([sprintf('Зараз fi0 = %g градусів', fi0*180/pi),...
    ' Введіть нове значення = ']);
    fi0 = fi0*pi/180;
elseif k==8
    fit0 = input([sprintf('Зараз fit0 = %g', fit0),...
    ' Введіть нове значення = ']);
elseif k==9
    tfinal = input([sprintf('Зараз кількість періодів = %g', tfinal/2/pi),...
    ' Введіть нове значення = ']);
    tfinal = tfinal*2*pi;
end % i f k<7
end % while % Завершення FizmayatnU_Menu

```

Файл FizmayatnU_Yadro.m

```

% FizMayatnU_Yadro
% Частина програми FizMayatnU, що здійснює головні обчислення
% (чисельне інтегрування ДР)

% Ю.Ф.Лазарев, кафедра ПСОН, КПИ, Україна, 7-10-1998р.
% Останні змінення - 01-02-2001
% 1. Підготовка початкових умов
%-----
t = 0; tf = tfinal; y0 =[fi0 fit0];
options = odeset('RelTol',1e-8,'AbsTol',[1e-10 1e-10]);
% 2. Організація циклу інтегрування
%-----
[t,y] = ode45('FM2',[0 tf],y0,options);
% 3. Виведення графіків
subplot(2,1,2); plot(t/2/pi,y(:,1)*180/pi);grid;
title('Відхилення від вертикалі','FontSize',14);
xlabel('Час (в періодах малих власних коливань)','FontSize',12);
ylabel('Кут у градусах','FontSize',12);
subplot(2,4,1:2); plot(y(:,1)*180/pi,y(:,2));grid;
title('Фазовий портрет','FontSize',14);
xlabel('Кут у градусах','FontSize',12); ylabel('Швидкість','FontSize',12);
subplot(2,4,3:4); axis('off');
h1= text(0.2,1.1,'Рух фізичного маятника','FontSize',14,'FontWeight','Bold');
h1=text(0.2, 1,'у відповідності до рівняння','FontSize',12);
h1=text(0,0.9,'fi" + 2*dz*fi" + [1+nmy*sin(nu*t+ey)]*sin(fi) =','FontSize',14);
h1=text(0.45,0.8,'= - nmх*sin(nu*t+ex)*cos(fi)','FontSize',14);
h1=text(0,0.7,'за таких значень параметрів:', 'FontSize',12);
h1=text(0.45,0.6,sprintf('dz = %g',KM1(1)), 'FontSize',12);
h1=text(0,0.5,sprintf('nmy = %g',KM1(2)), 'FontSize',12);
h1=text(0.7,0.5,sprintf('nmх = %g',KM1(3)), 'FontSize',12);
h1=text(0,0.4,sprintf('ey = %g град.',KM1(5)*180/pi), 'FontSize',12);
h1=text(0.7,0.4,sprintf('ex = %g град.',KM1(6)*180/pi), 'FontSize',12);
h1=text(0.45,0.3,sprintf('nu = %g',KM1(4)), 'FontSize',12);
h1=text(0,0.2,'і початкових умов:', 'FontSize',12);
h1=text(0,0.1,sprintf('fi(0) = %g град.',fi0*180/pi), 'FontSize',12);
h1=text(0.7,0.1,sprintf('fi"(0) = %g',fit0), 'FontSize',12);
h1=text(0,0.05,'-----');
h1=text(0,-0.2,'-----');

```

```
h1=text(-0.05,-0.05,['Програма ',sprogram]);
h1=text(0.5,-0.05,'Автор - Лазарєв Ю.Ф., каф. ПСОН');
h1=text(-0.05,-0.15,['Виконав ',sname]);
tm=fix(clock); Tv=tm(4:5);
h1=text(0.65,-0.15,[sprintf(' %g:',Tv),' ',date]);
% Кінець програми FizmayatnU_Yadro
```

Файл FM2.m

```
function z=FM2(t,y);
% Процедура обчислення правих частин ДР маятника

% Лазарєв Ю.Ф. 1-02-2001
global MPFUN
z(1)=y(2);
z(2)=-sin(y(1))+feval(MPFUN,t,y);
z=z';
```

Файл MomFM1.m

```
function m=MomFM1(t,y);
% Процедура обчислення поточного значення моменту сил,
% що діють на маятник

% Лазарєв Ю.Ф. 1-02-2001
global KM1
m=-2*KM1(1)*y(2)-KM1(3)*sin(KM1(4)*t+KM1(6))*cos(y(1))-
KM1(2)*sin(KM1(4)*t+KM1(5))*sin(y(1));
```

1.1. Дослідження залежності частоти власних коливань маятника від їх амплітуди

1.1.1. Мета роботи

Вивчити залежність частоти власних коливань маятника від їхньої амплітуди. Дослідити шляхом експериментування на чисельній моделі на ЕОМ цю залежність і порівняти її з аналогічними залежностями, одержаними шляхом теоретичних досліджень.

1.1.2. Сценарій роботи

1. Вивчити теоретичну частину роботи
2. Увійти у програмне оточення лабораторної роботи.
Встановити початкове значення кута відхилення маятника від вертикалі 179,9 градуса, початкову швидкість рівною нулю, амплітуди віброперевантажень рівними нулю і відносний коефіцієнт загасання рівним нулю. Зафіксувати результати моделювання на ЕОМ і, перш за все, величину періоду і форму коливань.
Зменшуючи початкове відхилення маятника, повторити експеримент, фіксуючи кожного разу період коливань, для 20-30 значень амплітуди від 179 до 0 градусів.
3. Побудувати експериментальну скелетну криву. Порівняти її з теоретичними. Зробити висновки.
4. Підготувати відповіді на запитання поділу 1.1.4.
5. Показати викладачеві одержані результати, пояснити їх. Розказати про зроблені висновки. Відповісти на запитання викладача.

1.1.3. Теоретична частина. Неізохронність власних коливань. Скелетні криві

З власного досвіду нам відомо, що період коливань гойдалки залежить від їх розмаху: якщо амплітуда розгойдування наближається до 90 градусів, період коливань помітно збільшується. Таку властивість мають лише нелінійні системи (в лінійних стаціонарних системах, поведження яких можна описати лінійними диференційними рівняннями зі сталими коефіцієнтами, частоти власних коливань залишаються тими самими за будь-яких значень амплітуди цих коливань). Її прийнято називати *неізохронністю власних коливань*.

Щоб вивчити теоретично цю властивість, розглянемо вільні незгасаючі коливання ФМ, коли точка його підвісу є нерухомою, а коефіцієнт демпфірування дорівнює нулю. У цих умовах рівняння (0.4) маятника набуде вигляду

$$\varphi'' + \sin \varphi = 0. \quad (1.1)$$

Спершу вивчимо поведження ФМ за рівнянням (0.7), користуючись методом лінеаризації, задля чого, припускаючи, що ФМ в умовах вільного руху

здійснює симетричні відносно вертикалі незгасаючі коливання зі сталою амплітудою a , наближено замінимо нелінійний член $\sin \varphi$ на лінійний

$$\sin \varphi \Rightarrow \sigma(a) \cdot \varphi. \quad (1.2)$$

Величина $\sigma(a)$ у загальному випадку є функцією амплітуди a коливань. Конкретний вигляд цієї функції визначається особливостями обраного методу лінеаризації. Якщо розглядувані коливання є стаціонарними (тобто їхня амплітуда не змінюється з часом), то $\sigma(a)$ є сталою величиною, і відповідне лінеаризоване рівняння

$$\varphi'' + \sigma(a) \cdot \varphi = 0 \quad (1.3)$$

стає рівнянням зі сталими коефіцієнтами, розв'язок якого легко відшукується відомими способами:

$$\varphi(\tau) = a \cos(\sqrt{\sigma(a)}\tau + \varepsilon). \quad (1.4)$$

Значення амплітуди a і початкової фази ε власних коливань визначаються (як сталі інтегрування) початковими умовами. Не зменшуючи узагальненості результатів, задля спрощення вважатимемо, що у початкову мить початкова кутова швидкість $\varphi'(0)$ дорівнює нулю, тобто маятник відхилено на початковий кут a від вертикалі і відпущено без поштовху. Тоді співвідношення (1.4) дещо спрощується

$$\varphi(\tau) = a \cos(\sqrt{\sigma(a)}\tau), \quad (1.5)$$

причому амплітуда a тепер дорівнює початковому відхиленню маятника.

Величина

$$\lambda(a) = \sqrt{\sigma(a)} \quad (1.6)$$

має сенс частоти власних коливань, точніше, враховуючи безрозмірну форму первісного рівняння, - відношення частоти власних коливань маятника до значення тієї ж частоти при прагненні амплітуди коливань до нуля (малих власних коливань). Як бачимо, згідно теорії, дійсно, частота власних коливань нелінійної системи може залежати від їхньої амплітуди.

Конкретизуємо залежність (1.6).

Спочатку використаємо лінеаризацію по кінцях. Згідно з нею, відрізок нелінійної залежності $y = f(x)$, що міститься всередині інтервалу $[-a, a]$, замінюється на пряму, що проходить крізь точки цього відрізка на кінцях інтервалу (тобто, через точки $[-a, f(-a)]$ і $[a, f(a)]$). Тому у цьому випадку коефіцієнт лінеаризації $\sigma(a)$, який визначає тангенс куту нахилу прямої до осі абсцис, дорівнюватиме

$$\sigma_1(a) = \frac{f(a) - f(-a)}{2a} = \frac{\sin(a) - \sin(-a)}{2a} = \frac{\sin(a)}{a}. \quad (1.7)$$

Більш складною виявляється аналогічна формула в прямій лінеаризації:

$$\sigma_2(a) = \frac{3}{2a^3} \int_{-a}^a xf(x)dx. \quad (1.8)$$

Через інтегрування частинами цей вираз для розглядуваної нелінійності (1.2) приводить до результату

$$\sigma_2(a) = \frac{3}{a^3} [\sin(a) - a \cdot \cos(a)]. \quad (1.9)$$

В теорії нелінійних коливань графік залежності частоти власних коливань від амплітуди, побудований таким чином, що амплітуду відкладено вдовж осі ординат, а частоту – вдовж осі абсцис, називають скелетною кривою.

Побудуємо скелетні криві ФМ відповідно до формул (1.7) і (1.9), використовуючи можливості системи MatLAB:

```
a=pi/1000:pi/100:4.5;
lam1=sqrt(sin(a)./a);
lam2=sqrt(3*(sin(a)-a.*cos(a))./a.^3);
plot(lam1,a,lam2,a, '.'), grid
title('Скелетні криві ФМ')
xlabel('Відносна частота власних коливань')
ylabel('Амплітуда (радіани)')
```

Результат наведено на рис. 1.1. Суцільна крива відповідає лінеаризації по кінцях, пунктирна - прямій лінеаризації.

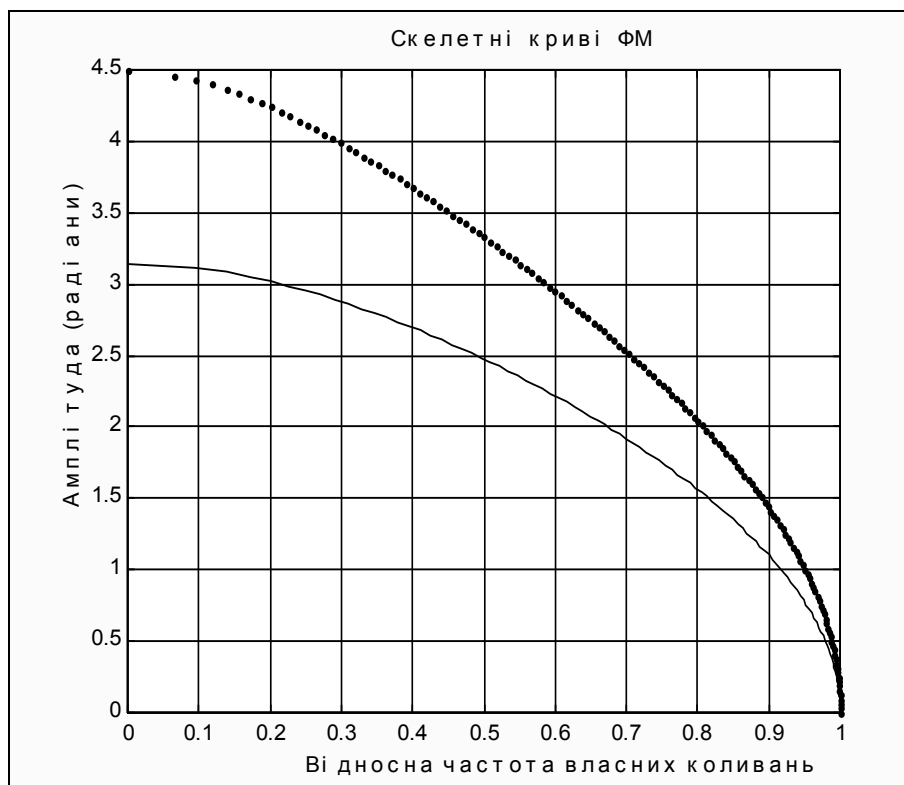


Рис. 1.1. Скелетні криві ФМ згідно лінеаризації по кінцях і прямій

Аналіз одержаних кривих дозволяє зробити висновок, що за великих амплітуд ($a > 1$ радіана) криві значно відрізняються. Але якщо амплітуди є малими ($a \ll 1$ рад) обидва види лінеаризації приводять до близьких значень.

Впевнімося у цьому.

За малих амплітуд вираз (1.7) набуває наближеного вигляду

$$\sigma_1(a) = \frac{\sin(a)}{a} \approx \frac{1}{a} \left(a - \frac{a^3}{6} \right) = 1 - \frac{a^2}{6}.$$

Аналогічно

$$\sigma_2(a) = \frac{3}{a^3} [\sin(a) - a \cdot \cos(a)] \approx \frac{3}{a^3} \left[a - \frac{a^3}{6} - a \cdot \left(1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24} \right) \right] = 1 - \frac{a^2}{8}.$$

Як бачимо, залежності від амплітуди є однотипними (квадратичними). Відрізняються вони лише значеннями коефіцієнтів.

Переходячи до виразів власної частоти, матимемо

$$\lambda_1(a) \approx \sqrt{\sigma_1(a)} \approx \sqrt{1 - \frac{a^2}{6}} \approx 1 - \frac{a^2}{12};$$

$$\lambda_2(a) \approx \sqrt{\sigma_2(a)} \approx \sqrt{1 - \frac{a^2}{8}} \approx 1 - \frac{a^2}{16}.$$

Згідно метода *гармонійної лінеаризації*, якщо розв'язок рівняння має вигляд (1.5), відповідний кутовий коефіцієнт прямої лінеаризації визначається співвідношенням

$$\sigma_3(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cdot \cos \vartheta) \cdot \cos \vartheta \cdot d\vartheta. \quad (1.10)$$

Безпосереднє застосування цієї формули до нелінійності (1.2) приводить до інтегралу

$$\sigma_3(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \sin(a \cdot \cos \vartheta) \cdot \cos \vartheta \cdot d\vartheta,$$

якого немає серед табличних інтегралів. Тому обмежимося лише випадком малих коливань, розглядаючи замість $\sin \varphi$ його наближений розклад у ряд Маклорена $\varphi - \frac{\varphi^3}{6}$. Застосовуючи формулу (16) для цієї нелінійності, матимемо

$$\sigma_3(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \left[a \cos \vartheta - \frac{(a \cos \vartheta)^3}{6} \right] \cos \vartheta d\vartheta = 1 - \frac{a^2}{8} \quad (1.11)$$

Таким чином, за малих амплітуд метод гармонійної лінеаризації приводить до тих самих результатів, що й метод прямої лінеаризації.

Щоб оцінити, наскільки точно методи лінеаризації відображують реальну частоту власних коливань маятника, відшукаємо точний розв'язок нелінійного рівняння (1.1).

Для цього помножимо це рівняння на $d\varphi$ і проінтегруємо:

$$\int_0^{\tau} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right) \cdot d\varphi + \int_0^{\tau} \sin \varphi \cdot d\varphi = 0; \Rightarrow \int_0^{\tau} \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right) \cdot d \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right) + \int_0^{\tau} \sin \varphi \cdot d\varphi = 0; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} [(\varphi')^2 - (\varphi'_0)^2] - [\cos \varphi - \cos \varphi_0] = 0. \quad (1.12)$$

Останнє співвідношення описує відомий результат – сума кінетичної і потенційної енергій залишається незмінною протягом усього руху маятника.

Припускаючи, як до того, початкову швидкість $\varphi''_0 = 0$, а початкове відхилення $\varphi_0 = a$, можна рівняння (1.12) перетворити до такого

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \mp \sqrt{2(\cos \varphi - \cos a)},$$

яке дозволяє розділити змінні:

$$\tau = \mp \int_a^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos a)}}. \quad (1.13)$$

Знак '-' слід використовувати при зменшенні куту φ від a до $-a$, а знак '+' - при збільшенні куту від $-a$ до a .

Позначимо

$$k = \sin \frac{a}{2}; \quad \sin z = \frac{1}{k} \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (1.14)$$

В цих позначеннях матимемо

$$\begin{aligned} \sqrt{2(\cos \varphi - \cos a)} &= \sqrt{2(1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1 + 2 \sin^2 \frac{a}{2})} = \\ &= \sqrt{4 \sin^2 \frac{a}{2} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{a}{2}}\right)} = 2k \cdot \cos z. \end{aligned}$$

Диференціюючи другий вираз (1.14), одержимо

$$\frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cdot d\varphi = k \cdot \cos z \cdot dz,$$

звідки випливає

$$d\varphi = \frac{2k \cdot \cos z}{\cos \frac{\varphi}{2}} dz = \frac{2k \cdot \cos z}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 z}} dz.$$

Враховуючи це, розв'язок (1.13) можна подати у вигляді

$$\tau = \mp \int_{\pi/2}^z \frac{dz}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 z}}. \quad (1.15)$$

Функція $\tau(z)$ є багатозначною. Певному значенню величини z відповідає безліч різних моментів часу τ . Кожного разу, коли кут φ сягає максимального або мінімального значення, знак перед інтегралом у виразі (1.15) змінюється на протилежний. Наприклад, на першому проміжку, коли кут φ змінюється від свого максимального значення a , зменшуючись і наближаючись до нуля, залежність (1.15) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \tau &= - \int_{\pi/2}^z \frac{dz}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 z}} = \int_z^{\pi/2} \frac{dz}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 z}} = \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{dz}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 z}} - \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 z}} = K(k) - F(k, z). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Тут використані відомі позначення $F(k, z) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 z}}$ - еліптично-го інтегралу 1-го роду у лежандрівій формі; $K(k) = F(k, \frac{\pi}{2})$ - повний еліптичний інтеграл 1-го роду.

Визначимо період T_o власних незгасаючих коливань маятника.

Щоб визначити проміжок часу, протягом якого маятник опускається від найвищого свого положення до вертикалі достатньо у виразі (1.16) покласти $z = 0$. Цей проміжок, очевидно, дорівнює четвертій частині шуканого періоду. Тому

$$T_o = 4K(k) = 4K\left(\sin\left(\frac{a}{2}\right)\right). \quad (1.17)$$

Це дає точну формулу для визначення частоти власних незгасаючих коливань маятника як функції їхньої амплітуди

$$\lambda(a) = \frac{2\pi}{T_o} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{K\left(\sin\left(\frac{a}{2}\right)\right)}. \quad (1.18)$$

Побудуємо графік точної скелетної кривої за допомогою функції *ellipke*:

```
a=pi/1000:pi/180:pi;
lam1=sqrt(sin(a)./a);
lam2=sqrt(3*(sin(a)-a.*cos(a))./a.^3);
[K,E]=ellipke((sin(a/2)).^2);
lam2=pi./(2*K);
x=0:0.01:1;
y=pi*ones(length(x));
plot(lam1,a,lam2,a,'.',x,y), grid
title('Скелетні криві ФМ')
xlabel('Відносна частота власних коливань')
ylabel('Амплітуда (радіани)')
```

Цей графік подано на рис. 1.2 пунктирною лінією. Для порівняння на ньому зображена також наближена скелетна крива, одержана раніше за допомогою метода лінеаризації по кінцях.

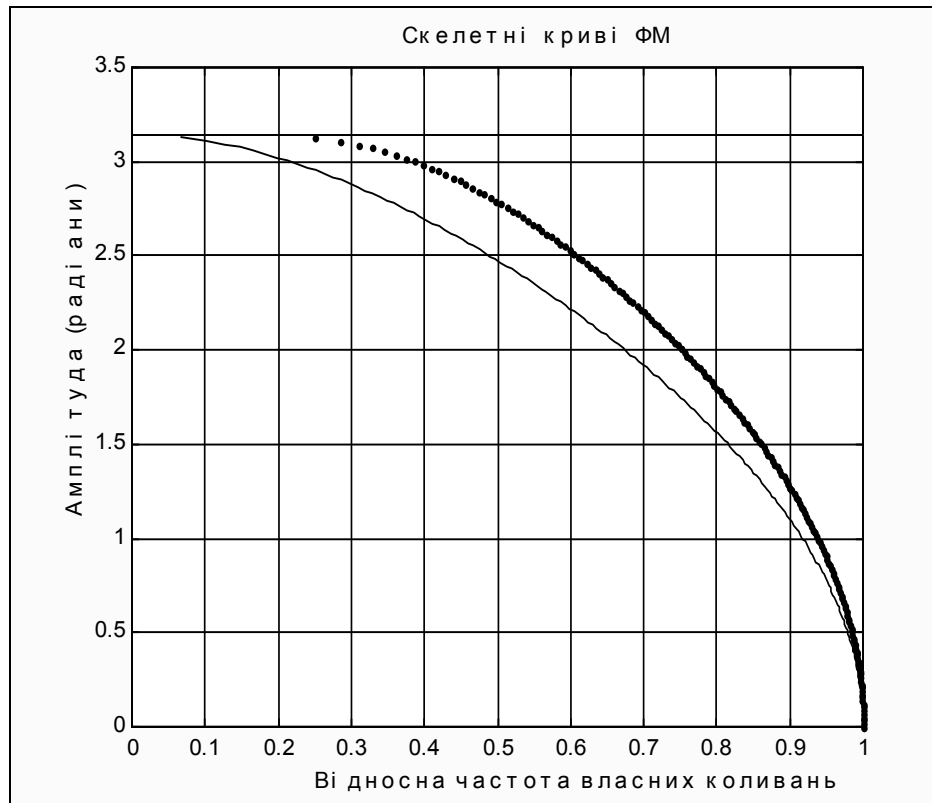


Рис. 1.2. Точна скелетна крива фізичного маятника

1.1.4. Контрольні запитання

1. Що таке "ізохронність" коливань? Чим обумовлено таку назву?
2. Чи є власні незгасаючі коливання маятника гармонічними?
3. Чим є характерною часова форма коливань маятника?
4. Які особливості має залежність частоти власних коливань маятника від їх амплітуди?
5. Що називають "скелетною кривою"? Чому її так називають? Який з видів метода лінеаризації приводить до скелетної кривої, найбільш наближених до точної?

1.2. Дослідження амплітудно-частотних характеристик маятника при горизонтальній вібрації точки його підвісу

1.2.1. Мета роботи

Порівняти експериментальні амплітудно-частотні характеристики вимушених коливань маятника з теоретичними.

1.2.2. Сценарій роботи

1. Вивчити теоретичну частину роботи
2. Увійти у програмне оточення лабораторної роботи. Встановити початкове значення кута відхилення маятника від вертикалі 0 градусів, початкову швидкість рівною нулю, амплітуду віброперевантаження у вертикальному напрямку рівною нулю. Амплітуду віброперевантаження у горизонтальному напрямку і відносний коефіцієнт загасання встановити у відповідності з завданням (п. 1.2.4). Змінюючи відносну частоту у діапазоні від 2 до 0 (20.. 30 значень), зафіксувати результати моделювання на ЕОМ і, перш за все, величину амплітуди усталених коливань.
3. Побудувати експериментальну АЧХ. Порівняти її з теоретичною. Зробити висновки.
4. Підготувати відповіді на запитання поділу 1.2.6.
5. Показати викладачеві одержані результати, пояснити їх. Доповісти про зроблені висновки. Відповісти на запитання викладача.

1.2.3. Теоретична частина. Амплітудно-частотні характеристики маятника

Розглянемо випадок суто горизонтальної вібрації основи. Рівняння (0.4) у цьому випадку набуває вигляду

$$\varphi'' + 2\zeta\varphi' + \sin \varphi = -n_x(\tau) \cos \varphi. \quad (1.19)$$

Припускаємо, що горизонтальна вібрація здійснюється за законом

$$n_x(\tau) = n_{xm} \cos(\nu\tau + \alpha), \quad (1.20)$$

де $\nu = \frac{\omega}{\omega_0}$ - відносна частота вібрації, тобто відношення частоти вібрації ω точки

підвісу до частоти ω_0 власних малих коливань маятника; n_{xm} - амплітуда віброперевантаження у горизонтальному напрямку; α - початкова фаза вібрації.

Вивчатимемо вимушений рух цієї нелінійної системи за допомогою метода лінеаризації. для цього лінеаризуємо нелінійність (див. (1.2)), вважаючи, що шуканий розв'язок має вигляд

$$\varphi(\tau) = a \cos \nu\tau, \quad (1.21)$$

що відповідає вимушеним усталеним коливанням маятника з частотою ν зовнішньої дії. Задля спрощення в правій частині рівняння нехтуватиме змінюванням у часі величини $\cos \varphi$, тобто вважатимемо $\cos \varphi = 1$. В результаті одержимо лінійне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\varphi'' + 2\zeta\varphi' + \lambda^2(a)\varphi = -n_{xm} \cos(\nu\tau + \alpha), \quad (1.22)$$

Тут амплітуда a і фаза α є шуканими величинами.

Підставляючи (1.21) у (1.22) і прирівнюючи коефіцієнти при $\cos \nu\tau$ і $\sin \nu\tau$, одержимо два алгебричних рівняння відносно двох невідомих a і α :

$$\begin{cases} [\lambda^2(a) - \nu^2] \cdot a = -n_{xm} \cdot \cos \alpha \\ -2\zeta\nu \cdot a = n_{xm} \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

Виключаючи з цих рівнянь невідому фазу, одержимо рівняння лише відносно амплітуди

$$[\lambda^2(a) - \nu^2]^2 + 4\zeta^2\nu^2 = n_{xm}^2 / a^2.$$

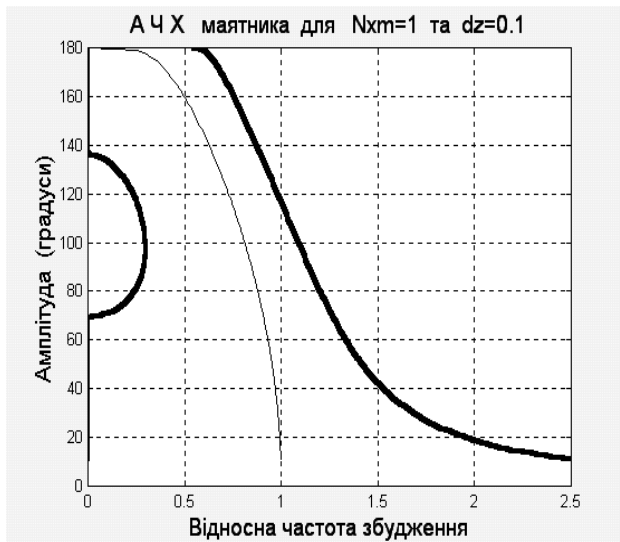
Розв'яжемо це рівняння відносно частоти ν вимушених коливань (вона же є частотою збудувальної сили):

$$\nu = \sqrt{\lambda^2(a) - 2\zeta^2 \pm \sqrt{\frac{n_{xm}^2}{a^2} - 4\zeta^2[\lambda^2(a) - \zeta^2]}}. \quad (1.23)$$

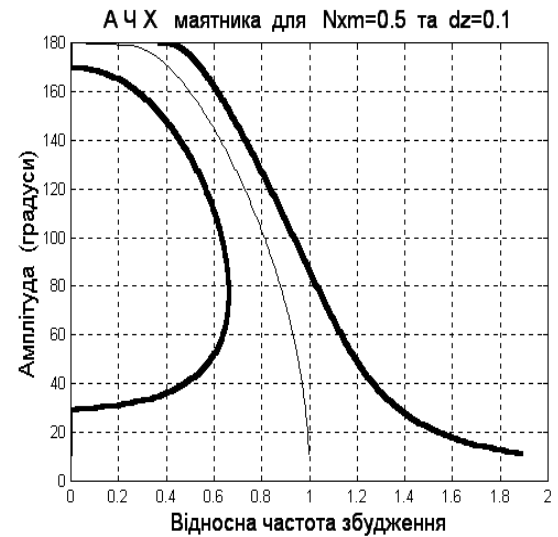
Тепер можна побудувати амплітудно-частотні характеристики, якщо є відомим коефіцієнт лінеаризації $\sigma(a)$ як функція амплітуди, параметри маятника і амплітуда n_{xm} зовнішньої дії. Для цього потрібно задаватися певними значеннями амплітуди a коливань маятника і розраховувати, на основі (1.23), відповідні до них значення частоти зовнішньої дії ν . Завважимо, що значення частоти ν , розраховані за виразом (1.23), групуються відносно значень скелетної кривої $\lambda(a)$ як навколо "скелета", чим і обумовлено назву скелетної кривої.

Складемо програму у середовищі Matlab для обчислення значень АЧХ маятника, використовуючи як частоту власних коливань лінеаризованої моделі знайдений раніше (1.18) точний вираз частоти власних коливань:

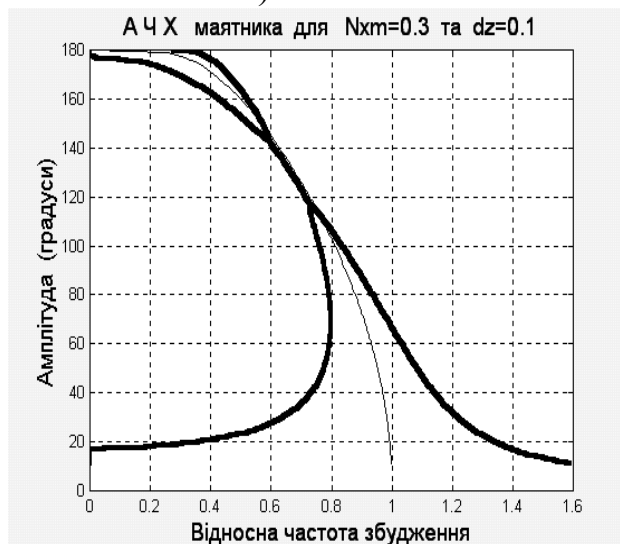
```
dz=0.1;  nxm=1;      % Параметри маятника і зовнішньої дії
dz2=1e-2;
s=1;  da=pi/180;  k=0;          kn=10;a=kn*da;      % Параметри для розрахунків
% Розрахунок А Ч Х
for k=1:(180-kn)
    a=a+da;                [K,E]=ellipke((sin(a/2)).^2);
    Lam(k)=pi/(2*K);      lam2=(Lam(k))^2;
    s=(nxm/a)^2-4*dz2*(lam2-dz2);
    A(k)=a*180/pi;       d=sqrt(s);
    Nu1(k)=sqrt(lam2-2*dz2-d);  Nu2(k)=sqrt(lam2-2*dz2+d);
end
% Побудова графіка
plot(Lam,A,Nu1,A,Nu2,A), grid
title('А Ч Х маятника для Nxм=1 та dz=0.1')
xlabel('Відносна частота збудження'), ylabel('Амплітуда (градуси)')
```



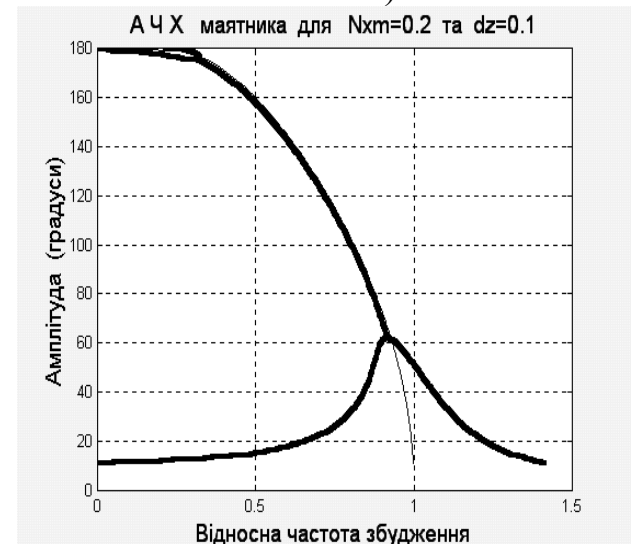
а)



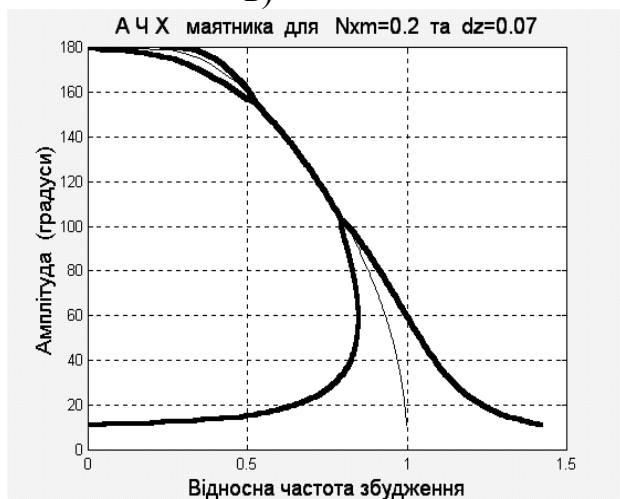
б)



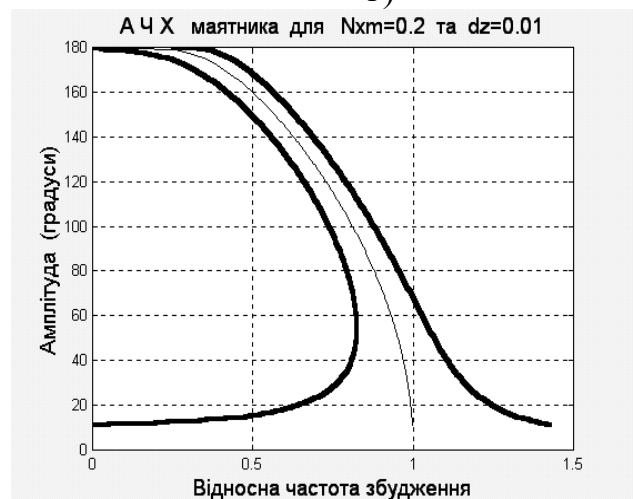
в)



г)



д)



е)

Рис. 1. 3. АЧХ маятника за різних умов

На рис. 1.3 відображені одержані графіки. Рис. 1.3, а...1.3, г презентують АЧХ при значенні відносного коефіцієнта згасання $\zeta = 0,1$ і різних значеннях

амплітуди вібрації точки підвісу ($n_{xm} = 1; 0,5; 0,3$ і $0,2$ відповідно). На рис. 1.3, д і 1.3, е подано АЧХ при $n_{xm} = 0,2$ і $\zeta = 0,07$ і $0,01$.

1.2.4. Завдання

Амплітуду перевантаження і відносний коефіцієнт загасання обрати з таблиці 1.1 згідно свого варіанту.

Таблиця 1.1

Варіант	n_{xm}	ζ
1	1	0.01
2	0.3	0.01
3	0.5	0.01
4	0.8	0.1
5	0.8	0.05
6	1	0.05
7	0.5	0.05
8	0.8	0.01
9	1	0.1
10	0.3	0.1
11	0.5	0.1
12	0.3	0.05

1.2.5. Методичні вказівки до виконання

Коли коливання маятника з часом не встановлюються, цю обставину слід фіксувати, а при побудові графіка, відмічати у середині відповідної зони частот характер руху маятника (обертання, зростання амплітуди коливань, загасання коливань).

1.2.6. Контрольні запитання

1. Які коливання нелінійної системи називають вимушеними?
2. Які особливості мають АЧХ нелінійних систем у порівнянні з АЧХ лінійної стаціонарної системи?
3. Які особливості мають АЧХ маятника?
4. Яку роль у графіку АЧХ відіграє скелетна крива?
5. За яких умов АЧХ нелінійної системи наближається до скелетної кривої?
6. По яких формулах і за яким алгоритмом обчислені побудовані на рис. 1.3 теоретичні АЧХ вимушених коливань маятника? Яку при цьому обрано залежність частоти власних коливань від їхньої амплітуди?
7. У чому полягає сутність метода лінеаризації відшукування розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь?

1.3. Дослідження випрямного ефекту маятника при вібрації точки його підвісу

1.3.1. Мета роботи

Вивчити причини виникнення і головні особливості випрямного ефекту маятника при вібрації точки його підвісу. Провести експериментальні дослідження випрямного ефекту на чисельній моделі і порівняти з теоретичними висновками.

1.3.2. Сценарій роботи

1. Вивчити теоретичну частину роботи
2. Увійти у програмне оточення лабораторної роботи. Встановити початкове значення кута відхилення маятника від вертикалі 0 градусів, початкову швидкість рівною нулю, амплітуди віброперевантажень і частоту вібрації – у відповідності до завдання (п. 1.3.4), відносний коефіцієнт загасання – 0.1. Зафіксувати результати моделювання на ЕОМ і, перш за все, величину сталої складової відхилення маятника від вертикалі, частоту і амплітуду усталених коливань. Повторити експеримент за різних значень зсуву фаз між коливаннями точки підвісу маятника у вертикальному і горизонтальному напрямках. Домогтися (і зафіксувати вищезазначені параметри), щоб а) відхилення від вертикалі було максимальним; б) відхилення було мінімальним; в) відхилення середнього положення було відсутнім. Впевнитися, що різниця між зафіксованими зсувами фаз дорівнює π і $\pi/2$ відповідно.
3. Встановити параметри, що відповідають максимальному відхиленню середнього положення маятника від вертикалі. Варіювати (2..3 значення) а) амплітудою віброперевантаження у вертикальному напрямку; б) амплітудою віброперевантаження у горизонтальному напрямку; в) частотою вібрації. Фіксувати вищезазначені параметри руху маятника. Встановити залежність випрямного ефекту від варійованих величин. Порівняти з результатами теоретичного аналізу. Зробити висновки.
4. Провести експерименти з вивчення випрямного ефекту маятника при суто горизонтальній вібрації основи. Встановити амплітуду горизонтального віброперевантаження 10, відносну частоту вібрації – 6. Змінюючи початкові умови, домогтися а) існування середнього відхилення у один бік; б) існування такого ж відхилення у протилежний бік; в) загасання коливань до положення рівноваги. Зафіксувати ці стани і параметри руху маятника. Встановивши умови існування випрямного ефекту, проваріювати (2..3 значення) а) амплітудою перевантаження; б) частотою вібрації, кожного разу домагаючись змінням початкових умов існування випрямного ефекту того самого знаку. Зафіксувати одержані результати.

Зробити висновки про залежність випрямного ефекту від варійованих величин.

5. Підготувати відповіді на запитання поділу 1.3.5.
6. Показати викладачеві одержані результати, пояснити їх. Доповісти про зроблені висновки. Відповісти на запитання викладача.

1.3.3. Теоретична частина. Випрямний ефект

При вібрації точки підвісу маятника одночасно у горизонтальному і вертикальному напрямках, спостерігається ще одне цікаве нелінійне явище:

середнє положення маятника при усталених вимушених його коливаннях буде відхилятися від положення вертикалі у той чи іншій бік.

Таке явище є притаманним лише для нелінійних, або лінійних нестационарних систем. В спеціальній літературі з гіроскопії його прийнято називати **випрямним ефектом**.

Розглянемо його теоретично, користуючись методом збурень.

Для цього знову скористаємося рівнянням (0.4), в якому вважатимемо, що вібрація основи здійснюється за законами:

$$n_y(\tau) = n_{ym} \sin(\nu\tau + \varepsilon), \quad n_x(\tau) = n_{xm} \sin(\nu\tau). \quad (1.24)$$

Тобто припускається, що точка підвісу маятника здійснює гармонійні коливання в вертикальному і горизонтальному напрямках з тою самою частотою, але з різними амплітудами і фазами.

З врахуванням цього рівняння (1.24) набуде вигляду

$$\varphi'' + 2\zeta\varphi' + [1 + n_{ym} \sin(\nu\tau + \varepsilon)] \sin \varphi = -n_{xm} \sin(\nu\tau) \cos \varphi. \quad (1.25)$$

У відповідності до метода збурень, будемо відшукувати розв'язок рівняння (1.25) у вигляді ряду

$$\varphi(\tau) = \mu \cdot \varphi_{(1)}(\tau) + \mu^2 \cdot \varphi_{(2)}(\tau) + \dots, \quad (1.26)$$

де μ – деякий малий параметр, $\varphi_{(1)}(\tau)$ і $\varphi_{(2)}(\tau)$ – розв'язки рівнянь першого і другого наближень відповідно.

Рівняння першого і другого наближень виходять шляхом групування членів рівняння (1.25), що містять як множник малий параметр μ у першому або другому степені відповідно. Для цього, перш за все, *вважатимемо, що амплітуди вібрації основи є малими*, у відповідності до чого замінимо у (1.25) їх на величини

$$n_{ym} \Rightarrow \mu \cdot n_{ym}; \quad n_{xm} \Rightarrow \mu \cdot n_{xm}. \quad (1.27)$$

Тепер підставимо (1.26) і (1.27) у (1.25) і прирівняємо коефіцієнти при членах рівняння, що мають як множник малий параметр у першому степені. Одержимо рівняння першого наближення:

$$\varphi_{(1)}'' + 2\zeta\varphi_{(1)}' + \varphi_{(1)} = -n_{xm} \sin(\nu\tau). \quad (1.28)$$

Аналогічно, групуючи члени з множником μ^2 , одержимо рівняння другого наближення:

$$\varphi_{(2)}'' + 2\zeta\varphi_{(2)}' + \varphi_{(2)} = -n_{ym}\varphi_{(1)} \sin(\nu\tau + \varepsilon). \quad (1.29)$$

Якщо обмежитися відшуканням лише усталених коливань, то розв'язок рівняння (1. 28) матиме вигляд:

$$\varphi_{(1)}(\tau) = \varphi_s \sin \nu\tau + \varphi_c \cos \nu\tau, \quad (1.30)$$

де

$$\varphi_s = -\frac{(1-\nu^2)}{(1-\nu^2)^2 + 4\zeta^2\nu^2} n_{xm}; \quad \varphi_c = \frac{2\zeta\nu}{(1-\nu^2)^2 + 4\zeta^2\nu^2} n_{xm}. \quad (1.31)$$

Використаємо розв'язок (1.30) для конкретизації правої частини рівняння (1.29) другого наближення:

$$\begin{aligned} \varphi_{(2)}'' + 2\cdot\zeta\cdot\varphi_{(2)}' + \varphi_{(2)} &= -n_{ym} \cdot (\varphi_s \cdot \sin \nu\tau + \varphi_c \cdot \cos \nu\tau) \cdot \sin(\nu\tau + \varepsilon) = \\ &= -\frac{n_{xm} \cdot n_{ym}}{2[(1-\nu^2)^2 + 4\zeta^2\nu^2]} \left\{ [(1-\nu^2) \cos \varepsilon - 2\zeta\nu \cdot \sin \varepsilon] + \right. \\ &\left. + [(1-\nu^2) \sin \varepsilon - 2\zeta\nu \cdot \cos \varepsilon] \cdot \sin 2\nu\tau - [(1-\nu^2) \cos \varepsilon + 2\zeta\nu \cdot \sin \varepsilon] \right\}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Обмежимося відшуканням не повного розв'язку рівняння другого наближення, а лише його сталої складової, значення якої, вочевидь, визначається сталою складовою у правій частині рівняння (1.32). Маємо:

$$\langle \varphi(\tau) \rangle = \langle \varphi_{(2)}(\tau) \rangle = \frac{n_{xm} \cdot n_{ym}}{2} \frac{(1-\nu^2) \cos \varepsilon - 2\zeta\nu \cdot \sin \varepsilon}{(1-\nu^2)^2 + 4\zeta^2\nu^2},$$

або

$$\langle \varphi(\tau) \rangle = \frac{n_{xm} \cdot n_{ym}}{2} \frac{\cos(\varepsilon + \Delta)}{\sqrt{(1-\nu^2)^2 + 4\zeta^2\nu^2}}, \quad (1.33)$$

де

$$\operatorname{tg} \Delta = \frac{2\zeta\nu}{1-\nu^2}. \quad (1.34)$$

Отже, теоретичний аналіз підтверджує можливість виникнення випрямного ефекту.

Проаналізуємо одержаний вираз (1.33). Перш за все привертає до себе увагу значна залежність сталої складової відхилення маятника від вертикалі від зсуву фаз ε між вібраціями у вертикальному і горизонтальному напрямках точки підвісу маятника. У залежності від цього зсуву фаз стала складова відхилу може бути відсутня (якщо $\varepsilon = -\Delta \pm (2k+1) \cdot \pi/2$), може бути максимальною за величиною і додатною (при $\varepsilon = -\Delta \pm 2k \cdot \pi$), або максимальною за величиною і від'ємною ($\varepsilon = -\Delta \pm (2k+1) \cdot \pi$). Як впливає з (1.33), якнайбільше значення відхилення сягає величини

$$|\langle \varphi(\tau) \rangle|_{\max} = \frac{n_{xm} \cdot n_{ym}}{2} \frac{1}{\sqrt{(1-\nu^2)^2 + 4\zeta^2\nu^2}}. \quad (1.35)$$

1.3.4. Завдання

Амплітуди віброперевантажень і частоту коливань точки підвісу оберіть з таблиці 1.2 згідно свого варіанту.

Таблиця 1.2

Варіант	n_{xm}	n_{ym}	ν
1	2	2	5
2	2	1	5
3	1	2	5
4	1	1	5
5	2	2	4
6	2	1	4
7	1	2	4
8	1	1	4
9	2	2	3
10	2	1	3
11	1	2	3
12	1	1	3

1.3.5. Контрольні запитання

1. Що прийнято називати "випрямним ефектом"? В яких системах можливе виникнення ВЕ?
2. Чи може існувати ВЕ у лінійній стаціонарній системі?
3. За яких умов може спостерігатися ВЕ маятника? У чому він проявляється?
4. Від яких параметрів суттєво залежить ВЕ маятника при вібрації точки його підвісу і як?
5. Як можна позбавитися випрямного ефекту?
6. Які коливання супроводжують випрямний ефект (з якою частотою)? Чи можливо, спостерігаючи усталені коливання, встановити за їхніми параметрами величину випрямного ефекту маятника?
7. Чи можливий випрямний ефект при суто горизонтальній вібрації точки підвісу маятника?
8. Які особливості випрямного ефекту при горизонтальній вібрації?
9. У чому полягає сутність методу збурень відшукування розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь?

1.4. Дослідження параметричних коливань маятника при вертикальній вібрації точки його підвісу

1.4.1. Мета роботи

Впевнитися у можливості виникнення параметричних коливань маятника при вертикальній вібрації точки його підвісу, експериментально вивчити головні особливості параметричних коливань і порівняти їх з теоретичними висновками.

1.4.2. Сценарій роботи

1. Вивчити теоретичну частину роботи
2. Увійти у програмне оточення лабораторної роботи. Встановити початкове значення кута відхилення маятника від вертикалі 1 градус, початкову швидкість рівною нулю, амплітуду віброперевантаження у горизонтальному напрямку рівною нулю. Амплітуду перевантаження у вертикальному напрямку і відносний коефіцієнт загасання встановити такими, як вказано у поділі 1.4.4. Змінюючи відносну частоту у межах між 0 і 2 (20..30 значень), зафіксувати результати моделювання на ЕОМ і, перш за все, величину амплітуди усталених коливань і їх частоту.
3. Побудувати експериментальну амплітудно-частотну характеристику параметричних коливань маятник. Порівняти її з теоретичною. Зробити висновки.
4. Для довільного значення частоти, де спостерігається наявність параметричних усталених коливань змінити у 2 рази амплітуду вібрації основи і зафіксувати параметри спостережуваного процесу. Аналогічно, змінити у 2 рази коефіцієнт демпфірування і зафіксувати результати. Зробити висновки.
5. Провести експерименти по вивченню умов виникнення коливань навколо верхнього (зазвичай нестійкого) положення рівноваги маятника. Встановити інтенсивність вертикальної вібрації – 10, відносну частоту вібрації – 5, початкове відхилення маятника – 170 градусів. Спостерігати модельований рух маятника. Впевнитися у тому, що коливання маятника здійснюються навколо горішнього положення. Варіюючи значенням а) амплітуди вертикальної вібрації; б) коефіцієнта демпфірування; в) частоти вібрації основи і д) початкового відхилення маятника встановити залежність параметрів і характеру руху маятника від цих параметрів. Зафіксувати результати усіх цих експериментів.
6. Підготувати відповіді на запитання п. 1.4.6.
7. Показати викладачеві одержані і зафіксовані результати, пояснити їх. Доповісти про зроблені висновки. Відповісти на запитання викладача.

1.4.3. Теоретична частина. Параметричні коливання маятника

Якщо точка підвісу маятника вібує лише у вертикальному напрямку, за малої інтенсивності вібрації поведження маятника майже не відрізняється від поведження його на нерухомій основі: при відхиленні маятника від вертикалі від здійснює загасаючі коливання навколо нижнього положення рівноваги.

Але при інтенсивній вертикальній вібрації замість загасання коливань може спостерігатися усталення коливань з певною амплітудою, причому характерною їхньою особливістю є те, що коливання здійснюються з частотою у два рази меншою за частоту вібрації основи. Такі усталені коливання одержали назву **параметричних коливань**.

Теоретичне дослідження є досить складним. Застосуємо для цього метод усереднення.

Припустимо, що вертикальна вібрація здійснюється за законом

$$n_y(\tau) = n_{ym} \cdot \sin v\tau. \quad (1.36)$$

Розкладаючи $\sin \varphi$ в ряд Маклорена і залишаючи в ньому лише перші два члени, можна подати рівняння (0.4) у вигляді

$$\varphi'' + 2\zeta\varphi' + [1 + n_{ym} \sin(v\tau)] \cdot \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6}\right) = 0. \quad (1.37)$$

Метою дослідження є вивчення можливості виникнення в системі, що описується цим рівнянням, стаціонарних (з незмінною амплітудою і частотою) коливань, які ми називаємо параметричними. Через те, що є невідомим заздалегідь з якою саме частотою здійснюватимуться ці коливання, будемо поки що вважати, що вони здійснюються за гармонічним законом з деякою невідомою частотою ν_p :

$$\varphi(\tau) = a_s \sin \nu_p \tau + a_c \cos \nu_p \tau = a \sin(\nu_p \tau + \varepsilon) = C e^{j\nu_p \tau} + D e^{-j\nu_p \tau},$$

де a - амплітуда; ε - фаза; C і D - комплексно-спряжені величини, що характеризує амплітуду і фазу

$$C = \frac{a}{2} e^{j\varepsilon}; \quad D = \frac{a}{2} e^{-j\varepsilon}. \quad (1.38)$$

Приведемо рівняння (1.37) до нормальної форми Коші. Для цього позначимо

$$y_1 = \varphi; \quad y_2 = \varphi'. \quad (1.39)$$

Тоді (1.37) можна подати у вигляді системи з двох рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{d\tau} = y_2 \\ \frac{dy_2}{d\tau} = -y_1 - 2\zeta \cdot y_2 - (n_{ym} \sin v\tau) y_1 + \frac{y_1^3}{6} \end{cases} \quad (1.40)$$

Перетворимо цю систему на наступну

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{d\tau} = y_2 \\ \frac{dy_2}{d\tau} = -v_p^2 y_1 + \mu[-(1-v_p^2)y_1 - 2\zeta \cdot y_2 - (n_{ym} \sin v\tau)y_1 + \frac{y_1^3}{6}] \end{cases} \quad (1.41)$$

в якій виділено малі члени (з множником μ) у такий спосіб, що решта (не малих) членів утворили лінійну стаціонарну систему з розв'язком виду (4.3):

$$y_1(\tau) = \varphi(\tau) = Ce^{jv_p\tau} + De^{-jv_p\tau}; \quad y_2(\tau) = y_1'(\tau) = jv_p(Ce^{jv_p\tau} - De^{-jv_p\tau}) \quad (1.42)$$

У відповідності до методу усереднення розв'язки (1.42) слід розглядати як заміну змінних y_1 і y_2 на нові змінні C і D . Здійснюючи таку заміну в системі (1.41) і позначаючи

$$\begin{aligned} \psi &= v_p \cdot \tau; \\ \mu \cdot f(C, D, \psi) &= \mu[-(1-v_p^2)(Ce^{j\psi} + De^{-j\psi}) - j2\zeta v_p(Ce^{j\psi} + De^{-j\psi}) - \\ &\quad - n_m \sin v\tau \cdot (Ce^{j\psi} + De^{-j\psi}) + \frac{1}{6}(Ce^{j\psi} + De^{-j\psi})^3], \end{aligned} \quad (1.43)$$

одержимо з (1.41) такі рівняння відносно нових змінних

$$\begin{cases} \frac{dC}{d\psi} = \frac{1}{j2v_p^2} \mu \cdot f(C, D, \psi) \cdot e^{-j\psi} \\ \frac{dD}{d\psi} = -\frac{1}{j2v_p^2} \mu \cdot f(C, D, \psi) \cdot e^{j\psi} \end{cases} \quad (1.44)$$

Рівняння (1.44), так само, як і первісні рівняння (1.40) є "точними" (не наближеними). Застосуємо до них операцію усереднення за поточною фазою ψ . Введемо позначення \bar{C} і \bar{D} для усереднених значень комплексних амплітуд C і D :

$$\bar{C} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C(\psi) \cdot d\psi; \quad \bar{D} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D(\psi) \cdot d\psi. \quad (1.45)$$

Тоді рівняння (1.44) перетворюються до виду

$$\begin{cases} \frac{d\bar{C}}{d\psi} = \frac{1}{j2v_p^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu \cdot f(\bar{C}, \bar{D}, \psi) \cdot e^{-j\psi} \cdot d\psi \\ \frac{d\bar{D}}{d\psi} = -\frac{1}{j2v_p^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu \cdot f(\bar{C}, \bar{D}, \psi) \cdot e^{j\psi} \cdot d\psi \end{cases} \quad (1.46)$$

Суть метода усереднення полягає не тільки в тому, що замість первісних квазілінійних рівнянь розглядаються еквівалентні ним усереднені рівняння у формі Коші з малими правими частинами (так звані "рівняння у стандартній формі"). Відмітною рисою є те, що точне інтегрування за фазою у правих частинах (1.46) замінюють на наближене, припускаючи при інтегруванні усереднені комплексні амплітуди (1.45) незмінними (тобто незалежними від фази). Це припущення є можливим внаслідок того, що праві частини рівнянь (1.46) за по-

будовою є малими, тобто швидкості змінювання усереднених комплексних амплітуд є також малими.

Враховуючи, що $\sin(v\tau) = \frac{j}{2}(e^{-jv\tau} - e^{jv\tau})$, можна перетворити вираз (1.43)

до такого

$$\begin{aligned} f(\bar{C}, \bar{D}, \psi) = & \{[-(1-v_p^2) - j2\zeta v_p]\bar{C} + \frac{1}{2}\bar{C}^2\bar{D}\}e^{j\psi} + \\ & + \{[-(1-v_p^2) + j2\zeta v_p]\bar{D} + \frac{1}{2}\bar{C}\bar{D}^2\}e^{-j\psi} + \frac{1}{6}\bar{C}^3e^{j3\psi} + \frac{1}{6}\bar{D}^3e^{-j3\psi} - \\ & - \frac{j \cdot n_m}{2} \{\bar{C}e^{j(\psi-v\tau)} - \bar{D}e^{-j(\psi-v\tau)} - \bar{C}e^{j(\psi+v\tau)} + \bar{D}e^{-j(\psi+v\tau)}\}, \end{aligned} \quad (1.47)$$

Використаємо одержаний вираз у (1.46) і здійснимо осереднення у правих частинах. Якщо при цьому врахувати, що

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\pm j \cdot k \cdot \psi} \cdot d\psi = 0; \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

то рівняння (1.46) можна привести до виду

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{C}}{d\psi} = & \frac{1}{j2v_p^2} \{[-(1-v_p^2) - j2\zeta v_p + \frac{1}{2}\bar{C}\bar{D}]\bar{C} - \\ & - j \frac{n_{ym}}{2} [\bar{C} \frac{1}{2\pi} (\int_0^{2\pi} e^{-jv\tau} d\psi - \int_0^{2\pi} e^{jv\tau} d\psi) - \\ & - \bar{D} \frac{1}{2\pi} (\int_0^{2\pi} e^{-j(2\psi-v\tau)} d\psi - \int_0^{2\pi} e^{j(2\psi+v\tau)} d\psi)]\}; \\ \frac{d\bar{D}}{d\psi} = & -\frac{1}{j2v_p^2} \{[-(1-v_p^2) + j2\zeta v_p + \frac{1}{2}\bar{C}\bar{D}]\bar{D} - \\ & - j \frac{n_{ym}}{2} [\bar{D} \frac{1}{2\pi} (\int_0^{2\pi} e^{-jv\tau} d\psi - \int_0^{2\pi} e^{jv\tau} d\psi) + \\ & + \bar{C} \frac{1}{2\pi} (\int_0^{2\pi} e^{-j(2\psi-v\tau)} d\psi - \int_0^{2\pi} e^{j(2\psi+v\tau)} d\psi)]\}; \end{aligned} \quad (1.48)$$

У подальшому будемо вивчати лише можливість встановлення у системі стаціонарних коливань, яким відповідає відсутність швидкостей змінювання комплексних усереднених амплітуд:

$$\frac{d\bar{C}_o}{d\psi} = 0; \quad \frac{d\bar{D}_o}{d\psi} = 0, \quad (1.49)$$

де \bar{C}_o і \bar{D}_o - "амплітуди" шуканих стаціонарних коливань.

З (1.48) випливає, що для забезпечення виконання умов (1.49) (при \bar{C}_o і \bar{D}_o , що не дорівнюють нулю) мають дорівнювати нулю праві частини цих рівнянь.

Припустимо, що

$$v\tau = m \cdot \psi, \quad (1.50)$$

де m – ціле число. Тоді:

- 1) інтеграли у перших круглих дужках дорівнюватимуть нулю;
- 2) інтеграли у других круглих дужках не дорівнюватимуть нулю лише за умови

$$v\tau = 2\psi \Rightarrow v\tau = 2v_p \tau \Rightarrow v_p = \frac{v}{2}, \quad (1.51)$$

тобто коли частота параметричних коливань маятника у два рази є меншою за частоту параметричного збудження (частоти вібрації основи).

Виконання умов (1.51) і (1.49) приводить рівняння (1.48) до таких рівностей

$$\begin{cases} [-(1-v_p^2) - j2\zeta v_p + \frac{1}{2}\bar{C}_o\bar{D}_o]\bar{C}_o + j\frac{n_{ym}}{2}\bar{D}_o = 0 \\ [-(1-v_p^2) + j2\zeta v_p + \frac{1}{2}\bar{C}_o\bar{D}_o]\bar{D}_o - j\frac{n_{ym}}{2}\bar{C}_o = 0 \end{cases}. \quad (1.52)$$

Це алгебричні рівняння для визначення комплексних усереднених амплітуд параметричних коливань маятника. Враховуючи (1.38), з них можна одержати рівняння для визначення дійсної амплітуди параметричних коливань:

$$a = 2\sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{v^2}{4} \pm \sqrt{\frac{n_{ym}^2}{4} - \zeta^2 v^2}}. \quad (1.53)$$

Користуючись виразом (1.53) можна побудувати графіки амплітудно-частотних характеристик параметричних коливань. Зробимо це у середовищі MatLAB:

```

nu=0:0.01:3;          n=length(nu);
nym=0.5;             dz=0.08;
a1=2*sqrt(2*(1-nu.^2/4-sqrt((nym/2)^2-dz^2.*nu.^2)))*180/pi;
a2=2*sqrt(2*(1-nu.^2/4+sqrt((nym/2)^2-dz^2.*nu.^2)))*180/pi;
plot(nu,a1,nu,a2)
hold on, dz=0.01;
a3=2*sqrt(2*(1-nu.^2/4-sqrt((nym/2)^2-dz^2.*nu.^2)))*180/pi;
a4=2*sqrt(2*(1-nu.^2/4+sqrt((nym/2)^2-dz^2.*nu.^2)))*180/pi;
for k=1:n
    if imag(a3(k))~=0,    a3(k)=0;    end
    if imag(a4(k))~=0,    a4(k)=0;    end
end
plot(nu,a3,nu,a4)
dz=0.15;
a5=2*sqrt(2*(1-nu.^2/4-sqrt((nym/2)^2-dz^2.*nu.^2)))*180/pi;
a6=2*sqrt(2*(1-nu.^2/4+sqrt((nym/2)^2-dz^2.*nu.^2)))*180/pi;
for k=1:n
    if imag(a5(k))~=0    a5(k)=0;    end
    if imag(a6(k))~=0    a6(k)=0;    end
end
plot(nu,a5,nu,a6),grid
title('АЧХ параметричних коливань при Nym=0.5')
xlabel('Відносна частота (dz = 0.01; 0.08; 0.15)'), ylabel('Амплітуда (градуси)')

```

На рис. 1.4 наведені графіки АЧХ параметричних коливань для інтенсивності вертикальної вібрації $n_{ym}=0.5$ і для трьох значень відносного коефіцієнта згасання $\zeta=0,01; 0,08$ і $0,15$. На наступному рис. 1.5 аналогічні графіки побудовані для $n_{ym}=1$ і $\zeta=0,08; 0,25$ і $0,3$.

З розгляду графіків випливає, що зона існування малих параметричних коливань зменшується зі збільшенням демпфірування. За достатньо великих значень відносного коефіцієнта загасання вона може зовсім зникнути, тобто ні за яких значень частоти вертикальної вібрації, у маятника не виникають параметричні усталені коливання.

Збільшення ж інтенсивності вібрації приводить також до збільшення зони частот, де збуджуються параметричні коливання.

Як бачимо, властивості АЧХ параметричних коливань дуже відрізняються від АЧХ вимушених коливань.

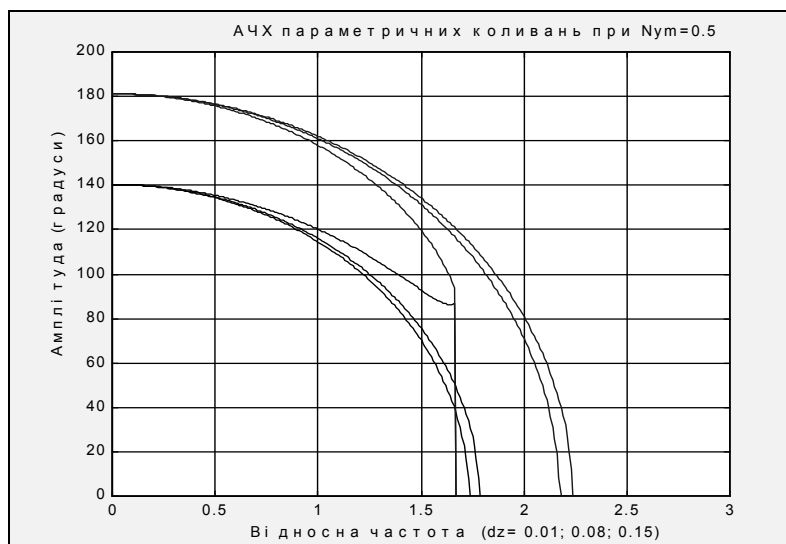


Рис. 1.4. АЧХ параметричних коливань при $n_{ym} = 0,5$

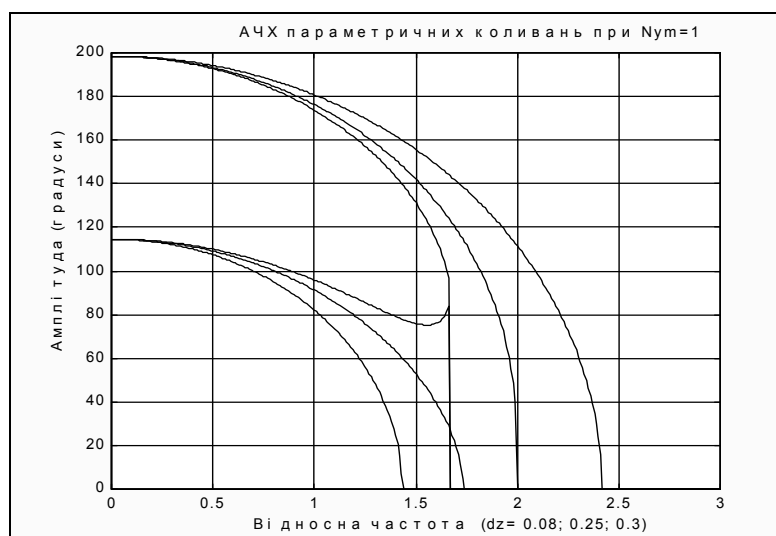


Рис. 1.5. АЧХ параметричних коливань при $n_{ym} = 1$

1.4.4. Завдання

Амплітуду перевантаження і відносний коефіцієнт загасання оберіть з таблиці 1.3 згідно свого варіанту.

Таблиця 1.3

Варіант	$n_{ум}$	ζ
1	1	0.01
2	2	0.01
3	0.5	0.01
4	0.8	0.1
5	0.8	0.05
6	1	0.05
7	0.5	0.05
8	0.8	0.01
9	1	0.1
10	2	0.1
11	0.5	0.1
12	2	0.05

1.4.5. Методичні вказівки до виконання

При фіксуванні результатів у випадку, коли коливання маятника не усталюються, обов'язково фіксувати характер спостережуваного руху маятника (неперервне обертання, чи загасання коливань, чи необмежене зростання амплітуди коливань тощо). При побудові АЧХ усередині частотного діапазону, де спостерігається неусталений рух вписувати, вписувати пояснення про спостережуваний характер цього руху.

1.4.6. Контрольні запитання

1. Які коливання називають "параметричними"? Чим обумовлено їх назву? В яких системах вони можуть спостерігатися?
2. За якою характерною особливістю можна вирізнити при експерименті параметричні коливання? Доведіть, що ця особливість мала місце у проведених вами експериментах.
3. Від яких параметрів суттєво залежать параметричні коливання і як?
4. Які характерні відмінності АЧХ параметричних коливань від АЧХ вимушених коливань?
5. Чим відрізняється параметричний резонанс від параметричних коливань? В яких системах він може спостерігатися?
6. Як залежать параметричні коливання від інтенсивності вібрації?
7. Як залежать параметричні коливання від демпфірування?

8. За якою формулою побудовані теоретичні АЧХ параметричних коливань рис. 5 і 6? Поясніть використаний алгоритм розрахунків.
9. Яку форму рівнянь називають "стандартною"?
10. У чому полягає сутність метода усереднення?

2. Цикл "Динаміка гіроскопів"

Вступ

Другий цикл лабораторних робіт, опис яких наведений нижче, присвячений вивченню поведінки основних видів гіроскопічних пристроїв, які встановлені на нерухомій основі, і складається з наступних лабораторних робіт:

1. Дослідження поведінки симетричного урівноваженого гіроскопа
2. Дослідження руху гіромаятника
3. Дослідження руху гіроскопа у кардановому підвісі.

Лабораторні роботи проводяться по програмних моделях на персональних комп'ютерах у середовищі Matlab. Для їх виконання студент має опанувати основні операції роботи з цією комп'ютерною системою, вміти «читати» програми, написані на М-мові, здійснювати у разі необхідності корегування у бажаному напрямку цих програм.

Головною метою кожної лабораторної роботи є зіставлення результатів вивчення поведінки гіроскопа через програмне моделювання і через теоретичне дослідження. Тому необхідною передумовою виконання студентом відповідної лабораторної роботи є попереднє вивчення результатів теоретичного аналізу поведінки відповідного пристрою в умовах, що задані завданням. На основі «експериментальних вимірювань» при моделюванні студент робить висновки про адекватність одержаних ним результатів, про їх збіжність із передбаченими теорією, корегує власні дії, прагнучи досягнути максимального зближення результатів теоретичного аналізу з «експериментальними дослідженнями». При цьому студент повинен чітко розуміти причини виявлених розходжень, виявити їх джерело і обґрунтувати зроблені висновки.

Порядок виконання кожної лабораторної роботи має бути наступним.

1. Вивчити теоретичну частину роботи (п. 3). Ознайомитися з програмним забезпеченням роботи (п. 4).
2. Увійти у програмне оточення лабораторної роботи. Провести дослідження у відповідності з завданням (п. 5) і користуючись вказівками п. 6.
3. Провести зіставлення характеристик руху двоступеневого гіроскопа, одержаних внаслідок проведених експериментів, з тими, що випливають з теоретичного аналізу. Зробити висновки.
4. Підготувати відповіді на запитання п. 7.
5. Показати викладачеві одержані результати, пояснити їх.
6. Оформити звіт з лабораторної роботи згідно з вимогами викладача. Доповісти викладачеві про зроблені висновки і відповісти на його запитання.

2.1. Дослідження поведінки симетричного зрівноваженого гіроскопа

2.1.1. Мета роботи

Шляхом експериментальних досліджень на чисельній моделі вивчити головні особливості поведінки СЗГ у його вільному русі, під дією моментів сил тертя, сталих моментів сил і гармонійних моментів і порівняти з висновками теоретичного аналізу.

2.1.2. Сценарій роботи

1. Вивчити теоретичну частину роботи (п. 2.1.3). Ознайомитися з програмним забезпеченням для роботи (п. 2.1.4).
2. Увійти у програмне оточення лабораторної роботи. Провести дослідження у відповідності з завданням (п. 2.1.5)
3. Провести зіставлення характеристик руху СЗГ, одержаних внаслідок проведених експериментів, з такими, що впливають з теоретичного аналізу. Зробити висновки.
4. Підготувати відповіді на запитання поділу 2.1.7.
5. Показати викладачеві одержані результати, пояснити їх. Доповісти про зроблені висновки. Відповісти на запитання викладача.

2.1.3. Теоретична частина

Коли говорять про рух триступеневого гіроскопа, мають на увазі, зазвичай, кутовий рух у просторі його головної осі (у випадку симетричного гіроскопа – його осі фігури).

Якщо положення головної осі (осі фігури) СЗГ в інерціальному просторі визначити кутами α і β (рис. 2.1), її рух можна описати наступними диференціальними рівняннями

$$\begin{cases} J_e \ddot{\alpha} \cos \beta - 2J_e \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta + H \dot{\beta} = M_x \\ J_e \ddot{\beta} + J_e \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta - H \dot{\alpha} \cos \beta = M_y \\ \frac{dH}{dt} = M_z \end{cases}, \quad (2.1)$$

де позначено: H – власний кінетичний момент гіроскопа; J_e – екваторіальний момент інерції гіроскопа; M_x , M_y і M_{cm} – проекції моменту зовнішніх сил, що діють на СЗГ, на осі X , Y і Z Резаля (рис. 2.1).

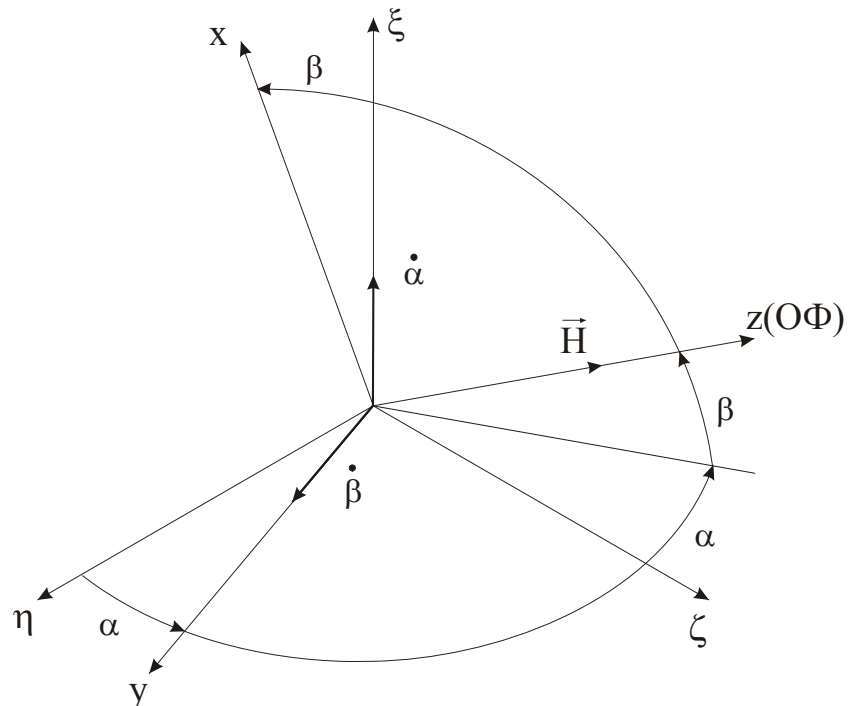


Рис. 2.1. Кінематика кутової орієнтації СЗГ

Навіть у найпростіших випадках відсутності діючих моментів сил, або коли моменти сил є сталими, кутовий рух головної осі СЗГ у просторі є досить складним. Для більш прозорого подання цього руху Б. В. Булгаков запропонував поділити його на дві складові:

- рух у просторі так званої "кінетичної осі" гіроскопа, тобто осі вектора \mathbf{K} його повного кінетичного момента і жорстко пов'язаної з ним системи координат x_k, y_k, z_k (рис. 2.2), яку також називають кінетичними осями;
- рух головної осі відносно цієї нової системи кінетичних осей.

Описати рух кінетичної осі у просторі можна за допомогою так званих "рівнянь у формі Булгакова":

$$\begin{cases} \frac{d\beta_k}{dt} = \frac{M_{xk}}{K} \\ \frac{d\alpha_k}{dt} = -\frac{M_{yk}}{K \cdot \cos\beta_k} \\ \frac{dK}{dt} = M_{zk} \end{cases} \quad (2.2)$$

Тут α_k і β_k – кути, що визначають положення кінетичної осі у просторі (рис. 2.2); K – величина (модуль вектора) повного кінетичного момента; M_{xk} , M_{yk} і M_{zk} – проекції момента зовнішніх сил, що діють на СЗГ, на осі X_k , Y_k і Z_k , ось Z_k якої спрямована вздовж поточного положення вектора \mathbf{K} (див. рис. 2.2).

При цьому нові проекції моментів сил пов'язані з проекціями їх на осі Резаля співвідношеннями:

$$\begin{aligned}
 M_{xk} &= M_x \cdot [\cos \beta \cdot \cos \beta_k + \sin \beta \cdot \sin \beta_k \cdot \cos(\alpha_k - \alpha)] + \\
 &\quad + M_y \cdot \sin \beta_k \cdot \sin(\alpha_k - \alpha) + \\
 &\quad + M_z \cdot [\sin \beta \cdot \cos \beta_k - \cos \beta \cdot \sin \beta_k \cdot \cos(\alpha_k - \alpha)] \\
 M_{yk} &= -M_x \cdot \sin \beta \cdot \sin(\alpha_k - \alpha) + M_y \cdot \cos(\alpha_k - \alpha) + \\
 &\quad + M_z \cdot \cos \beta \cdot \sin(\alpha_k - \alpha) \\
 M_{zk} &= M_x \cdot [\cos \beta \cdot \sin \beta_k - \sin \beta \cdot \cos \beta_k \cdot \cos(\alpha_k - \alpha)] - \\
 &\quad - M_y \cdot \cos \beta_k \cdot \sin(\alpha_k - \alpha) + \\
 &\quad + M_z \cdot [\sin \beta \cdot \sin \beta_k + \cos \beta \cdot \cos \beta_k \cdot \cos(\alpha_k - \alpha)]
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

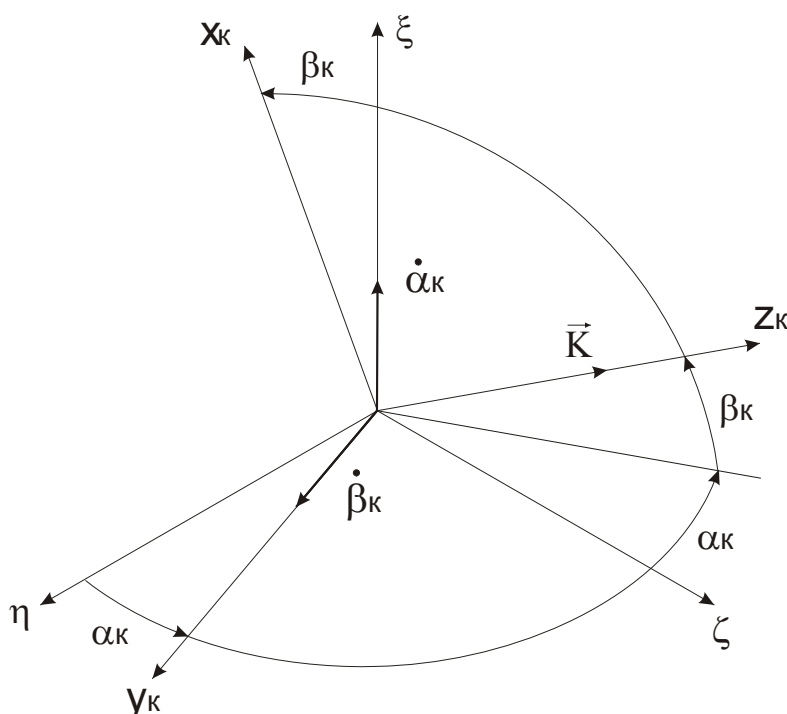


Рис. 2. 2. Кінематика поворотів вектора кінетичного моменту

Якщо положення осі фігури гіроскопа відносно кінетичних осей задати кутами $\Delta\alpha$ і $\Delta\beta$ (рис. 2.3), то рух осі фігури у цих осях можна описати наступними двома рівняннями

$$\begin{cases}
 \frac{d\Delta\alpha}{dt} = -[\lambda \cdot \cos(\Delta\alpha) + \frac{M_{xk}}{K} \cdot \sin(\Delta\alpha)] \cdot \operatorname{tg}(\Delta\beta) + \frac{M_{yk}}{K} \\
 \frac{d\Delta\beta}{dt} = \lambda \cdot \sin(\Delta\alpha) - \frac{M_{xk}}{K} \cdot \cos(\Delta\alpha)
 \end{cases},
 \tag{2.4}$$

де позначено

$$\lambda = \frac{K}{J_e} + \frac{M_{yk}}{K} \operatorname{tg}(\beta_k).
 \tag{2.5}$$

$$\Delta\beta_o = \arcsin(\sin\beta_o \cos\beta_{ko} - \cos\beta_o \sin\beta_{ko} \cos(\alpha_o - \alpha_{ko})). \quad (2.8)$$

За допомогою рівнянь у формі Булгакова значно легше зрозуміти і уявити головні особливості руху головної осі СЗГ у просторі.

2.1.3.1. Вільний рух СЗГ

Вільний рух гіроскопу характерний тим, що на нього не діють моменти зовнішніх сил. Тому у попередніх рівняннях потрібно покласти

$$N = L = R = M_{cm} = 0. \quad (2.9)$$

Внаслідок цього рівняння (2.2) набудуть вигляду

$$\begin{cases} \frac{d\beta_k}{dt} = 0 \\ \frac{d\alpha_k}{dt} = 0 \\ \frac{dK}{dt} = 0 \end{cases}, \quad (2.10)$$

з чого одразу випливає, що у цьому випадку вектор повного кінетичного моменту СЗГ буде сталим

$$K = K_o = const, \quad (2.11)$$

а його положення у просторі не буде змінюватися

$$\alpha_k(t) = \alpha_{ko} = const; \quad \beta_k(t) = \beta_{ko} = const. \quad (2.12)$$

Якщо ж врахувати (2.9) у (2.5) і (2.4), отримаємо рівняння

$$\begin{cases} \frac{d\Delta\alpha}{dt} = -\lambda_o \cdot \cos(\Delta\alpha) \cdot \operatorname{tg}(\Delta\beta) \\ \frac{d\Delta\beta}{dt} = \lambda_o \cdot \sin(\Delta\alpha) \end{cases}, \quad (2.13)$$

причому величина

$$\lambda_o = \frac{K_o}{J_e} \quad (2.14)$$

є, за умови (2.11), сталою.

Розв'язок системи (2.13), як неважко довести, має вигляд

$$\cos(Z, Z_k) = \cos(\Delta\alpha) \cdot \cos(\Delta\beta) = \cos(\Delta\alpha_o) \cdot \cos(\Delta\beta_o) = const. \quad (2.15)$$

Отже, кут між віссю фігури і кінетичною віссю залишається незмінним протягом усього руху гіроскопа.

У той же час самі значення кутів $\Delta\alpha$ і $\Delta\beta$ не є сталими.

Покажемо це за умови малих кутів $\Delta\alpha \ll 1$ і $\Delta\beta \ll 1$ (мається на увазі кут у 1 радіан). Тепер рівняння (3.13) можна подати у вигляді

$$\begin{cases} \frac{d\Delta\alpha}{dt} + \lambda_o \cdot \Delta\beta = 0 \\ \frac{d\Delta\beta}{dt} - \lambda_o \cdot \Delta\alpha = 0 \end{cases}. \quad (2.16)$$

Розв'язок цієї системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами має вигляд:

$$\begin{aligned}\Delta\alpha(t) &= \Delta\alpha_o \cdot \cos(\lambda_o t) - \Delta\beta_o \cdot \sin(\lambda_o t); \\ \Delta\beta(t) &= \Delta\beta_o \cdot \cos(\lambda_o t) + \Delta\alpha_o \cdot \sin(\lambda_o t).\end{aligned}\quad (2.17)$$

Отже, гіроскоп здійснює гармонічні коливання з кутів $\Delta\alpha$ і $\Delta\beta$ із частотою (2.14). Ці коливання називають нутаційними, а частоту λ_o - частотою нутації гіроскопа.

Неважко збагнути, що нутаційні коливання зводяться до обертання осі фігури по конусу навколо нерухомої у просторі кінетичної осі. Останнє обертання здійснюється зі сталою кутовою швидкістю λ_o , і за нього кут між віссю фігури і кінетичною віссю дійсно залишається незмінним.

2.1.3.2. Рух СЗГ під дією сталого моменту сил

Розглянемо найпростіший випадок, коли на СЗГ діє лише момент вздовж осі Y_k :

$$M_{xk} = M_{zk} = 0; \quad M_{yk} = M_o = const. \quad (2.18)$$

Врахування (2.18) у (2.2) дає

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\beta_k}{dt} = 0 \\ \frac{d\alpha_k}{dt} = -\frac{M_o}{K \cdot \cos\beta_k} \\ \frac{dK}{dt} = 0 \end{array} \right.$$

звідки випливає:

$$\begin{aligned}K(t) &= K_o = const; & \beta_k(t) &= \beta_{ko} = const; \\ \dot{\alpha}_k &= -\frac{M_o}{K_o \cdot \cos\beta_{ko}} = \omega_{np} = const.\end{aligned}\quad (2.19)$$

Тобто вектор повного кінетичного моменту рівномірно обертається по конусу навколо нерухомої осі ξ (рис. 2.1, 2.2) зі сталою кутовою швидкістю ω_{np} , величина якої визначається величиною діючого моменту сил.

Якщо ж умову (2.18) використати у (2.4), отримаємо

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Delta\alpha}{dt} = -\lambda_o \cdot \cos(\Delta\alpha) \cdot \operatorname{tg}(\Delta\beta) + \frac{M_o}{K_o}, \\ \frac{d\Delta\beta}{dt} = \lambda_o \cdot \sin(\Delta\alpha) \end{array} \right., \quad (2.20)$$

де

$$\lambda_o = \frac{K_o}{J_e} + \frac{M_o}{K_o} \operatorname{tg}\beta_{ko} \quad (2.21)$$

є, як і у попередньому випадку, сталою величиною. Для малих кутів рівняння (2.20) стають лінійними зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} \frac{d\Delta\alpha}{dt} + \lambda_o \Delta\beta = \frac{M_o}{K_o} \\ \frac{d\Delta\beta}{dt} - \lambda_o \Delta\alpha = 0 \end{cases}, \quad (2.22)$$

які мають розв'язок

$$\begin{aligned} \Delta\alpha(t) &= \Delta\alpha_o \cdot \cos \lambda_o t - \left(\Delta\beta_o - \frac{\mu}{1 + \mu \cdot \operatorname{tg} \beta_{ko}} \right) \cdot \sin \lambda_o t \\ \Delta\beta(t) &= \left(\Delta\beta_o - \frac{\mu}{1 + \mu \cdot \operatorname{tg} \beta_{ko}} \right) \cos \lambda_o t + \Delta\alpha_o \cdot \sin \lambda_o t + \frac{\mu}{1 + \mu \cdot \operatorname{tg} \beta_{ko}}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

де позначено

$$\mu = \frac{J_e \cdot M_o}{K^2}. \quad (2.24)$$

У площині координат $(\Delta\alpha, \Delta\beta)$ розв'язком (2.23) описується траєкторія апексу у вигляді кола з центром у точці $(0, \frac{\mu}{1 + \mu \cdot \operatorname{tg} \beta_{ko}})$ і радіусом

$$\sqrt{\left(\Delta\beta_o - \frac{\mu}{1 + \mu \cdot \operatorname{tg} \beta_{ko}} \right)^2 + \Delta\alpha_o^2}.$$

Наприклад, коли початкові значення $\Delta\alpha_o = \Delta\beta_o = 0$ (це має місце тоді, коли початкові швидкості гіроскопа відсутні ($\dot{\alpha}_o = \dot{\beta}_o = 0$)), вісь фігури описує з кутовою швидкістю, що дорівнює частоті нутації, коло у площині $(\Delta\alpha, \Delta\beta)$ з тим же центром і радіусом $\frac{|\mu|}{1 + \mu \cdot \operatorname{tg} \beta_{ko}}$, яке проходить через початок координат $(0,0)$ (точку, яка є слідом кінетичної осі).

Якщо ж початкові умови підібрати такими

$$\Delta\alpha_o = 0; \quad \Delta\beta_o = \frac{\mu}{1 + \mu \cdot \operatorname{tg} \beta_{ko}},$$

то нутаційні коливання будуть повністю відсутні.

Резюмуючи, можна стверджувати, що за дії сталого за величиною моменту зовнішніх сил рух осі фігури СЗГ складається з двох рухів:

■ рівномірного обертання вектора повного кінетичного моменту навколо нерухомої у просторі осі з кутовою швидкістю (1.19) вимушеної прецесії;

■ рівномірного обертання самої осі фігури з кутовою швидкістю нутації (2.21) навколо осі, зсуненої відносно кінетичної осі на деякий сталий кут, величина і напрямок якого визначається величиною і напрямком діючого моменту сил.

Перший рух (вимушена прецесія) повністю визначається діючим моментом сил. Другий рух (нутаційні коливання) суттєво залежить від початкових

значень екваторіальних складових кутової швидкості СЗГ. За відсутності руху осі фігури у просторі у початкову мить нутаційні коливання здійснюватимуться з амплітудою $\frac{|\mu|}{1 + \mu \cdot \operatorname{tg} \beta_{ko}}$ радіан.

Безрозмірна величина μ (2.24) є вельми малою для технічних гіроскопів і має велике значення для опису поведження гіроскопа. Зворотна до неї величина

$$N = \frac{K^2}{J_e \cdot M_o}$$

має дуже простий фізичний зміст – це є *кількість циклів нутації у одному циклі прецесії* і визначає міру "швидкості" гіроскопа. Неважко впевнитися, що вона дорівнює відношенню частоти нутації λ до кутової швидкості прецесії ω_{np} :

$$\frac{\lambda}{\omega_{np}} = \frac{K/J_e}{M_o/K} = \frac{K^2}{J_e \cdot M_o} = N.$$

Чим більше ця величина, тим гіроскоп вважається більш "швидким". Взагалі "швидким" можна вважати гіроскоп, у якого ця величина перевищує тисячу ($N > 10^3$).

Неважко побачити, що поняття "швидкості" гіроскопа пов'язане не тільки з внутрішніми властивостями самого гіроскопа (його моментами інерції і кутовою швидкістю власного обертання), але й з величиною діючих на нього моментів зовнішніх сил. Той самий гіроскоп за одних величин моментів сил може вважатися "швидким", а за інших, значно більших, – ні.

Наприклад, Земля, яка вельми повільно обертається навколо осі полюсів (період – 1 сутки, кутова швидкість власного обертання – $7,39 \cdot 10^{-5}$ радіан в секунду), може вважатися вельми "швидким" гіроскопом. Дійсно, період нутації Землі, враховуючи наближену рівність її екваторіального і осьового моментів інерції, дорівнює 1 суткам, тобто 1/365 року. З іншого боку, найбільший діючий на Землю момент сил гравітаційного тяжіння, обумовлений екваторіальним потовщенням Землі, викликає прецесію осі власного обертання Землі у просторі з періодом, що складає приблизно 26 000 років. Тому

$$N = \frac{T_{np}}{T_{nut}} = \frac{26000}{1/365} = 9,5 \cdot 10^6$$

тобто майже 10 мільйонів.

2.1.3.3. Вплив тертя на рух СЗГ

Розглянемо спочатку вплив тертя на вільний рух СЗГ. Вважатимемо, задля спрощення, що тертя є "в'язким", момент сил якого є пропорційним до відповідної кутової швидкості тіла. Тому у подальшому припускатимемо:

$$M_z = 0; \quad M_x = -f \cdot \omega_x; \quad M_y = -f \cdot \omega_y. \quad (2.25)$$

Це припущення дозволяє наближено подати рівняння (2.1) у вигляді:

$$\begin{cases} J_e \dot{\omega}_x + H_o \omega_y = -f \omega_x \\ J_e \dot{\omega}_y - H_o \omega_x = -f \omega_y \end{cases}, \quad (2.26)$$

де

$$\omega_x = \dot{\alpha} \cos \beta; \quad \omega_y = \dot{\beta}. \quad (2.27)$$

Розв'язок рівнянь (2.26) можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \omega_x(t) &= e^{-ht} \cdot (\dot{\alpha}_o \cdot \cos \beta_o \cdot \cos \lambda t - \dot{\beta}_o \cdot \sin \lambda t) \\ \omega_y(t) &= e^{-ht} \cdot (\dot{\alpha}_o \cdot \cos \beta_o \cdot \sin \lambda t + \dot{\beta}_o \cdot \cos \lambda t), \end{aligned} \quad (2.28)$$

де використані позначення

$$h = f / J_e; \quad \lambda = H_o / J_e. \quad (2.29)$$

Повернемося до рис. 2.3. Через те, що осі A і B лежать у екваторіальній площині, матимемо

$$K_A = -K \cdot \cos \Delta\alpha \cdot \sin \Delta\beta = J_e \cdot \omega_A = J_e \cdot (\omega_x \cdot \cos \sigma - \omega_y \cdot \sin \sigma);$$

$$K_B = K \cdot \sin \Delta\alpha = J_e \cdot \omega_B = J_e \cdot (\omega_y \cdot \cos \sigma + \omega_x \cdot \sin \sigma);$$

$$K_z = K \cdot \cos \Delta\alpha \cdot \cos \Delta\beta = J \cdot \omega_z = H.$$

Звідси випливає, що кути $\Delta\alpha$ і $\Delta\beta$ можна подати також й через екваторіальні складові кутової швидкості гіроскопа:

$$\Delta\alpha = \arcsin\left(\frac{K_B}{K}\right) = \arcsin\left[\frac{J_e}{K} (\omega_y \cdot \cos \sigma + \omega_x \cdot \sin \sigma)\right];$$

$$\Delta\beta = \arctg\left(-\frac{K_A}{K_z}\right) = \arctg\left[\frac{J_e}{H} (\omega_x \cdot \cos \sigma - \omega_y \cdot \sin \sigma)\right].$$

Через те, що екваторіальні складові кутової швидкості, у відповідності до розв'язків (2.28), з часом прагнуть до нуля, кути $\Delta\alpha$ і $\Delta\beta$, як випливає з встановлених співвідношень, теж прагнутимуть до нуля. Це означає, що під впливом тертя вісь фігури з часом необмежено наближається до кінетичної осі. При цьому вісь фігури здійснює навколо кінетичної осі нутаційні коливання з поступово зменшуваною амплітудою.

Якщо аналогічні міркування застосувати до руху СЗГ під дією сталого момента сил, можна дійти аналогічного висновку: нутаційні коливання СЗГ загасатимуть, при цьому вісь фігури вже прагнутиме не кінетичної осі, а тієї осі, яка була центром нутаційних коливань. Після повного загасання нутаційних коливань вісь фігури, як і кінетична вісь, здійснюватимуть рівномірне обертання навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю (2.19), тобто вимушену регулярну прецесію.

2.1.4. Опис програмних засобів

Дослідження здійснюється шляхом чисельного інтегрування диференціальних рівнянь СЗГ у середовищі MatLAB. Для цього розроблений пакет програм і процедур мовою системи MatLAB, що складається з наступних програмних одиниць:

- 1) керуючого script-файла *SUG_m.m* - головної програми, яка по чергово викликає програми *SUG_ZastavkaM.m*, *SUG_MenuM.m*, *SUG_YadroM.m* та *SUG_VyvodM.m* і забезпечує повернення до початку програми для повторювання дій;
- 2) script-файла *SUG_ZastavkaM.m*, який здійснює введення первісних даних і виведення текстової інформації про програму до екрану дисплею;
- 3) script-файла *SUG_MenuM.m*, який забезпечує змінювання даних у діалоговому режимі;
- 4) script-файла *SUG_YadroM.m*, який викликає на запуск програму *SUG.mdl*, яка забезпечує моделювання поведінки СЗГ за повними рівняннями.
- 5) script-файла *SUG_VyvodM.m*, який здійснює вивід в графічній формі на екран результатів моделювання.

Тексти головних з зазначених файлів наведено нижче.

```
%
                                SUG_M.m
%   Головна (керуюча) програма моделювання поведінки
%   СИМЕТРИЧНОГО УРІВНОВАЖЕНОГО ГІРОСКОПА
%   Ю.Ф.Лазарев, кафедра ПСОН, КПІ, Україна,
%   Почато 28-02-2008   Останні змінювання 28-06-2008
clear all, clc
SUG_ZastavkaM
k = menu(' Що робити ? ',' Продовжити роботу ',' Закінчити роботу ');
if k==1,   sname =input('Введіть ваше прізвище та ініціали (в апостофах) ');
    if isempty(sname),   sname='Ю.Ф.ЛАЗАРЄВ';   end
    while k==1
        SUG_MenuM
        SUG_YadroM
        SUG_VyvodM
        k = menu(' Що робити ? ',' Продовжити роботу ',' Закінчити роботу ');
    end
end
end

=====
%   SUG_ZastavkaM
%   Частина програми SUG_M, яка здійснює введення первісних значень даних
%   Ю.Ф.Лазарев, кафедра ПСОН, КПІ, Україна,
%   Почато 28-02-2008   Останні зміни   6-03-2008
%   Задание значений исходных данных
%   1. Параметры моментов сил по осям Резаля
%   1.1. Параметры явной зависимости от времени
%   1.1.1. Постоянные составляющие моментов
%           Mx0=0;           My0=0;           Mz0=0;
%   1.1.2. Амплитуды моментов
%           Mxm=0;           Mym=0;           Mzm=0;
%   1.1.3. Частоты изменения моментов
%           omx=0;           omu=omx;           omz=omx;
%   1.1.4. Начальные фазы моментов
%           ex=0;           ey=0;           ez=0;
%   1.2. Коэффициенты вязкого трения
%           fx=1.;           fy=1;           fz=0;
%   2. Начальные условия
%   2.1. Начальное значение кинетического момента гироскопа
%           H0=20;
%   2.2. Начальное угловое положение главной оси гироскопа
%           a10=0*pi/180;   bt0=45*pi/180;
%   2.3. Начальные угловые скорости главной оси
%           alt0=0;           btt0=4;
%   3. Моменты инерции СЗГ
%           Je=5;           J=7;
%   4. Параметры интегрирования
%   4.1. Кількість кроків інтегрування у найменшому періоді
```

```

%
% коливань
% ni=100;
% 4.2. Інтервал інтегрування у часі у кількості
% найбільших періодів коливань
% ntk=20;
% ===== Розрахунки кроку та кінцевої миті інтегрування
lambda=abs(H0)/Je; % Частота нутації СЗГ
mx=max(abs([lambda,omx,omy,omz])); % Максимальна частота коливань
hi=2*pi/(ni*mx); % Крок інтегрування
if lambda~=0, Tmax=2*pi/lambda;
    if omx~=0, T1=2*pi/abs(omx); Tmax=max([Tmax T1]); end
    if omy~=0, T1=2*pi/abs(omy); Tmax=max([Tmax T1]); end
    if omz~=0, T1=2*pi/abs(omz); Tmax=max([Tmax T1]); end
else,
disp('Помилка! Кінетичний момент гіроскопа не може дорівнювати нулеві !'); end
tfinal=ntk*Tmax; % Кінцева мить інтегрування
%%%%%%%% Формування текстового оформлення екрану %%%%%%%%%
clc,echo on
%
% Перед Вами програма SUG_M.m
% "Моделювання поведження
% СИМЕТРИЧНОГО УРІВНОВАЖЕНОГО ГІРОСКОПА"
% яка складає програмну основу
% лабораторної роботи N% 2 з дисципліни
% "Основи теорії ЧУТЛИВИХ ЕЛЕМЕНТІВ"
%
echo off
=====
% SUG_MenuM
% Частина програми SUG_M, яка здійснює
% діалогове ЗМІНЮВАННЯ ВСТАНОВЛЕНИХ ПАРАМЕТРІВ

% Ю.Ф.Лазарев, кафедра ПСОН, КПІ, Україна,
% Почато 28-02-2008 Останні зміни 29-06-2008
k=1;
while k<10
    clc, disp(' '); disp(' '); disp([' З програмою SUG_M.m працює ',sname]);
echo on
% Моделюється рух
% Симетричного Урівноваженого Гіроскопа
% шляхом чисельного інтегрування його ДР
%
% 
$$Je \cdot a^{1/2} \cdot \cos(bt) + [H - 2 \cdot Je \cdot a^{1/2} \cdot \sin(bt)] \cdot bt = M_x$$

% 
$$Je \cdot bt - [H - Je \cdot a^{1/2} \cdot \sin(bt)] \cdot a^{1/2} \cdot \cos(bt) = M_y$$

% 
$$dH/dt = M_z$$

%
echo off
k=menu(' Що змінювати? ',...
sprintf('Кінетичний момент СУГ = %g',H0),...
[sprintf('Моменти інерції СЗГ: Je= %g;',Je),sprintf(' J= %g;',J)],...
[sprintf('Початкові умови: a10= %g;',a10*180/pi),sprintf(' bt0= %g;',bt0*180/pi),sprintf('
alt0= %g;',alt0),sprintf(' btt0= %g;',btt0)],...
[sprintf('Постійні складові моментів сил: Mx0= %g;',Mx0),sprintf(' My0=
%g;',My0),sprintf(' Mz0= %g;',Mz0)],...
[sprintf('Амплітуди моментів сил: Mxm= %g;',Mxm),sprintf(' Mym=
%g;',Mym),sprintf(' Mzm= %g;',Mzm)],...
[sprintf('Частоти змінювання моментів сил: omx= %g;',omx),sprintf(' omy=
%g;',omy),sprintf(' omz= %g;',omz)],...
[sprintf('Фази змінювання моментів сил: ex= %g;',ex*180/pi),sprintf(' ey=
%g;',ey*180/pi),sprintf(' ez= %g;',ez*180/pi)],...
[sprintf('Коеф-ти в'язкого тертя по осях підвісу: fx= %g;',fx),sprintf(' fy=
%g;',fz),sprintf(' fz= %g;',fz)],...
[sprintf('Параметри інтегрування: ni= %g;',ni),sprintf(' ntk= %g;',ntk)], ' Нічого не
змінювати ');
disp(''),
if k==1, H0=input(sprintf('Зараз H0=%g; Введіть нове значення =',H0)); end
if k==2, k2=1;
while k2<3
    k2=menu(' Що саме змінити? ', sprintf(' Je= %g;',Je), sprintf(' J= %g;',J),...

```



```

        ' Нічого не змінювати ');
        if k2==1,   Je=input(sprintf('Зараз Je=%g; Введіть нове значення =',Je));
end
        if k2==2,   J=input(sprintf('Зараз J=%g; Введіть нове значення =',J));
end
        end
    end
    if k==3,   k2=1;
        while k2<5
            k2=menu(' Що саме змінити? ', sprintf(' a0= %g;',a0*180/pi),...
                sprintf(' bt0= %g;',bt0*180/pi),...
                sprintf(' alt0= %g;',alt0), sprintf(' btt0= %g;',btt0), ' Нічого не змінюва-
ти ');
            if k2==1,   a0=input(sprintf('Зараз a0=%g; ...
                Введіть нове значення (у градусах) =',a0*180/pi)); a0=a0*pi/180;
            end
            if k2==2,   bt0=input(sprintf('Зараз bt0=%g;...
                Введіть нове значення (у градусах) =',bt0*180/pi)); bt0=bt0*pi/180; end
            if k2==3,   alt0=input(sprintf('Зараз alt0=%g; Введіть нове значення =',alt0));
        end
            if k2==4,   btt0=input(sprintf('Зараз btt0=%g; Введіть нове значення =',btt0));
        end
            end
        end
        if k==4,   k2=1;
            while k2<4
                k2=menu(' Що саме змінити? ', sprintf(' Mx0= %g;',Mx0),
                    sprintf(' My0= %g;',My0),...
                    sprintf(' Mz0= %g;',Mz0), ' Нічого не змінювати ');
                if k2==1,   Mx0=input(sprintf('Зараз Mx0=%g; Введіть нове значення
                    =',Mx0)); end
                if k2==2,   My0=input(sprintf('Зараз My0=%g; Введіть нове значення
                    =',My0)); end
                if k2==3,   Mz0=input(sprintf('Зараз Mz0=%g; Введіть нове зна-
                    чення ,Mz0)); end
            end
        end
        if k==5,   k2=1;
            while k2<4
                k2=menu(' Що саме змінити? ', sprintf(' Mxm= %g;',Mxm), ...
                    sprintf(' Mym= %g;',Mym),sprintf(' Mzm= %g;',Mzm), ' Нічого не зміню-
                    вати ');
                if k2==1,   Mxm=input(sprintf('Зараз Mxm=%g; Введіть нове значення
                    =',Mxm)); end
                if k2==2,   Mym=input(sprintf('Зараз Mym=%g; Введіть нове значення
                    =',Mym)); end
                if k2==3,   Mzm=input(sprintf('Зараз Mzm=%g; Введіть нове значення
                    =',Mzm)); end
            end
        end
        if k==6,   k2=1;
            while k2<4
                k2=menu(' Що саме змінити? ', sprintf(' omx= %g;',omx), ...
                    sprintf(' omy= %g;',omy),sprintf(' omz= %g;',omz), ' Нічого не змінювати ');
                if k2==1,   omx=input(sprintf('Зараз omx=%g; Введіть нове значення
                    =',omx)); end
                if k2==2,   omy=input(sprintf('Зараз omy=%g; Введіть нове значен-
                    ня=',omy)); end
                if k2==3,   omz=input(sprintf('Зараз omz=%g; Введіть нове значення
                    =',omz)); end
            end
        end
        if k==7,   k2=1;
            while k2<4
                k2=menu(' Що саме змінити? ', ...
                    sprintf(' ex= %g;',ex*180/pi), sprintf(' ey= %g;',ey*180/pi),
                    sprintf(' ez= %g;',ez*180/pi), ' Нічого не змінювати ');
                if k2==1,   ex=input(sprintf('Зараз ex=%g; ...

```

```

        Введіть нове значення (у градусах) =',ex*180/pi)); ex=ex*pi/180;
    end
    if k2==2, ey=input(sprintf('Зараз ey=%g; ...
Введіть нове значення (у градусах) =',ey*180/pi)); ey=ey*pi/180;    end
    if k2==3, ez=input(sprintf('Зараз ez=%g;...
Введіть нове значення (у градусах) =',ez*180/pi)); ez=ez*pi/180;    end
end
end
if k==8, k2=1;
    while k2<4
        k2=menu(' Що саме змінити? ', sprintf(' fx= %g;',fx), sprintf(' fy= %g;',fy),...
        sprintf(' fz= %g;',fz), ' Нічого не змінювати ');
        if k2==1, fx=input(sprintf('Зараз fx=%g; Введіть нове значення =',fx));
            end
        if k2==2, fy=input(sprintf('Зараз fy=%g; Введіть нове значення =',fy));
            end
        if k2==3, fz=input(sprintf('Зараз fz=%g; Введіть нове значення =',fz));
            end
    end
end
if k==9, k2=1;
    while k2<3
        k2=menu(' Що саме змінити? ',...
        sprintf('Кількість кроків на мінімальному періоді ni= %g;',ni),...
        sprintf('Кількість максимальних періодів ntk= %g;',ntk), ' Нічого не
        змінювати ');
        if k2==1, ni=input(sprintf('Зараз ni=%g; Введіть нове значення =',ni));
            end
        if k2==2, ntk=input(sprintf('Зараз ntk=%g; Введіть нове значення =',ntk));
            end
    end
end
end
end
% ===== Розрахунки кроку та кінцевої миті інтегрування
lambda=abs(H0)/Je; % Частота нутації ГКП
mx=max(abs([lambda,omx,omy,omz])); % Максимальна частота коливань
hi=2*pi/(ni*mx); % Крок інтегрування
if lambda~=0, Tmax=2*pi/lambda;
    if omx~=0, T1=2*pi/abs(omx); Tmax=max([Tmax T1]); end
    if omy~=0, T1=2*pi/abs(omy); Tmax=max([Tmax T1]); end
    if omz~=0, T1=2*pi/abs(omz); Tmax=max([Tmax T1]); end
else
    disp('Помилка! Кінетичний момент гіроскопа не може дорівнювати нулеві !');
end
tfinal=ntk*Tmax % Кінцева мить інтегрування
=====
% SUG_YadroM
% Частина програми SUG_M, яка здійснює власне моделювання поведіння
% Гіроскопа у кардановому підвісі
% Ю.Ф.Лазарев, кафедра ПСОН, КПІ, Україна,
% Почато 28-02-2008 Останні зміни 29-06-2008
A0=al0; B0=bt0; OeX0=alt0*cos(bt0); OeY0=btt0;
[T,X,al,bt,H,omX,omY]=sim('sugM');%%%%%%%% Запуск SIMULINK-моделі ----- %%%%%%%%%
KY=Je*omY; KX=Je*omX; KK=sqrt(H.^2+KX.^2+KY.^2); Kksi=H.*sin(bt)+KX.*cos(bt);
Ka=H.*cos(bt)-KX.*sin(bt); Keta=KY.*cos(al)-Ka.*sin(al); Kdz=KY.*sin(al)+Ka.*cos(al);
alk=-atan(Keta./Kdz); btk=asin(Kksi./KK);

```

Ця програма викликає на виконання SIMULINK-модель, яка записана у файлі SUGm.mdl. S-модель SUGm у власну чергу організує обчислення згідно схеми, наведеної на рис. 2.4.

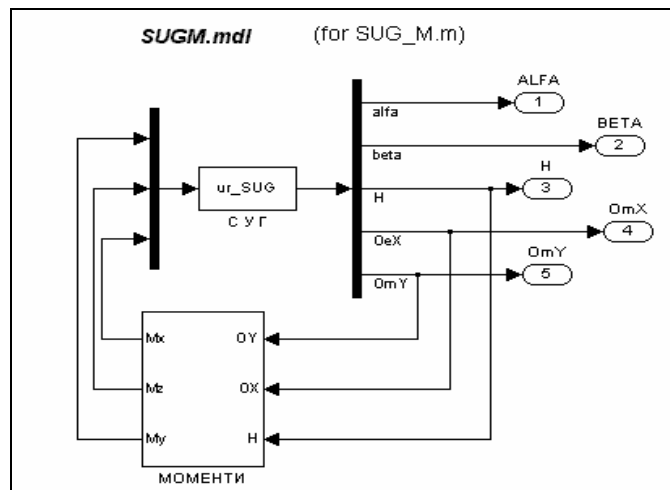


Рис. 2.4. Блок-схема S-моделі SUGm

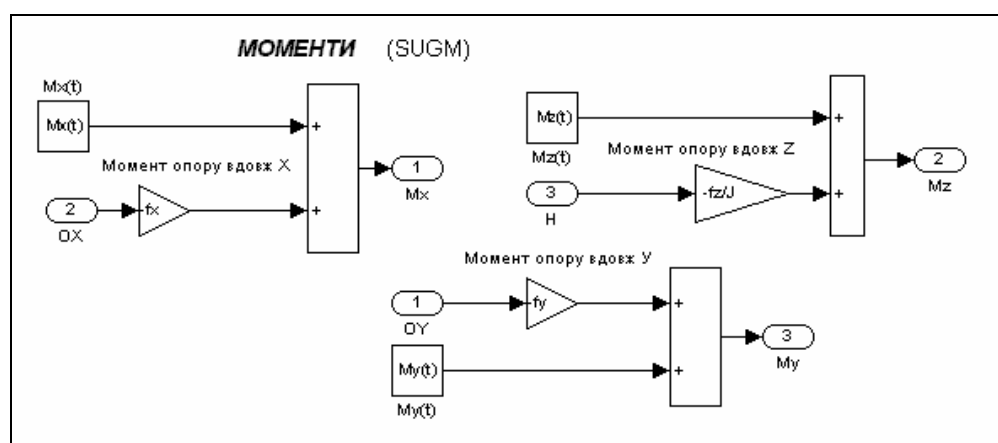


Рис. 2.5. Блок-схема блоку МОМЕНТИ

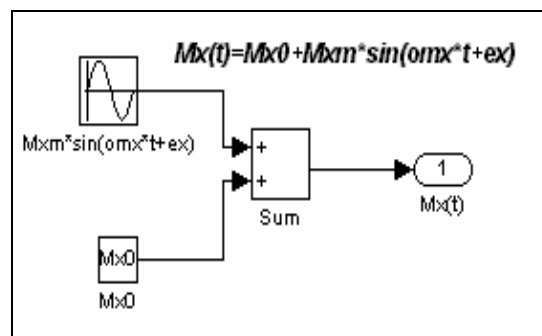


Рис. 2.6. Блок-схема блоку Mx(t)

В її склад входять S-блок МОМЕНТИ, схема якого надана на рис. 1.5, а у склад того входять три блоки Mx(t), My(t) і Mz(t), які реалізують імітування дії відповідних моментів сил за однаковою схемою, відображеною на рис 1.6.

Головним же блоком, який, власне, й реалізує чисельне інтегрування диференціальних рівнянь гіроскопа є блок СЗГ, в якому реалізується виконання S-функції ur_SUG, текст якої наведений нижче.

```
=====
function [sys,x0,str,ts] = ur_SUG(t,x,u,flag,H0,Je,A0,B0,OeX0,OeY0)
% S-функція, яка здійснює чисельне інтегрування ДР СЗГ (для SUG_m)
```

```

% Лазарев Ю. Ф. 28-02-2008
switch flag,
  case 0, [sys,x0,str,ts]=mdlInitializeSizes(H0, A0, B0, OeX0, OeY0);
  case 1, sys=mdlDerivatives(t,x,u,Je);
  case 2, %sys=mdlUpdate(t,x,u);
  case 3, sys=mdlOutputs(t,x,u);
  case 4, sys=mdlGetTimeOfNextVarHit(t,x,u);
  case 9, %sys=mdlTerminate(t,x,u);
  otherwise
    error(['Unhandled flag = ',num2str(flag)]);
end
%=====
function [sys,x0,str,ts]=mdlInitializeSizes(H0, A0, B0, OeX0, OeY0)
sizes = simsizes;
sizes.NumContStates = 5; sizes.NumDiscStates = 0; sizes.NumOutputs = 5;
sizes.NumInputs = 3; sizes.DirFeedthrough = 1; sizes.NumSampleTimes = 1;
sys = simsizes(sizes); x0 = [ A0, B0, H0, OeX0, OeY0]; str = []; ts = [0 0];
%=====
function z=mdlDerivatives(t,x,u,Je)
% x(1)=alfa x(2)=beta x(3)=H x(4)=omX x(5)=omY u(1)=My u(2)=Mz u(3)=Mx
z(1) = x(4)/cos(x(2)); z(2) = x(5); z(3) = u(2);
dH=x(3)/Je-x(4)*tan(x(2)); z(4) =- x(5)*dH+u(3)/Je; z(5) = x(4)*dH+u(1)/Je;
%=====
function y=mdlOutputs(t,x,u)
y = x;

```

Далі поданий текст програми `SUG_VyvodM` виведення результатів моделювання у графічній формі у окреме графічне вікно.

```

=====
%          SUG_VyvodM
%  Частина програми SUG_M, яка здійснює
%  ВИВЕДЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ моделювання НА ЕКРАН

% Ю.Ф.Лазарев, кафедра ПСОН, КПІ, Україна,
% Початок 28-02-2008  Останні зміни  29-06-2008
subplot(2,2,1)
plot(al*180/pi,bt*180/pi,alk*180/pi,btk*180/pi,'r'), grid, set(gca,'Fontname','MS Sans Serif')
title('Картинна площа','FontSize',12,'FontWeight','bold');
xlabel('\alpha, градуси '); ylabel('\beta '); legend(' АПЕКС','кінетична вісь',0)
subplot(2,2,3)
polar(0,1), grid, set(gca,'Fontname','MS Sans Serif'),hold on
polar(al,cos(bt)),polar(alk,cos(btk),'r+')
title('Погляд згори на сферу','FontSize',12,'FontWeight','bold'); hold off
subplot(2,2,4)
plot(T,al,T,bt,'.',T,omX,'--',T,omY,'.-'), grid, set(gca,'Fontname','MS Sans Serif')
title('Кути та кутові швидкості','FontSize',12,'FontWeight','bold');
xlabel('Час, с '); legend('\alpha (рад)','\beta (рад)','\omega_X (рад/с)','\omega_Y (рад/с)',0)
subplot(2,2,2),axis off
h=text(-0.2,1.17,'Симетричний Урівноважений Гіроскоп',...
'FontSize',14,'FontWeight','bold','Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.1,1.05,'Параметри СЗГ:', 'FontSize',12,'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(-0.2,0.95,sprintf('H_0=%g;',H0)); h=text(0.25,0.95,sprintf('J_e=%g;',Je));
h=text(0.7,0.95,sprintf('J=%g;',J));
h=text(0.1,0.85,'Початкові умови:', 'FontSize',12,'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.,0.75,sprintf('\alpha_0=%g;',al0*180/pi));
h=text(0.5,0.75,sprintf('\beta_0=%g;',bt0*180/pi));
h=text(0.,0.65,sprintf('\alpha\prime_0=%g;',alt0));
h=text(0.5,0.65,sprintf('\beta\prime_0=%g;',btt0));
h=text(0.1,0.55,'Параметри моментів сил:', 'FontSize',12,'Fontname','MS Sans Serif');

```

```

h=text(-0.2,0.45,sprintf('M_x_0=%g;',Mx0)); h=text(-0.2,0.35,sprintf('M_y_0=%g;',My0));
h=text(-0.2,0.25,sprintf('M_z_0=%g;',Mz0)); h=text(0.1,0.45,sprintf('M_x_m=%g;',Mxm));
h=text(0.1,0.35,sprintf('M_y_m=%g;',Mym)); h=text(0.1,0.25,sprintf('M_z_m=%g;',Mzm));
h=text(0.4,0.45,sprintf('\omega_x=%g;',omx)); h=text(0.4,0.35,sprintf('\omega_y=%g;',omy));
h=text(0.4,0.25,sprintf('\omega_z=%g;',omz));
h=text(0.7,0.45,sprintf('\epsilon_x=%g;',ex*180/pi));
h=text(0.7,0.35,sprintf('\epsilon_y=%g;',ey*180/pi));
h=text(0.7,0.25,sprintf('\epsilon_z=%g;',ez*180/pi));
h=text(-0.2,0.15,[sprintf('Коефіцієнти в'язкого тертя: f_x=%g;',fx),...
                sprintf(' f_y=%g;',fy),sprintf(' f_z=%g;',fz)],'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(-0.2,0.05,[sprintf('Крок: hi=%g c;',hi),...
                sprintf(' Час tfinal=%g c;',tfinal)],'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(-0.3,0,'=====');
h1=text(-0.3,-0.05,'Програма SUG-M.m;', 'Fontname','MS Sans Serif');
h1=text(0.35,-0.05,'Автор - ЛАЗАРЄВ Ю.Ф.', 'Fontname','MS Sans Serif');
h1=text(-0.3,-0.15,['Виконав ',sname], 'Fontname','MS Sans Serif'); tm=fix(clock); Tv=tm(4:5);
h1=text(0.5,-0.15,[sprintf(' %g:',Tv), ' ',date]);
h=text(-0.3,-0.2,'=====');

```

2.1.5. Завдання

1. Провести експерименти з вивчення вільного руху СЗГ. Для цього встановити усі коефіцієнти тертя, сталі складові моментів сил, амплітуди змінювання моментів сил рівними нулю.
 - 1.1. Провести першій експеримент. Визначити характер руху осі фігури і кінетичної осі. Зафіксувати амплітуду і частоту коливань. Визначити, чи збігаються вони з розрахунковими. Зробити висновки.
 - 1.2. Варіюючи величиною і напрямком початкового удару, повторити експеримент п.1.1. Зробити висновки з залежності амплітуди і частоти коливань від удару. Зіставити ці висновки з теоретичними. Зробити висновки. Вивести до друку результати двох найбільш типових експериментів.
 - 1.3. Провести аналогічні експерименти, варіюючи величиною власного кінетичного моменту СЗГ.
 - 1.4. Провести аналогічні експерименти, варіюючи величиною екваторіального моменту інерції СЗГ.
 - 1.5. Провести аналогічні експерименти, варіюючи величиною початкового куту β .
 - 1.6. Зробити загальні висновки про вільний рух СЗГ.
2. Провести експерименти з вивчення руху СЗГ за дії сталого моменту сил. Для цього встановити сталу складову моменту вдовж осі Y рівною 1. Решту параметрів моментів сил встановити рівними нулеві.
 - 2.1. Провести першій експеримент. Визначити характер руху осі фігури і кінетичної осі. Зафіксувати амплітуду і частоту коливань, величину і напрямком сталої складової кутової швидкості осі фігури. Визначити, чи збігаються вони з розрахунковими. Зробити висновки.
 - 2.2. Варіюючи величиною і напрямком моменту сил, повторити експеримент п. 2.1. Зробити висновки з залежності амплітуди, частоти коливань і швидкості прецесії від величини і напрямку моменту

- сил. Зіставити ці висновки з теоретичними. Зробити висновки. Вивести до друку результати двох найбільш типових експериментів.
- 2.3. Провести аналогічні експерименти, варіюючи величиною початкових кутових швидкостей СЗГ. Встановити початкові швидкості рівними нулю. Зафіксувати результати. Розрахувати значення початкових швидкостей, за яких відсутні нутаційні коливання. Встановити ці значення і провести експеримент. Зробити висновки за наслідками.
 - 2.4. Провести аналогічні експерименти, варіюючи величиною власного кінетичного моменту СЗГ.
 - 2.5. Провести аналогічні експерименти, варіюючи величиною початкового значення кута β .
 - 2.6. Зробити загальні висновки про рух СЗГ під дією сталого моменту сил.
3. Провести експерименти по вивченню впливу тертя на вільний рух СЗГ. Для цього встановити коефіцієнти тертя $f_x = f_y = 2$. Решту параметрів моментів сил встановити рівними нулю.
- 3.1. Провести першій експеримент. Визначити характер руху осі фігури і кінетичної осі. Зафіксувати частоту коливань, величину і напрямок зміщення положення осі фігури і кінетичної осі. Визначити, чи збігаються вони з розрахунковими. Зробити висновки.
 - 3.2. Варіюючи величинами коефіцієнтів тертя, повторити експеримент п.3.1. Зробити висновки з залежності степеня загасання амплітуди, частоти коливань і зміщень кінетичної осі і осі фігури від коефіцієнтів тертя. Зіставити ці результати з теоретичними. Зробити висновки. Вивести до друку результати двох найбільш типових експериментів
 - 3.3. Провести аналогічні експерименти, варіюючи величиною власного кінетичного моменту СЗГ.
 - 3.4. Зробити загальні висновки про вільний рух СЗГ під впливом тертя.
4. Провести експерименти по вивченню впливу тертя на рух СЗГ під дією сталого моменту сил. Для цього встановити коефіцієнти тертя $f_x = f_y = 2$, M_{y0} . Решту параметрів моментів сил встановити рівними нулю.
- 4.1. Провести першій експеримент. Визначити характер руху осі фігури і кінетичної осі. Зафіксувати частоту коливань, величину і напрямок кутової швидкості прецесії, зміщення положення осі фігури і кінетичної осі. Визначити, чи збігаються вони з розрахунковими. Зробити висновки.
 - 4.2. Варіюючи величинами коефіцієнтів тертя, повторити експеримент п. 4.1. Зробити висновки з залежності степеня загасання амплітуди, частоти коливань, швидкості прецесії і зміщень кінетичної

осі і осі фігури від коефіцієнтів тертя. Зіставити ці результати з теоретичними. Зробити висновки. Вивести до друку результати двох найбільш типових експериментів

- 4.3. Провести аналогічні експерименти, варіюючи величиною власного кінетичного моменту СЗГ.
- 4.4. Зробити загальні висновки про вільний рух СЗГ під впливом тертя.

2.1.6. Методичні вказівки до виконання

1. Увійдіть у програмне середовище Matlab.
2. У командному вікні викличте керуючу програму, набравши у командному рядку її ім'я

>> **sug_m**

і клавішу <Enter>. Якщо усе зроблено правильно, у командному вікні має виникнути напис

```
%  
%   Перед Вами програма  SUG_M.m  
%   "Моделювання поведження  
%   СИМЕТРИЧНОГО  УРІВНОВАЖЕНОГО  ГРОСКОПА"  
%   яка складає програмну основу  
%   лабораторної роботи № 2 з дисципліни  
%   "Основи теорії ЧУТЛИВИХ ЕЛЕМЕНТІВ"  
%  
echo off
```

а на екрані має виникнути невеличке вікно з меню (рис. 2.7).

3. Натисніть (за допомогою миші) клавішу "Продовжити роботу".

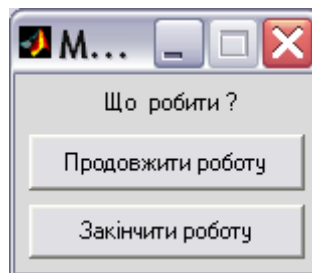


Рис. 2.7. Меню продовження роботи

У командному вікні додатково виникне напис

Введіть ваше прізвище та ініціали (в апострофах)

4. Введіть ваше прізвище, або натисніть клавішу <Enter>. На екрані виникне меню (рис. 2.8)

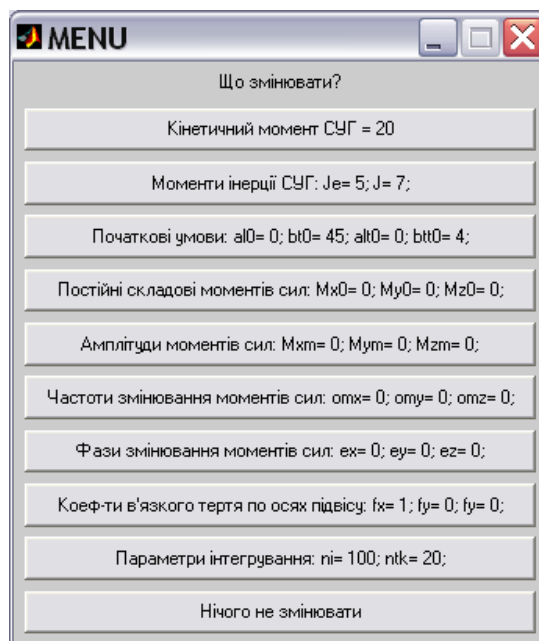


Рис. 2.8. Меню змінювання даних

5. Ознайомтеся з прийнятими значеннями даних і порівняйте їх з потрібними вам для виконання поточного завдання. Якщо щось з того, що запропоновано меню, потрібно змінити, натисніть відповідну клавішу меню. Виникне додаткове меню з конкретними величинами, які потребують змінення. Натискаючи відповідну клавішу цього меню, ви дістаєте змогу змінити значення потрібного параметру у командному вікні.

Встановіть потрібні для виконання завдання значення параметрів гіроскопа, початкових умов і моментів сил.

При потребі змінити значення одного з зазначених у меню параметрів, слід обрати відповідну кнопку меню. Варто пам'ятати, що введення нового значення обраного параметра відбувається у командному вікні, тому після обрання параметра слід активізувати командне вікно, набрати в ньому нове значення і натиснути <Enter>. Вихід з меню здійснюється натисканням кнопки *Нічого не змінювати* доти, поки вікна з меню не зникнуть. Після цього можна починати нове моделювання зі зміненими значеннями параметрів.

Якщо встановлені значення параметрів вас задовольняють, натисніть клавішу "Нічого не змінювати". Якщо все було зроблено вірно, на екрані монітора має виникнути додаткове графічне вікно (див. рис. 2.9). В ньому відображуються результати моделювання і наведені значення усіх використаних параметрів.

6. Вимірювання необхідних параметрів руху здійснюється по графіках, наведених у цьому вікні. Для підвищення точності вимірювань слід використувати функцію збільшення зображення *Zoom in* в лінійці інструментів на панелі цього вікна.

7. Результати вимірювань слід занотувувати у робочому зошиті у вигляді таблиці, одним з стовпців якої має бути змінюваний параметр, а іншими – виміряні значення і, можливо, розрахований за ними параметр.

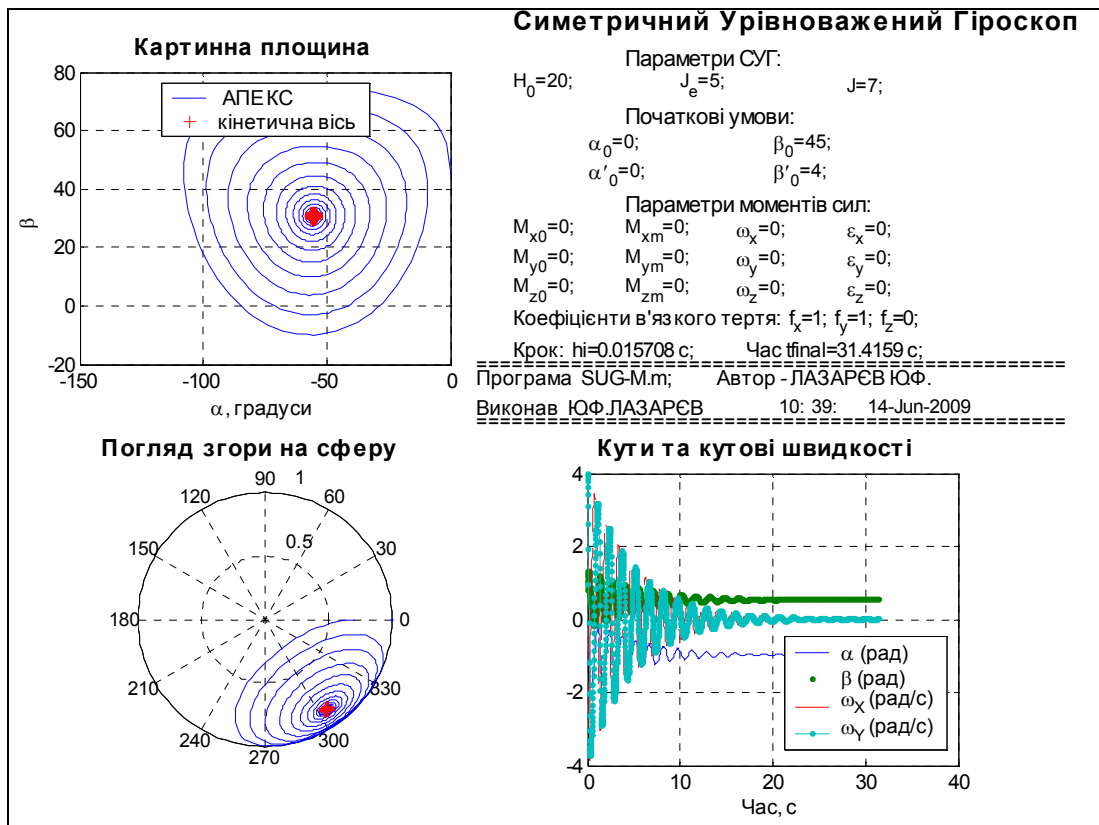


Рис. 2.9. Видяг графічного вікна з результатами моделювання

2.1.7. Контрольні запитання

1. Що називають симетричним урівноваженим гіроскопом?
2. Що називають "кінетичною" віссю СЗГ? кінетичними осями?
3. Що саме розуміють під рухом гіроскопа?
4. Опишіть вільний рух СЗГ. За якою формулою визначається частота вільних коливань? Чим визначається амплітуда цих коливань? Як називають ці коливання?
5. Чи підтверджуються ці теоретичні висновки проведеними вами експериментами? Якщо є розбіжності, то у чому ви вбачаєте їхню причину?
6. Опишіть особливості руху СЗГ під дією сталого момента сил. За якими формулами визначаються амплітуда, частота нутаційних коливань, кутова швидкість прецесії? Від чого залежать ці параметри руху?
7. Чи підтверджуються ці теоретичні висновки проведеними вами експериментами? Якщо є розбіжності, то у чому ви вбачаєте їхню причину?
8. Опишіть вплив тертя на вільний і вимушений рух СЗГ. Чи справджуються теоретичні висновки у цьому випадку з результатами проведених експериментів? Якщо є розбіжності, то у чому ви вбачаєте їхню причину?
9. Яку чисельну модель СЗГ втілено у програмному забезпеченні цієї лабораторної роботи? Вкажіть фрагменти програм, де це зроблено.

2.2. Дослідження поведження гіромаятника

2.2.1. Мета роботи

Шляхом експериментальних досліджень на чисельній моделі вивчити головні особливості поведження гіромаятника у його вільному русі, під дією моментів сил тертя і порівняти з висновками теоретичного аналізу.

2.2.2. Сценарій роботи

1. Вивчити теоретичну частину роботи (п. 2.2.3). Ознайомитися з програмним забезпеченням для роботи (п. 2.2.4).
2. Увійти у програмне оточення лабораторної роботи. Провести дослідження у відповідності з завданням (п. 2.2.5)
3. Провести зіставлення характеристик руху гіромаятника, одержаних внаслідок проведених експериментів, з тими, що впливають з теоретичного аналізу. Зробити висновки.
4. Підготувати відповіді на запитання п. 2.2.7.
5. Показати викладачеві одержані результати, пояснити їх. Доповісти про зроблені висновки. Відповісти на запитання викладача.

2.2.3. Теоретична частина

Гіромаятник – це симетричний гіроскоп, центр мас якого зміщений відносно точки його підвісу вздовж головної осі. Завдяки цьому головною причиною руху такого пристрою стає момент сили тяжіння.

Кутове положення гіромаятника у системі координат, пов'язаній з Землею, можна визначити різними способами. Одним з них можуть бути кути $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, відображені на рис. 2.10, де віссю фігури гіроскопа є вісь x , кути δ_1 та δ_2 характеризують кутові відхили осі фігури від вертикалі, кут δ_3 - власне обертання гіроскопа навколо осі фігури. Ця послідовність кутів одержала назву кутів осциляції.

Рівняння руху гіромаятника в узагальнених координатах δ_1, δ_2 та δ_3 мають вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} J'_e \ddot{\delta}_1 \cos^2 \delta_2 - 2J'_e \dot{\delta}_1 \dot{\delta}_2 \sin \delta_2 \cos \delta_2 + H \dot{\delta}_2 \cos \delta_2 = \\ = mgl \sin \delta_1 \cos \delta_2 + M_\eta - M_x \sin \delta_2 \\ J'_e \ddot{\delta}_2 + J'_e \dot{\delta}_1^2 \sin \delta_2 \cos \delta_2 - H \dot{\delta}_1 \cos \delta_2 = \\ = mgl \sin \delta_2 \cos \delta_1 + M_z \\ \frac{dH}{dt} = M_x \end{array} \right. \quad (2.30)$$

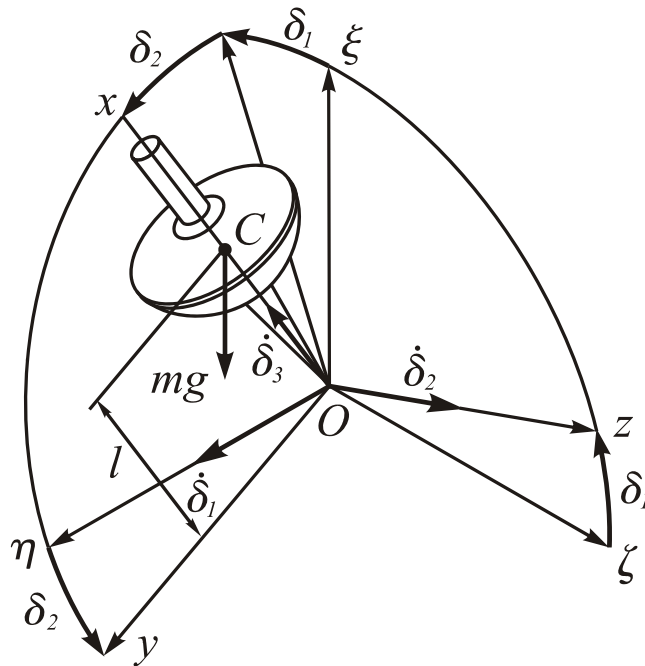


Рис. 2.10. Куты осциляції

Іншим способом є сукупність кутів Ейлера, які вводяться у відповідності з рис. 2.11.

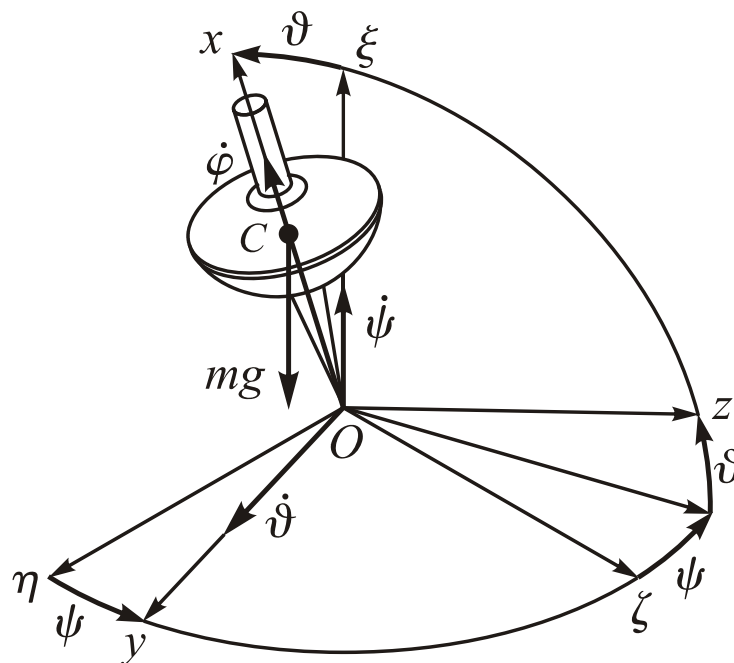


Рис. 2.11. Куты Ейлера

Рівняння руху гіромаятника у кутах Ейлера є такими:

$$\left\{ \begin{array}{l} J'_e \ddot{\psi} \sin^2 \vartheta + 2J'_e \dot{\psi} \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta - H \dot{\vartheta} \sin \vartheta = M_\xi - M_X \cos \vartheta \\ J'_e \ddot{\vartheta} - J'_e \dot{\psi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta + H \dot{\psi} \sin \vartheta = mgl \sin \vartheta + M_Y \\ \frac{dH}{dt} = M_X \end{array} \right. \quad (2.31)$$

Кути Ейлера ψ, ϑ, φ мають досить простий і наочний зміст. Кут нутації ϑ характеризує відхилення осі фігури гіроскопа від вертикалі, кут прецесії ψ - поворот вертикальної площини, яка проходить через вісь фігури гіроскопа, навколо вертикалі, а кут ротації φ - поворот ротора гіроскопа навколо осі фігури відносно вертикальної площини, яка проходить через вісь фігури.

2.2.3.1. Вільний рух гіромаятника

Вільним прийнято називати гіромаятник, на який не діють ніякі моменти зовнішніх сил, окрім сили тяжіння.

Розглянемо вільний рух гіромаятника в околі положення вертикалі, тобто у припущенні, що головна вісь гіромаятника увесь час рухається поблизу вертикалі.

У цьому випадку найбільш раціонально використовувати для аналізу рівняння (2.30) в кутах осциляції. Припускаючи в них моменти зовнішніх сил рівними нулю, кути осциляції малими

$$\delta_1 \ll 1; \quad \delta_2 \ll 1,$$

кутові швидкості $\dot{\delta}_1$ і $\dot{\delta}_2$ - також малими і залишаючи у рівняннях лише члени першого порядку мализни, одержимо лінеаризовані рівняння:

$$\begin{cases} J'_e \ddot{\delta}_1 + H_0 \dot{\delta}_2 - mgl \cdot \delta_1 = 0 \\ J'_e \ddot{\delta}_2 - H_0 \dot{\delta}_1 - mgl \cdot \delta_2 = 0 \end{cases} \quad (2.32)$$

Для відшукування розв'язків такої системи диференціальних рівнянь можна застосувати метод компресії рівнянь. Для цього зручно ввести у розгляд комплексну змінну

$$z = \delta_1 + j\delta_2. \quad (2.33)$$

Помножимо друге рівняння (2.32) на уявну одиницю і додамо результат до першого рівняння. Виходить одне рівняння другого порядку:

$$J'_e \ddot{z} - jH_0 \dot{z} - mgl \cdot z = 0. \quad (2.34)$$

Його характеристичне рівняння

$$J'_e p^2 - jH_0 p - mgl = 0$$

має корені

$$p_{1,2} = j \frac{H_0}{2J'_e} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4J'_e mgl}{H_0^2}} \right]. \quad (2.35)$$

При $l > 0$ маємо випадок "верхньої маятниковості", коли центр мас гіромаятника розташований вище за точку підвісу. Випадок $l < 0$ відповідає "нижній маятниковості", при якій центр мас є нижчим за точку його підвісу.

З (2.35) випливає, що при нижній маятниковості ($l < 0$) корені характеристичного рівняння будуть обидва суто уявними. Те саме буде при верхній маятниковості (випадок дзиги) за умови досить значного за величиною кінетичного моменту гіромаятника

$$H_0 \geq 2\sqrt{J'_e mgl}. \quad (2.36)$$

Якщо ж ця умова не виконується, то у коренях (2.35) виникають дійсні частини, з яких одна буде обов'язково додатною, що свідчить про нестійкість руху.

Вважаючи умову (2.36) виконаною, позначимо

$$\omega_{01} = \frac{H_0}{2J'_e} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4J'_e mgl}{H_0^2}} \right]; \quad \omega_{02} = \frac{H_0}{2J'_e} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4J'_e mgl}{H_0^2}} \right]. \quad (2.37)$$

Розв'язок рівняння (2.34) тепер можна подати у виді:

$$z(t) = C_1 e^{j\omega_{01}t} + C_2 e^{j\omega_{02}t}. \quad (2.38)$$

Кожна з двох складових, з яких складається розв'язок, відображується на зображальній комплексній площині z ($\delta_1 - j\delta_2$) траєкторією зображувальної точки у вигляді кола з центром у початку координат. Рух по колу у випадку першої складової здійснюється з меншою коловою частотою, тобто з більшим періодом $T_{01} = \frac{2\pi}{\omega_{01}}$, а у випадку другої складової, – з більшою частотою і з мен-

шим періодом $T_{02} = \frac{2\pi}{\omega_{02}}$. У цілому траєкторія, що відповідає розв'язкові (2.38)

являє собою суму цих двох колових рухів, тобто спіралевидну замкнену криву (рис. 2.12) з центром у початку координат.

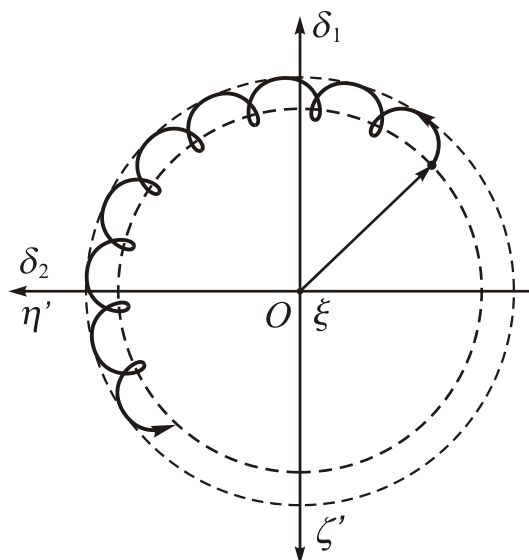


Рис. 2.12. Траєкторія зображальної точки гіромаятника

Неважно впевнитися, що траєкторія зображальної точки на комплексній зображальній площині у випадку гіромаятника повністю збігається з траєкторією апекса гіроскопа на картинній площині, якщо останню провести горизонтально на висоті 1 від точки підвісу (рис. 2.13). Отже, вісь фігури симетричного вільного гіромаятника здійснює складений рух у просторі, обертаючись по конусу з великою частотою навколо осі, яка у власну чергу обертається навколо вертикалі з малою частотою.

Якщо кінетичний момент гіромаятника є великим, тобто виконується умова

$$\mu = \frac{4J'_e mgl}{H_0^2} \ll 1,$$

то значення частот (2.37) власних коливань гіромаятника можна обчислювати за наступними наближеними формулами:

$$\omega_{01} \approx \frac{mgl}{H_0}; \quad \omega_{02} \approx \frac{H_0}{J'_e}. \quad (2.39)$$

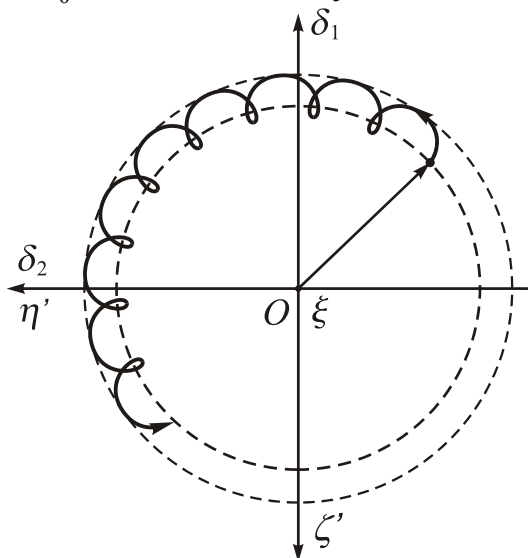


Рис. 2.13. Траєкторія апекса гіромаятника на картинній площині

Неважно збагнути, що перша з них збігається з кутовою швидкістю вимушеної прецесії гіроскопа під дією моменту mgl сили тяжіння, а друга – з частотою нутації.

2.2.3.2. Вплив тертя на поведження гіромаятника

Вплив тертя на рух вільного гіромаятника достатньо точно кількісно і якісно можна розглянути на лінеаризованій моделі (див. рівняння (2.32)) при малих відхиленнях осі гіромаятника від вертикалі. Припускаючи, що тертя є лінійним (в'язким, тобто пропорційним швидкості) будемо вважати, що:

- момент сил тертя залежить лише від екваторіальної складової кутової швидкості гіроскопа і пропорційний їй за величиною;

- вектор моменту сил тертя спрямований протилежно вектору екваторіальної кутової швидкості:

$$\mathbf{M}_{\text{тр}} = -f \cdot \boldsymbol{\omega}_e. \quad (2.40)$$

Це дає наступні складові цього моменту на осі Резаля (див. рис. 2.30):

$$M_Y = -f\dot{\delta}_1 \cos \delta_2 \approx -f\dot{\delta}_1; \quad M_Z = -f\dot{\delta}_2.$$

Рівняння (2.32) з урахуванням моментів сил тертя за таких умов набудуть виду:

$$\begin{cases} J'_e \ddot{\delta}_1 + f\dot{\delta}_1 + H_0 \dot{\delta}_2 - mgl\delta_1 = 0 \\ J'_e \ddot{\delta}_2 + f\dot{\delta}_2 - H_0 \dot{\delta}_1 - mgl\delta_2 = 0 \end{cases} \quad (2.41)$$

Як і раніше, скористаємося методом компресії рівнянь. Введемо комплексну змінну (2.33) і зведемо систему рівнянь (2.41) до одного рівняння другого порядку:

$$J'_e \ddot{z} + f\dot{z} - jH_0 \dot{z} - mglz = 0.$$

Відповідне характеристичне рівняння матиме вигляд:

$$J'_e p^2 + (f - jH_0)p - mgl = 0.$$

Відшукаємо корені цього рівняння з комплексними коефіцієнтами:

$$p_{1,2} = j \frac{H_0}{2J'_e} \left(1 + j \frac{f}{H_0} \right) \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4J'_e mgl}{H_0^2 \left(1 + j \frac{f}{H_0} \right)^2}} \right].$$

Задля нашої мети встановлення стійкості вільних коливань гіромаятника достатньо скористатися наближеними значеннями коренів, які впливають з припущень про мализну (у порівнянні з одиницею):

- величини $\frac{f}{H_0}$ (тобто моментів тертя);

- величини $\frac{4J'_e mgl}{H_0^2}$ (тобто виконання припущення, що гіромаятник є

швидким).

Тепер першій корінь набуває такого наближеного значення:

$$p_1 \approx f \frac{mgl}{H_0^2} + j \frac{mgl}{H_0}. \quad (2.42)$$

Другий корінь визначиться так:

$$p_2 \approx -\frac{f}{J'_e} + j \frac{H_0}{J'_e}. \quad (2.43)$$

Проаналізуємо одержані результати.

1. Через те, що момент інерції J'_e завжди є додатним, і додатним завжди є коефіцієнт тертя f , дійсна частина другого кореня є завжди від'ємною, тому

високочастотна складова власних коливань завжди є стійкою, і з плином часу високочастотні коливання зникають.

2. Стійкість або нестійкість низькочастотних коливань гіромаятника залежить від того, вище чи нижче точки підвісу розташований його центр мас. При верхній маятниковості ($l > 0$, випадок дзиги) низькочастотні коливання є нестійкими. При нижній маятниковості ($l < 0$) низькочастотні коливання є стійкими і з часом зникають. Отже, *верхнє положення рівноваги гіромаятника є нестійким, а нижнє – стійким.* У цьому відношенні гіромаятник не відрізняється від звичайного маятника.

Зовсім інакше проявляє себе тертя у тому випадку, коли гіроскоп спирається закругленим нижнім кінцем своєї осі на підп'ятник (рис. 2.14).

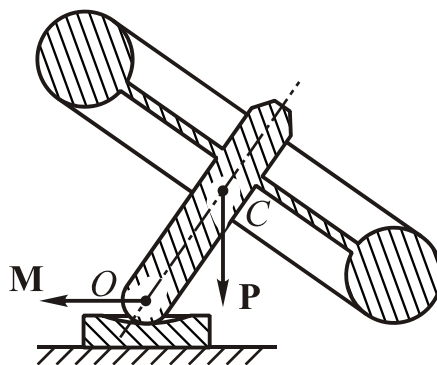


Рис. 2.14. Гіромаятник на підп'ятнику

Для простоти досліджування прийемо, що кінець осі гіромаятника має форму кулі, а підп'ятник є сферичним з радіусом, більшим за радіус цієї кулі. Припустимо, що центр півкулі на кінці осі гіромаятника залишається нерухомим увесь час розглядуваного руху, тобто він є точкою опори O . Тоді точки дотику осі гіромаятника з підп'ятником, які лежать точно нижче цієї точки мають швидкості ковзання за напрямком майже горизонтальні.

Усі вони напрямлені в один бік, який визначається головним чином напрямком власного обертання гіроскопа. Сила кулонова тертя у кожній такій точці не залежить від величини швидкості ковзання, а визначається лише напрямком відповідної швидкості і силою тиску у цій точці. У сукупності вони утворюють єдину горизонтальну силу тертя, яка прикладена до гіроскопу у точці дотику осі фігури з поверхнею підп'ятника. Ця сила тертя на плечі радіусу кулі осі фігури утворює відносно точки опори O вектор моменту сил тертя, який, як неважко впевнитися, є у розглядуваному випадку горизонтальним, міститься у вертикальній площині, що проходить через вісь фігури гіроскопа і завжди є спрямованим у напрямку, протилежному напрямку кутової швидкості власного обертання. Величина цього моменту не залежить ані від величини кутової швидкості власного обертання, ані від куту відхилення осі гіромаятника від вертикалі.

У залежності від того, чи буде центр тяжіння C гіроскопа лежати вище за точку його опори O , чи нижче її, і у залежності від напрямку власного обер-

тання гіроскопа, можна вирізнити чотири випадки взаємного розташування векторів, що визначають рух гіромаятника (рис. 2.15).

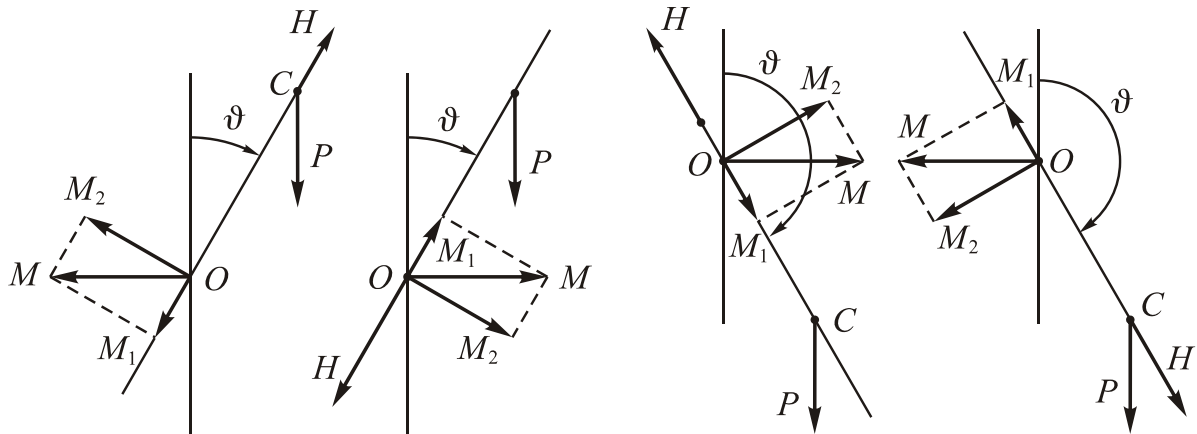


Рис. 2.15. Варіанти дії тертя у підп'ятнику на гіромаятник

Розкладемо вектор \mathbf{M} на складові M_1 і M_2 вдовж осі фігури і по перпендикулярній їй осі, що лежить в вертикальній площині разом з віссю фігури. Складова M_1 завжди зменшує величину кінетичного моменту H гіроскопа. Складова M_2 викликає додаткову прецесію гіромаятника. Як впливає з розгляду рис. 2.6, ця складова обумовлює підняття центру тяжіння гіромаятника, коли останній є вищим за точку підвісу, і навпаки, його опускання, якщо центр тяжіння є нижчим за точку підвісу.

Отже, можна дійти висновку:

тертя у підп'ятнику зменшує кутову швидкість власного обертання гіромаятника; завдяки тертю *і нижнє і верхнє положення рівноваги гіромаятника на підп'ятнику є стійкими*.

Цим і пояснюється відоме, легко спостережуване і парадоксальне явище швидкого випрямлення осі оберткової дзиги, яка спирається на горизонтальну площину. При такому випрямленні потенційна енергія збільшується, але зате відповідно зменшується кінетична енергія, яку гіроскоп має завдяки власному обертанню.

Як тільки швидкий гіромаятник (дзига) сягає вертикального положення, дія тертя ковзання зменшується, але зате починає проявлятися тертя вертіння. Це тертя зменшує величину кінетичного моменту гіроскопа. З плином часу гіроскоп перестає бути швидким, його кінетичний момент стає меншим за визначений нерівністю (2.36). Якщо при цьому вісь гіроскопа встигла зайняти верхнє вертикальне положення, то після цього умова стійкості порушується, і дзига починає розгойдуватися і, кінець-кінцем, перекидається.

2.2.4. Опис програмних засобів

Задля реалізації програмного моделювання поведінки гіромаятника створено програму GM_m1.m, яка здійснює керування процесами введення даних, організації процесу чисельного інтегрування диференціальних рівнянь гіромаятника і виведення результатів моделювання у графічне вікно. Її текст поданий нижче.

Керувальна програма GM_m1

```
% GM_M1
% Головна (керуюча) програма моделювання поведінки ГІРОМАЯТНИКА
%   по рівняннях у кутах осциляції

% Ю.Ф.Лазарев, кафедра ПСОН, КПІ, Україна,
% Почато 26-03-2008   Останні зміни 14-06-2009
clear all, clc
global mu fiX fiY fiZ
sname='Лазарев Ю. Ф.';
% Задання значень первісних даних
% 1. Кінетическій момент гіромаятника
   H = 40;
% 2. Моменти інерції СЗГ
           Je=20;      J=7;
% 3. Опорний маятниковий момент
   mgl = 10;
% 4. Котфіцієнти вязкого тертя
           fx=0;      fy=2;      fz=2;
% 5. Початкові умови
% 5.1. Початкові кути Ейлера
           psi0=0*pi/180;   teta0=30*pi/180;
% 5.2. Початкові кутові швидкості
           psiT0=0;          tetaT0=0;
% 4. Параметри інтегрування
% 4.1. Кількість кроків інтегрування у найменшому періоді коливань
           ni=20;
% 4.2. Інтервал інтегрування у часі у кількості найбільших періодів коливань
           ntk=4;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% ПЕРЕРАХУНОК
mu = mgl/Je;   fiX=fx/J;   fiY=fy/Je;   fiZ=fz/Je;   h=H/Je;   hh=h/2/cos(teta0);
muGM=mu/hh^2/cos(teta0);   Kkv=sqrt(1-muGM);
PS1=hh*(1-Kkv);   PS2=hh*(1+Kkv);
hi=2*pi/PS2/ni;   TK=2*pi/PS1*ntk;
t=0;   k=1;
y=[psi0, teta0, h, tetaT0, psiT0*sin(teta0)];
Ps(1)=y(1); Te(1)=y(2); tt(1)=t; omX(k)=y(3); omY(1)=y(4); omZ(1)=y(5);
% Початок циклу інтегрування ДР
while t<=TK
   k=k+1;   [tout,yout] = rko4('GM_kut_EULER1',hi,t,y);   y=yout; t=tout;
   Ps(k)=y(1); Te(k)=y(2); tt(k)=tout; omX(k)=y(3); omY(k)=y(4); omZ(k)=y(5);
end % Кінець циклу інтегрування ДР
Kk=sqrt(omX.^2+omY.^2+omZ.^2);
cP=cos(Ps); sP=sin(Ps); cT=cos(Te); sT=sin(Te);
kt=-omZ.*cT+omX.*sT;
Kksi=omX.*cT+omZ.*sT; Keta=omY.*cP+kt.*sP; Kdz=omY.*sP-kt.*cP;
Psk=unwrap(atan2(Keta,-Kdz)); Tek=acos(Kksi/Kk);
% Виведення графіків
subplot(2,2,1)
plot(Ps*180/pi,Te*180/pi,'-',Psk*180/pi,Tek*180/pi,'r+-'),grid
```

```

set(gca,'Fontname','MS Sans Serif'), axis('ij')
title('Погляд горизонтальний','FontSize',12,'FontWeight','bold')
xlabel('\psi (градуси)','FontSize',12), ylabel('\theta (градуси)','FontSize',12)
legend('апекс','кінетична вісь',0);
subplot(2,2,4), plot(tt,Ps,tt,Te,'.',tt,omY,'.',tt,omZ),grid
set(gca,'Fontname','MS Sans Serif')
title('Залежність від часу','FontSize',12,'FontWeight','bold'), xlabel('Час (с)','FontSize',12)
legend('\psi (радіан)','\theta (радіан)','\omega_Y (рад/с)','\omega_Z(рад/с)',0)
subplot(2,2,3), polar(Ps,sin(Te))
title('Вид згори на сферу','FontSize',12,'FontWeight','bold','Fontname','MS Sans Serif')
% Текстове оформлення графічного вікна
subplot(2,2,2), axis off
h=text(-0.2,1.17,' Рух ГІРОМАЯТНИКА в кутах Ейлера',...
'FontSize',14,'FontWeight','bold','Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.2,1.05,'Параметри Гіромаятника:', 'FontSize',12,'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(-0.2,0.95,sprintf('H_0 = %g;',H),'FontSize',12);
h=text(0.2,0.95,sprintf('J_e = %g;',Je),'FontSize',12);
h=text(0.5,0.95,sprintf('J = %g;',J),'FontSize',12);
h=text(0.8,0.95,sprintf('mgl = %g;',mgl),'FontSize',12);
h=text(0.2,0.85,'Початкові умови:', 'FontSize',12,'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.,0.75,sprintf('\psi(0) = %g;',psi0*180/pi),'FontSize',12);
h=text(0.5,0.75,sprintf('\theta(0) = %g;',teta0*180/pi),'FontSize',12);
h=text(0.,0.65,sprintf('\psi'(0) = %g;',psiT0),'FontSize',12);
h=text(0.5,0.65,sprintf('\theta"(0) = %g;',tetaT0),'FontSize',12);
h=text(-0.2,0.55,[sprintf('Коеф-ти в"язкого тертя: fx = %g;',fx),...
sprintf(' fy = %g;',fy),sprintf(' fz = %g;',fz)], 'FontSize',12,'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.1,0.4,'-----');
h=text(-0.2,0.45,sprintf('Крок інтегрування = %g с;',hi),'FontSize',12,
'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.2,0.35,'Розрахункові дані', 'FontSize',12,'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0,0.27,sprintf('\psi"_1 = %g;',PS1),'FontSize',12);
h=text(0.5,0.27,sprintf('\psi"_2 = %g;',PS2),'FontSize',12);
h=text(0.07,0.2,'2mgl*Je*cos\theta', 'FontSize',12);
h=text(0.,0.15,sprintf('\mu = ----- = %g;',muGM),'FontSize',12);
h=text(0.15,0.08,'H_0^2', 'FontSize',12);
h=text(-0.3,0,'=====');
h1=text(-0.3,-0.05,'Програма GM-M1.m;', 'Fontname','MS Sans Serif');
h1=text(0.35,-0.05,'Автор - ЛАЗАРЄВ Ю.Ф., каф. ПСОН', 'Fontname','MS Sans Serif');
h1=text(-0.3,-0.15,['Виконав ',sname], 'Fontname','MS Sans Serif');
tm=fix(clock); Tv=tm(4:5);
h1=text(0.5,-0.15,[sprintf(' %g:',Tv), ' ',date]);
h=text(-0.3,-0.2,'=====');

```

На відміну від попередніх програм, чисельне інтегрування тут здійснюється методом Рунге-Кутта 4-го порядку (процедура RKO4.m)

```

=====
function [tout,yout] = rko4(yfun,h,t,y)
% процедура RKO4 чисельного інтегрування ЗДР, праві частини яких задані
% процедурою yfun, методом Рунге-Кутта 4-го порядку.
% Вхідні змінні:
% yfun - символічний рядок, що містить імя п/п правих частин ЗДР
% Виклик: z = fun(t,y), де yfun = 'fun'. t - поточний час;
% y - вектор поточних значень змінних стану,
% z - розраховані значень похідних; z(i) = dy(i)/dt.
% h - крок інтегрування; t - поточний час;
% y - значення вектора змінних стану на попередньому кроці
% Вихідні змінні:
% tout - наступний момент часу;
% yout - розраховане значення вектора змінних стану у цей момент
% Y. F. Lazarev, 274-67-31.

```

```
% Розрахунок проміжних значень похідних
s1 = feval(yfun, t, y);          s2 = feval(yfun, t+h/2, y+h/2*s1);
s3 = feval(yfun, t+h/2, y+h/2*s2);  s4 = feval(yfun, t+h, y+h*s3);
% Розрахунок значення вектора змінних стану у наступний момент часу
tout = t + h;   yout = y + h*(s1 + 2*s2 + 2*s3 + s4)/6;
```

яка використовує процедуру GM_kut_EULER1.m обчислення правих частин диференціальних рівнянь гіромаятника

```
=====
function z=GM_kut_EULER1(t,y)
% Процедура обчислення правих частин диференціальних рівнянь
% руху ГІРОМАЯТНИКА (дзиги) у кутах Ейлера
%   z1 = y5/sin(y2);   z2 = y4;   z3 = -fiX*y3
%   z4 = -fiY*y4 + mu*sin(y2)-y5*[y3 - y5*ctg(y2)];
%   z5 = -fiZ*y5 + y4*[y3 - y5*ctg(y2)]
% Вхідні параметри:
% t - поточний час;   y - масив з п'яти змінних стану
%   y1 = psi - кут прецесії;   y2 = teta - кут нутації;
%   y3 = H/Je - кінетичний момент (приведений)
%   y4 = omY - складова кутової швидкості по осі Y;
%   y5 = omZ - складова кутової швидкості по осі Z
% Лазарев Ю. Ф.   6-03-2008
global mu fiX fiY fiZ
sT=sin(y(2)); cT=cos(y(2));
z(1)=y(5)/sT; z(2)= y(4); z(3)=-fiX*y(3);
H=y(3)-y(5)*cT/sT;
z(4)=-fiY*y(4)+mu*sT-y(5)*H;   z(5)=-fiZ*y(5)+y(4)*H;
```

Ця сукупність програм і процедур забезпечує моделювання по рівняннях гіромаятника у кутах Ейлера.

Щоб реалізувати моделювання з використанням рівнянь у кутах осциляції, потрібно скористуватися дещо зміненою керуючою програмою за ім'ям **GM_M2**

```
% GM_M2
% Головна (керуюча) програма моделювання поведінки ГІРОМАЯТНИКА
%   по рівняннях у кутах осциляції

% Ю.Ф.Лазарев, кафедра ПСОН, КПІ, Україна,
% Почато 26-03-2008   Останні зміни 14-06-2009
clear all,   clc
global mu fiX fiY fiZ
sname='Лазарев Ю. Ф.';
% Задание значений исходных данных
% 1. Кинетический момент гиromаятника
H = 40;
% 2. Моменты инерции СЗГ
Je=20;   J=7;
% 3. Опорный маятниковый момент
mgl = 10;
% 4. Коэффициенты вязкого трения
fx=0;   fy=2;   fz=2;
% 5. Початкові умови
% 5.1. Початкові кути осциляції
dlt10=30*pi/180;   dlt20=0*pi/180;
% 5.2. Початкові кутові швидкості
dlt1T0=0.;   dlt2T0=0;
% 4. Параметри інтегрування
```

```

%          4.1. Кількість кроків інтегрування у найменшому періоді
%          коливань
%           $\pi=20$ ;

%          4.2. Інтервал інтегрування у часі у кількості
%          найбільших періодів коливань
%           $ntk=4$ .;

%%%%%%%%%%
% ПЕРЕРАХУНОК
mu = mgl/Je;  fiX=fx/J;  fiY=fy/Je;  fiZ=fz/Je;  h=H/Je;
hh=h/2;
muGM=mu/hh^2;      Kkv=sqrt(1-muGM);
PS1=hh*(1-Kkv);    PS2=hh*(1+Kkv);  %psiT0=PS1
hi=2*pi/abs(PS2)/ni;      %psiT0=PS2
TK=2*pi/abs(PS1)*ntk;
t=0;  k=1;
y=[dlt10, dlt20, h, dlt1T0*cos(dlt20), dlt2T0];
D1(1)=y(1); D(1)=y(2); tt(1)=t; omX(k)=y(3);
omY(1)=y(4); omZ(1)=y(5);
while t<=TK
    k=k+1;  [tout,yout] = rko4('GM_kut_occilation',hi,t,y);  y=yout; t=tout;
    D1(k)=y(1); D2(k)=y(2); tt(k)=tout; omX(k)=y(3); omY(k)=y(4); omZ(k)=y(5);
end
Kk=sqrt(omX.^2+omY.^2+omZ.^2);
cD1=cos(D1); sD1=sin(D1); cD2=cos(D2); sD2=sin(D2);
kt=omX.*cD2-omY.*sD2;  Kksi=kt.*cD1+omZ.*sD1;
Keta=omX.*sD2+omY.*cD2;  Kdz=omZ.*cD1-kt.*sD1;
Dlk1=atan2(-Kdz,Kksi);  Dlk2=asin(Keta./Kk);
% Виведення графіків
subplot(2,2,1)
plot(D1*180/pi,D2*180/pi,'-',Dlk1*180/pi,Dlk2*180/pi,'r+-'),grid
set(gca,'Fontname','MS Sans Serif'), axis('equal')
title('Картинна площина','FontSize',12,'FontWeight','bold')
xlabel('\delta_1 (градуси)','FontSize',12)
ylabel('\delta_2','FontSize',12,'Fontname','Helvetica')
legend('апекс','кінетична вісь',0);
subplot(2,2,4)
plot(tt,D1,tt,D2,'-',tt,omY,'-',tt,omZ),grid
set(gca,'Fontname','MS Sans Serif')
title('Залежність від часу','FontSize',12,'FontWeight','bold')
xlabel('Час (c)','FontSize',12)
legend('\delta_1 (радіан)','\delta_2 (радіан)','\omega_y (рад/с)','\omega_z(рад/с)',0)
subplot(2,2,3)
TE=[pi/2,acos(cos(D1).*cos(D2))];  PS=[0,atan2(tan(D2),sin(D1))];
polar(PS,sin(TE),'-')
set(gca,'Fontname','MS Sans Serif')
title('Вид згори на сферу','FontSize',12,'FontWeight','bold')
% Текстове оформлення графічного вікна
subplot(2,2,2), axis off
h=text(-0.2,1.17,'Рух ГІРОМАЯТНИКА в кутах осциляції',...
'FontSize',14,'FontWeight','bold','Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.2,1.05,'Параметри Гіромаятника:', 'FontSize',12,'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(-0.2,0.95,sprintf('H_0 = %g;',H),'FontSize',12);
h=text(0.2,0.95,sprintf('J_e = %g;',Je),'FontSize',12);
h=text(0.5,0.95,sprintf('J = %g;',J),'FontSize',12);
h=text(0.8,0.95,sprintf('mgl = %g;',mgl),'FontSize',12);

h=text(0.2,0.85,'Початкові умови:', 'FontSize',12,'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.,0.75,sprintf('\delta_1(0) = %g;',dlt10*180/pi),'FontSize',12);
h=text(0.5,0.75,sprintf('\delta_2(0) = %g;',dlt20*180/pi),'FontSize',12);
h=text(0.,0.65,sprintf('\delta_1\prime(0) = %g;',dlt1T0),'FontSize',12);
h=text(0.5,0.65,sprintf('\delta_2\prime(0) = %g;',dlt2T0),'FontSize',12);
h=text(-0.2,0.55,[sprintf('Коеф-ти в'язкого тертя: fx = %g;',fx),...

```

```

    sprintf(' fy = %g;',fy),sprintf(' fz = %g;',fz)],'FontSize',12,'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.1,0.4,'-----');
h=text(-0.2,0.45,sprintf('Крок інтегрування = %g c;',hi),'FontSize',12,
'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.2,0.35,'Позрахункові дані','FontSize',12,'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(-0.1,0.27,sprintf('\omega_0_1 = %g;',PS1),'FontSize',12);
h=text(0.5,0.27,sprintf('\omega_0_2 = %g;',PS2),'FontSize',12);
h=text(0.07,0.2,'4mgl*J_e','FontSize',12);
h=text(0.,0.15,sprintf('\mu = ----- = %g;',muGM),'FontSize',12);
h=text(0.1,0.08,'H_0^2','FontSize',12);
h=text(-0.3,0,'=====');
h1=text(-0.3,-0.05,'Програма GM-M2.m;','Fontname','MS Sans Serif');
h1=text(0.35,-0.05,'Автор - ЛАЗАРЕВ Ю.Ф.','Fontname','MS Sans Serif');
h1=text(-0.3,-0.15,['Виконав ',sname],'Fontname','MS Sans Serif');
tm=fix(clock); Tv=tm(4:5);
h1=text(0.5,-0.15,[sprintf(' %g:',Tv),' ',date]);
h=text(-0.3,-0.2,'=====');

```

в якій замість попередньої процедури правих частин GM_kut_Euler використана файл-функція GM_kut_oscillation наступного змісту

```

=====
function z=GM_kut_oscillation(t,y)
% Процедура обчислювання правих частин диференціальних рівнянь
% руху ГІРОМАЯТНИКА (дзиги) у кутах осциляції
% z1 = y4/cos(y2); z2 = y5; z3 = -fiX*y3
% z4 = -fiY*y4 + mu*sin(y1)-y5*[y3 - y4*tg(y2)]
% z5 = -fiZ*y5 + mu*sin(y2)*cos(y2)+ y4*[y3 - y4*tg(y2)]
% Вхідні параметри:
% t - поточний час; y - масив з п'яти змінних стану
% y1 = dlt1 - перший кут осциляції; y2 = dlt2 - другий кут осциляції
% y3 = H/Je - кінетичний момент (приведений)
% y4 = omY - складова кутової швидкості по осі Y;
% y5 = omZ - складова кутової швидкості по осі Z
% Лазарев Ю. Ф. 6-03-2008
global mu fiX fiY fiZ
sd2=sin(y(2)); cd2=cos(y(2));
z(1)=y(4)/cd2; z(2)= y(5); z(3)=-fiX*y(3);
H=y(3)-y(4)*sd2/cd2;
z(4)=-fiY*y(4)+mu*sin(y(1))-y(5)*H; z(5)=-fiZ*y(5)+mu*cd2*sd2+y(4)*H;

```

Перевагою застосування моделі саме у кутах осциляції полягає у тому, що її можливо і раціонально використовувати для опису руху осі гіромаятника поблизу вертикалі, включаючи проходження через вертикаль (що неможливо зробити у кутах Ейлера, бо рівняння Ейлера при проходженні осі гіромаятника через вертикаль вироджуються).

Якщо рух осі фігури гіромаятника є таким, що кути відхилення від вертикалі можуть змінюватися у вельми великих межах, але при цьому вісь маятника не проходить через вертикаль – доцільно використовувати модель у кутах Ейлера, особливо коли можливий перехід осі фігури через горизонтальну площину.

Якщо ж при досліджуваному русі вісь фігури не проходить через горизонтальну площину, особливо якщо можливе проходження її через вертикальне положення, - слід використовувати модель у кутах осциляції.

2.2.5. Завдання

Завдання 1. Дослідження вільного руху гіромаятника

1. Провести за вказаним програмним забезпеченням експериментальні дослідження вільного руху гіромаятника. Встановити фіксоване, вказане викладачем, значення куту відхилення осі фігури від вертикалі. Решту початкових умов встановити рівними нулеві. "Вимірювати" частоти власних коливань і їхні амплітуди. Варіювати значеннями а) кінетичного моменту, б) опорного маятникового моменту, в) екваторіальним моментом інерції.
2. Побудувати графіки експериментальних і теоретичних залежностей частоти і амплітуди коливань гіромаятника від варійованих параметрів. Порівняти їх. Зробити висновки.

Завдання 2. Дослідження впливу тертя на рух гіромаятника

1. Провести за вказаним програмним забезпеченням експериментальні дослідження впливу тертя на поведінку гіромаятника. Встановити фіксоване, вказане викладачем, значення куту відхилення осі фігури від вертикалі. Решту початкових умов встановити рівними нулеві. Встановити значення параметрів гіроскопа і коефіцієнтів тертя за вказівкою викладача. Варіювати значеннями а) кінетичного моменту, б) опорного маятникового моменту, в) коефіцієнтів тертя.
2. Зробити висновки про стійкість коливань гіромаятника, характер залежності степені загасання швидких і повільних коливань від вищезазначених параметрів і відповідності поведінки гіромаятника теоретичним уявленням.

2.2.6. Методичні вказівки до виконання

1. Увійти у програмне середовище Matlab.
2. Користуючись лінійкою інструментів відкрити у вікні редактора Matlab текст програми **GM_m1** (або **GM_m2**).
3. У рядку тексту програми `sname='Лазарєв Ю. Ф.'`; змінити прізвище на власне.
4. У наступних рядках програми змінити значення первісних даних на потрібні у відповідності з завданням.
3. У командному вікні ввести ім'я програми
`>> GM_m1`
і натиснути клавішу <Enter>.

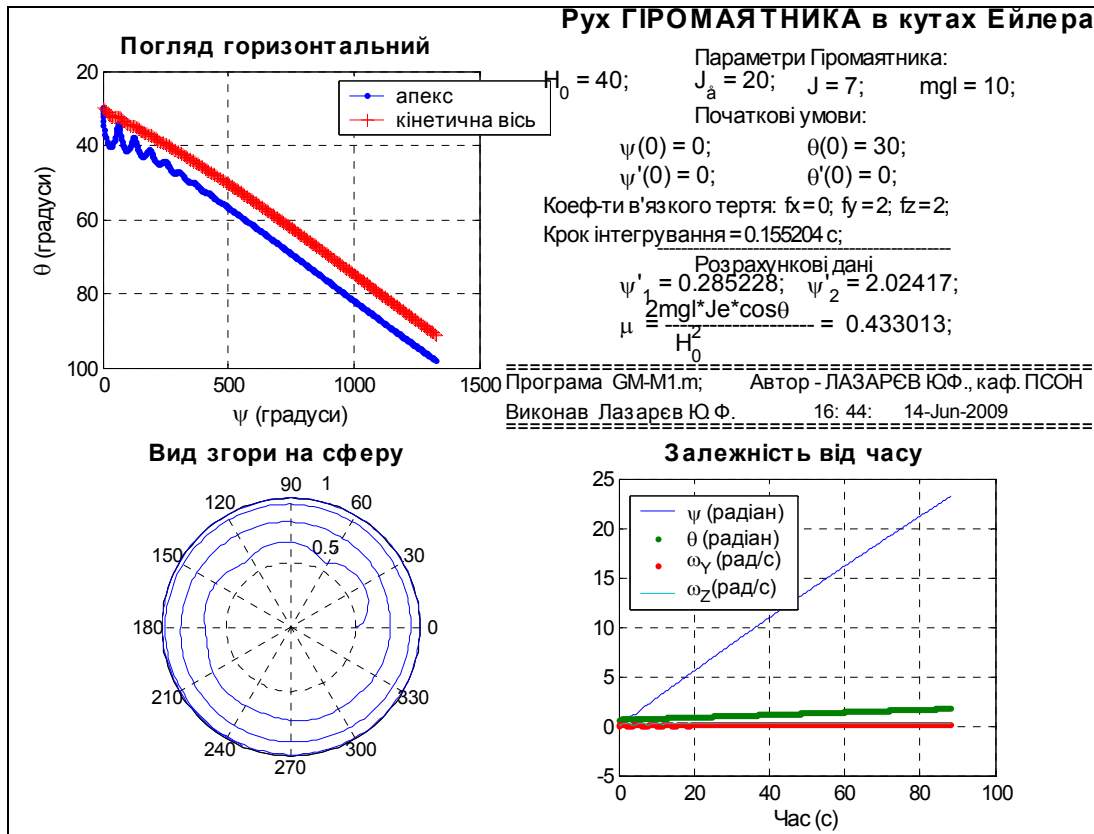


Рис. 2.16. Вид графічного вікна програми GM_m1

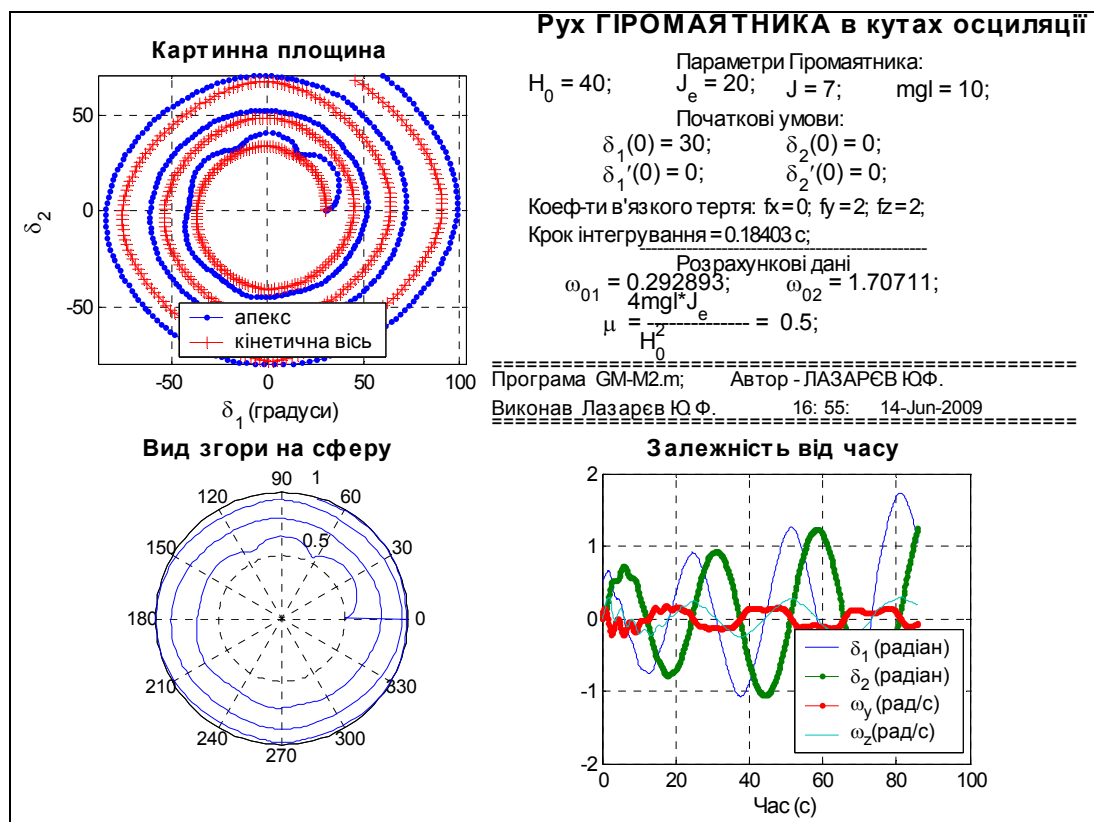


Рис. 2.17. Вид графічного вікна програми GM_m2

Якщо все було зроблено вірно, на екрані монітора має з'явитися додаткове графічне вікно (рис. 2.16). В цьому вікні відображуються результати моделювання і наведені значення усіх використаних параметрів.

Якщо викликана програма **GM_m2**, вид вікна буде дещо іншим (рис. 2.17).

4. Вимірювання необхідних параметрів руху здійснюється по графікам, наведеним у цьому вікні. Для підвищення точності вимірювань слід використовувати функцію збільшення зображення **Zoom in** в лінійці інструментів на панелі цього вікна.

7. Результати вимірювань слід занотовувати у робочому зошиті у вигляді таблиці, одним з стовпців якої має бути змінюваний параметр, а іншими – виміряні значення і, можливо, розрахований за ними параметр.

8. Показати одержані результати викладачеві.

2.2.7. Контрольні запитання

1. Що називають гіромаятником?
2. Що називають кутами Ейлера, кутами осциляції? Якими з цих кутів зручно користуватися і в яких умовах?
3. Опишіть вільний рух гіромаятника. Що таке повільна та швидка прецесії гіромаятника? За якими формулами визначаються частоти вільних коливань гіромаятника? Чим визначається амплітуда цих коливань?
4. Чи спостерігаються суттєві розходження між результатами експериментальних і теоретичного досліджень? якщо вони є – якою причиною вони обумовлені?
5. Які висновки можна зробити щодо стійкості коливань гіромаятника? Чи є певна межа для кінетичного моменту гіромаятника, нижче якої рух гіромаятника стає нестійким?
6. За якими рівняннями здійснювалося моделювання поведінки гіромаятника у лабораторній роботі? В яких конкретно програмних засобах ці рівняння відбиті?
7. Яка модель тертя була використана в експериментах?
8. Чи зміняться результати експериментальних досліджень, якщо змінити форму подання положення осі фігури гіромаятника у просторі?
9. Як змінюється поведінка гіромаятника, якщо верхню його маятниковість змінити на аналогічну нижню?

2.3. Дослідження поведінки гіроскопа у кардановому підвісі

2.3.1. Мета роботи

Шляхом експериментальних досліджень на чисельній моделі вивчити головні особливості поведінки ГКП у його вільному русі, під дією моментів сил тертя, сталих моментів сил і гармонійних моментів і порівняти з висновками теоретичного аналізу.

2.3.2. Сценарій роботи

1. Вивчити теоретичну частину роботи (п. 2.3.3). Ознайомитися з програмним забезпеченням для роботи (п. 2.3.4).
2. Увійти у програмне оточення лабораторної роботи. Провести дослідження у відповідності з завданням (п. 2.3.5)
3. Провести зіставлення характеристик руху ГКП, одержаних внаслідок проведених експериментів, з такими, що впливають з теоретичного аналізу. Зробити висновки.
4. Підготувати відповіді на запитання поділу 2.3.7.
5. Показати викладачеві одержані результати, пояснити їх. Доповісти про зроблені висновки. Відповісти на запитання викладача.

2.3.3. Теоретична частина

Рух ГКП, що встановлений на нерухомій в інерціальному просторі основі, (рис. 2.18), можна описати наступними диференціальними рівняннями

$$\left\{ \begin{array}{l} (J_1 + J_2 \cos^2 \beta) \ddot{\alpha} - 2J_2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \cos \beta + H \dot{\beta} \cos \beta = N - R \sin \beta \\ J_3 \ddot{\beta} + J_e \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta - H \dot{\alpha} \cos \beta = L \\ \frac{dH}{dt} = R + M_{cm} \end{array} \right. \quad (2.44)$$

де позначено: α – кут повороту зовнішньої осі підвісу відносно нерухомої основи навкруги зовнішньої осі підвісу; β – кут повороту внутрішньої рамки карданова підвісу відносно зовнішньої рамки (навколо внутрішньої осі підвісу); H – власний кінетичний момент гіроскопа; J_1 , J_2 , J_3 – моменти інерції гіроскопа; N , L , R і M_{cm} – моменти зовнішніх сил, що діють на ГКП вдовж відповідно зовнішньої, внутрішньої і головної осей підвісу.

2.3.3.1. Вільний рух ГКП

Вільний рух гіроскопа у кардановому підвісі визначається відсутністю моментів зовнішніх сил, що діють на нього по осях підвісу. Тому у попередніх рівняннях потрібно покласти

$$N = L = R = M_{cm} = 0. \quad (2.45)$$

Внаслідок цього рівняння (2.44) набудуть вигляду

$$\begin{cases} (J_1 + J_2 \cos^2 \beta) \ddot{\alpha} - 2J_2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \cos \beta + H \dot{\beta} \cos \beta = 0 \\ J_3 \ddot{\beta} + J_e \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta - H \dot{\alpha} \cos \beta = 0 \\ \frac{dH}{dt} = 0 \end{cases} \quad (2.46)$$

з чого одразу випливає, що у цьому випадку вектор власного кінетичного моменту ГКП буде сталим

$$H = H_0 = const.$$

Якщо скористатися наближеними лінеаризованими рівняннями

$$\begin{cases} (J_1 + J_2 \cos^2 \beta_0) \ddot{\alpha} + H_0 \cos \beta_0 \dot{\beta} = 0 \\ J_3 \ddot{\beta} - H_0 \cdot \cos \beta_0 \cdot \dot{\alpha} = 0 \end{cases}$$

то з їхнього розв'язку

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(t) &= \dot{\alpha}_0 \cdot \cos(\lambda_0 t) - \sqrt{\frac{J_3}{A}} \dot{\beta}_0 \cdot \sin(\lambda_0 t); \\ \dot{\beta}(t) &= \dot{\beta}_0 \cdot \cos(\lambda_0 t) + \sqrt{\frac{A}{J_3}} \dot{\alpha}_0 \cdot \sin(\lambda_0 t); \\ \alpha(t) &= \alpha_0 + \frac{\dot{\alpha}_0}{\lambda_0} \cdot \sin(\lambda_0 t) + \sqrt{\frac{J_3}{A}} \frac{\dot{\beta}_0}{\lambda_0} \cdot (\cos(\lambda_0 t) - 1); \\ \beta(t) &= \beta_0 + \frac{\dot{\beta}_0}{\lambda_0} \cdot \sin(\lambda_0 t) - \sqrt{\frac{A}{J_3}} \frac{\dot{\alpha}_0}{\lambda_0} \cdot (\cos(\lambda_0 t) - 1) \end{aligned} \quad (2.47)$$

випливає, що головна вісь ГКП здійснює в інерціальному просторі гармонійні коливання з частотою

$$\lambda_0 = \frac{H_0 \cdot \cos \beta_0}{\sqrt{A \cdot J_3}}; \quad (A = J_1 + J_2 \cdot \cos^2 \beta_0). \quad (2.48)$$

Ці коливання називають нутаційними, а частоту λ_0 – частотою нутації ГКП.

Неважко збагнути, що нутаційні коливання зводяться до руху осі фігури по замкненій конічній поверхні навколо нерухомої у просторі осі. При цьому у картинній площині апекс гіроскопа описує еліпс з співвідношенням півосей

$$\frac{\alpha_m}{\beta_m} = \frac{\dot{\alpha}_m}{\dot{\beta}_m} = \sqrt{\frac{J_3}{A}}. \quad (2.49)$$

Конічна еліптична поверхня, яку описує у просторі головна вісь гіроскопа, проходить крізь початкове положення цієї осі у просторі. Центр еліпса зміщений відносно цього початкового положення на величини

$$\Delta\alpha = -\sqrt{\frac{J_3}{A}} \frac{\dot{\beta}_0}{\lambda_0}; \quad \Delta\beta = \sqrt{\frac{A}{J_3}} \frac{\dot{\alpha}_0}{\lambda_0}. \quad (2.50)$$

Як випливає з цих формул початковий удар навколо зовнішньої осі приводить до зміщення центру нутаційних коливань навколо внутрішньої осі підвісу і навпаки.

Більш детальний аналіз рівнянь (2.46), наприклад, за допомогою методу збурень, дозволяє зробити уточнення:

центр цих нутаційних коливань зі сталою кутовою швидкістю

$$\langle \dot{\alpha} \rangle = -\frac{J_1 \sin \beta_0}{2H_0 \cos^2 \beta_0} a^2 \quad (2.51)$$

обертається навколо зовнішньої осі підвісу ГКП.

Тут використане позначення $a = \dot{\alpha}_m$ – амплітуда нутаційних коливань навколо зовнішньої осі підвісу зі швидкості.

Отже, при вільному русі головна вісь ГКП здійснює складний рух у просторі, який складається з систематичного дрейфу навколо зовнішньої осі зі швидкістю (2.51) і нутаційних коливань по конусу з частотою (2.48), амплітуда яких визначається величиною початкових швидкостей гіроскопа

$$\alpha_m = \frac{1}{\lambda_0} \sqrt{\dot{\alpha}_0^2 + \frac{J_3}{A} \dot{\beta}_0^2}; \quad \beta_m = \frac{1}{\lambda_0} \sqrt{\frac{A}{J_3} \dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2}.$$

2.3.3.2. Вплив тертя на вільний рух ГКП

Теоретичне вивчення впливу тертя на вільний рух ГКП у рамках лінеаризованої моделі доводить, що:

- 1) нутаційні коливання з плином часу загасають;
- 2) внаслідок зменшення з часом амплітуди нутаційних коливань ще більшими темпами зменшується систематичний дрейф ГКП навколо зовнішньої осі підвісу;
- 3) наявність систематичного дрейфу навколо зовнішньої осі підвісу приводить до виникнення сталої складової сили тертя в опорах цієї осі; остання викликає додатковий систематичний дрейф ГКП вже навколо внутрішньої осі підвісу; напрямок цього дрейфу завжди такий, що він наближає головну вісь гіроскопа до зовнішньої осі підвісу;
- 4) цей вторинний дрейф у власну чергу викликає систематичну складову моменту сил тертя в опорах внутрішньої осі підвісу, який приводить до третинної прецесії ГКП навколо зовнішньої осі; цей дрейф призводить до зменшення первинного дрейфу Магнуса.

2.3.3.3. Рух ГКП під дією сталих моментів сил

Якщо скористатися лінеаризованими рівняннями

$$\begin{cases} A\ddot{\alpha} + H_0 \cos \beta_0 \dot{\beta} = N_0 \\ J_3 \ddot{\beta} - H_0 \cos \beta_0 \dot{\alpha} = L_0 \end{cases},$$

рух ГКП можна подати у вигляді наступних залежностей

$$\begin{aligned}
 \dot{\alpha}(t) &= -\frac{L_0}{H_0 \cos \beta_0} - \sqrt{\frac{J_3}{A}} \left(\dot{\beta}_0 - \frac{N_0}{H_0 \cdot \cos \beta_0} \right) \sin \lambda_0 t + \left(\dot{\alpha}_0 + \frac{L_0}{H_0 \cdot \cos \beta_0} \right) \cos \lambda_0 t; \\
 \dot{\beta}(t) &= \frac{N_0}{H_0 \cos \beta_0} + \left(\dot{\beta}_0 - \frac{N_0}{H_0 \cos \beta_0} \right) \cos \lambda_0 t + \sqrt{\frac{A}{J_3}} \left(\dot{\alpha}_0 + \frac{L_0}{H_0 \cdot \cos \beta_0} \right) \sin \lambda_0 t; \\
 \alpha(t) &= \alpha_0 - \frac{L_0}{H_0 \cos \beta_0} t + \frac{1}{\lambda_0} \left(\dot{\alpha}_0 + \frac{L_0}{H_0 \cos \beta_0} \right) \sin \lambda_0 t + \\
 &\quad + \sqrt{\frac{J_3}{A}} \frac{1}{\lambda_0} \left(\dot{\beta}_0 - \frac{N_0}{H_0 \cdot \cos \beta_0} \right) (\cos \lambda_0 t - 1); \\
 \beta(t) &= \beta_0 + \frac{N_0}{H_0 \cos \beta_0} \cdot t + \frac{1}{\lambda_0} \left(\dot{\beta}_0 - \frac{N_0}{H_0 \cdot \cos \beta_0} \right) \cdot \sin(\lambda_0 t) - \\
 &\quad - \sqrt{\frac{A}{J_3}} \frac{1}{\lambda_0} \left(\dot{\alpha}_0 + \frac{L_0}{H_0 \cdot \cos \beta_0} \right) \cdot (\cos(\lambda_0 t) - 1)
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

Як впливає з цих співвідношень, під дією сталих моментів сил ГКП здійснює рівномірну прецесію навколо перехресної осі, на яку накладаються нутаційні коливання з амплітудою, яка залежить як від початкових кутових швидкостей головної осі, так і від значень діючих сталих моментів.

У частинному випадку раптово прикладеного моменту, коли вважається, що у початкову мить головна вісь була нерухомою у просторі, з (3.9) впливає

$$\begin{aligned}
 \dot{\alpha}(t) &= -\frac{L_0}{H_0 \cos \beta_0} + \sqrt{\frac{J_3}{A}} \frac{N_0}{H_0 \cos \beta_0} \sin \lambda_0 t + \frac{L_0}{H_0 \cos \beta_0} \cos \lambda_0 t; \\
 \dot{\beta}(t) &= \frac{N_0}{H_0 \cos \beta_0} - \frac{N_0}{H_0 \cos \beta_0} \cos \lambda_0 t + \sqrt{\frac{A}{J_3}} \frac{L_0}{H_0 \cos \beta_0} \cdot \sin \lambda_0 t; \\
 \alpha(t) &= \alpha_0 - \frac{L_0}{H_0 \cos \beta_0} t + \frac{1}{\lambda_0} \frac{L_0}{H_0 \cos \beta_0} \sin \lambda_0 t - \sqrt{\frac{J_3}{A}} \frac{1}{\lambda_0} \frac{N_0}{H_0 \cos \beta_0} \cdot (\cos \lambda_0 t - 1); \\
 \beta(t) &= \beta_0 + \frac{N_0}{H_0 \cos \beta_0} t - \frac{1}{\lambda_0} \frac{N_0}{H_0 \cos \beta_0} \cdot \sin \lambda_0 t - \sqrt{\frac{A}{J_3}} \frac{1}{\lambda_0} \frac{L_0}{H_0 \cos \beta_0} (\cos \lambda_0 t - 1)
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

Як бачимо, нутаційні коливання супроводжують вимушену прецесію гіроскопа і у цьому випадку, причому тепер їхня амплітуда цілком визначається лише діючими сталими моментами.

Можна поставити таке запитання: чи можна підібрати такі початкові умови (з кутових швидкостей ГКП), щоб нутаційні коливання були відсутні?

Відповідь на це можна знайти, якщо у виразах (2.52) прирівняти нулю "амплітуди" при $\sin \lambda_0 t$ і $\cos \lambda_0 t$:

$$\dot{\alpha}_0 = -\frac{L_0}{H_0 \cdot \cos \beta_0}; \quad \dot{\beta}_0 = \frac{N_0}{H_0 \cdot \cos \beta_0}. \tag{2.53}$$

За початкових умов (2.53) розв'язок (2.52) набуде вигляду:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}(t) &= -\frac{L_0}{H_0 \cos \beta_0}; & \dot{\beta}(t) &= \frac{N_0}{H_0 \cos \beta_0}; \\ \alpha(t) &= \alpha_0 - \frac{L_0}{H_0 \cos \beta_0} t; & \beta(t) &= \beta_0 + \frac{N_0}{H_0 \cos \beta_0} t.\end{aligned}\quad (3.12)$$

Варто зазначити, що розглянуті розв'язки (як і взагалі лінеаризовані рівняння) є слухними лише за умови, що кут повороту внутрішньої рамки карданового підвісу відносно зовнішньої за час розглядання руху змінюється незначно (наприклад, менш за 10 градусів).

2.3.3.4. Вплив тертя на рух ГКП під дією сталих моментів сил

Якщо враховувати тертя в осях карданового підвісу, то першим результатом його впливу, як і випадку вільного руху ГКП, є *загасання власних (нутаційних) коливань*. Цей висновок є цілком слухним у випадку, якщо тертя в осях підвісу є *в'язким*.

Але якщо тертя є сухим, картина руху суттєво змінюється. *У випадку, коли діючи по осях підвісу сталі моменти сил перевищують за величиною відповідні моменти сил сухого тертя, загасання нутаційних коливань здійснюється до певної амплітуди, після чого головна вісь здійснює незагасаючі нутаційні коливання (автоколивання)*. Амплітуда цих коливань визначається різницею між величинами сталих моментів сил і моментів сил сухого тертя.

2.3.3.5. Рух ГКП під дією гармонічно змінюваних моментів сил

Детальне вивчення нелінійних рівнянь (2.44) руху ГКП за допомогою методів малого параметру за дії на ГКП моментів сил, які змінюються у часі за гармонічним законом, приводить до висновку, що:

- 1) *за наявності тертя коливання головної осі ГКП з часом усталюються; у кінцевому підсумку головна вісь здійснює вимушені коливання з частотою змінювання моментів сил і з незмінною амплітудою, величина якої визначається амплітудою і частотою змінювання моментів сил;*
- 2) *ці вимушені коливання супроводжуються систематичним зміщенням їхнього центру навколо зовнішньої підвісу зі сталою швидкістю (систематичним дрейфом).*

Якщо по осях ГКП діють гармонічно змінювані моменти сил з тією самою частотою за законами:

$$\begin{aligned}N(t) &= N_S \sin \omega t + N_C \cos \omega t; & L(t) &= L_S \sin \omega t + L_C \cos \omega t; \\ R(t) &= R_S \sin \omega t + R_C \cos \omega t,\end{aligned}$$

в усталеному режимі головна вісь здійснюватиме вимушені коливання за аналогічним законом

$$\dot{\alpha}(t) = a_S \sin \omega t + a_C \cos \omega t; \quad \dot{\beta}(t) = b_S \sin \omega t + b_C \cos \omega t,$$

де коефіцієнти a_S , a_C , b_S і b_C пов'язані з параметрами моментів сил співвідношеннями

$$a_s = -\frac{1}{H_0 \cos \beta_0} \cdot \frac{1}{1-v^2} \left[v \sqrt{\frac{J_3}{A}} (N_C - R_C \sin \beta_0) + L_S \right];$$

$$a_C = \frac{1}{H_0 \cos \beta_0} \cdot \frac{1}{1-v^2} \left[v \sqrt{\frac{J_3}{A}} (N_S - R_S \sin \beta_0) - L_C \right];$$

$$b_s = \frac{1}{H_0 \cos \beta_0} \cdot \frac{1}{1-v^2} \left[N_S - R_S \sin \beta - v \sqrt{\frac{A}{J_3}} L_C \right];$$

$$b_C = \frac{1}{H_0 \cos \beta_0} \cdot \frac{1}{1-v^2} \left[N_C - R_C \sin \beta_0 + v \sqrt{\frac{A}{J_3}} L_S \right].$$

Ці коливання накладаються на систематичний дрейф гіроскопа навколо зовнішньої осі підвісу зі швидкістю

$$\langle \dot{\alpha} \rangle = -\frac{1}{2H_0 \cos^2 \beta_0} \left\{ J_1 a^2 \sin \beta_0 + \frac{\sin \beta_0}{\omega} (N_S a_C - N_C a_S) + \frac{N_S a_C - N_C a_S}{\omega \cdot \cos \beta_0} \right\},$$

де позначено: $a = \sqrt{a_S^2 + a_C^2}$ – амплітуда вимушених коливань навколо зовніш-

ньої осі підвісу з кутової швидкості; $v = \frac{\omega}{\lambda_0} = \frac{\omega \sqrt{AJ_3}}{H_0 \cos \beta_0}$ – відносна частота ви-

мушених коливань.

2.3.4. Опис програмних засобів

Дослідження здійснюється шляхом чисельного інтегрування диференціальних рівнянь ГКП у середовищі MatLAB. Для цього розроблений пакет програм і процедур мовою системи MatLAB.

Основу комплексу складає Simulink-модель GKP_noM1.mdl, блок-схема якої подана на рис. 2.18.

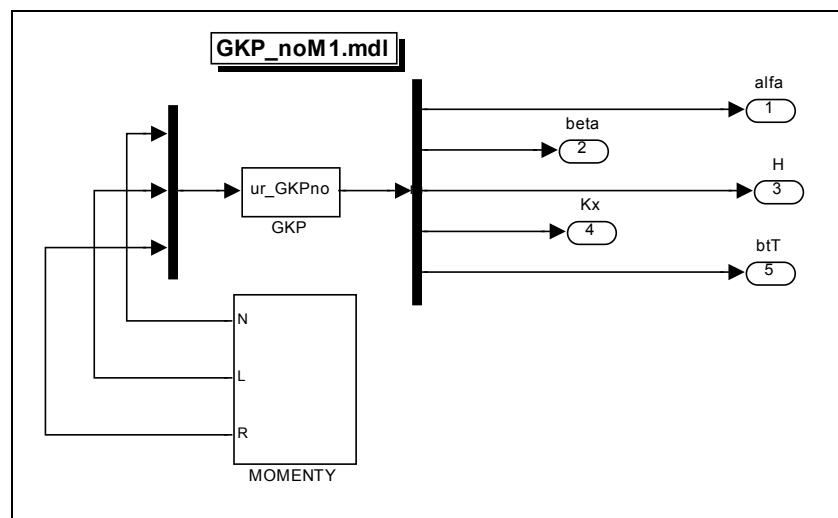


Рис. 2.18. Блок-схема S-моделі GKP_noM1.mdl

У склад блок-схеми входять два блоки:

- блок MOMENTY (рис. 2.19), який генерує частини моментів сил, що діють на ГКП, які подані як явні функції часу (у цій програмі – це сталі і гармонічно змінювані моменти сил по осях підвісу);

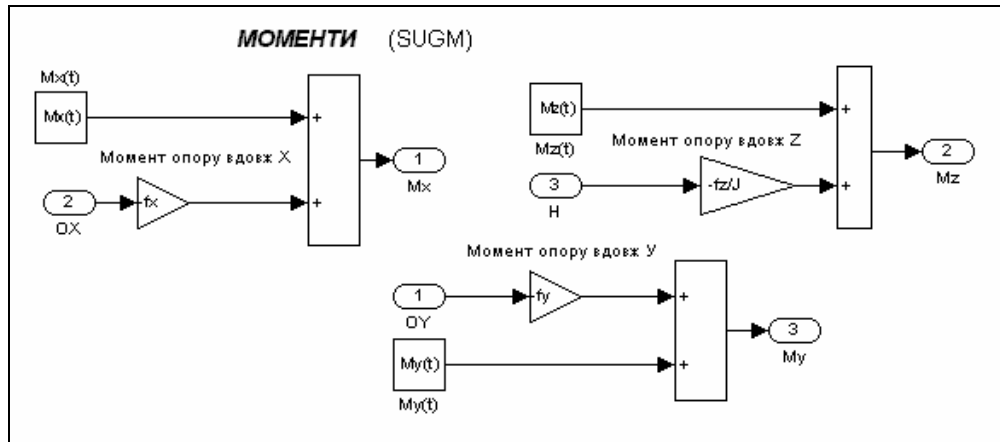


Рис. 2.19. Блок-схема S-блоку MOMENTY

- блок GKP, який побудований на основі S-функції за ім'ям ur_GKPno, текст якої наводиться нижче.

```

=====
function [sys,x0,str,ts] = ur_GKPno(t,x,u,flag,H0,A0,B0,KX0,Bt0)
% S-функція, яка здійснює чисельне інтегрування ДР СЗГ (для GKPnom1)
global J1 J2 J3 f2 f1 Ntr Ltr J
% Лазарев Ю. Ф. 14-03-2008
switch flag,
case 0,
    [sys,x0,str,ts]=mdlInitializeSizes(H0, A0, B0, KX0, Bt0);
case 1,
    sys=mdlDerivatives(t,x,u,J1,J2,J3,f2,f1,Ntr,Ltr);
case 2,
    %sys=mdlUpdate(t,x,u);
case 3,
    sys=mdlOutputs(t,x,u);
case 4,
    sys=mdlGetTimeOfNextVarHit(t,x,u);
case 9,
    otherwise
        error(['Unhandled flag = ',num2str(flag)]);
end
%=====
function [sys,x0,str,ts]=mdlInitializeSizes(H0, A0, B0, KX0, Bt0)
sizes = simsizes; sizes.NumContStates = 5;
sizes.NumDiscStates = 0; sizes.NumOutputs = 5;
sizes.NumInputs = 3; sizes.DirFeedthrough = 1;
sizes.NumSampleTimes = 1; sys = simsizes(sizes);
x0 = [ A0, B0, H0, KX0, Bt0]; str = []; ts = [0 0];
%=====
function z=mdlDerivatives(t,x,u,J1,J2,J3,f2,f1,Ntr,Ltr)
% x(1)=alfa x(2)=beta x(3)=H x(4)=KX x(5)=Btt
% u(1)=N u(2)=L u(3)=R
sb=sin(x(2)); cb=cos(x(2));
z(1) = (x(4)-x(3)*sb)/(J1+J2*cb^2);
z(2) = x(5);
z(3) = u(3);

```



```

z(4) = u(1)-f2*z(1)-Ntr*sign(z(1));
z(5) = (u(2)-f1*z(2)-Ltr*sign(z(2))+x(3)*z(1)*cb-J2*z(2)^2*sb*cb)/J3;
%=====
function y=mdlOutputs(t,x,u)
y = x;

```

S-функція **ur_GKPno** здійснює розрахунок правих частин диференціальних рівнянь (2.441) руху ГКП, поданих у формі Коші, в яких змінними стану прийняті вищезазначені величини (див. процедуру `mdlDerivatives`), причому в ній враховуються моменти сил в'язкого і сухого тертя по осях карданова підвісу.

Керування роботою усім комплексом здійснюється керувальною програмою

GKPNOM1:

```

%                               GKPNOM1
%   "Моделювання поведження ГІРОСКОПА У КАРДАНОВОМУ ПІДВІСІ"
%   Г О Л О В Н А (керуюча) П Р О Г Р А М А для SIMULINK-моделі за ім'ям GKPNOM1

%   Ю.Ф.Лазарев, кафедра ПСОН, КПІ, Україна,
%   Почато 9-02-2000 останні зміни 14-06-2009
clear all,      clc
global J1 J2 J3 f2 f1 Ntr Ltr J
GKPNOM1_ZastavkaM1
k = menu(' Що робити ? ',' Продовжити роботу ',' Закінчити роботу ');
if k==1
    sname =input('Введіть ваше прізвище та ініціали (у лапках) ');
    if isempty(sname)
        sname='Ю.Ф.ЛАЗАРЄВ';
    end
    while k==1
        GKPNOM1_MenuM1, GKPNOM1_YadroM1, GKPNOM1_VyvodM1
        k = menu(' Що робити ? ',' Продовжити роботу ',' Закінчити роботу ');
    end
end
% Кінець GKPNOM1.m

```

Головні дії з чисельного інтегрування диференціальних рівнянь, зокрема, запуск S-моделі **GKPNOM1**, здійснюються у програмі **GKPNOM1_YadroM1:**

```

%GKPNOM1_YadroM1
% Частина програми GKPNOM1, яка здійснює
% власне моделювання поведження Гіроскопа у кардановому підвісі
% шляхом чисельного інтегрування його диференціальних рівнянь
% Ю.Ф.Лазарев, кафедра ПСОН, КПІ, Україна,
% Почато 9-02-2000 Останні зміни 14-03-2008
% ==== Розрахунки кроку та кінцевої миті інтегрування
lambda=abs(H0)/sqrt((J1+J2)*J3); % Частота нутації ГКП
mx=max(abs([lambda,omx,omy,omz])); % Максимальна частота коливань
hi=2*pi/(ni*mx); % Крок інтегрування
if lambda~=0
    Tmax=2*pi/lambda;
    if omx~=0, T1=2*pi/abs(omx); Tmax=max([Tmax T1]); end
    if omy~=0, T1=2*pi/abs(omy); Tmax=max([Tmax T1]); end
    if omz~=0, T1=2*pi/abs(omz); Tmax=max([Tmax T1]); end
end

```

```

else, disp('Помилка! Кінетичний момент гіроскопа не може дорівнювати нулеві !'); end
tfinal=ntk*Tmax; % Кінцева мить інтегрування
% Підготовка ПОЧАТКОВИХ УМОВ
A0 = aI0; B0 = bt0; KX0 = (J1+J2*cos(B0)^2)*alt0+H0*sin(B0); Bt0 = btt0;
%%-%---- Запуск SIMULINK-моделі ---- %%%
[T,X,A,B,H,KX,BT]=sim('Gkp_noM1',tfinal);
% Підготовка вихідних масивів для графіків
al=A; bt=B; alt=(KX-H.*sin(B))./(J1+J2*cos(B).^2); btt= BT;

```

Програми **GKPNO_ZastavkaM1**, **GKPNO_MenuM1** і **GKPNO_Vyvod M1** є допоміжними і виконують функції введення первісних значень параметрів, діалогове змінювання значень параметрів і виведення результатів моделювання у графічне вікно відповідно.

2.3.5. Завдання

1. Провести експерименти з вивчення вільного руху ГКП. Для цього встановити усі коефіцієнти тертя, сталі складові моментів сил, амплітуди змінювання моментів сил рівними нулеві.

1.1. Провести першій експеримент за "вшитих" значень параметрів. Визначити характер руху ГОГ у просторі. Зафіксувати амплітуду і частоту коливань, кутову швидкість дрейфу. Визначити, чи збігаються вони з розрахунковими. Зробити висновки.

1.2. Варіюючи величиною і напрямком початкового удару, повторити експеримент п.1.1. Фіксувати амплітуди і частоти коливань, а також дрейфу гіроскопу. Встановити залежності цих параметрів від величини і напрямку удару. Зіставити ці висновки з теоретичними. Зробити висновки. Вивести до друку результати двох найбільш типових експериментів.

1.3. Провести аналогічні експерименти, варіюючи величиною власного кінетичного момента ГКП. Зробити висновки.

1.4. Провести аналогічні експерименти, варіюючи величиною початкового кута β_0 від -60 до $+60$ градусів. Зробити висновки.

1.5. Зробити загальні висновки про вільний рух ГКП.

2. Провести експерименти з вивчення руху ГКП за дії сталого момента сил. Для цього встановити сталу складову момента L_0 рівною 1. Решту параметрів моментів сил встановити рівними нулеві.

2.1. Провести першій експеримент. Визначити характер руху головної осі гіроскопу. Зафіксувати амплітуду і частоту коливань, величину і напрямок сталої складової кутової швидкості осі фігури. Визначити, чи збігаються вони з розрахунковими. Зробити висновки.

2.2. Варіюючи величиною і напрямком моменту сил, повторити експеримент п. 2.1. Зробити висновки з залежності амплітуди, частоти коливань і швидкості прецесії від величини і напрямку момента

- сил. Зіставити ці висновки з теоретичними. Зробити висновки. Вивести до друку результати двох найбільш типових експериментів.
- 2.3. Провести аналогічні експерименти, варіюючи величиною початкових кутових швидкостей СЗГ. Встановити початкові швидкості рівними нулю. Зафіксувати результати. Розрахувати значення початкових швидкостей, за яких відсутні нутаційні коливання. Встановити ці значення і провести експеримент. Зробити висновки за наслідками.
 - 2.4. Провести аналогічні експерименти, варіюючи величиною власного кінетичного моменту СЗГ.
 - 2.5. Провести аналогічні експерименти, варіюючи величиною початкового значення кута β .
 - 2.6. Зробити загальні висновки про рух СЗГ під дією сталого моменту сил.
3. Провести експерименти по вивченню впливу тертя на вільний рух ГКП. Для цього встановити коефіцієнти тертя $f_x = f_y = 2$. Решту параметрів моментів сил встановити рівними нулю.
- 3.1. Провести першій експеримент. Визначити характер руху осі фігури і кінетичної осі. Зафіксувати частоту коливань, величину і напрямок зміщення положення головної осі гіроскопа. Визначити, чи збігаються вони з розрахунковими. Зробити висновки.
 - 3.2. Варіюючи величинами коефіцієнтів тертя, повторити експеримент п.3.1. Зробити висновки з залежності степеня загасання амплітуди, частоти коливань і зміщень кінетичної осі і осі фігури від коефіцієнтів тертя. Зіставити ці результати з теоретичними. Зробити висновки. Вивести до друку результати двох найбільш типових експериментів
 - 3.3. Провести аналогічні експерименти, варіюючи величиною власного кінетичного моменту СЗГ.
 - 3.4. Зробити загальні висновки про вільний рух ГКП під впливом тертя.
 - 3.5. Встановити моменти сил сухого тертя $N_{mp} = L_{mp} = 2$, а коефіцієнти в'язкого тертя – рівними нулеві. Провести аналогічні експерименти. Зробити висновки, зіставляючи дії сухого і в'язкого тертя на рух гіроскопа.
4. Провести експерименти по вивченню впливу тертя на рух ГКП під дією сталого моменту сил. Для цього встановити коефіцієнти тертя $f_x = f_y = 2$, $L_0 = 2$. Решту параметрів моментів сил встановити рівними нулю.
- 4.1. Провести першій експеримент. Визначити характер руху головної осі гіроскопа. Зафіксувати частоту коливань, величину і напрямку кутової швидкості прецесії, зміщення положення осі фігури і кінетичної осі. Визначити, чи збігаються вони з розрахунковими. Зробити висновки.

- 4.2. Варіюючи величинами коефіцієнтів тертя, повторити експеримент. Зробити висновки з залежності степеня загасання амплітуди, частоти коливань, швидкості прецесії і зміщень кінетичної осі і осі фігури від коефіцієнтів тертя. Зіставити ці результати з теоретичними. Зробити висновки. Вивести до друку результати двох найбільш типових експериментів
- 4.3. Провести аналогічні експерименти, варіюючи величиною власного кінетичного моменту ГКП.
- 4.4. Провести аналогічні експерименти, покладаючи коефіцієнти в'язкого тертя рівними нулю і встановлюючи моменти сил сухого тертя $N_{mp} = L_{mp} = 2$, а $N_0 = L_0 = 4$.
- 4.5. Зробити загальні висновки про вимушений рух ГКП під впливом тертя.

2.3.6. Методичні вказівки до виконання

1. Увійти у програмне середовище Matlab.
2. У командному вікні викликати керуючу програму, набравши у командному рядку її ім'я

>> gkpnom1

і клавішу <Enter>. Якщо усе зроблено правильно, у командному вікні має з'явитися напис

```

З програмою GKPnoM1.m працює Ю.Ф.ЛАЗАРЄВ
%
%           Моделюється рух
%   Гроскопа у Кардановому Підвісі
%   шляхом чисельного інтегрування
%   його диференційних рівнянь
%
%   [J1+J2*cos(bt)^2]*al" + [H - 2*J2*al"*sin(bt)]*bt'*cos(bt) =
%               = N(t) - R*sin(bt) - fx*al' - Ntr*sign(al')
%   J3*bt" - [H - J2*al"*sin(bt)]*al"*cos(bt) =
%               = L(t) - fy*bt' - Lt*sign(bt')
%
%   dH/dt = R(t)
%
%   echo off

```

а на екрані має виникнути невеличке вікно з меню (рис. 3.3).

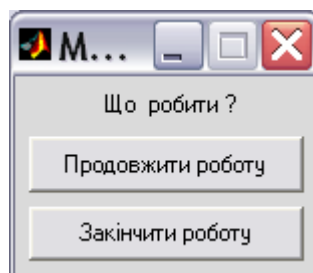


Рис. 2.20. Меню продовження роботи

3. Натисніть (за допомогою миші) клавішу "Продовжити роботу". У командному вікні додатково виникне напис
Введіть ваше прізвище та ініціали (в лапках)
4. Введіть ваше прізвище, або натисніть клавішу <Enter>. На екрані з'явиться меню (рис. 3.4)

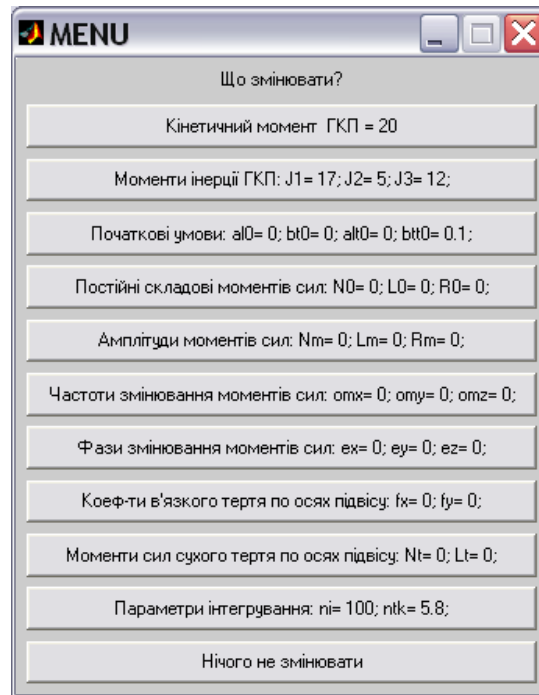


Рис. 2.21. Меню змінювання даних

5. Ознайомтеся з прийнятими значеннями даних і порівняйте їх з потрібними вам для виконання поточного завдання. Якщо щось з того, що запропоновано меню, потрібно змінити, натисніть відповідну клавішу меню. Виникне додаткове меню з конкретними величинами, які потребують змінення. Натискаючи відповідну клавішу цього меню, ви дістаєте змогу змінити значення потрібного параметру у командному вікні.

Встановіть потрібні для виконання завдання значення параметрів гіроскопа, початкових умов і моментів сил.

При потребі змінити значення одного з зазначених у меню параметрів, слід обрати відповідну кнопку меню. Варто помітити, що введення нового значення обраного параметра відбувається у командному вікні, тому після обрання параметра слід активізувати командне вікно, набрати в ньому нове значення і натиснути <Enter>. Вихід з меню здійснюється натисканням кнопки *Нічого не змінювати* доти, поки вікна з меню не зникнуть. Після цього можна починати нове моделювання зі зміненими значеннями параметрів. Змінювання часу інтегрування можна здійснити, використовуючи підменю *Parameters* меню *Simulation* у вікні головної моделі.

Якщо встановлені значення параметрів вас задовольняють, натисніть клавішу "Нічого не змінювати".

Якщо все було зроблено вірно, на екрані монітора має з'явитися додаткове графічне вікно (рис. 2.22). В ньому відображуються результати моделювання і наведені значення усіх використаних параметрів.

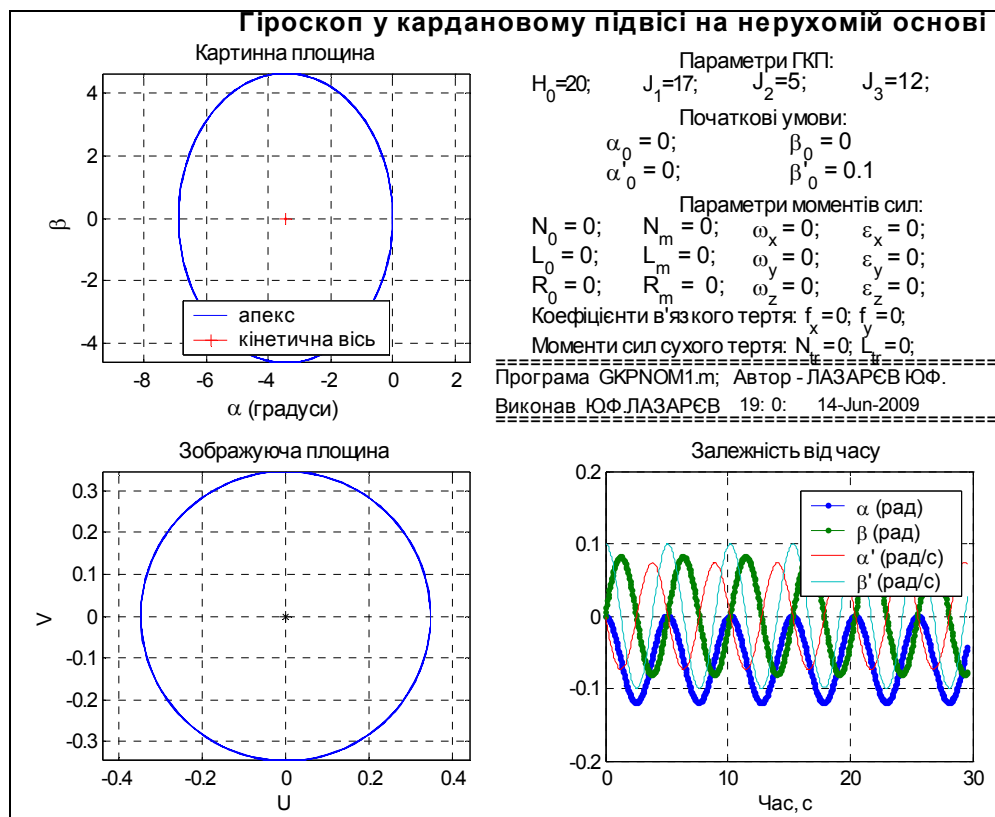


Рис. 2.22. Вид графічного вікна з результатами моделювання

6. Вимірювання необхідних параметрів руху здійснюється по графіках, наведених у цьому вікні. Для підвищення точності вимірювань слід використувати функцію збільшення зображення *Zoom in* в лінійці інструментів на панелі цього вікна.

7. Результати вимірювань слід занотувувати у робочому зошиті у вигляді таблиці, одним з стовпців якої має бути змінюваний параметр, а іншими – виміряні значення і, можливо, розрахований за ними параметр.

2.3.7. Контрольні запитання

1. Що називають гіроскопом у кардановому підвісі? Що називають "дрейфом Магнуса"? За яких умов він спостерігається? Що саме розуміють під рухом гіроскопа у кардановому підвісі?

2. Опишіть вільний рух ГКП. За якими формулами визначається частота вільних коливань, амплітуда цих коливань? Як називають ці коливання? Якою формулою описується дрейф Магнуса? Чи підтверджуються ці формули проведенними вами експериментами? Якщо є розбіжності, то у чому ви вбачаєте їхню причину?

3. Опишіть особливості руху ГКП під дією сталого момента сил. За якими формулами визначаються амплітуда, частота нутаційних коливань, кутова швидкість прецесії? Від чого залежать ці параметри руху? Чи підтверджуються ці формули проведеними вами експериментами? Якщо є розбіжності, то у чому ви вбачаєте їхню причину?

4. Опишіть вплив тертя на вільний і вимушений рух ГКП. Чи збігаються теоретичні висновки у цьому випадку з результатами проведених експериментів? Якщо є розбіжності, то у чому ви вбачаєте їхню причину?

5. Яку чисельну модель ГКП втілено у програмному забезпеченні цієї лабораторної роботи? Вкажіть, де це зроблено.

3. Цикл "Динаміка чутливих елементів систем орієнтації на рухомій основі"

Вступ

Цикл лабораторних робіт, опис яких наведений нижче, присвячений вивченню поведінки основних гіроскопічних приладів і складається з таких лабораторних робіт.

1. Дослідження руху двоступеневого гірокомпаса на рухомій основі.
2. Дослідження руху гіроскопа напрямку на рухомій основі.
3. Дослідження руху гіромаятника на рухомій основі.
4. Дослідження руху маятникового гірокомпаса на рухомій основі.

Лабораторні роботи проводяться по програмних моделях на персональних комп'ютерах у середовищі Matlab. Для їх виконання студент має опанувати основні операції роботи з цією комп'ютерною системою, вміти «читати» програми, написані на М-мові, здійснювати у разі необхідності корегування у бажаному напрямку цих програм.

Головною метою кожної лабораторної роботи є зіставлення результатів вивчення поведінки приладу через програмне моделювання і через теоретичне дослідження. Тому необхідною передумовою виконання студентом відповідної лабораторної роботи є попереднє вивчення результатів теоретичного аналізу поведінки відповідного приладу в умовах, що задані завданням. На основі «експериментальних вимірювань» при моделюванні студент робить висновки про адекватність одержаних ним результатів, про їх збіжність з передбаченими теорією, корегує власні дії, прагнучи досягнути максимального зближення результатів теоретичного аналізу з «експериментальними дослідженнями». При цьому студент повинен чітко розуміти причини виявлених розходжень, виявити їх джерело і обґрунтувати зроблені висновки.

Порядок виконання кожної лабораторної роботи має бути наступним.

1. Вивчити теоретичну частину роботи (п. 2). Ознайомитися з програмним забезпеченням для роботи (п. 3).
2. Увійти у програмне оточення лабораторної роботи. Провести дослідження у відповідності з завданням (п. 4) і користуючись вказівками п. 5.
3. Провести зіставлення характеристик руху двоступеневого гірокомпаса, одержаних внаслідок проведених експериментів, з тими, що впливають з теоретичного аналізу. Зробити висновки.
4. Підготувати відповіді на запитання п. 6.
5. Показати викладачеві одержані результати, пояснити їх.
6. Оформити звіт з лабораторної роботи згідно з вимогами викладача. Доповісти викладачеві про зроблені висновки і відповісти на його запитання.

3.1. Дослідження поведінки двоступеневого гірокомпаса на рухомій основі

3.1.1 Мета роботи

Шляхом експериментальних досліджень на чисельній моделі вивчити вільний рух двоступеневого гірокомпаса та вплив кутової вібрації основи на рух двоступеневого гірокомпаса і порівняти з висновками теоретичного аналізу.

3.1.2. Теоретична частина

Двоступеневим гірокомпасом (ДГК) називають двоступеневий гіроскоп, встановлений нерухомо на поверхні Землі так, щоб вимірювальна вісь була спрямована вздовж вертикалі місця (рис. 3.1).

У такому випадку роль основи відіграє Земля, а географічна система координат $\xi\eta\zeta$ - роль зв'язаної з основою системи координат $X_c Y_c Z_c$, причому вісь Y_c у розглядуваному випадку збігається з вертикаллю η місця, а кут β є відхиленням головної осі гіроскопа від площини місцевого меридіану ($\xi\eta$). Земля як тіло обертається в інерціальному просторі з кутовою швидкістю ω_3 , вектор якої лежить у площині меридіану (див. рис. 3.1) і нахилений до площини горизонту $\xi\zeta$ під кутом φ_r широти місця.

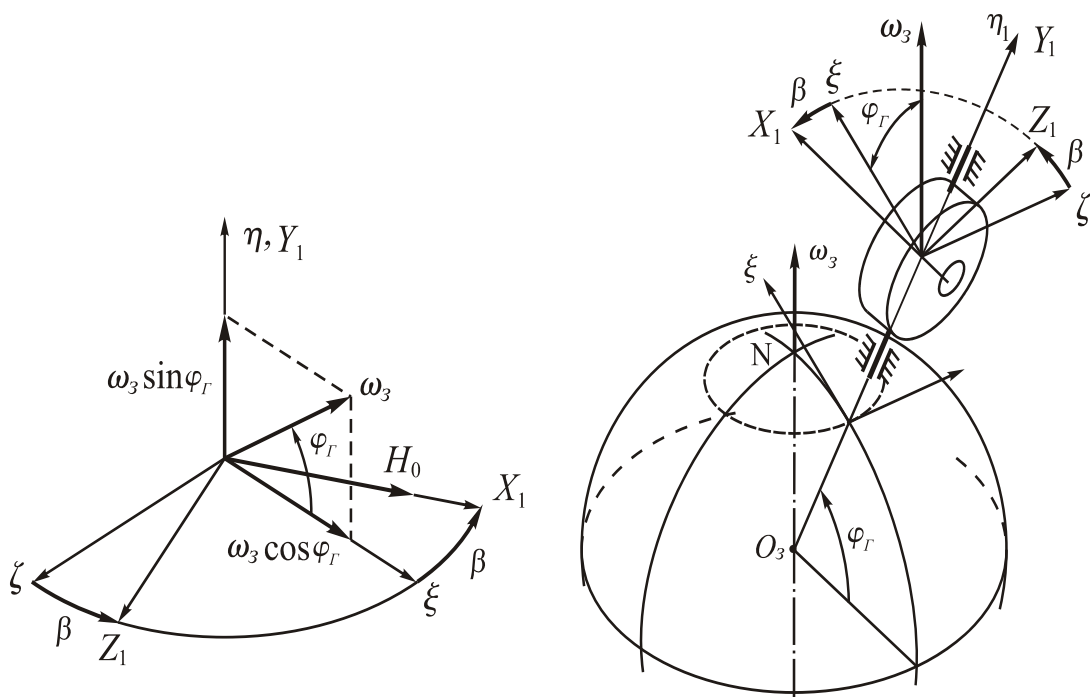


Рис. 3.1. Кінематика двоступеневого гірокомпаса

Проекція кутової швидкості ω_3 на площину, перпендикулярну вимірвальній осі Y_1 (спрямованій вдовж вертикалі місця η), тобто на горизонтальну площину $\xi\zeta$, збігається з полуденною лінією ξ .

У загальному випадку положення географічної системи координат в інерціальному просторі визначається, по-перше, поворотом Землі в інерціальному просторі з кутовою швидкістю ω_3 , спрямованою по лінії полюсів, а по-друге, - переміщенням об'єкта відносно Землі (з кутовою швидкістю $\dot{\lambda}$ змінювання кута географічної широти об'єкта, спрямованою по лінії полюсів, і кутовою швидкістю $\dot{\varphi}_2$ змінювання кута географічної широти, яка збігається з віссю ζ і спрямована на захід).

Проекції кутової швидкості \mathbf{u}^2 географічної системи координат в інерціальному просторі, рівної сумі вказаних векторів кутової швидкості, дорівнюють:

$$u_{\xi}^2 = (\omega_3 + \dot{\lambda}) \cos \varphi_2; \quad u_{\eta}^2 = (\omega_3 + \dot{\lambda}) \sin \varphi_2; \quad u_{\zeta}^2 = -\dot{\varphi}_2. \quad (3.1)$$

У подальшому припускатимемо, що об'єкт рухається по поверхні Землі так, що не має вертикальної складової швидкості, тобто вектор \mathbf{V} його лінійної швидкості завжди лежить у площині горизонту.

Кутом курсу K (рис. 3.2) називають кут між горизонтальним напрямком на північ і вектором \mathbf{V} лінійної швидкості об'єкта відносно поверхні Землі.

Розкладемо вектор швидкості \mathbf{V} на північну V_N і східну V_E складові (див. рис. 3.2). Отримаємо

$$V_N = V \cos K; \quad V_E = V \sin K. \quad (3.2)$$

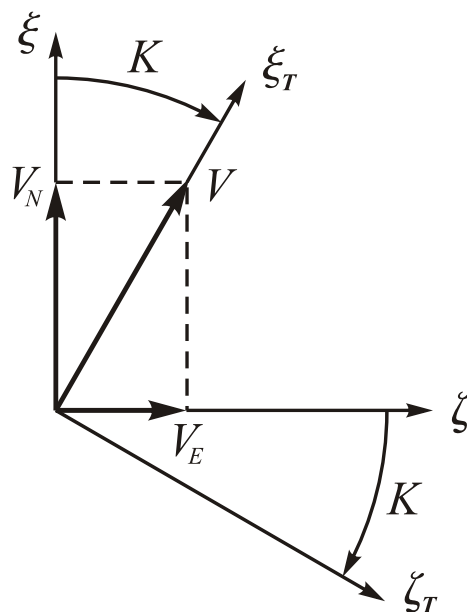


Рис. 3.2. Швидкість об'єкта у горизонтальній площині

Північна складова швидкості спричиняє змінювання широти місця і пов'язана зі швидкістю цього змінювання співвідношенням:

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{V_N}{R_3} = \frac{V \cos K}{R_3}, \quad (3.3)$$

де R_3 – радіус Землі.

Друга, східна, складова спричиняє рух об'єкта по паралелі, тобто змінювання кута довготи місця. Швидкість змінювання довготи $\dot{\lambda}$ пов'язана зі східною складовою швидкості об'єкта рівністю:

$$\dot{\lambda} = \frac{V_E}{R_3 \cos \varphi_2} = \frac{V \sin K}{R_3 \cos \varphi_2}. \quad (3.4)$$

З врахуванням одержаних співвідношень проекції кутової швидкості \mathbf{u}^e повороту географічної системи координат на її осі можуть бути подані у виді:

$$u_\xi^e = \omega_3 \cos \varphi_2 + \frac{V}{R_3} \sin K; \quad u_\eta^e = \omega_3 \sin \varphi_2 + \frac{V}{R_3} \sin K \cdot \operatorname{tg} \varphi_2; \quad (3.5)$$

Рівняння ДГК мають вигляд:

$$J_1(\ddot{\beta} + \dot{u}_{\gamma c}^e) + (H - J_2 u_{X1}^e) \cdot u_{Z1}^e = M_{Y1}; \quad (3.6)$$

$$\frac{dH}{dt} = M_{X1}.$$

Тут позначено: $J_1 = J_e + J_{1Y}$; $J_2 = J_e + J_{1Z} - J_{1Z}$ – моменти інерції ДГК; $H = J(\dot{\gamma} + u_{X1}^e)$ – власний кінетичний момент гіроскопа;

$$u_{X1}^e = u_\xi^e \cos \beta - u_\zeta^e \sin \beta; \quad u_{Z1}^e = u_\xi^e \cos \beta + u_\zeta^e \sin \beta \quad (3.7)$$

– проекції кутової швидкості основи на головну вісь гіроскопа і на вісь, перпендикулярну як головній, так і вимірювальній осі.

У подальшому будемо поділяти кутовий рух основи на “корисний”, з кутовою швидкістю географічної системи координат і кутовий рух основи відносно цієї системи координат (відносно поверхні Землі),

$$\mathbf{u}^c = \mathbf{u}^e + \mathbf{u}^*, \quad (3.8)$$

де \mathbf{u}^* – вектор кутової швидкості коливань корпусу гірокомпаса щодо географічної системи координат.

Рівняння руху (3.6) ДГК у подальшому використовуватимемо у формі

$$J_1 \ddot{\beta} + (H_0 - J_2 u_{X1}^c) \cdot u_{Z1}^c = M_{Y1}, \quad (3.9)$$

де не враховується рух основи навколо вимірювальної осі.

Уточнимо проекції кутової швидкості, беручи до уваги (3.1), (3.3), (3.5), (3.7) і (3.8):

$$u_{X1}^c = \left(\omega_3 \cos \varphi_2 + \frac{V_E}{R_3} \right) \cos \beta + \frac{V_N}{R_3} \sin \beta + u_\xi^* \cos \beta - u_\zeta^* \sin \beta;$$

$$u_{Z1}^c = -\frac{V_N}{R_3} \cos \beta + \left(\omega_3 \cos \varphi_2 + \frac{V_E}{R_3} \right) \sin \beta + u_\xi^* \cos \beta + u_\zeta^* \sin \beta. \quad (3.10)$$

3.1.2.1. Вільний рух ДГК

Вільний рух двоступеневий гірокомпас здійснює у випадку, коли основа рухається по поверхні Землі з постійною швидкістю ($V_E = const$, $V_N = const$), а вдовж вимірювальної осі не діють моменти сил. Тоді $\mathbf{u}^* = 0$ і $M_{Y1} = 0$, і рівняння (3.9) набуває вигляду:

$$J_1 \ddot{\beta} + H_0 \cdot \left(\omega_3 \cos \varphi_2 + \frac{V_E}{R_3} \right) \sin \beta = H_0 \cdot \frac{V_N}{R_3} \cos \beta. \quad (3.11)$$

Положення рівноваги можна визначити, якщо у рівнянні (3.11) покласти прискорення $\ddot{\beta}$ рівним нулю (рис. 3.3):

$$\operatorname{tg} \beta^* = \frac{u_\zeta}{u_\xi} = \frac{-\frac{V}{R_3} \cos K}{\omega_3 \cos \varphi_2 + \frac{V}{R_3} \sin K} = -\frac{V_N}{R_3 \omega_3 \cos \varphi_2 + V_E}. \quad (3.12)$$

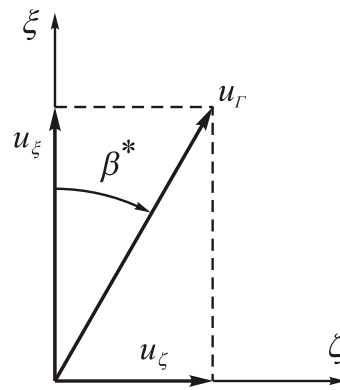


Рис. 3.3. До визначення швидкісної похибки гірокомпаса

Це положення рівноваги характеризує так звану швидкісну похибку гірокомпаса.

Якщо основа не переміщується по поверхні Землі ($V_N = V_E = 0$), то швидкісна похибка відсутня, а рівняння (3.11) при малих відхиленнях від меридіану ($\beta \ll 1$) набуває вигляду

$$J_1 \ddot{\beta} + H_0 \cdot \omega_3 \cos \varphi_2 \cdot \beta = 0. \quad (3.13)$$

Розв'язок цього рівняння є таким

$$\beta = C \cos(\omega_0 t + \chi), \quad (3.14)$$

де

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{H_0 \cdot \omega_3 \cos \varphi_2}{J_1}} \quad (3.15)$$

– частота власних коливань ДГК, а C і χ – сталі інтегрування, які визначаються початковими умовами. Наприклад, якщо початкова швидкість ($\dot{\beta}$) дорівнює нулю, а початкове положення головної осі ДГК відхилене на кут β_0 від площини меридіану, то (3.14) набуває вигляду

$$\beta = \beta_0 \cos \omega_0 t.$$

Якщо по вимірювальній осі ДГК діє момент в'язкого тертя $M_{y1} = -f\dot{\beta}$, то власні коливання ДГК стають загасаючими і визначаються виразом

$$\beta = Ce^{-ht} \cos(\omega_0 t + \chi),$$

де $h = \frac{f}{2J_1}$.

За наявності постійного моменту сил (M_0) вздовж вимірювальної осі ДГК його положення рівноваги дещо зміщується від площини меридіану на кут:

$$\beta^* = \frac{M_0}{H_0 \omega_3 \cos \varphi_2} \quad (3.16)$$

3.1.2.2. Рух ДГК при кутовій вібрації

Рівняння руху (3.9) ДГК за умови відсутності моментів сил вздовж вимірювальної осі можна подати у формі

$$J_1 \ddot{\beta} + (H_0 - J_2 u_{x1}^c) \cdot u_{z1}^c = 0, \quad (3.17)$$

де не враховується рух основи навколо вимірювальної осі. Якщо припустити, що основа не переміщується по поверхні Землі ($V_N = V_E = 0$), проекції u_{x1}^c і u_{z1}^c матимуть вигляд (див. рис. 3.1):

$$\begin{aligned} u_{x1}^c &= \omega_3 \cos \varphi_G \cos \beta + u_{\xi}^* \cos \beta - u_{\zeta}^* \sin \beta; \\ u_{z1}^c &= \omega_3 \cos \varphi_G \sin \beta + u_{\zeta}^* \cos \beta + u_{\xi}^* \sin \beta. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Припустимо, що північна (u_{ξ}^*) і східна (u_{ζ}^*) складові відносної кутової швидкості основи змінюються за гармонічним законом з частотою ω :

$$u_{\xi}^* = u_{Nm} \sin(\omega t + \varepsilon); \quad u_{\zeta}^* = u_{Em} \sin(\omega t). \quad (3.19)$$

Покладемо кут β відхилення від меридіана малим ($\beta \ll 1$) і будемо розв'язувати задачу методом послідовних наближень. Вважаючи всі кутові швидкості малими, утворимо рівняння першого наближення зі членів не вище першого порядку мализни:

$$J_1 \ddot{\beta}_{(1)} + H_0 [(\omega_3 \cos \varphi_G) \beta_{(1)} + u_{\zeta}^*] = 0, \quad (3.20)$$

а у рівнянні другого наближення удержимо члени до другого порядку мализни, причому величину кута β , що входить у члени другого порядку, замінимо на розв'язок $\beta_{(1)}$ рівняння (1.20):

$$J_1 \ddot{\beta}_{(2)} + [(\omega_3 \cos \varphi_G) \beta_{(2)} + u_{\zeta}^* + u_{\xi}^* \beta_{(1)}] [H_0 - J_2 (\omega_3 \cos \varphi_G + u_{\xi}^* - u_{\zeta}^* \beta_{(1)})] = 0.$$

Після перетворень і відкидання величин більше другого порядку мализни одержимо

$$J_1 \ddot{\beta}_{(2)} + H_0 (\omega_3 \cos \varphi_G) \beta_{(2)} = -H_0 u_{\zeta}^* - H_0 u_{\xi}^* \beta_{(1)} + J_2 (\omega_3 \cos \varphi_G u_{\zeta}^* + u_{\xi}^* u_{\zeta}^*). \quad (3.21)$$

Розв'язуючи спочатку рівняння (3.20) у формі

$$J_1 \ddot{\beta}_{(1)} + H_0 (\omega_3 \cos \varphi_\Gamma) \beta_{(1)} = -H_0 u_\zeta^*,$$

а далі підставляючи цей розв'язок у праву частину рівняння (3.21) і розв'язуючи його, можна дійти уточненого розв'язку $\beta_{(2)}$ другого наближення.

Частковий розв'язок неоднорідного рівняння (3.20) із врахуванням (3.19) має вигляд:

$$\beta_{(1)} = -\frac{1}{1-v^2} \frac{u_{Em}}{\omega_3 \cos \varphi_\Gamma} \sin \omega t, \quad (3.22)$$

де використане позначення

$$v = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\omega \sqrt{J_1}}{\sqrt{H_0 \omega_3 \cos \varphi_\Gamma}}, \quad (3.23)$$

відношення частоти коливань основи до частоти власних коливань гірокомпаса.

У кінцевому підсумку нас буде цікавити не повний розв'язок рівнянь другого наближення, а лише його стала складова $\langle \beta \rangle$ за період $T = \frac{2\pi}{\omega}$ вібрації (хитації), тому що саме вона визначає сталу складову зміщення положення рівноваги гірокомпаса від меридіана:

$$\langle \beta \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \beta_{(2)}(t) dt.$$

Застосуємо операцію усереднення до обох частин рівняння (3.21). Одержуємо

$$\langle \beta_{(2)} \rangle = -\frac{\langle u_\xi^* \cdot \beta_{(1)} \rangle}{\omega_3 \cos \varphi_\Gamma} + \frac{J_2}{H_0} \frac{\langle u_\xi^* \cdot u_\zeta^* \rangle}{\omega_3 \cos \varphi_\Gamma}.$$

Постійна складова відхилення положення рівноваги гірокомпаса від меридіана має вигляд:

$$\beta^* = \langle \beta_{(2)} \rangle = \frac{u_{Nm} u_{Em}}{2(\omega_3 \cos \varphi_\Gamma)^2} \left(\frac{1}{1-v^2} + \frac{J_2 \omega_3 \cos \varphi_\Gamma}{H_0} \right) \cos \varepsilon. \quad (3.24)$$

З отриманої формули випливає, що практично завжди у виразі сталої складової (3.22) можна нехтувати другим доданком у дужках правої частини, тому вібраційну похибку двоступеневого гірокомпаса можна оцінювати за формулою:

$$\beta^* = \langle \beta_{(2)} \rangle = \frac{u_{Nm} u_{Em}}{2(\omega_3 \cos \varphi_\Gamma)^2} \frac{1}{1-v^2} \cos \varepsilon. \quad (3.25)$$

Через те, що частота власних коливань двоступеневого гірокомпаса є доволі малою величиною (нагадаємо, що період цих коливань складає величину порядку півхвилини), то майже усі реальні кутові коливання основи слід віднести до високочастотних, бо їхня частота набагато перевищує частоту коливань гірокомпаса ($v \gg 1$). З врахуванням цього формулу (3.25) можна замінити на таку наближену

$$\beta^* = -\frac{u_{Nm}u_{Em}}{2(v\omega_3 \cos \varphi_\Gamma)^2} \cos \varepsilon = -\frac{H_0 \varphi_{Nm} \varphi_{Em}}{2J_1 \omega_3 \cos \varphi_\Gamma} \cos \varepsilon. \quad (3.26)$$

Тут величини $\varphi_{Nm} = \frac{u_{Nm}}{\omega}$ і $\varphi_{Em} = \frac{u_{Em}}{\omega}$ мають сенс амплітуд кутів хитавиці (вібрації) основи відповідно навколо осей "північ-південь" і "схід-захід".

3.1.3. Опис програмного забезпечення

Моделювання поведінки двоступеневого гірокомпаса (ДГК) здійснюється за допомогою програми (для середовища Matlab), яка здійснює чисельне інтегрування рівняння (3.13), в якому до моментів сил навколо вимірювальної осі ДГК включені моменти сил в'язкого і сухого тертя.

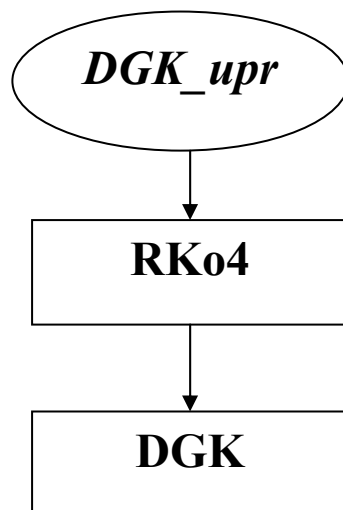
Пакет програм і процедур мовою системи MatLAB, складається з наступних програмних одиниць:

- керуючої програми **DGK_upr. m**, що здійснює присвоювання значень усім параметрам рівняння, організує цикл чисельного інтегрування за допомогою процедури `gko4` методу Рунге-Кутта четвертого порядку і виведення результатів інтегрування у графічне;

- процедури **DGK**, що обчислює значення правих частин диференціальних рівнянь двоступеневого гірокомпаса, приведених до форми Коши. На її спирається процедура `gko4` методу чисельного інтегрування.;

- процедури **RK04**, що виконує чисельне інтегрування ЗДР, праві частини яких задані процедурою "urfun", методом Рунге-Кутта 4-го порядку.

Схема взаємодії програм наведена нижче.



Тексти зазначених файлів наведено нижче.

Програма **DGK_upr. m**

```

% DGK_upr1
% Керуюча програма інтегрування диф. рівнянь двоступеневого гірокомпаса
% Воропаєва Є. О.
% Почато 09-01-2009   Останні зміни 19-01-2009
  
```

```

clear all, clc
global H J1 J2 omZ_fig fiN fiE Fiv om e al N F
sname='Воропаєва Є. О.';
% Задание значений исходных данных
omZ=7.29e-5; fig= 60*pi/180; omZ_fig=omZ*cos(fig);
% 1. Кінетичний момент
H = 4000;
% 2. Моменти інерції
J1=10; J2=3;
% 3. Коефіцієнт тертя
F=1.5;
% Момент сил сухого тертя
N=0.0;
% 4. Початкові умови
bt0=0.*pi/180; bt0T=0;
% 3. Параметри руху основи
fiN=0.5*pi/180/60; fiE=0.5*pi/180/60; Fiv=0*pi/180;
om=1; e=0*pi/180; al=0*pi/180;
% 4. Параметри інтегрування
% Кількість кроків інтегрування у найменшому періоді коливань
ni=100;
% Кількість найбільших періодів коливань
ntk=1.9;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Підготовка даних для інтегрування
OM0=sqrt(H*omZ_fig/J1); hi=2*pi/om/ni; ТК=2*pi/OM0*ntk;
t=0; k=1;
y=[bt0, bt0T]; Beta(1)=y(1); BetaT(1)=y(2); tt(1)=t;
% Цикл інтегрування
while t<=ТК
k=k+1; [tout,yout] = rko4('DGK11',hi,t,y);
y=yout; t=tout; Beta(k)=y(1); BetaT(k)=y(2); tt(k)=tout;
end
% Виведення графіка
subplot(3,1,[2:3])
plot(tt,Beta*180/pi,'k'),grid
set(gca, 'fontname','MS Sans Serif')
title('Відхилення від площини меридіану','FontSize',12,'FontWeight','bold')
xlabel('Час (с)','FontSize',12), ylabel('\beta (gradus)','fontname','Helvetica','FontSize',12)
% Текстове оформлення графічного вікна
subplot(3,1,1), axis off
h=text(0.2,1.17, ' Рух Двоступеневого ГіроКомпаса',...
'FontSize',14,'FontWeight','bold','fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.7,1.17,sprintf('\phi_g = %g^o',fig*180/pi),'FontSize',12);
h=text(0.0,0.9,'J_1(\beta" + u_y") + (H - J_2 u_x_1)u_z_1 = M_y_1','FontSize',14);
h=text(0.0,0.7,'u_x_1= (\omega_3cos\phi_g + u_x)cos\beta -u_zsin\beta;','FontSize',12);
h=text(0.0,0.5,'u_z_1=(\omega_3cos\phi_g + u_x)sin\beta + u_zcos\beta;','FontSize',12);
h=text(0.0,0.3,'u_x= \phi_N_m\omega*sin(\omegat+e)','FontSize',12);
h=text(0.0,0.1,'u_y= \phi_v_m\omega*cos(\omegat+a)','FontSize',12);
h=text(0.0,-0.1,'u_z= \phi_E_m\omega*sin(\omegat)','FontSize',12);
h=text(0.5,0.9,sprintf('H = %g',H),'FontSize',12);
h=text(0.5,0.7,sprintf('J_1 = %g',J1),'FontSize',12);
h=text(0.5,0.5,sprintf('J_2 = %g',J2),'FontSize',12);
h=text(0.7,0.9,sprintf('\phi_N_m = %g ""',fiN*180/pi*60),'FontSize',12);
h=text(0.7,0.7,sprintf('\phi_v_m = %g ""',Fiv*180/pi*60),'FontSize',12);
h=text(0.7,0.5,sprintf('\phi_E_m = %g ""',fiE*180/pi*60),'FontSize',12);
h=text(0.9,0.9,sprintf('\omega = %g',om),'FontSize',12);
h=text(0.9,0.7,sprintf('e = %g^o',e*180/pi),'FontSize',12);
h=text(0.9,0.5,sprintf('a = %g^o',al*180/pi),'FontSize',12);
h=text(0.5,0.3,sprintf('Тертя f = %g M_t_r = %g',[F,N]'),'FontSize',12,'fontname','MS Sans
Serif');
h=text(0.5,0.2,sprintf('Початкові умови \beta_0 = %g \beta_0T = %g',bt0, bt0T));

```



```
%g',[bt0*180/pi,bt0T]),'FontSize',12,'fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.25,0.2,sprintf('ПеріодT_0=%g c',round(2*pi*sqrt(J1/H/omZ_fig))),
'FontSize',12,'fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.4,0.1,'=====');
h1=text(0.4,0.03,'Програма DGK-upr.m; Автор - Воропаєва Є. О., каф. ПСОН',
'fontname','MS Sans Serif');
h1=text(0.4,-0.04,['Виконав ',sname],'fontname','MS Sans Serif');
tm=fix(clock); Tv=tm(4:5); h1=text(0.7,-0.04,[sprintf(' %g:',Tv),' ',date]);
h=text(0.4,-0.1,'=====');
```

Програма *DGK*

```
function z=DGK1(t,y)
% Процедура обчислювання правих частин диференційних рівнянь
% руху Двоступеневого ГіроКомпаса
% z(1)=y(2);
% z(2)= -усуcT+(My1-(H-J2*ucx1)*ucz1)/J1;
% Вхідні параметри:
% t - поточний час
% y - масив з двох змінних стану
% y(1) = beta - кут відхилення від меридіану
% y(2) = betaT - кутова швидкість
% Воропаєва Є. О. 09-01-2009
global H J1 J2 omZ_fig fiN fiE Fiv om e al N F
sB=sin(y(1)); cB=cos(y(1));
Uksi=fiN*om*sin(om*t+e); Udz=fiE*om*sin(om*t); Ucksi=omZ_fig+Uksi;
ucx1=Ucksi*cB-Udz*sB; ucZ1=Ucksi*sB+Udz*cB;
fivT=Fiv*om*cos(om*t+al); усуcT=-Fiv*om^2*sin(om*t+al);
alT=y(2)-fivT; My1=- F*alT-N*sign(alT);
z(1)=y(2);
z(2)= -усуcT+(My1-(H-J2*ucx1)*ucz1)/J1;
```

Програма *RKO4*

```
function [tout,yout] = rko4(yfun,h,t,y)
% процедура RKO4 чисельного інтегрування ЗДР, праві частини яких задані
% процедурою yfun, методом Рунге-Кутта 4-го порядку.
% Вхідні змінні:
% yfun - символічний рядок, що містить імя п/п правих частин ЗДР
% Виклик: z = fun(t,y), де yfun = 'fun'. t - поточний час;
% y - вектор поточних значень змінних стану,
% z - розраховані значень похідних; z(i) = dy(i)/dt.
% h - крок інтегрування; t - поточний час;
% y - значення вектора змінних стану на попередньому кроці
% Вихідні змінні:
% tout - наступний момент часу;
% yout - розраховане значення вектора змінних стану у цей момент
% Y. F. Lazarev, 236-67-31.
% Розрахунок проміжних значень похідних
s1 = feval(yfun, t, y);
s2 = feval(yfun, t+h/2, y+h/2*s1);
s3 = feval(yfun, t+h/2, y+h/2*s2);
s4 = feval(yfun, t+h, y+h*s3);
% Розрахунок значення вектора змінних стану у наступний момент часу
tout = t + h;
yout = y + h*(s1 + 2*s2 + 2*s3 + s4)/6;
```

3.1.4. Завдання

Застосовуючи програмне забезпечення, подане у п. 3, виконати наступні завдання.

Частина 1. Дослідження вільного руху двоступеневого гірокомпаса

Користуючись вищезазначеними програмами, провести експериментальні дослідження:

- 1) залежності частоти власних коливань від величини кінетичного моменту і екваторіального моменту інерції;
- 2) залежності положення рівноваги гірокомпаса від постійного моменту сил по вертикальній осі;
- 3) впливу в'язкого і сухого тертя на поведінку головної осі гірокомпаса.

Порівняти експериментально одержані результати з тими, що впливають з теоретичного дослідження. Зробити висновки з адекватності програмної і теоретичної моделей.

Частина 2. Дослідження впливу кутової вібрації основи на рух двоступеневого гірокомпаса

Користуючись вищезазначеними програмами, провести експериментальні дослідження залежності усталеного відхилення головної осі двоступеневого гірокомпаса від площини меридіану при вібрації основи від:

- 1) амплітуди кутової вібрації;
- 2) частоти вібрації;
- 3) зсуву фаз між коливаннями основи навколо ліній "північ-південь" і "схід-захід".

Порівняти експериментально одержані результати з тими, що впливають з теоретичного дослідження. Зробити висновки з адекватності програмної і теоретичної моделей.

3.1.5. Методичні вказівки до виконання

1. Увійдіть у програмне середовище Matlab.

2. Користуючись лінійкою інструментів відчиніть вікно редактора Matlab з текстом програми DGK_upr.

3. У рядку
sname='Воропаєва Є. О.'
тексту програми змініть прізвище на власне.

4. У наступних рядках програми змініть значення первісних даних на потрібні у відповідності з завданням.

3. У командному вікні введіть ім'я програми
>> DGK_upr
і натисніть клавішу <Enter>.

Якщо все було зроблено вірно, на екрані монітора має виникнути додаткове графічне вікно (див. рис. 1.4).

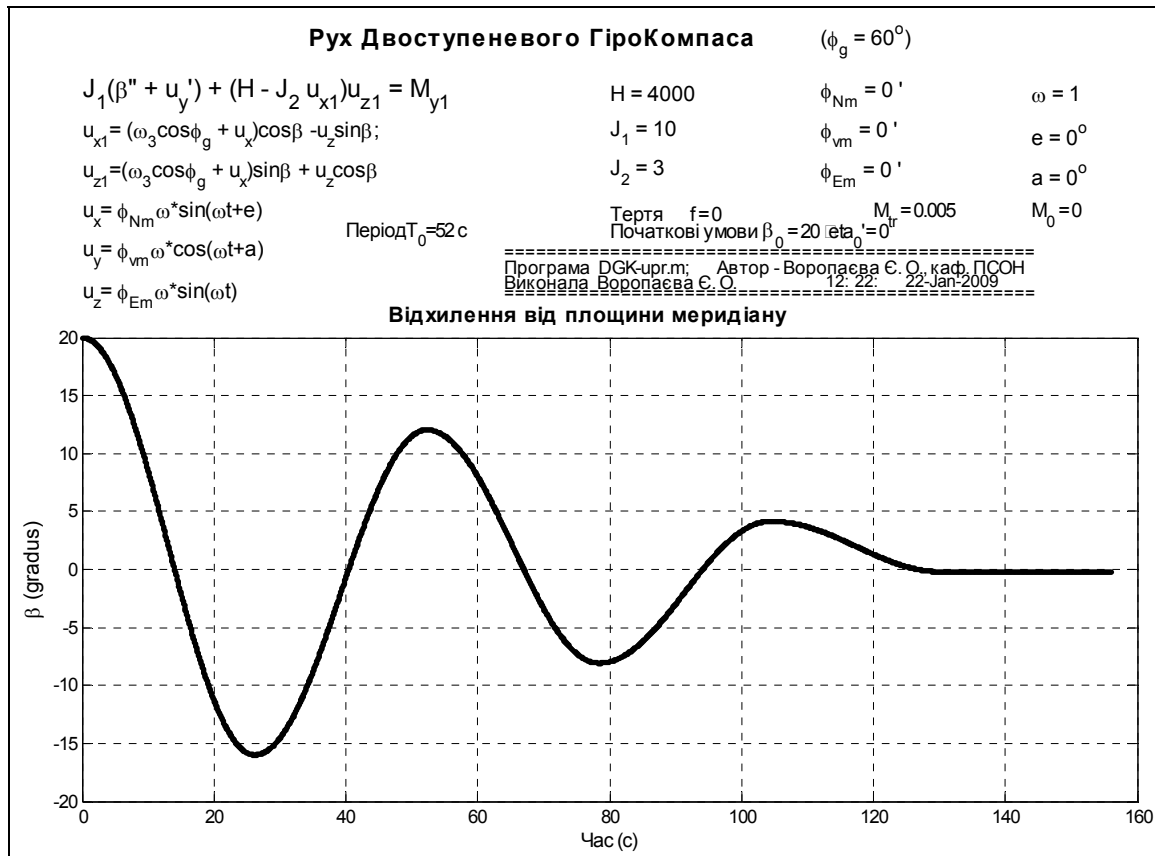


Рис. 3.4. Вид графічного вікна з результатами моделювання

В цьому вікні відображуються результати моделювання і наведені значення усіх використаних параметрів.

4. Вимірювання необхідних параметрів руху здійснюється по графіку, наведеному у цьому вікні. Для підвищення точності вимірювань слід використовувати функцію збільшення зображення *Zoom in* в лінійці інструментів на панелі цього вікна.

7. Результати вимірювань слід занотовувати у робочому зошиті у вигляді таблиці, одним з стовпців якої має бути змінюваний параметр, а іншими – виміряні значення і, можливо, розрахований за ними параметр.

8. Показати одержані результати викладачеві.

3.1.6. Контрольні запитання

1. Як впливають кутові коливання основи на двоступеневий гірокомпас?
2. Як впливають поступальні коливання основи на двоступеневий гірокомпас?

3. Чи збігаються результати експериментальних досліджень з теоретичними передбаченнями? якщо спостерігаються розходження, то що є їхньою причиною?
4. Які рівняння руху двоступеневого гірокомпаса чисельно інтегруються у програмній моделі? в яких саме програмних продуктах вони реалізовані?
3. Які можливості з імітування руху основи надає застосоване програмне забезпечення? які обмеження накладає воно на рух основи?
4. Що являє собою двоступеневий гіроскоп?
7. Сформулюйте основну властивість головної осі двоступеневого гіроскопа.
8. Чим спричиняється швидкісна похибка двоступеневого гірокомпаса ?
9. Як зміниться кутова швидкість двоступеневого гірокомпаса, якщо його кінетичний момент збільшити в 2 рази?
10. Як зміниться період власних коливань двоступеневого гірокомпаса, якщо його момент інерції збільшити у 3 рази?
11. Внаслідок яких причин виникає стала складова похибки двоступеневого гірокомпаса?

3.2. Дослідження поведінки гіроскопа напрямку на рухомій основі

3.2.1 Мета роботи

Шляхом експериментальних досліджень на програмній моделі вивчити вплив тертя на рух триступеневого астатичного гіроскопа, вплив моменту горизонтальної корекції на рух гіроскопа напрямку і порівняти з висновками теоретичного аналізу.

3.2.2 Теоретична частина

Гіроскоп напрямку являє собою триступеневий гіроскоп у кардановому підвісі, в якому застосовані системи горизонтальної і азимутальної корекції для підвищення його точності і працездатності. Схема його конструкції наведена на рис. 3.5.

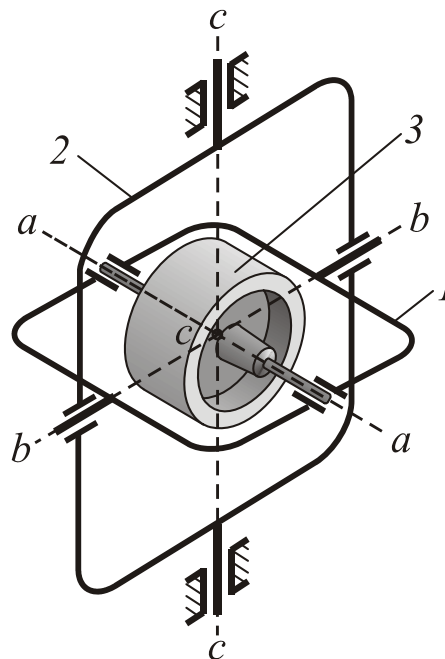


Рис. 3.5. Схема гіроскопа напрямку

Кінематика відносних поворотів гіроскопа у кардановому підвісі (у подальшому – ГКП) наведена на рис. 2.2. Тут α – кут повороту зовнішньої рамки відносно основи, β – кут повороту внутрішньої рамки відносно зовнішньої, x_2 – зовнішня вісь підвісу, y_1 – внутрішня вісь підвісу, z_1 – головна вісь гіроскопа.

Для теоретичного аналізу поведінки ГКП на рухомій основі зручно використовувати так звані опорні кутові координати гіроскопа, які задають положення головної осі безпосередньо в опорній системі координат (наприклад, географічній). Кінематика гіроскопа в опорній системі координат наведена на рис. 2.3.

Через те, що рух основи, через її значну інерційність, здійснюється з частотами, набагато меншими за частоту власних (нутаційних) коливань гіроскопа, вплив моментів, виникаючих внаслідок кутового руху основи, можна вивчати по прецесійних рівняннях.

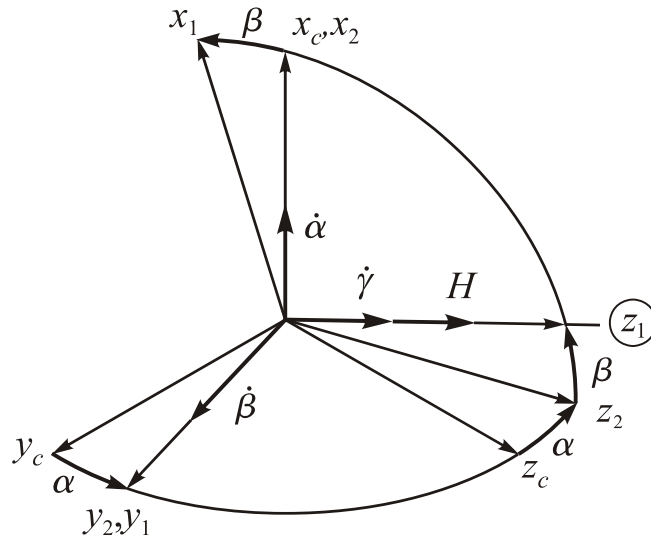


Рис. 3.6. Кінематика відносних поворотів

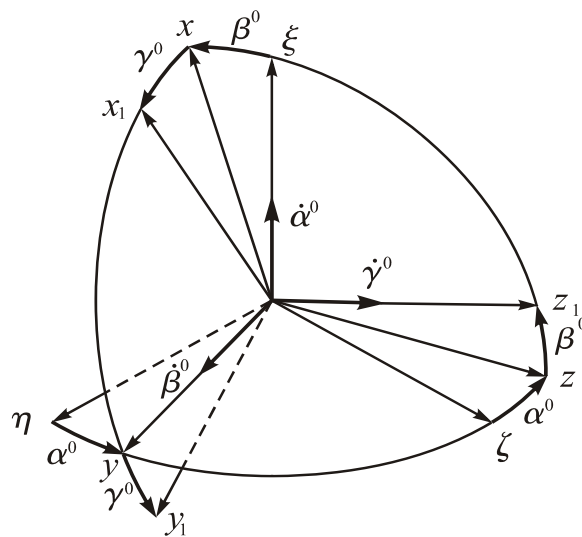


Рис. 3.7. Кінематика гіроскопа в опорній системі координат

Прецесійні рівняння ГКП у відносних кутових координатах мають вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\alpha}{dt} = -u_{x_c}^c + (u_{z_c}^c \cos \alpha - u_{y_c}^c \sin \alpha) \operatorname{tg} \beta - \frac{L}{H \cos \beta} \\ \frac{d\beta}{dt} = -(u_{y_c}^c \cos \alpha + u_{z_c}^c \sin \alpha) + \frac{N - R \sin \beta}{H \cos \beta} \\ \frac{dH}{dt} = R + M_{cm} \end{array} \right. \quad (3.27)$$

Прецесійні рівняння ГКП в опорних кутових координатах мають вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha^o}{dt} &= -u_\xi + (u_\zeta \cos \alpha^o - u_\eta \sin \alpha^o) \operatorname{tg} \beta^o - \\ &\quad - \frac{L}{H \cos \beta^o} \cos \gamma^o - \frac{N - R \sin \beta}{H \cos \beta^o \cos \beta} \sin \gamma^o; \\ \frac{d\beta^o}{dt} &= -(u_\eta \cos \alpha^o + u_\zeta \sin \alpha^o) + \frac{N - R \sin \beta}{H \cos \beta} \cos \gamma^o - \frac{L}{H} \sin \gamma^o; \\ \frac{dH}{dt} &= R + M_{cm}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

3.2.2.1. ГКП на обертовій основі під впливом моментів сил тертя

Будемо припускати, що основа обертається в інерціальному просторі з незмінною як за значенням, так і за напрямком кутовою швидкістю ω , опорна система координат $\xi\eta\zeta$ нерухома ($\mathbf{u} = 0$) і в початковий момент часу зв'язана $(x_c y_c z_c)$ з основою і опорна $(\xi\eta\zeta)$ системи збігаються. Тоді

$$\mathbf{u}^c = \omega = \text{const}; \quad \mathbf{u} = 0. \quad (3.29)$$

Задамо кутовими координатами α_ω і β_ω положення вектора кутової швидкості основи в інерціальному просторі (системі $\xi\eta\zeta$), рис. 2.4.

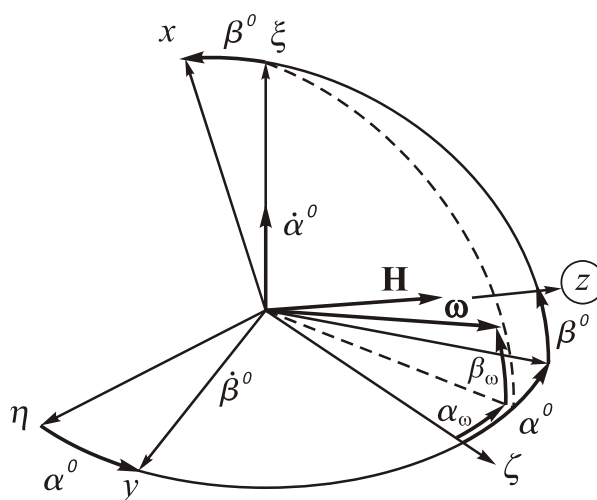


Рис. 3.8. Кінематика ГКП на обертовій основі

Те саме кутове положення буде займати вектор ω й щодо зв'язаної системи $x_c y_c z_c$. Більше того, через сталість напрямку цього вектора в просторі, він буде нерухомий й у системі координат $x_c y_c z_c$, яка обертається з цією кутовою швидкістю, тобто α_ω й β_ω є постійними кутовими координатами положення вектора ω й у зв'язаній системі.

Спочатку розглянемо випадок, коли гіроскоп не піддається зовнішнім збурюванням по осях підвісу $N \equiv L \equiv R \equiv M_{CT} \equiv 0$. Тоді, враховуючи (3.29),

прецесійні рівняння (3.28) в "абсолютних" координатах α° й β° приводять до рівностей

$$\alpha^\circ = \alpha_0^\circ = const; \quad \beta^\circ = \beta_0^\circ = const; \quad H = H_0 = const,$$

фізично інтерпретуючи які, дійдемо висновку, що головна вісь гороскопа зберігає незмінним своє положення в інерціальному просторі.

Рівняння ж відносного руху (3.27) перетворюються до виду:

$$\frac{d\beta}{dt} = -\omega \cos \beta_\omega \sin(\alpha - \alpha_\omega); \quad \frac{d\alpha}{dt} = -\omega \sin \beta_\omega + \omega \cos \beta_\omega \cos(\alpha - \alpha_\omega) \operatorname{tg} \beta. \quad (3.30)$$

Аналіз цих рівнянь показує, що у загальному випадку при обертанні основи положення головної осі гіроскопа щодо основи буде змінюватися. Цього руху не буде, якщо в початковий момент часу головна вісь збігається з вектором кутової швидкості обертання основи:

$$\alpha_0 = \alpha_\omega; \quad \beta_0 = \beta_\omega.$$

При малих відхиленнях осі фігури від вектора кутової швидкості основи, тобто при $\alpha - \alpha_\omega \ll 1$; $\beta - \beta_\omega \ll 1$, рівняння (3.30) можна лінеаризувати по змінних

$$x = \alpha - \alpha_\omega; \quad y = \beta - \beta_\omega. \quad (3.31)$$

В результаті виходить система рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} - \frac{\omega}{\cos \beta_\omega} y = 0; \\ \dot{y} + \omega \cos \beta_\omega x = 0, \end{cases} \quad (3.32)$$

яка має розв'язок

$$x = C \sin(\omega t + \delta); \quad y = C \cos \beta_\omega \cos(\omega t + \delta). \quad (3.33)$$

Графік цього розв'язку показаний на рис. 3.7.

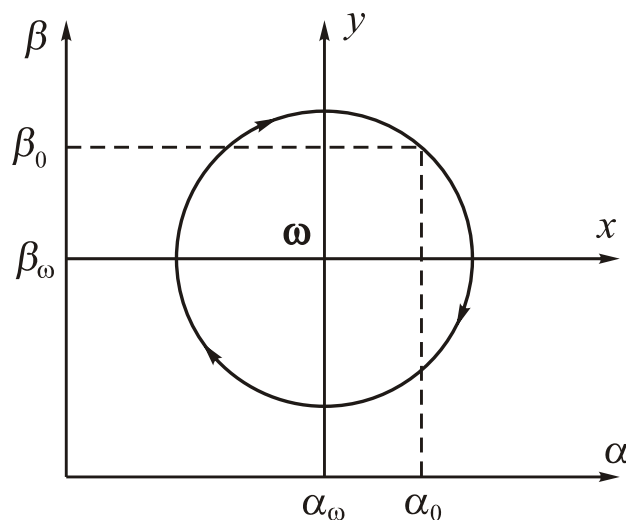


Рис. 3.9. Траєкторія вершини ГКП у відносному русі при обертанні основи

З нього випливає, що головна вісь гіроскопа у відносному русі здійснює рівномірне обертання по конусу навколо вектора кутової швидкості основи в напрямку, зворотному обертанню основи.

Тепер припустимо, що по осях підвісу діють моменти сил в'язкого тертя

$$L = -f_1\dot{\beta}; \quad N = -f_2\dot{\alpha}. \quad (3.34)$$

Рівняння прецесійного руху будуть відрізнятися від (2.6) лише правими частинами

$$\dot{x} - \frac{\omega}{\cos \beta_\omega} y = \frac{f_1}{H_0 \cos \beta_\omega} \dot{y}; \quad \dot{y} + \omega \cos \beta_\omega x = -\frac{f_2}{H_0 \cos \beta_\omega} \dot{x}. \quad (3.35)$$

Припустимо задля спрощення

$$\frac{f_1}{H_0} = \frac{f_2}{H_0 \cos^2 \beta_\omega} = \varphi \quad (3.36)$$

й уведемо комплексну змінну

$$z = x \cos \beta_\omega + jy. \quad (3.37)$$

Тепер сукупність рівнянь (3.35) можна замінити на одне рівняння з комплексної змінної z , застосувавши метод компресії рівнянь. Отримаємо:

$$\dot{z}(1 + j\varphi) + j\omega z = 0. \quad (3.38)$$

Загальний розв'язок рівняння (3.38) має вид:

$$z = z_0 e^{-\frac{\omega}{1+\varphi}t} e^{-j\frac{\omega}{1+\varphi}t}.$$

Переходячи зворотно до первісних координат α і β , одержимо розв'язок рівнянь (3.35) у відносних координатах

$$\begin{aligned} \alpha - \alpha_\omega &= \left[(\alpha_0 - \alpha_\omega) \cos \omega_0 t + \frac{\beta_0 - \beta_\omega}{\cos \beta_\omega} \sin \omega_0 t \right] e^{-ht}; \\ \beta - \beta_\omega &= [(\beta_0 - \beta_\omega) \cos \omega_0 t + (\alpha_0 - \alpha_\omega) \cos \beta_\omega \sin \omega_0 t] e^{-ht}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

де

$$h = \frac{\omega}{1+\varphi}; \quad \omega_0 = \frac{\omega}{1+\varphi}.$$

На рис. 3.10 показані траєкторії головної осі ГКП на картинній площині, що відповідають додатному й від'ємному значенням ω в (3.39). Додатне значення ω відповідає малому куту між напрямками векторів кінетичного моменту \mathbf{H} гіроскопа й кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}$ основи, а від'ємне – куту, близькому до розгорнутого (тобто напрямку обертання основи, протилежному напрямку власного обертання ротора гіроскопа).

З аналізу отриманих результатів випливають такі висновки.

1. При наявності опору відносному рухові гіроскопа, якщо обертання основи відбувається в одному напрямку із власним обертанням гіроскопа, вектор кутової швидкості власного обертання гіроскопа наближується до вектора кутової швидкості абсолютного обертання основи.

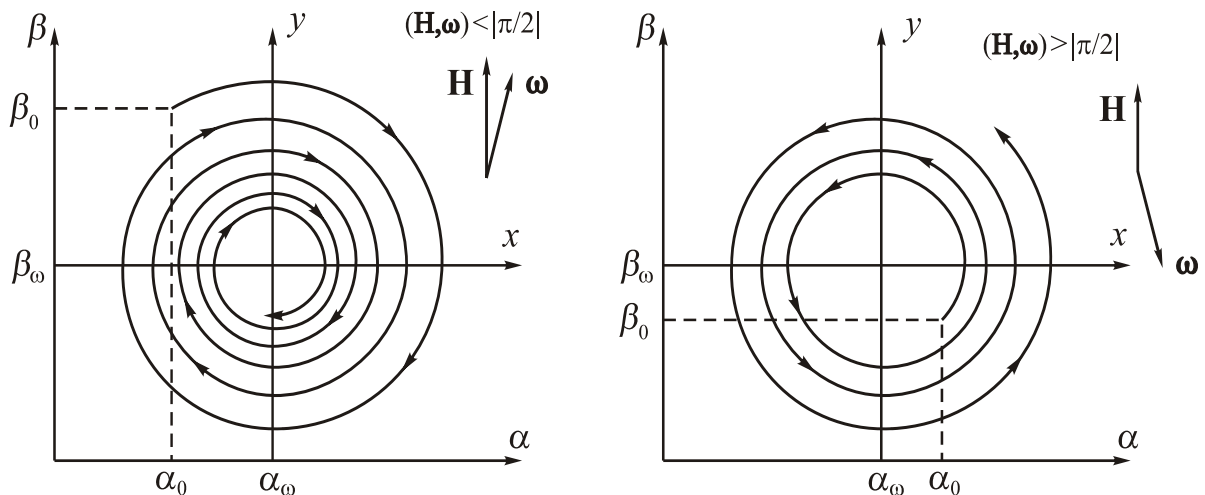


Рис. 3.10. Траєкторія апексу ГКП у відносному русі при наявності в'язкого тертя

Якщо основа обертається у бік, протилежний власному обертанню ротора, то кут між віссю фігури й віссю обертання основи неперервно збільшується (нестійкий рух). Але якщо врахувати, що в цьому випадку вектори \mathbf{H} й $\boldsymbol{\omega}$ утворюють між собою кут, близький до розгорнутого, то виявляється, що й у цьому випадку кут між векторами власної кутової швидкості гіроскопа й кутової швидкості обертання основи увесь час зменшується.

При в'язкому терті швидкість розходження або сходження коливань пропорційна кутовій швидкості ω обертання основи.

Отже, *опір відносному руху гіроскопа приводить до повороту гіроскопа в напрямку, при якому його власне обертання збігалось б з обертанням основи.*

Рівняння повороту гіроскопа в абсолютних кутових координатах мають вид

$$\dot{\alpha}^o = -e^{ht} \omega_0 (\alpha - \alpha_\omega); \quad \dot{\beta}^o = -e^{ht} \omega_0 (\beta_0 - \beta_\omega),$$

інтегруючи які, можна знайти залежність від часу абсолютних кутових координат

$$\begin{aligned} \alpha^o &= \alpha_0 + (\alpha_\omega - \alpha_0)(e^{-ht} - 1); \\ \beta^o &= \beta_0 + (\beta_\omega - \beta_0)(e^{-ht} - 1). \end{aligned} \quad (3.40)$$

З (3.40) випливає, що під дією сил опору відносному рухові головної осі гіроскопа вектор \mathbf{H} власного кінетичного моменту гіроскопа переміщується в абсолютному просторі по найкоротшій відстані до вектору $\boldsymbol{\omega}$ абсолютної кутової швидкості основи (рис. 3.11).

Тепер припустимо, що на гіроскоп діють моменти сил сухого тертя

$$N = -N_m \text{sign } \dot{\alpha}; \quad L = L_m \text{sign } \dot{\beta}. \quad (3.41)$$

Рівняння відносного руху навколо вектора $\boldsymbol{\omega}$ набудуть виду:

$$\dot{x} - \frac{\omega}{\cos \beta_\omega} y = \frac{L_m}{H_0 \cos \beta_\omega} \text{sign } \dot{y}; \quad \dot{y} + \omega \cos \beta_\omega x = -\frac{N_m}{H_0 \cos \beta_\omega} \text{sign } \dot{x}.$$

Їх можна звести до одного рівняння

$$\dot{z} + j\omega z = l_m \operatorname{sign} \dot{y} - jn_m \operatorname{sign}(\dot{x} \cos \beta_\omega), \quad (3.42)$$

де позначено

$$l_m = \frac{L_m}{H_0}; \quad n_m = \frac{N_m}{H_0 \cos^2 \beta_\omega}. \quad (3.43)$$

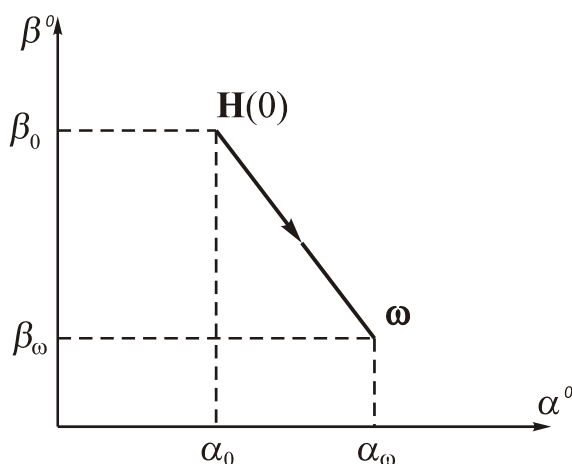


Рис 3.11. Траєкторія вершини ГКП в інерціальній системі координат

Власний рух гіроскопа в площині $x y$ зобразиться (при $\omega > 0$) у вигляді кола, по якому зображальна точка переміщується по годинниковій стрілці навколо центру z^* , обумовленого співвідношенням

$$z^* = \frac{l_m \operatorname{sign} \dot{y} - jn_m \operatorname{sign}(\dot{x} \cos \beta_\omega)}{j\omega} = \frac{n_m}{\omega} \operatorname{sign}(\dot{x} \cos \beta_\omega) - j \frac{l_m}{\omega} \operatorname{sign} \dot{y}. \quad (3.44)$$

Розглянемо значення величини z^* при русі зображальної точки по колу за годинниковою стрілкою. Назвемо квадрантом I область правої верхньої чверті кола, II – ліву верхню чверть площини від центра кола й т.д. у відповідності до рис. 3.12.

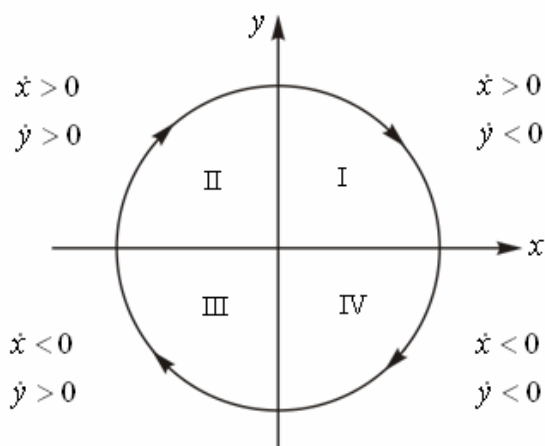


Рис. 3.12. Квадранти і знаки кутових швидкостей ГКП в них

У квадранті I значення збільшується, отже $\dot{x} > 0$, а значення y зменшується ($\dot{y} < 0$). Аналогічно можна простежити знаки швидкостей \dot{x} і \dot{y} для решти квадрантів. Вони показані на рис. 3.12. У відповідності до цього координати центрів окружності можна описати у вигляді таблиці:

Моменти сил опору	Квадранти			
	1	2	3	4
$-\frac{n_m}{\omega} \text{sign } \dot{x}$	$-\frac{n_m}{\omega}$	$-\frac{n_m}{\omega}$	$\frac{n_m}{\omega}$	$\frac{n_m}{\omega}$
$-\frac{l_m}{\omega} \text{sign } \dot{y}$	$\frac{l_m}{\omega}$	$-\frac{l_m}{\omega}$	$-\frac{l_m}{\omega}$	$\frac{l_m}{\omega}$

Нанесемо ці центри на площину xu , відзначивши їх номером квадранта, до руху, у якому вони перебувають (рис. 3.13). Там же нанесені границі областей (квадрантів), у яких знаки швидкостей \dot{x} й \dot{y} залишаються незмінними.

Рух у кожній з цих областей відбувається по окружності з центром на початку цієї області. Чотирикутник 1-2-3-4 називають чотирикутником застою.

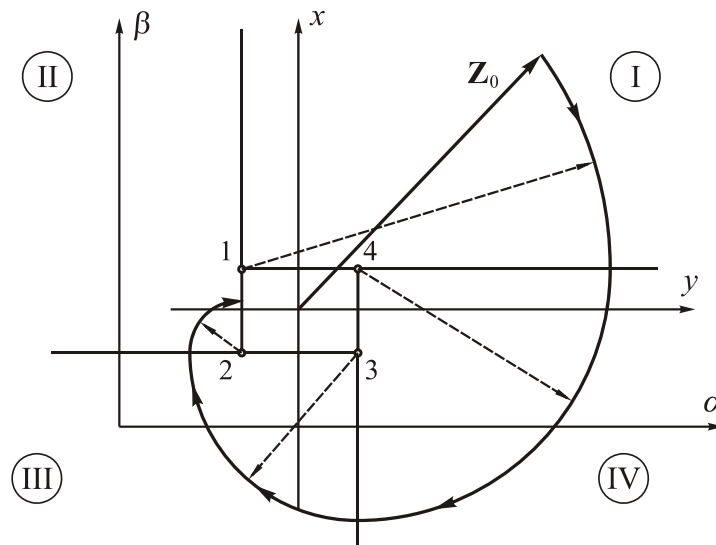


Рис.3.13. Траєкторія відносного руху вершини ГКП при дії сухого тертя

При переході апекса з однієї області в іншу стрибком змінюється радіус окружності (змінюється положення її центру). Рух же триває (вже навколо нового центра) проти годинникової стрілки. В цілому траєкторія являє собою збіжну при $\omega > 0$ й розбіжну при $\omega < 0$ (у цьому випадку змінюється напрямок переміщення зображальної точки на протилежне – проти годинникової стрілки, у той час як всі області й центри зберігаються попередніми, рис. 3.14.).

При попаданні зображальної точки у чотирикутник застою відносний рух гіроскопа припиняється.

Більш точно ширина зони застою по кутах α і β (α^* і β^*) визначиться з рівнянь (3.30):

$$\sin(\alpha^* - \alpha_\omega) = \frac{N_m}{H_0 \omega \cos \beta_\omega \cos \beta^*}; \quad \sin(\beta^* - \beta_\omega) \approx \frac{L_m}{H_0 \omega}, \quad (3.45)$$

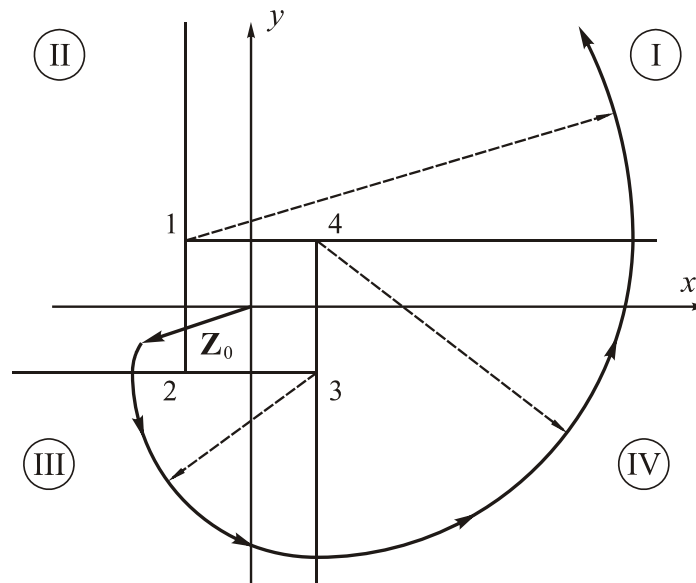


Рис. 3.14. Траекторія відносного руху при $\omega < 0$

з яких видно, що зона застою визначається рівновагою між гіроскопічним моментом, що "діє" на гіроскоп через обертання в просторі його вектора кінетичного моменту \mathbf{H} з кутовою швидкістю ω обертання основи, й моментом сил сухого тертя.

За умови, що моменти сил тертя перевищують цей гіроскопічний момент

$$N_m > |H_0 \omega|; \quad L_m > |H_0 \omega|, \quad (3.46)$$

область застою охоплює весь простір, див. (3.45). У цьому випадку яке б кутове положення не посідала у просторі головна вісь гіроскопа, вона повністю втрачає властивість зберігати у просторі незмінним свій напрямок й обертається разом з основою як жорстко пов'язана з нею.

З (3.46) випливає, що за певних значень відомих моментів сил тертя в осях підвісу й кінетичному моменті гіроскопа існує таке значення кутової швидкості основи

$$\omega^* = -\frac{L_m}{|H|}; \quad (L_m < N_m),$$

що при обертанні основи з кутовою швидкістю, меншою за це значення, гіроскоп повністю втрачає гіроскопічні властивості. Фактично ω^* характеризує собою точність (вірніше, кутову швидкість дрейфу) гіроскопа, з якою він зберігає в просторі заданий напрямок.

3.2.2.2. Дрейфи ГКП при хитавиці основи

Нехай по осях підвісу діють моменти сил в'язкого тертя (3.34). Інші моменти будемо вважати рівними нулю. Як і раніше, вважатимемо опорну систему координат нерухомою. Тоді рівняння (3.28) за умови мализни кута γ° можна привести до вигляду

$$\dot{\alpha}^\circ = \frac{\Phi_2}{\cos \beta^\circ \cos \beta} (\dot{\alpha} \cdot \gamma^\circ); \quad \dot{\beta}^\circ = -\frac{\Phi_1}{\cos \beta} (\dot{\beta} \cdot \gamma^\circ), \quad (3.47)$$

де $\Phi_2 = f_2 / H_0$, $\Phi_1 = f_1 / H_0$, причому кінетичний момент у цьому випадку будемо вважати постійним. Для визначення відносних швидкостей гіроскопа в першому наближенні можна знехтувати абсолютним його рухом і покласти у формулах (3.47) $\dot{\alpha}^\circ = \dot{\beta}^\circ = 0$. В результаті одержимо

$$\dot{\alpha} = -u_{X2}^c + u_{Z2}^c \operatorname{tg} \beta; \quad \dot{\beta} = -u_{Y2}^c; \quad \dot{\gamma}^\circ = \frac{u_{Z2}^c}{\cos \beta}. \quad (3.48)$$

З останньої рівності, інтегруючи в припущенні малого змінювання кута β , знайдемо кут γ° :

$$\gamma^\circ = \frac{1}{\cos \beta_{cp} 0} \int u_{Z2}^c dt. \quad (3.49)$$

Підставимо (3.48) и (3.49) в (3.47) та осереднимо:

$$\begin{aligned} \langle \dot{\alpha}^\circ \rangle &= \frac{\Phi_2}{\cos \beta_{cp}^o \cos^2 \beta_{cp}} \left(- \left\langle u_{X2}^c \int_0^t u_{Z2}^c dt \right\rangle + \operatorname{tg} \beta_{cp} \left\langle u_{Z2}^c \int_0^t u_{Z2}^c dt \right\rangle \right); \\ \langle \dot{\beta}^\circ \rangle &= \frac{\Phi_1}{\cos^2 \beta_{cp}} \left\langle u_{Y2}^c \int_0^t u_{Z2}^c dt \right\rangle \end{aligned} \quad (3.50)$$

Тут, як і раніше, враховано мале змінювання кутів β і β° , тому їхні значення замінені на середні β_{cp} й β_{cp}^o за період хитавиці.

Другий доданок у дужках (3.50) завжди дорівнює нулю:

$$\left\langle u_{Z2}^c \int_0^t u_{Z2}^c dt \right\rangle = 0.$$

Тому

$$\langle \dot{\alpha}^\circ \rangle = -\frac{2}{\cos \beta_{cp}^o \cos^2 \beta_{cp}} \left\langle u_{X2}^c \int_0^t u_{Z2}^c dt \right\rangle; \quad \langle \dot{\beta}^\circ \rangle = \frac{1}{\cos^2 \beta_{cp}} \left\langle u_{Y2}^c \int_0^t u_{Z2}^c dt \right\rangle. \quad (3.51)$$

Припустимо синхронне змінювання всіх складових кутової швидкості \mathbf{u}^c об'єкта:

$$u_{X2}^c = u_{mX} \cos(\omega t + \delta_X); \quad u_{Y2}^c = u_{mY} \cos(\omega t + \delta_Y); \quad u_{Z2}^c = u_{mZ} \cos \omega t. \quad (3.52)$$

Через те, що

$$\int_0^t u_{Z2}^c dt = \frac{u_{mZ}}{\omega} \sin \omega t, \quad (3.53)$$

то, після підставлення у (3.51) виразів (3.53), (3.52) й осереднення дійдемо формул

$$\langle \dot{\alpha}^o \rangle = \frac{\Phi_2}{\cos^2 \beta_{cp}} \frac{u_{mX} u_{mZ}}{2\omega \cos \beta^o} \sin \delta_X; \quad \langle \dot{\beta}^o \rangle = -\frac{\Phi_1}{\cos^2 \beta_{cp}} \frac{u_{mY} u_{mZ}}{2\omega} \sin \delta_Y, \quad (3.54)$$

звідки випливає:

- в'язке тертя по осі підвісу може привести при хитавиці основи до дрейфу гіроскопа навколо тієї самої осі;

- такий дрейф виникає тоді, коли основа коливається навколо кількох осей з однаковою частотою (синхронно);

- величина дрейфу суттєво залежить від зсуву фаз між коливаннями основи навколо відповідних осей; при синхронній хитавиці навколо трьох ортогональних осей дрейфи гіроскопа відсутні; дрейф гіроскопа є максимальним за величиною при зсуві фаз $\delta_X = \delta_Y = \pi/2$, тобто коли або зовнішня, або внутрішня вісь підвісу описують у просторі конус.

Наразі розглянемо вплив сухого тертя (3.41).

У цьому випадку рівняння (3.28) набувають виду:

$$\dot{\alpha}^o = \frac{n_m}{\cos \beta^o \cos \beta} (\gamma^o \text{sign} \dot{\alpha}); \quad \dot{\beta}^o = -\frac{l_m}{\cos \beta^o} (\gamma^o \text{sign} \dot{\beta}), \quad (3.55)$$

$$\left(n_m = \frac{N_m}{H_0}; \quad l_m = \frac{L_m}{H_0} \right).$$

Осереднюючи (3.55) за період хитавиці $T = \frac{2\pi}{\omega}$, дійдемо формул

$$\langle \dot{\alpha}^o \rangle = \frac{2}{\pi} \frac{n_m \gamma_m}{\cos \beta_{cp}^o \cos \beta_{cp}} \frac{u_{mX} \sin \delta_X}{\sqrt{u_{mX}^2 \sin^2 \delta_X + (u_{mZ} \text{tg} \beta_{cp} - u_{mX} \cos \delta_X)^2}};$$

$$\langle \dot{\beta}^o \rangle = -\frac{2}{\pi} \frac{l_m \gamma_m}{\cos \beta_{cp}^o} \sin \delta_Y. \quad (3.56)$$

Основні властивості дрейфів через сухе тертя – ті самі, що й дрейфів від в'язкого тертя. Особливістю є незалежність від частоти качки (при фіксованій амплітуді γ_m кута хитавиці навколо головної осі) і від амплітуд качки навколо осей підвісу.

3.2.2.3. Віражна похибка гіроскопу напрямку

Найбільш вагомою відмінністю гіроскопа напрямку (у подальшому ГН) від некерованого ГКП є наявність в ньому системи горизонтальної корекції. Момент системи горизонтальної корекції, окрім виконання корисної функції, у деяких режимах приводить до додаткових похибок гіроскопа напрямку, які проявляються в азимутальному дрейфі головної осі. Одним з таких режимів є здійснювання літаком віражу.

Кутове положення основи відносно поверхні Землі зазвичай визначається трьома кутами (рис. 3.15): ψ – кут рискання, θ – кут тангажа і ϕ – кут крена.

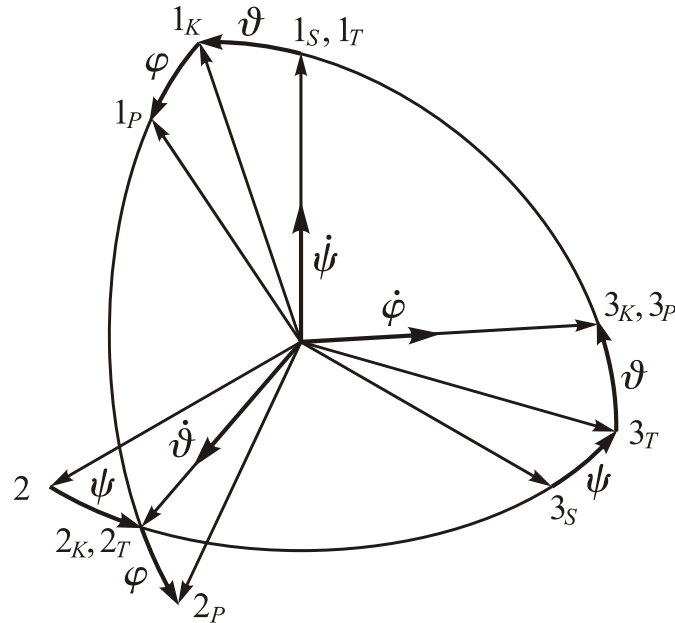


Рис. 3.15. Кінематика поворотів рухомого об'єкту

У цьому випадку взаємозв'язок між відносними і опорними координатами гіроскопа визначатиметься співвідношеннями:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg}(\psi - \alpha^{\circ}) \frac{\cos \varphi}{\cos \theta} - \sin \varphi \cdot \operatorname{tg} \theta; \quad (3.57)$$

$$\sin \beta = \sin(\psi - \alpha^{\circ}) \sin \varphi - \cos(\psi - \alpha^{\circ}) \cos \varphi \sin \theta;$$

$$\operatorname{tg} \gamma^{\circ} = \operatorname{tg} \varphi \frac{\cos(\psi - \alpha^{\circ})}{\cos \theta} + \operatorname{tg} \theta \sin(\psi - \alpha^{\circ}).$$

Вираж – це фігура пілотажу, коли літак з постійним кутом крену φ_0 здійснює політ у горизонтальній площині по колу з постійною швидкістю і з кутом тангажа, рівним нулю. При цьому корпус гіроскопа напрямку обертається у просторі з постійною кутовою швидкістю ω_{ϵ} , спрямованою вдовж вертикалі місця, тобто у цьому випадку маємо $u_{\xi}^c = \omega_{\epsilon}$; $u_{\eta}^c = u_{\zeta}^c \equiv 0$, а проекції кутової швидкості основи на осі основи визначаються наступними виразами:

$$u_{Xc}^c = \omega_{\epsilon} \cos \varphi_0 \approx \omega_{\epsilon}; \quad u_{Yc}^c = -\omega_{\epsilon} \sin \varphi_0 \approx -\omega_{\epsilon} \varphi_0; \quad u_{Zc}^c = 0. \quad (3.58)$$

Задля спрощення вважатимемо, що кут крену є малим, опорна система координат є нерухомою ($\mathbf{u} = 0$), а головна вісь гіроскопа у нульовому наближенні збігається з віссю ζ ($\alpha^{\circ} = \beta^{\circ} = 0$). Тоді з (2.31) випливає

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \psi \cos \varphi_0; \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx -\psi; \quad (3.59)$$

$$\sin \beta = \sin \psi \sin \varphi_0; \quad \Rightarrow \quad \beta \approx \varphi_0 \sin \psi;$$

$$\operatorname{tg} \gamma^{\circ} = \operatorname{tg} \varphi_0 \cos \psi; \quad \Rightarrow \quad \gamma^{\circ} \approx \varphi_0 \cos \psi.$$

Якщо ж до того додати, що у цьому випадку

$$\psi = \psi_0 + \omega_{\epsilon} t, \quad (3.60)$$

то, нехтуючи малими членами вище за перший порядок мализни і враховуючи лише дію моменту N_k горизонтальної корекції, прецесійні рівняння (3.27) і (3.28) можна записати у такий спосіб:

$$\frac{d\alpha^o}{dt} = -\frac{N_k}{H_0} \varphi_0 \cos(\omega_\epsilon t + \psi_0); \quad \frac{d\beta^o}{dt} = \frac{N_k}{H_0}; \quad (3.61)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \omega_\epsilon \varphi_0 \cos(\omega_\epsilon t + \psi_0) + \frac{N_k}{H_0}.$$

Міжрамкова пропорційна корекція. Якщо система корекції є міжрамковою і пропорційною, то момент корекції є пропорційним куту β між рамками карданового підвісу:

$$N_k = -k\beta.$$

Третє рівняння (3.61) тепер набуде виду

$$\frac{d\beta}{dt} + \varepsilon\beta = \omega_\epsilon \varphi_0 \cos(\omega_\epsilon t + \psi_0).$$

Величину $\varepsilon = \frac{k}{H_0}$ називають питомою швидкістю корекції. Частковий розв'язок рівняння має таку форму:

$$\beta = A_S \sin(\omega_\epsilon t + \psi_0) + A_C \cos(\omega_\epsilon t + \psi_0),$$

де

$$A_S = \frac{\omega_\epsilon^2}{\omega_\epsilon^2 + \varepsilon^2} \varphi_0; \quad A_C = \frac{\omega_\epsilon \varepsilon}{\omega_\epsilon^2 + \varepsilon^2} \varphi_0.$$

Використаємо його для визначення швидкості азимутального дрейфу з першого рівняння (3.61)

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha^o}{dt} &= -\varepsilon\beta\varphi_0 \cos(\omega_\epsilon t + \psi_0) = \\ &= -\varepsilon\varphi_0 \cos(\omega_\epsilon t + \psi_0) [A_S \sin(\omega_\epsilon t + \psi_0) + A_C \cos(\omega_\epsilon t + \psi_0)] = \\ &= -\frac{\omega_\epsilon \varepsilon \varphi_0^2}{2(\omega_\epsilon^2 + \varepsilon^2)} [\varepsilon + \omega_\epsilon \sin(2\omega_\epsilon t + 2\psi_0) + \varepsilon \cos(2\omega_\epsilon t + 2\psi_0)] \end{aligned}$$

Як бачимо, швидкість азимутального дрейфу змінюється періодично з частотою, удвічі більшою за частоту віражу. Окрім того, що є найважливішим, виникає також систематичний дрейф

$$\left\langle \frac{d\alpha^o}{dt} \right\rangle = -\frac{\omega_\epsilon \varepsilon^2 \varphi_0^2}{2(\omega_\epsilon^2 + \varepsilon^2)}. \quad (3.62)$$

Цей дрейф є характеристикою неусувної накопичувальної похибки гіроскопу напрямку.

3.2.2.4. Похибка ГН за хитавиці

При хитавиці основи система горизонтальної корекції також буде збурюватися (або кінематично, або силами інерції). В результаті це може також привести до додаткових похибок гіроскопа напрямку.

З рис. 3.15 у загальному випадку матимемо:

$$u_{x_c}^c = \dot{\psi} \cos \varphi \cos \theta + \dot{\theta} \sin \varphi; \quad u_{y_c}^c = -\dot{\psi} \cos \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi;$$

$$u_{z_c}^c = \dot{\phi} + \dot{\psi} \sin \theta.$$

Якщо припустити кути тангажа θ і крену φ , а також усі кутові швидкості малими, то у першому наближенні можна вважати:

$$u_{x_c}^c \approx \dot{\psi}; \quad u_{y_c}^c \approx \dot{\theta}; \quad u_{z_c}^c \approx \dot{\phi}.$$

Обмежимося врахуванням дії моменту міжрамкової пропорційної системи корекції, нехтуючи рештою моментів сил по осях підвісу. Тоді азимутальний дрейф гіроскопа напрямку можна визначити, як і раніше, з співвідношення

$$\langle \dot{\alpha}^o \rangle = \varepsilon \langle \beta(t) \cdot \gamma^o(t) \rangle, \quad (3.63)$$

яке впливає з першого рівняння (3.28).

Розглянемо частковий випадок, коли хитавиця здійснюється лише навколо поздовжньої осі літака, тобто тільки з куту крена

$$\varphi(t) = \varphi_m \sin(\omega t + \varepsilon_\varphi). \quad (3.64)$$

Для визначення закону змінювання куту γ^o використаємо третє з співвідношень (3.57). Матимемо

$$\gamma^o(t) \approx \varphi \cos \psi_0 = \varphi_m \cos \psi_0 \sin(\omega t + \varepsilon_\varphi). \quad (3.65)$$

Визначення $\beta(t)$ здійснимо за допомогою другого рівняння (3.27), яке подамо у виді

$$\frac{d\beta}{dt} + \varepsilon\beta = \dot{\phi} \sin \psi_0 = \varphi_m \omega \sin \psi_0 \cos(\omega t + \varepsilon_\varphi).$$

Частинний розв'язок цього рівняння має вид

$$\beta(t) = \frac{\varphi_m \omega}{\omega^2 + \varepsilon^2} \sin \psi_0 [\omega \sin(\omega t + \varepsilon_\varphi) + \varepsilon \cos(\omega t + \varepsilon_\varphi)]. \quad (3.66)$$

Використовуючи (3.65) і (3.66) у (3.63), отримаємо:

$$\langle \dot{\alpha}^o \rangle = \frac{\varepsilon \omega^2}{2(\omega^2 + \varepsilon^2)} \varphi_m^2 \sin \psi_0 \cos \psi_0 = \frac{\varepsilon \omega^2}{4(\omega^2 + \varepsilon^2)} \varphi_m^2 \sin 2\psi_0. \quad (3.67)$$

Одержаний вираз азимутального дрейфу гіроскопа напрямку дещо нагадує винайдений раніше дрейф (3.62) цього приладу при віражі. Але є й важливі відмінності.

По-перше, дрейф при креновій хитавиці суттєво залежить від куту ψ_0 між головною віссю гіроскопа і поздовжньою віссю літака. Якщо вісь хитавиці збігається з напрямом головної осі гіроскопа, або перпендикулярна їй, азимутальний дрейф гіроскопа напрямку через момент горизонтальної корекції відсутній. Найбільшого значення цей азимутальний дрейф набуває у випадках, коли вісь

хитавиці складає кут 45° з віссю гіроскопа. Це максимальне значення визначається формулою:

$$\langle \dot{\alpha}^o \rangle_{\max} = \frac{\varepsilon \omega^2}{4(\omega^2 + \varepsilon^2)} \varphi_m^2. \quad (3.68)$$

По-друге, залежність дрейфу від питомої швидкості корекції ε є дещо іншою. При слабкій корекції ($\varepsilon / \omega \ll 1$) дрейф можна визначити формулою

$$\langle \dot{\alpha}^o \rangle_{\max} = \frac{\varepsilon}{4} \varphi_m^2,$$

при сильній ($\varepsilon / \omega \gg 1$), він наближено дорівнює

$$\langle \dot{\alpha}^o \rangle_{\max} = \frac{\omega^2}{4\varepsilon} \varphi_m^2.$$

З цього випливає, що якщо корекція є слабкою, збільшення інтенсивності корекції збільшує дрейф, а коли інтенсивність корекції є значною, тобто корекція стає сильною, подальше її збільшення приводить до зменшення дрейфу. Отже, існує певне значення питомої швидкості корекції, при якому дрейф є максимальним за значенням. Неважко впевнитися, що це оптимальне значення дорівнює частоті хитавиці $\varepsilon_{opt} = \omega$, а максимально можливе значення дрейфу

$$\text{дорівнює } \langle \dot{\alpha}^o \rangle_{\max} = \frac{\omega}{8} \varphi_m^2.$$

3.2.3. Опис програмного забезпечення

Моделювання поведінки ГКП та ГН здійснюється за допомогою програми (для середовища Matlab), яка здійснює чисельне інтегрування прецесійних рівнянь (3.27) і (3.28).

Комплекс програм моделювання поведінки ГКП при русі основи і дії моментів сил тертя і горизонтальної корекції складається з головної програми *Vypryam_efect_GN*, і процедур *GN_PO_precession* та *Ug_Dv_Ob*.

Головна (керувальна) програма *Vypryam_efect_GN.m* виконує наступні дії:

- присвоювання чисельних значень параметрам руху основи, гіроскопа і діючих моментів;
- підготовка (обчислення) початкових значень відносних координат гіроскопа по прийнятих початкових значень опорних його координатах;
- звернення до процедури *ode45* чисельного інтегрування диференціальних рівнянь, яка, у свою чергу, звертається до процедури *GN_PO_precession*, яка обчислює праві частини прецесійних рівнянь гіроскопа, приведених до форми Коші;
- виведення графіків одержаних результатів і їх текстове оформлення.

Процедура *GN_PO_precession* враховує два види моментів сил, що діють на гіроскоп, - моменти сил в'язкого тертя по осях підвісу і момент міжрамкової горизонтальної корекції. Обидві попередні програми спираються на викорис-

тання процедури *Ug_Dv_Ob*, яка обчислює поточні значення кутів повороту основи відносно опорної системи координат і проекції кутової швидкості основи на осі, пов'язані з основою. При цьому закони змінювання у часі кутів повороту основи прийняті наступними:

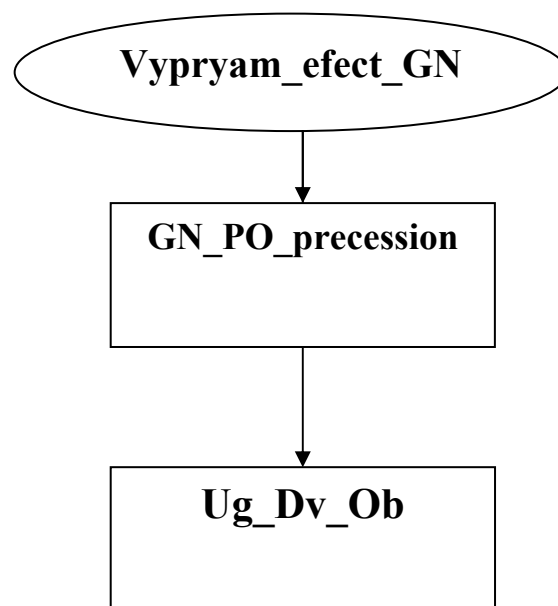
$$\psi(t) = \psi_0 + \Omega_\psi t + \psi_m \sin(\omega_\psi t + \varepsilon_\psi);$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \theta_m \sin(\omega_\theta t + \varepsilon_\theta);$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \Omega_\varphi t + \varphi_m \sin(\omega_\varphi t + \varepsilon_\varphi),$$

що дозволяє досліджувати вплив хитавиці з усіх трьох кутів і обертання основи навколо вертикальної осі і навколо поздовжньої осі основи.

Схема взаємодії програм наведена нижче.



Тексти зазначених файлів наведено нижче.

Програма Vypryam_effect_GN

```

%                               Vypryam_effect_GN3
% Воропаєва Є. О. 4-10-2008
clear all, clc
global dvobs
global H f1 f2 kg
global P0 OMv Pm omp ep
global T0 Tm omt et
global F0 OMf Fm omf ef
dvobs='Ug_Dv_Ob3';
H=100; f1=10; f2=10; kg=0; OMv=0;      OMf=.1*2*pi;
Pm=0*pi/180; omp=2*pi*0.1; ep=0*pi/2; P0=45*pi/180;
Tm=0*pi/180; omt=2*pi*0.1; et=0*pi/2; T0=30*pi/180;
Fm=0*pi/180; omf=2*pi*0.1; ef=0*pi/2; F0=0*pi/180;
T=2*pi/OMf;
% підготовка початкових умов
t=0; alo0=0; bto0=0; y=zeros(1,4);y(3)=alo0; y(4)=bto0;
[Usk,Ug]=Ug_Dv_Ob12(t);
tB=tan(y(4)); sB=sin(y(4)); cB=cos(y(4));
  
```

```

tP=tan(Ug(1)-y(3));sP=sin(Ug(1)-y(3));cP=cos(Ug(1)-y(3));
tT=tan(Ug(2));sT=sin(Ug(2));cT=cos(Ug(2));
tF=tan(Ug(3));sF=sin(Ug(3));cF=cos(Ug(3));
a0=atan2(-sP*cF-cP*sF*sT+tB*cT*sF,cP*cT+tB*sT);
b0=asin((sP*sF-cP*cF*sT)*cB-cT*cF*sB);
g0=atan2(sF*cP+sT*sP*cF,cT*cF*cB-sB*(sP*sF-cP*cF*sT));
y(1)=a0; y(2)=b0; y0=y;
tspan=[0,8*T];
% Чисельне інтегрування диференційних рівнянь гіроскопа
[t,y]=ode45('gn_po_precession3',tspan,y0);
% Виведення графіків
subplot(2,2,1)
plot(t,y(:,3)*180/pi,'o-',t,y(:,4)*180/pi,'.-'),grid,
set(gca,'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12)
title('Опорні координати (градуси)'), xlabel('Час (секунди)')
legend('\alpha^o','\beta^o',0)
subplot(2,2,3)
plot(y(:,1)*180/pi,y(:,2)*180/pi,'+-'),grid, axis equal
set(gca,'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12)
title('Траєкторія апексу у відносних координатах')
xlabel('\alpha(градуси)'), ylabel('\beta')
subplot(2,2,4)
plot(y(:,3)*180/pi,y(:,4)*180/pi,'ro-'),grid, axis equal
set(gca,'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12)
title('Траєкторія апексу в опорних координатах')
xlabel('\alpha^o (градуси)'), ylabel('\beta\circ')
subplot(2,2,2), axis('off')
h=text(0.0,1.1,'Г К П на рухомій основі','FontName',
'MS Sans Serif','FontSize',14,'FontWeight','Bold');
h=text(-0.0,1.,'(по прецесійних рівняннях)','FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
h=text(0.2,0.9,sprintf('H = %g;',H),'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
if OMv~=0
    h=text(-0.2,0.8,'\psi = \psi_0 + \Omega_vt + \psi_m sin(\omega_pt + \epsilon_p);',...
        'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
    h=text(0.6,0.8,sprintf('\Omega_v = %g',OMv),'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
else
    h=text(-0.0,0.8,'\psi = \psi_0 + \psi_m sin(\omega_pt + \epsilon_p);',...
        'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
end
h=text(-0.0,0.7,'\theta = \theta_0 + \theta_m sin(\omega_tt + \epsilon_t);',...
    'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
if OMf~=0
    h=text(-0.2,0.6,'\phi = \phi_0 + \Omega_ft + \phi_m sin(\omega_ft + \epsilon_f);',...
        'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
    h=text(0.6,0.6,sprintf('\Omega_f = %g',OMf),'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
else
    h=text(-0.0,0.6,'\phi = \phi_0 + \phi_m sin(\omega_ft + \epsilon_f);',...
        'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
end
h=text(-0.3,0.5,sprintf('\psi_0 = %g;',P0*180/pi),'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
h=text(-0.3,0.4,sprintf('\theta_0 = %g;',T0*180/pi),'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
h=text(-0.3,0.3,sprintf('\phi_0 = %g;',F0*180/pi),'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
h=text(0.,0.5,sprintf('\psi_m = %g;',Pm*180/pi),'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
h=text(0.,0.4,sprintf('\theta_m = %g;',Tm*180/pi),'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
h=text(0.,0.3,sprintf('\phi_m = %g;',Fm*180/pi),'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
h=text(0.3,0.5,sprintf('\omega_p = %g;',omp),'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
h=text(0.3,0.4,sprintf('\omega_t = %g;',omt),'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
h=text(0.3,0.3,sprintf('\omega_f = %g;',omf),'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
h=text(0.8,0.5,sprintf('\epsilon_p = %g;',ep*180/pi),'FontName',
'MS Sans Serif','FontSize',12);
h=text(0.8,0.4,sprintf('\epsilon_t = %g;',et*180/pi),'FontName',
'MS Sans Serif','FontSize',12);

```

```

h=text(0.8,0.3,sprintf('\epsilon_f=%g;',ef*180/pi),'FontName','MSSansSerif','FontSize',12);
if kg~=0
    h=text(-0.2,0.2,sprintf('Момент горизонтальної корекції N_k=- %g\cdot\beta',
    kg),'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
end
if f1~=0
    h=text(-0.2,0.1,sprintf('Момент тертя по внутрішній осі L= - %g\cdot\beta"',...
    f1),'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
end
if f2~=0
    h=text(-0.2,0.,sprintf('Момент тертя по зовнішній осі N = - %g\cdot\alpha"',...
    f2),'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
end
h1=text(-0.2,-0.05,'-----');
h1=text(-0.2,-0.1,'Vypryam-efect-GN.m','FontName','MS Sans Serif');
h1=text(0.3,-0.1,'Воропаєва Є. О., каф. ПСОН','FontName','MS Sans Serif');
h1=text(-0.2,-0.2,'-----');
tm=fix(clock); Tv=tm(4:5);
h1=text(0.1,-0.17,[sprintf(' %g:',Tv),' ',date]);

```

Програма GN_PO_precession

```

function z=gn_po_precession3(t,y)
% GN_PO_precession
%Процедура обчислення правих частин
% прецесійних диференційних рівнянь
% гіроскопа напрямку на рухомій основі
% Вхідні величини:
% y(1) - alfa, y(2) - beta, y(3) - alfa, y(4) - beta
global dvobs
global H f1 f2
global kg
[Usk,Ug]=feval(dvobs, t);
tB=tan(y(4)); sB=sin(y(4)); cB=cos(y(4));
tP=tan(Ug(1)-y(3));sP=sin(Ug(1)-y(3));cP=cos(Ug(1)-y(3));
tT=tan(Ug(2));sT=sin(Ug(2));cT=cos(Ug(2));
tF=tan(Ug(3));sF=sin(Ug(3));cF=cos(Ug(3));
g0=atan2(sF*cP+sT*sP*cF,cT*cF*cB-sB*(sP*sF-cP*cF*sT));
sa=sin(y(1)); ca=cos(y(1)); sb=sin(y(2)); cb=cos(y(2)); tb=tan(y(2));
sg0=sin(g0); cg0=cos(g0);
Ucz2=Usk(3)*ca-Usk(2)*sa; Ucy2=Usk(2)*ca+Usk(3)*sa; Ucx2=Usk(1)-Ucz2*tb;
A=-Ucx2; B=-Ucy2-kg*y(2)/H/cb; kff=1+f1*f2/(H*cb)^2;
z(1)=(A+B*f1/H/cb)/kff;
z(2)=(B-A*f2/H/cb)/kff;
z(3)=f1*z(2)/H/cB*cg0 -(-kg*y(2)-f2*z(1))*sg0/H/cb/cB;
z(4)=(-kg*y(2)-f2*z(1))*cg0/H/cb +f1*z(2)/H*sg0;
z=z';

```

Програма Ug_Dv_Ob

```

function [Usk,Ug]=Ug_Dv_Ob12(t)
global P0 OMv Pm omp ep
global T0 Tm omt et
global F0 OMf Fm omf ef
Ug(1)=P0+OMv*t+Pm*sin(omp*t+ep); Ug(2)=T0+Tm*sin(omt*t+et);
Ug(3)=F0+OMf*t+Fm*sin(omf*t+ef);
PsiT=OMv+Pm*omp*cos(omp*t+ep); TetaT=Tm*omt*cos(omt*t+et);
FiT=OMf+Fm*omf*cos(omf*t+ef);
Usk(1)=PsiT*cos(Ug(2))*cos(Ug(3))+TetaT*sin(Ug(3));
Usk(2)=-PsiT*cos(Ug(2))*sin(Ug(3))+TetaT*cos(Ug(3));
Usk(3)=PsiT*sin(Ug(2))+FiT;

```

3.2.4. Завдання

Застосовуючи програмне забезпечення, подане у п. 3, виконати наступні завдання.

Частина 1. Дослідження впливу тертя на рух триступеневого астатичного гіроскопа

1. Користуючись вищезазначеними програмними засобами, провести експериментальні дослідження впливу моментів сил тертя по осях карданового підвісу на поведінку гіроскопа у кардановому підвісі:

- 1) при обертанні основи навколо нерухомої у просторі поздовжньої осі об'єкту, варіюючи: а) величиною кутової швидкості обертання основи, б) напрямом вектору цієї кутової швидкості у просторі, в) величиною коефіцієнтів тертя по обох осях карданового підвісу;
- 2) при хитавиці основи, варіюючи: а) величиною амплітуд хитавиці по трьох осях, б) величиною зсуву фаз між коливаннями основи навколо різних осей, в) частотою хитавиці.

2. Порівняти експериментально одержані результати з тими, що випливають з теоретичного дослідження. Зробити висновки з адекватності програмної і теоретичної моделей.

Частина 2. Дослідження впливу моменту горизонтальної корекції на рух гіроскопа напрямку

1. Користуючись вказаним програмним забезпеченням, провести експериментальні дослідження впливу на поведінку гіроскопа напрямку (перш за все – його азимутальний дрейф) моменту сил горизонтальної корекції:

1.1) при віражі основи, варіюючи: а) величиною питомої швидкості корекції; б) величиною куту крену літака при віражі; в) величиною кутової швидкості віражу.

1.2) при хитавиці літака з крену, варіюючи: а) величиною куту між головною віссю гіроскопа і поздовжньою віссю літака, б) величиною питомої швидкості корекції, в) амплітудою і частотою хитавиці.

2. Порівняти експериментально одержані результати з тими, що випливають з теоретичного дослідження. Зробити висновки з адекватності програмної і теоретичної моделей.

3.2.5. Методичні вказівки до виконання

1. Увійти у програмне середовище Matlab.

Користуючись лінійкою інструментів відкрити у вікні редактора Matlab текст програми `Vurpnam_efect_GN`.

2. У наступних рядках програми змінити значення первісних даних на потрібні у відповідності з завданням.

3. У командному вікні ввести ім'я програми

>> Vurpuyam_efect_GN

і натиснути клавишу <Enter>.

Якщо все було зроблено вірно, на екрані монітора має з'явитися додаткове графічне вікно (див. рис. 3.16).

В цьому вікні відображуються результати моделювання і наведені значення усіх використаних параметрів.

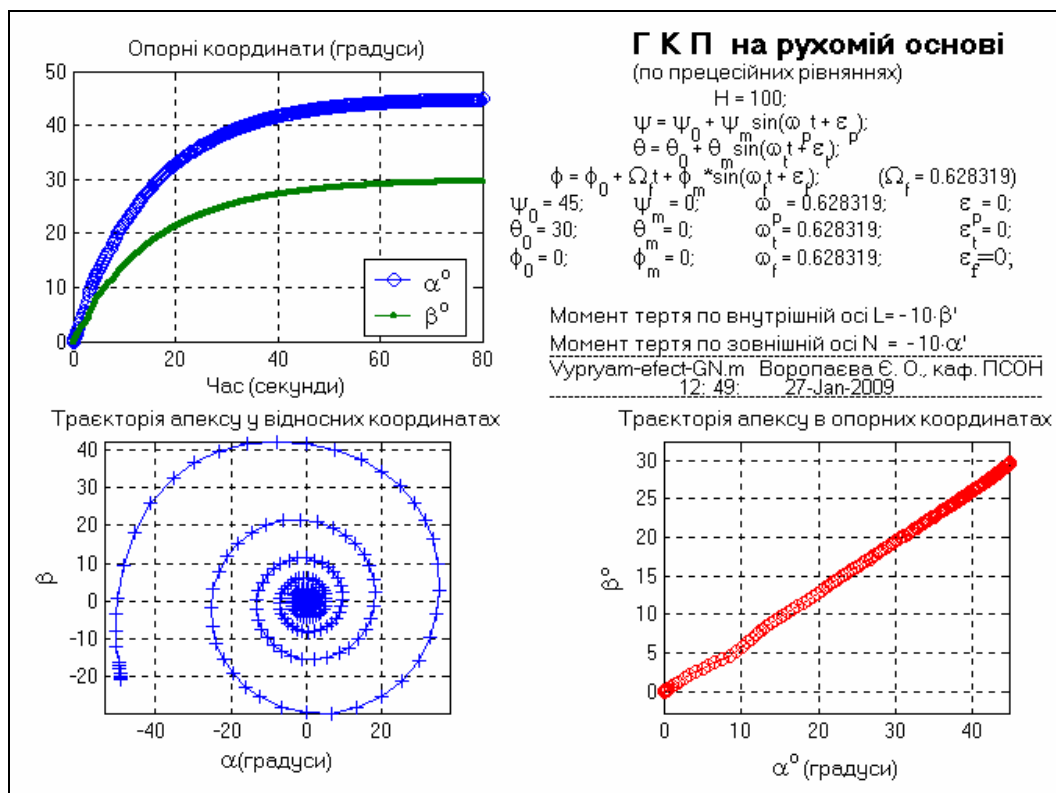


Рис. 3.16. Вид графічного вікна з результатами моделювання

4. Вимірювання необхідних параметрів руху здійснюється по графіку, наведеному у цьому вікні. Для підвищення точності вимірювань слід використовувати функцію збільшення зображення Zoom in в лінійці інструментів на панелі цього вікна.

3. Результати вимірювань слід занотувувати у робочому зошиті у вигляді таблиці, одним з стовпців якої має бути змінюваний параметр, а іншими – виміряні значення і, можливо, розрахований за ними параметр.

4. Показати одержані результати викладачеві.

3.2.6. Контрольні запитання

1. Які рівняння руху гіроскопа у кардановому підвісі чисельно інтегруються у програмній моделі? в яких саме програмних продуктах вони реалізовані?
2. Які можливості з імітування руху основи надає застосоване програмне забезпечення? які обмеження накладає воно на рух основи?
3. Які можливості з імітування моментів сил опору надає застосоване програмне забезпечення? які обмеження накладає воно на сили опору?
4. Яка фізична причина виникнення дрейфу гіроскопа через тертя при хитавиці основи? за яких умов цей дрейф набуває максимального за величиною значення? за яких умов він дорівнюватиме нулеві?
3. Які можливості з імітування моментів сил горизонтальної корекції надає застосоване програмне забезпечення? які обмеження накладає воно на ці моменти?
4. Яка фізична причина виникнення дрейфу гіроскопа через момент горизонтальної корекції при віражі основи? при хитавиці основи?
7. Які корисні властивості мають опорні кутові координати гіроскопа?
8. Як зміниться поведінка ГКП на основі, що обертається, якщо кутову швидкість його власного обертання зменшити у два рази?
9. Як зміниться поведінка ГКП на основі, що обертається, якщо збільшити його кінетичний момент у два рази, не змінивши величину моментів сил сухого тертя на осях підвісу?
10. Чи можна використовувати триступеневий астатичний гіроскоп як гірокомпас на нерухомій відносно Землі основі? Чим визначатиметься межа похибка такого гірокомпасу?
11. Як зміниться поведінка ГКП при встановленні його на поверхні Місяця?

3.3. Дослідження поведінки гіромаятника на рухомій основі

3.3.1. Мета роботи

Шляхом експериментальних досліджень на програмній моделі вивчити вільний рух гіромаятника, встановленого на рухомій основі, його балістичну похибку і порівняти з висновками теоретичного аналізу.

3.3.2 Теоретична частина

Гіромаятником (ГМ) називають гіроскоп, центр ваги якого зміщений відносно точки підвісу гіроскопа вдовж його головної осі.

Прецесійні рівняння руху гіромаятника мають вид:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} + \omega'_0 \beta = -\frac{V_{aE}}{R_3} - \omega_0 \frac{\dot{V}_{aN}}{g} + \frac{M_{Y1}}{H} \\ \dot{\beta} - \omega'_0 \alpha = \frac{V_{aN}}{R_3} - \omega_0 \frac{\dot{V}_{aE}}{g} - \frac{M_{\xi}}{H} \end{cases} \quad (3.69)$$

Відповідна кінематика поворотів, що використана при їх складанні, наведена на рис 3.17.

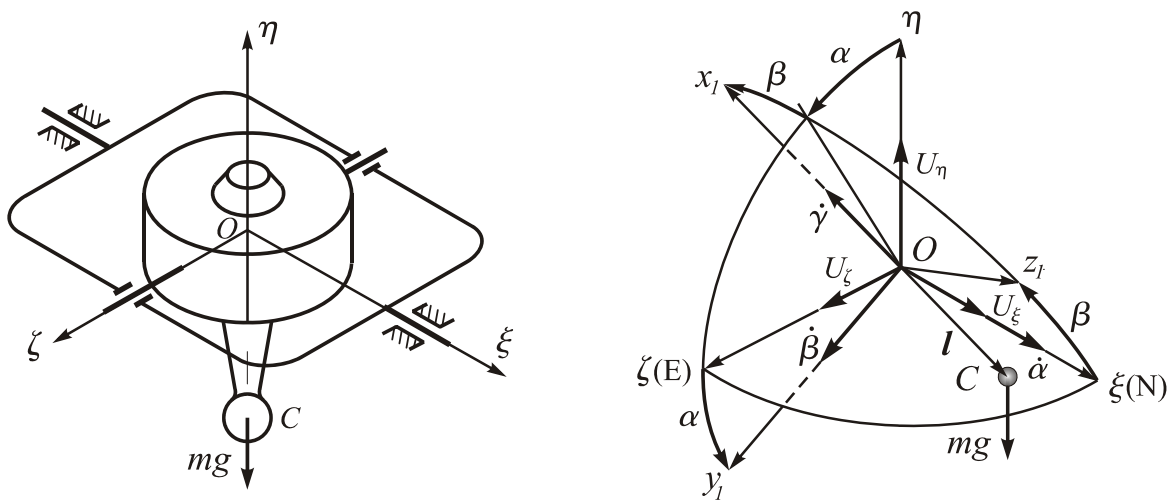


Рис. 3.17. Кінематика гіромаятника

Тут позначено: $\xi\eta\zeta$ – географічна опорна система координат, вісь η якої спрямована вдовж геоцентричної вертикалі місця, вісь ξ горизонтальна і спрямована на північ, ζ спрямована на схід; α – кут відхилення головної осі гіромаятника від вертикалі на схід (у вертикальній площині «схід-захід»); β – кут від-

хилення головної осі гіромаятника від вертикалі у вертикальній площині «південь-північ»;

$$\omega'_0 = \frac{mgl}{H} + u_\eta; \quad \omega_0 = \frac{mgl}{H}; \quad (3.70)$$

m – маса гіромаятника; g – прискорення поля сили тяжіння; l – вектор зміщення центру мас відносно точки підвісу; H – кінетичний момент гіроскопа; V_{aE} , V_{aN} – відповідно східна і північна складові абсолютної (з врахуванням власного обертання Землі) швидкості рух основи (точніше – точки підвісу гіроскопа; \dot{V}_{aE} , \dot{V}_{aN} – відповідно східна і північна складові абсолютного прискорення точки підвісу;

$$u_\eta = \omega_3 \sin \varphi_z + \frac{V_E}{R_3} \operatorname{tg} \varphi_z \quad (3.71)$$

– вертикальна складова абсолютної кутової швидкості географічної системи координат; ω_3 – кутова швидкість обертання Землі; R_3 – радіус Землі як сфери; φ_z – географічна широта місця; M_ξ , M_{y1} – північна і східна складові збурювального моменту сил.

3.3.2.1. Вільний рух гіромаятника

Розглянемо рух гіромаятника в наступних умовах:

1) рух основи по поверхні Землі відбувається рівномірно

$$\dot{V}_{aN} = \dot{V}_{aE} \equiv 0; \quad (3.72)$$

2) по осях підвісу діють тільки моменти сил тертя, пропорційні кутовим швидкостям $\dot{\alpha}$ і $\dot{\beta}$:

$$M_{y1} = -f_1 \dot{\beta}; \quad M_\xi = -f_2 \dot{\alpha}. \quad (3.73)$$

Позначаючи

$$\varphi_1 = f_1 / H_0; \quad \varphi_2 = f_2 / H_0, \quad (3.74)$$

приведемо рівняння руху гіромаятника до виду

$$\begin{cases} \dot{\alpha} + \varphi_1 \dot{\beta} + \omega'_0 \beta = -\frac{V_{aE}}{R_3} \\ \dot{\beta} - \varphi_2 \dot{\alpha} - \omega'_0 \alpha = \frac{V_{aN}}{R_3} \end{cases}. \quad (3.75)$$

де V_{aN} і V_{aE} – незмінні величини.

Положення рівноваги гіромаятника визначиться частинним розв'язком системи (3.75), обумовленим наявністю в правих частинах постійних членів V_{aN} / R_3 і V_{aE} / R_3 :

$$\alpha^* = -\frac{V_N}{R_3 \left(\frac{mgl}{H} + \omega_3 \sin \varphi_z + \frac{V_E}{R_3} \operatorname{tg} \varphi_z \right)};$$

$$\beta^* = -\frac{V_E + R_3 \omega_3 \cos \varphi_2}{R_3 \left(\frac{mgl}{H} + \omega_3 \sin \varphi_2 + \frac{V_E}{R_3} \operatorname{tg} \varphi_2 \right)}, \quad (3.76)$$

з врахуванням позначень (3.71).

Швидкісна похибка визначається співвідношенням

$$\beta^* = -\frac{\omega_3 \cos \varphi_2}{\frac{mgl}{H} + \omega_3 \sin \varphi_2} \approx -\frac{H \omega_3 \cos \varphi_2}{mgl}. \quad (3.77)$$

Інакше кажучи, вектор кінетичного моменту гіромаятника, нерухомо встановленого на обертовій Землі, відхиляється від вертикалі до півночі у площині меридіана.

Далі розглянемо перехідний процес, тобто процес переходу осі ротора гіромаятника з довільного в усталене положення, яке визначається рівностями (3.76). Нехай x і y - відхилення головної осі гіромаятника від положення рівноваги:

$$\alpha = \alpha^* + x; \quad \beta = \beta^* + y. \quad (3.78)$$

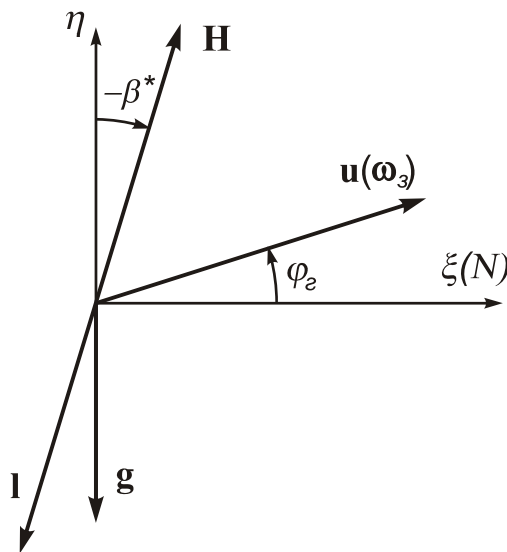


Рис. 3.18. Розташування векторів $\mathbf{U}, \mathbf{H}, \mathbf{l}, \mathbf{g}$ в усталеному положенні

Рівняння руху (3.75) у нових координатах x і y матимуть вигляд однорідних диференціальних рівнянь.

$$\begin{cases} \dot{x} + \varphi_1 \dot{y} + \omega'_0 y = 0 \\ \dot{y} - \varphi_2 \dot{x} - \omega'_0 x = 0 \end{cases}. \quad (3.79)$$

Задля спрощення покладемо

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi. \quad (3.80)$$

У цьому випадку для розв'язку системи (3.79) можна застосувати компресію рівнянь.

Вводячи комплексну змінну

$$z = x + jy, \quad (3.81)$$

перейдемо від системи (3.79) до одного рівняння першого порядку

$$\dot{z}(1 - j\varphi) - j\omega'_0 z = 0. \quad (3.82)$$

Розв'язок (3.82) можна записати так:

$$z = C \exp\left(-\frac{\omega_0}{1+\varphi^2} t\right) \exp\left(j \frac{\omega'_0}{1+\varphi^2} t\right). \quad (3.83)$$

Нехай початкові умови описуються співвідношеннями

$$t = 0: \quad \alpha = \alpha_0; \quad \beta = \beta_0,$$

тобто

$$z = z_0 = (\alpha_0 - \alpha^*) + j(\beta_0 - \beta^*). \quad (3.84)$$

У цьому випадку, підставляючи їх у (3.82) і визначаючи сталу інтегрування, розв'язок (3.83) можна представити у формі

$$z = (R_0 - R^*) e^{-at} e^{jbt}, \quad (3.85)$$

де

$$R_0 = \alpha_0 + j\beta_0; \quad R^* = \alpha^* + j\beta^*; \quad a = \frac{\omega_0 \varphi}{1 + \varphi^2}; \quad b = \frac{\omega'_0}{1 + \varphi^2}.$$

На рис. 3.19 зображена траєкторія вершини гіромаятника при погляді зверху, що відповідає перехідному процесу, описаним виразом (3.17). Незавжди бачити, що R_0 являє собою вектор початкового положення гіромаятника, R^* - вектор усталеного її положення, $R_0 - R^*$ - вектор початкового положення щодо усталеного; a характеризує інтенсивність зменшення радіуса-вектора спирали, b - кутову швидкість обертання радіуса-вектора вершини гіромаятника навколо усталеного її положення.

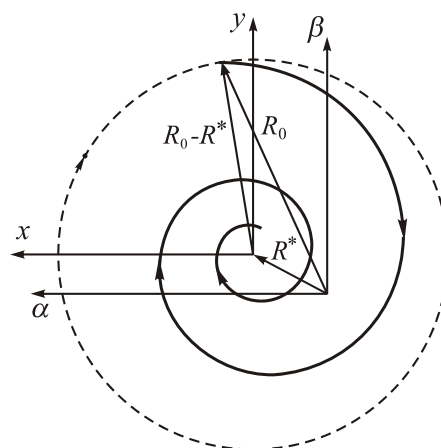


Рис. 3.19. Траєкторія вершини гіромаятника (перехідний процес, $\omega_0 > 0$)

Запишемо a і b більш розлого, врахувавши раніше позначення (3.70) і (3.74)

$$a \approx \frac{mgl \cdot f}{H^2 + f^2} \quad b \approx \frac{mgl}{H(1 + \varphi^2)} \quad (3.86)$$

Через те, що завжди

$$f > 0; \quad mg > 0; \quad H^2 + f^2 > 0; \quad 1 + \varphi^2 > 0,$$

знаки величини b , яка визначає напрямок обертання вершини гіроскопа навколо її усталеного положення, залежать від знака "маятниковості" (l) і кінетичного моменту (H), а знак величини a визначається лише знаком "маятниковості".

3.3.2.2. Балістична похибка ГМ

Розглянемо рух точки підвісу ГМ з прискоренням ($W_{aN} \neq 0$; $W_{aE} \neq 0$). Насамперед нас цікавитиме та добавка до похибки гіромаятника, окрім перерахованих, яка відрізняє поведінку гіромаятника в цьому випадку від його поведінки при руху об'єкта з постійною швидкістю.

Маючи це на увазі, покладемо в рівняннях (3.69) всі моменти сил рівними нулю. Тоді рівняння руху гіромаятника набудуть вигляду

$$\dot{\alpha} + \omega'_0 \beta = -\frac{V_{aE}}{R_3} - \frac{\omega_0}{g} \dot{V}_{aN}; \quad \dot{\beta} - \omega'_0 \alpha = \frac{V_{aN}}{R_3} - \frac{\omega_0}{g} \dot{V}_{aE}; \quad (3.87)$$

Застосуємо компресію рівнянь. Введемо комплексну змінну

$$z = \alpha + j\beta \quad (3.88)$$

Зкомпресувавши рівняння (3.87), отримаємо

$$\dot{z} - j\omega'_0 z = -\frac{\omega_0}{g} \frac{d\bar{V}_a}{dt} + j\frac{1}{R_3} \bar{V}_a. \quad (3.89)$$

Тут через \bar{V}_a позначена комплексна величина вектора абсолютної швидкості точки підвісу.

$$\bar{V}_a = V_{aN} + jV_{aE}. \quad (3.90)$$

Якщо $\frac{d\bar{V}_a}{dt} = 0$, тобто при русі об'єкта з постійною швидкістю, у рівнянні (3.89) праворуч стоятиме незмінна величина, яка визначає, як було зазначено швидкісну похибку $z^* = \alpha^* + j\beta^*$. Ця похибка відшукується як частинний розв'язок (3.89) при незмінній правій частині:

$$z^* = -\frac{1}{R_3 \omega'_0} \bar{V}_a.$$

Якщо ж швидкість $\bar{V}_a(t)$ змінюється з часом, то швидкісна похибка також змінюватиметься і визначатиметься аналогічним співвідношенням

$$z_{uu}(t) = -\frac{1}{R_3\omega'_0}\bar{V}_a(t). \quad (3.91)$$

Подамо повний розв'язок рівняння (3.89) у вигляді

$$z(t) = z_{nep}(t) + z_{uu}(t) + z_{\delta_{a1}}(t), \quad (3.92)$$

тобто виділимо з частинного розв'язку рівняння частину $z_{uu}(t)$, яка відповідає швидкісній похибці (3.91). Складова $z_{nep}(t)$, як і завжди, відображує перехідну складову руху і відповідає загальному розв'язкові відповідного однорідного рівняння. Тоді складова $z_{\delta_{a1}}(t)$ буде являти собою шуканий додаток до частинного розв'язку, обумовлений дією прискорення основи. Вона отримала назву балістичної похибки.

Підставляючи (3.92) у (3.89), із огляду на (3.91), одержимо

$$\dot{z}_{nep} - j\omega'_0 z_{nep} + \dot{z}_{\delta_{a1}} - j\omega'_0 z_{\delta_{a1}} = \dot{\bar{V}}_a \left(\frac{1}{R_3\omega_0} - \frac{\omega_0}{g} \right). \quad (3.93)$$

Розв'язок цього рівняння складається із суми двох складових: z_{nep} , яка є загальним розв'язком однорідного рівняння $\dot{z}_{nep} - j\omega'_0 z_{nep} = 0$ і тому визначається виразом $z_{nep} = Ce^{j\omega'_0 t}$, і $z_{\delta_{a1}}$, яка є частинним розв'язком неоднорідного рівняння

$$\dot{z}_{\delta_{a1}} - j\omega'_0 z_{\delta_{a1}} = \dot{\bar{V}}_a \left(\frac{1}{R_3\omega_0} - \frac{\omega_0}{g} \right). \quad (3.94)$$

Цей частинний розв'язок (а, отже, й шукана балістична похибка) обертається в нуль, якщо виконано умову

$$\frac{1}{R_3\omega'_0} = \frac{\omega_0}{g}. \quad (3.95)$$

Це означає, що, якщо між параметрами гіромаятника існує зв'язок, що описується формулою (3.95), то за довільного руху об'єкта по поверхні Землі з прискоренням повна похибка гіромаятника буде складатися, окрім перехідної складової, лише із швидкісної його похибки.

Якщо початкові умови такі, що головна вісь гіромаятника займає положення β^*, α^* , що відповідає швидкісній похибці у початковий момент часу, то перехідна складова буде відсутня і вся похибка гіромаятника визначиться швидкісною похибкою, яка змінюється з часом.

Умову (3.95) називають **умовою незбурності гіромаятника**. Вона також називається **умовою Шюлера**, за йменням німецького ученого Макса Шюлера, що вперше встановив її.

Перетворимо умову (3.95) до більш зручного вигляду. Для цього знехтуємо вертикальною кутовою швидкістю географічної системи u_η у порівнянні з кутовою швидкістю прецесії гіромаятника

$$\omega'_0 = \frac{mgl}{H} + u_\eta \approx \frac{mgl}{H} = \omega_0.$$

Тоді отримаємо

$$\omega_0 = \omega_{ш} = \sqrt{\frac{g}{R_3}}, \quad (3.96)$$

або, переходячи до періоду прецесії $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$,

$$T_0 = T_{ш} = 2\pi \sqrt{\frac{R_3}{g}}. \quad (3.97)$$

Тут $\omega_{ш}$ і $T_{ш}$ є позначеннями так званих частоти Шюлера і періоду Шюлера, які формально збігаються з відповідними величинами для математичного маятника з довжиною, рівною радіусу Землі.

3.3.3. Опис програмного забезпечення

Моделювання поведінки ГМ здійснюється за допомогою програмної моделі **GM_PO_upr** та процедури **GM_PO**, яка здійснює обчислення правих частин диференціальних рівнянь руху ГМ.

В основу моделі покладені прецесійні рівняння руху гіромаятника у такому більш повному виді:

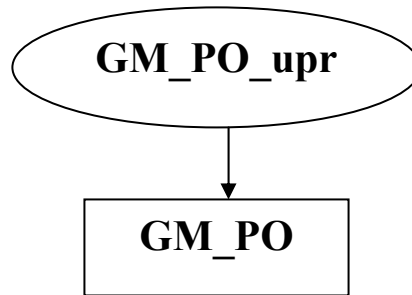
$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} = & -u_\xi - (u_\eta \cos \alpha + u_\zeta \sin \alpha)tg\beta - \omega_0(\cos \alpha tg\beta + \frac{w_\xi}{g} + \frac{w_\zeta}{g} \sin \alpha tg\beta) - \\ & - \frac{1}{\cos \beta} \dot{\beta} + \frac{m_y}{\cos \beta}; \\ \frac{d\beta}{dt} = & -(u_\zeta \cos \alpha - u_\eta \sin \alpha) + \omega_0(\sin \alpha - \frac{w_\zeta}{g} \cos \alpha) + \frac{2}{\cos \beta} \dot{\alpha} - \frac{m_x}{\cos \beta}, \end{aligned}$$

де позначено

$$\omega_0 = \frac{mgl}{H}; \quad n_N(t) = \frac{w_\xi}{g}; \quad n_E(t) = \frac{w_\zeta}{g}; \quad \varphi_1 = \frac{f_1}{H}; \quad \varphi_2 = \frac{f_2}{H}; \quad m_x = \frac{M_\xi^*}{H}; \quad m_y = \frac{M_{Y1}^*}{H}.$$

Тут з моментів зовнішніх сил окремо виділені моменти сил опору, які вважаються моментами сил в'язкого тертя.

Схема взаємодії програм наведена нижче.



Тексти зазначених файлів наведено нижче.

Програма *GM_PO_upr*

```

%                               GM_PO_upr
% Програма чисельного інтегрування прецесійних рівнянь
% Гіромаятника на Рухомій основі
% Є. О. Воропаєва, кафедра ПСОН, КПІ, Україна,
% Почато 25-01-2001   Останні зміни 26-01-2009
clear all, clc
global OMz Rz cf tf g
global mx0 my0 fi1 fi2
global V0 W0 Vm om OM e K0 t1 t2 t3 t4
global om0
g=9.81; OMz=7.29e-5; Rz=4.4e6; fig=0*pi/180; cf=cos(fig);
tf=tan(fig); sname='Лазарєв Ю. Ф.';
% Вшиті значення первісних даних
% 1. Період власних коливань гіромаятника
T0 =5064; om0=2*pi/T0+OMz*sin(fig); T0=2*pi/om0;
% 2. Сталі складові моментів сил
mx0=0; my0=0;
% 3. Коефіцієнти вязкого тертя
fi1= 0.; fi2 = 0.;
% 4. Параметри руху основи
% початкова продольна швидкість
V0=30;
% прискорення
W0=0.0;
% мить початку дії прискорення w0
t1=600;
% мить кінця дії прискорення
t2=1800;
% амплітуда хитавиці
fim=0*pi/180; Vm=fim*10;
% період хитавиці
Tk=10; om=2*pi/Tk;
% початкова фаза хитавиці зі швидкості
e=0;
% початковий курс корабля
K0=45*pi/180;
% період циркуляції
Tc=600; OM=2*pi/Tc;
% мить початку циркуляції
t3=600;
% мить кінця дії прискорення
t4=1200;
% 3. Тривалість інтегрування у періодах власних коливань
ntk=1;
  
```

```

% Підготовка початкових умов
t0=0
% 1) розрахунок швидкостей
V=V0; K=K0; VN00 = V*cos(K); VE00 = V*sin(K);
% 2) розрахунок проєкцій кутової швидкості географічної СК
Uksi0 = OMz*cf+VE00/Rz; Ueta0 = Uksi0*tf; Udzeta0 = -VN00/Rz;
alS=atan(Udzeta0/(om0+Ueta0)),
btS=atan(-Uksi0/((om0+Ueta0)*cos(alS)+Udzeta0*sin(alS)))
% Початкові кути відхилення від вертикалі
al0=alS; bt0=btS;
y0=[al0, bt0]; TK=T0*ntk; tspan=[0,TK];
% Інтегрування диференційних рівнянь ГИРОМАЯТНИКА
options=odeset('RelTol',1e-12); [tout,yout]=ode45('GM_PO',tspan,y0,options);
alfa=yout(:,1); beta=yout(:,2); t=tout;
% розрахунок поточної швидкісної похибки
n=length(t);
for k=1:n
    t0=t(k); V=V0;
    if t0>=t1 & t0<=t2, V=V+W0*(t0-t1); elseif t0>t2, V=V+W0*(t2-t1); end
    K=K0;
    if t0>=t3 & t0<=t4, K=K+OM*(t0-t3); elseif t0>t4,
    K=K+OM*(t4-t3); end
    VNsk = V*cos(K); VEsk = V*sin(K);
    UksiSk(k) = OMz*cf+VEsk/Rz; UetaSk(k) = UksiSk(k)*tf;
    UdzetaSk(k) = -VNsk/Rz;
end
alSk=atan(UdzetaSk./(om0+UetaSk));
btSk=atan(-UksiSk./((om0+UetaSk).*cos(alSk)+UdzetaSk.*sin(alSk)));
% Виведення графіків
subplot(2,2,1)
plot(alfa*180*60/pi,beta*180*60/pi,'.-',alSk*60*180/pi,btSk*180*60/pi,'sk-',...
alS*180*60/pi,btS*180*60/pi,'sr',al0*180*60/pi,bt0*180*60/pi,'o'),grid
axis('equal'), axis('ij'), set(gca,'Fontname','MS Sans Serif')
title('Картинна площина (вид згори)','FontSize',12,'FontWeight','bold')
xlabel('W \leftarrow \alpha, мінути \rightarrow E','FontSize',12)
ylabel('S \leftarrow \beta \rightarrow N','FontSize',12,'Fontname',
'Times New Roman')
legend('Апекс','Рівновага','ппP','ппA',0)
subplot(2,2,4)
plot(t/60,alfa*60*180/pi,t/60,beta*180*60/pi,'.-'),grid, set(gca,'Fontname',
'MS Sans Serif')
title('Залежність від часу','FontSize',12,'FontWeight','bold')
xlabel('Час, хвилини','FontSize',12),legend('\alpha (мінути)','\beta (мінути)',0)
alb= alfa'-alSk; btb=beta'-btSk;
subplot(2,2,3)
plot(alSk*60*180/pi,btSk*180*60/pi,'s',alb*60*180/pi,btb*180*60/pi,'.-'),grid
%plot(alSk*60*180/pi,btSk*180*60/pi,'s'),grid
axis('equal'), axis('ij'), set(gca,'Fontname','MS Sans Serif')
title('Похибка ','FontSize',12,'FontWeight','bold')
%title('Швидкісна похибка','FontSize',12,'FontWeight','bold')
xlabel('W \leftarrow \alpha, мінути \rightarrow E','FontSize',12)
ylabel('S \leftarrow \beta \rightarrow N','FontSize',12,'Fontname',
'Times New Roman')
legend('швидкісна','балістична',0)
% Текстове оформлення графічного вікна
subplot(2,2,2), axis off
h=text(-0.2,1.15,'ГИРОМАЯТНИК на рухомій основі',...
'FontSize',14,'FontWeight','bold','Fontname','MS Sans Serif');
h=text(-0.,1.06,sprintf('Географічна широта місця
\phi_\Gamma = %g^\circ',fig*180/pi),'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(-0.2,0.98,'Період власних коливань','Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.5,0.98,sprintf('T_0 = %g хв.:',T0/60),'Fontname','MS Sans Serif');

```

```

h=text(-0.2,0.9,'Коеф-ти тертя','Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.5,0.9,sprintf("\phi_1 = %g;',fi1));
h=text(0.8,0.9,sprintf("\phi_2 = %g;',fi2));
h=text(-0.2,0.82,'Сталі моменти','Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.5,0.82,sprintf("\mu_1 = %g;',mx0));
h=text(0.8,0.82,sprintf("\mu_2 = %g;',my0));
h=text(-0.2,0.75,'Початкове положення:', 'FontSize',12,'Fontname',
'MS Sans Serif');
h=text(0.5,0.75,sprintf("\alpha_0 = %g\prime;',a10*180*60/pi));
h=text(0.9,0.75,sprintf("\beta_0 = %g\prime;',bt0*180*60/pi));
h=text(0.2,.65,'Рух ОЧОВИ:', 'FontSize',12,'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(-0.2,.58,'V = V_o + W_ot | _t_1^t^2');
h=text(0.5,.58,'V_k = V_msin(omega_t+epsilon_k)');
h=text(0.17,.5,'K = K_o +\Omegat | _t_3^t^4');
h=text(0.1,.45,'-----');
h=text(-0.2,0.35,sprintf('V_o = %g;',V0));
h=text(0.17,0.35,sprintf('K_o = %g^o',K0*180/pi));
h=text(0.5,0.35,sprintf('V_m = %g;',Vm));
h=text(-0.2,0.25,sprintf('W_o = %g;',W0));
h=text(0.17,0.25,sprintf('T_Ц = %g c',2*pi/OM),'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.5,0.25,sprintf('T_X = %g c',2*pi/om),'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(-0.2,0.15,sprintf('t_1 = %g хв',t1/60),'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.17,0.15,sprintf('t_3 = %g хв',t3/60),'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.5,0.15,sprintf("\epsilon = %g;',e*180/pi));
h=text(-0.2,0.05,sprintf('t_2 = %g хв',t2/60),'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.17,0.05,sprintf('t_4 = %g хв',t4/60),'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(-0.3,0,'=====');
h1=text(-0.3,-0.05,'Програма GM-PO-upr.m;', 'Fontname','MS Sans Serif');
h1=text(0.35,-0.05,'Автор - Воропаєва Є. О., каф. ПСОН','Fontname',
'MS Sans Serif');
tm=fix(clock); Tv=tm(4:5); h1=text(0.5,-0.15,[sprintf(' %g:',Tv),' ',date]);
h=text(-0.3,-0.2,'=====');

```

Програма GM_PO

```

function z=GM_PO(t,y)
% Процедура обчислювання правих частин диференціальних рівнянь
% руху ГІРОМАЯТНИКА на РУХОМІЙ основі
% Вхідні параметри:
% t - поточний час
% y - масив з двох змінних стану y1 = alfa - східне,
% y2 = beta - південне відхилення осі ГМ
% Воропаєва Є. О. 26-01-2009
global OMz Rz cf tf g
global mx0 my0 fi1 fi2
global V0 W0 Vm om OM e K0 t1 t2 t3 t4
global om0
% 1) розрахунок швидкостей
V=V0;
if t>=t1 & t<=t2, V=V+W0*(t-t1); elseif t>t2, V=V+W0*(t2-t1); end
K=K0; Wk=0;
if t>=t3 & t<=t4, K=K+OM*(t-t3); Wk=V*OM; elseif t>t4,
K=K+OM*(t4-t3); Wk=0; end
VN = V*cos(K); VE = V*sin(K);
% 2) розрахунок перевантажень
Vk=Vm*sin(om*t+e); dVk_dt=Vm*om*cos(om*t+e); dV_dt=0;
if t>=t1 & t<=t2, dV_dt=dV_dt+W0; end
Wp=dV_dt;%-Vk*OM; %Wk=dVk_dt; %+V*OM
nN = (Wp*cos(K)-Wk*sin(K))/g; nE = (Wp*sin(K)+Wk*cos(K))/g;
% 3) розрахунок проекцій кутової швидкості географічної СК
Uksi = OMz*cf+VE/Rz; Ueta = Uksi*tf; Udzeta = -VN/Rz;
% Проміжні розрахунки

```

```

sa=sin(y(1)); ca=cos(y(1)); tb=tan(y(2)); sb=sin(y(2)); cb=cos(y(2));
om1=om0+Ueta; Udzne=Udzeta+om0*nE;
A=-Uksi-(om1*ca+Udzne*sa)*tb-om0*nN+my0/cb;
B=om1*sa-Udzne*ca-mx0/cb; KS=1/(1+fi1*fi2/cb^2);
% Обчислення правих частин рівнянь
z(1)=KS*(A-B*fi1/cb); z(2)= KS*(B+A*fi2/cb); z=z';

```

3.3.4. Завдання

Застосовуючи програмне забезпечення, подане у п. 3, виконати наступні завдання.

1. Провести експериментальні дослідження вільного руху гіромаятника з виявлення впливу на нього:

- 1) швидкості руху основи відносно Землі;
- 2) періоду власних коливань гіромаятника;
- 3) коефіцієнтів моментів сил опору.

2. Провести експериментальні дослідження балістичної похибки гіромаятника при різних значеннях періоду його власних коливань:

1) при рівноприскореному прямолінійному русі корабля, варіюючи а) величиною прискорення основи; б) тривалістю терміну руху з прискоренням, в) величиною куту курсу корабля;

2) при циркуляції корабля, варіюючи а) тривалістю руху корабля на циркуляції, б) початковим курсом корабля, в) величиною періоду повної циркуляції;

3) при хитавиці корабля, варіюючи: а) амплітудою хитавиці, б) курсом корабля, в) періодом хитавиці.

3. Порівняти експериментально одержані результати з тими, що випливають з теоретичного дослідження. Зробити висновки з адекватності програмної і теоретичної моделей.

3.3.5. Методичні вказівки до виконання

1. Увійти у програмне середовище Matlab.

Користуючись лінійкою інструментів відкрити у вікні редактора Matlab текст програми GM_PO_upr.

2. У наступних рядках програми змінити значення первісних даних на потрібні у відповідності з завданням.

3. У командному вікні ввести ім'я програми

```
>> GM_PO_upr і натиснути клавишу <Enter>.
```

Якщо все було зроблено вірно, на екрані монітора має з'явитися додаткове графічне вікно (див. рис. 3.4).

В цьому вікні відображуються результати моделювання і наведені значення усіх використаних параметрів.

4. Вимірювання необхідних параметрів руху здійснюється по графіку, наведеному у цьому вікні. Для підвищення точності вимірювань слід використо-

увати функцію збільшення зображення Zoom in в лінійці інструментів на панелі цього вікна.

5. Результати вимірювань слід занотовувати у робочому зошиті у вигляді таблиці, одним з стовпців якої має бути змінюваний параметр, а іншими – виміряні значення і, можливо, розрахований за ними параметр.

6. Показати одержані результати викладачеві.

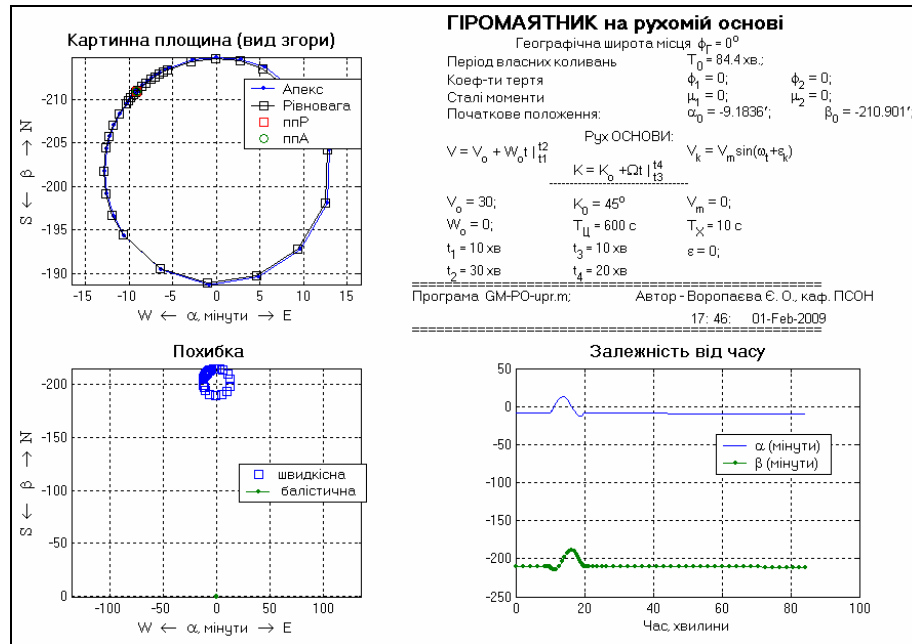


Рис. 3.20. Вид графічного вікна з результатами моделювання

3.3.6. Контрольні запитання

1. Які рівняння руху гіромаятника чисельно інтегруються у програмній моделі? в яких саме програмних одиницях вони реалізовані?
2. Які можливості з імітування руху основи надає застосоване програмне забезпечення? які обмеження накладає воно на рух основи?
3. Які можливості з імітування моментів сил опору надає застосоване програмне забезпечення? які обмеження накладає воно на ці моменти?
4. Як впливає період власних коливань гіромаятника на а) швидкісну похибку, б) балістичну похибку, в) вібраційну похибку?
3. Як впливають сили опору на похибки гіромаятника?
4. Що таке умова незбурності? у чому вона полягає? для чого потрібне забезпечення її виконання?
7. Чим визначається відхилення головної осі гіромаятника в площині "північ-південь"?
8. Що розуміють під балістичною похибкою гіромаятника?
9. Як зміниться потенціальна енергія гіромаятника, якщо його розмістити на Місяці?
10. Як зміниться умова незбурності гіромаятника, якщо його розташувати на місяці?

11. Як зміниться швидкісна похибка гіромаятника на нерухомій основі на екваторі, якщо його розмістити на Місяці?

12. Як зміниться власний рух гіромаятника під дією моментів сил сухого тертя, якщо його розташувати на Місяці?

3.4. Дослідження поведінки маятникового гірокомпаса на рухомій основі

3.4.1. Мета роботи

Шляхом експериментальних досліджень на програмній моделі вивчити вільний рух маятникового гірокомпаса, його балістичну похибку і порівняти з висновками теоретичного аналізу.

3.4.2 Теоретична частина

Маятниковий гірокомпас (МГК) є тріступеневим гіроскопічним приладом з горизонтально розташованою головною віссю і центром мас, зміщеним униз відносно точки підвісу. Такий прилад може працювати як компас внаслідок тієї його властивості, що головна вісь самостійно встановлюється у площину меридіана місця.

Найпростіша схема конструкції маятникового гірокомпаса наведена на рис. 3.21. Тут $\xi\eta\zeta$ - опорна географічна система координат, η - вертикаль місця, вісь ξ спрямована у площині меридіану на північ.

Центр мас C зміщений відносно точки підвісу O вдовж осі y униз на величину l . Ротор гіроскопа приведений у швидке обертання навколо осі x .

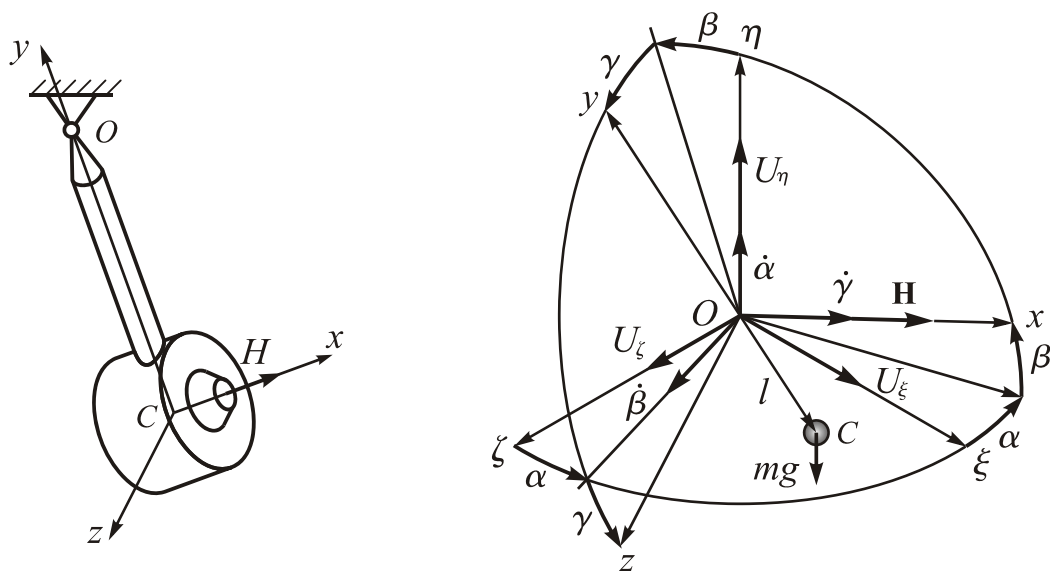


Рис. 3.21. Кінематика поворотів маятникового гірокомпаса

Чутливий елемент МГК (система координат $xuyz$) зв'язаний з корпусом приладу (основою) за допомогою сферичного шарніру у точці підвісу O . Його положення в географічній системі визначимо трьома кутами:

α – кут відхилення вертикальної площини, яка проходить через головну вісь гірокомпаса, від площини місцевого меридіану;

β – кут підйому головної осі гіроскопа над площиною горизонту;

γ – кут відхилення осі маятника чутливого елементу МГК від вертикалі у площині, перпендикулярній головній осі.

Прецесійні рівняння руху такого МГК мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{\beta} + (\omega_3 \cos \varphi_2 + \frac{V_E}{R_3})\alpha &= \frac{V_N}{R_3} + \frac{ml}{H} \left(\frac{dV_E}{dt} \beta + \frac{dV_N}{dt} \gamma \right) + \frac{M_\eta}{H}; \\ \dot{\alpha} - \left(\frac{mgl}{H} + \omega_3 \cos \varphi_2 + \frac{V_E}{R_3} \right) \beta &= -\omega_3 \sin \varphi_2 - \frac{V_E}{R_3} \operatorname{tg} \varphi_2 + \\ &+ \frac{ml}{H} \frac{dV_N}{dt} - \frac{ml}{H} \frac{dV_E}{dt} \alpha - \frac{M_{Z1}}{H}; \\ \gamma &= \frac{1}{g} \frac{dV_E}{dt}. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Завдяки такій конструкції гіроскоп у МГК фактично має чотири ступеня вільності. Два з них – повороти навколо головної осі самого чутливого елемента (кут γ) і ротора гіроскопа. Рух такої системи описується у загальному випадку чотирма рівняннями. Однак у подальшому вважатимемо, що величина власного кінетичного моменту гіроскопа є незмінною внаслідок роботи гіромотору:

$$H = \text{const}.$$

Це дозволяє виключити з розгляду рівняння обертання ротору навколо головної осі і обмежитися вивченням руху по трьох поданих рівняннях.

Головною величиною, яка характеризує похибку маятникового гірокомпаса, є кут α відхилення його головної осі від площини географічного меридіану місця. Тому у подальшому зосередимо увагу саме на рухові МГК з куту α .

3.4.2.1. Вільний рух маятникового гірокомпаса

Розглянемо спочатку процес усталення маятникового гірокомпаса у стійке положення рівноваги при відсутності зовнішніх збурень. Задля цієї мети зробимо наступні припущення:

- 1) моменти сил по осях дорівнюють нулеві:

$$M_{Z1} \equiv M_\eta \equiv 0;$$

- 2) основа рухається рівномірно по поверхні Землі:

$$\frac{dV_N}{dt} \equiv \frac{dV_E}{dt} \equiv 0.$$

У цьому випадку рівняння (4.1) набувають виду:

$$\dot{\beta} + (\omega_3 \cos \varphi_2 + \frac{V_E}{R_3})\alpha = \frac{V_N}{R_3}; \quad (3.99)$$

$$\dot{\alpha} - \left(\frac{mgl}{H} + \omega_3 \cos \varphi_2 + \frac{V_E}{R_3} \right) \beta = -\omega_3 \sin \varphi_2 - \frac{V_E}{R_3} \operatorname{tg} \varphi_2. \quad (3.100)$$

Отримали систему з двох лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку з постійними коефіцієнтами. Члени рівнянь, що утво-

рюють неоднорідність ϵ також постійними величинами. Тому частинні розв'язки слід відшукувати як незмінні величини:

$$\alpha_{\text{чн}}(t) = \alpha^* = \text{const}; \quad \beta_{\text{чн}}(t) = \beta^* = \text{const}. \quad (3.101)$$

Підставивши (3.101) у (3.99) і (3.100), матимемо:

$$\alpha^* = \frac{V_N}{R_3 \omega_3 \cos \varphi_2 + V_E}; \quad (3.102)$$

$$\beta^* = \frac{\omega_3 \sin \varphi_2 + \frac{V_E}{R_3} \operatorname{tg} \varphi_2}{\frac{mgl}{H} + \omega_3 \cos \varphi_2 + \frac{V_E}{R_3}} \approx \frac{H \omega_3 \sin \varphi_2}{mgl}. \quad (3.103)$$

Вираз (3.102) характеризує так звану швидкісну похибку маятникового гірокомпаса.

Згідно (3.103) положення рівноваги головної осі МГК також дещо піднято над площиною горизонту. Саме завдяки цьому виникаючий внаслідок цього момент сили тяжіння змушує прецесувати гіроскоп навколо вертикалі зі швидкістю, що дорівнює вертикальній складовій обертання Землі. В результаті головна вісь гіроскопа зберігає у положенні рівноваги незмінним своє положення не в інерціальному просторі, а відносно Землі.

Процес встановлення головної осі у положення рівноваги описується системою однорідних рівнянь:

$$\dot{y} + \left(\omega_3 \cos \varphi_2 + \frac{V_E}{R_3} \right) x = 0; \quad (3.104)$$

$$\dot{x} - \left(\frac{mgl}{H} + \omega_3 \cos \varphi_2 + \frac{V_E}{R_3} \right) y = 0, \quad (3.105)$$

де позначено:

$$x = \alpha - \alpha^*; \quad y = \beta - \beta^*. \quad (3.106)$$

Відшукаємо розв'язок цієї системи, зводячи до одного диференційного рівняння другого порядку:

$$\ddot{x} + \left(\frac{mgl}{H} + \omega_3 \cos \varphi_2 + \frac{V_E}{R_3} \right) \left(\omega_3 \cos \varphi_2 + \frac{V_E}{R_3} \right) x = 0.$$

Величина

$$\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{mgl}{H} + \omega_3 \cos \varphi_2 + \frac{V_E}{R_3} \right) \left(\omega_3 \cos \varphi_2 + \frac{V_E}{R_3} \right)} \approx \sqrt{\frac{mgl}{H} \omega_3 \cos \varphi_2} \quad (3.107)$$

являє собою частоту власних коливань маятникового гірокомпаса.

Розв'язок з величини x має вигляд

$$x = A \sin(\omega_0 t + \epsilon),$$

де A і ϵ – сталі інтегрування, які визначаються початковими умовами.

Розв'язок зі змінної y визначимо, користуючись (3.105):

$$y = \frac{1}{\frac{mgl}{H} + \omega_3 \cos \varphi_2 + \frac{V_E}{R_3}} \frac{dx}{dt} = \frac{A \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varepsilon)}{\frac{mgl}{H} + \omega_3 \cos \varphi_2 + \frac{V_E}{R_3}} =$$

$$= A \sqrt{\frac{(\omega_3 \cos \varphi_2 + \frac{V_E}{R_3})}{\frac{mgl}{H} + \omega_3 \cos \varphi_2 + \frac{V_E}{R_3}}} \cos(\omega_0 t + \varepsilon) \approx A \sqrt{\frac{H \omega_3 \cos \varphi_2}{mgl}} \cos(\omega_0 t + \varepsilon). \quad (3.108)$$

Отже, на картинній площині апекс гірокомпаса описує еліпс з центром у положенні рівноваги, піввісі якого відносяться один (з координати α) до одного (з координати β) як

$$\frac{\alpha_m}{\beta_m} = \sqrt{\frac{mgl}{H \omega_3 \cos \varphi_2}} = \frac{\omega_0}{\omega_3 \cos \varphi_2}.$$

У цілому траєкторія апексу гіроскопа відображена на рис. 3.22.

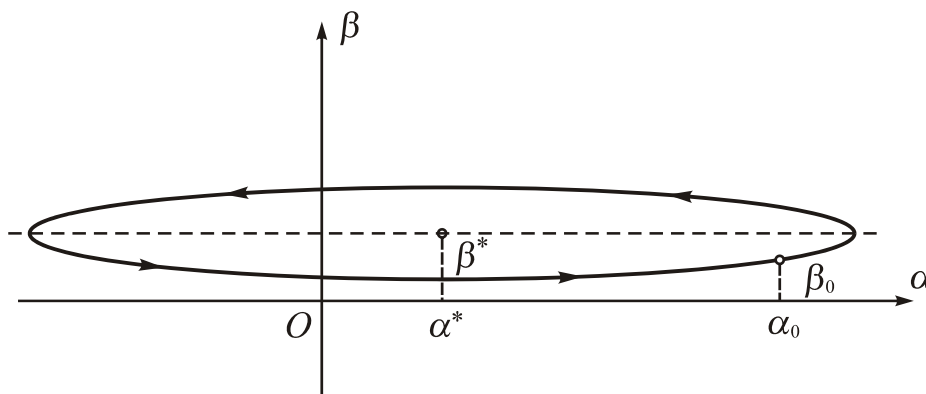


Рис. 3.22. Траєкторія вершини маятнікового гірокомпаса

При наявності сил опору, траєкторія з еліпсоїдальної стає спіралеподібною. З часом вершина гіроскопа наближається до положення рівноваги (яке характеризується швидкісними похибками) і у кінцевому підсумку зливається з ним.

Отже перехідна складова з часом зникає, і головна вісь встановлюється у положення, дещо відхилене від площини меридіану, тобто гірокомпас вказує на північ зі швидкісною похибкою (3.102). Легко бачити, що ця похибка виникає лише якщо рух основи здійснюється зі змінюванням широти місця, тобто при наявності північної (точніше – меридіональної) складової її швидкості.

3.4.2.2. Балістична похибка. Умова незбурності

Як і у будь-якому маятниковому приладі, рух основи з прискоренням викликає дію на маятниковий гірокомпас сил інерції, що призводить до появи додаткових похибок, які прийнято називати балістичними.

Для їхнього аналізу скористаємося рівняннями (4.1), вважаючи моменти зовнішніх сил рівними нулю і нехтуючи малими другого порядку мализни, за які приймемо добутки малих прискорень на малі кути

$$\dot{\beta} + \left(\omega_3 \cos \varphi_2 + \frac{V_E}{R_3}\right)\alpha = \frac{V_N}{R_3}; \quad (3.109)$$

$$\dot{\alpha} - \left(\frac{mgl}{H} + \omega_3 \cos \varphi_2 + \frac{V_E}{R_3}\right)\beta = -\omega_3 \sin \varphi_2 - \frac{V_E}{R_3} \operatorname{tg} \varphi_2 + \frac{ml}{H} \frac{dV_N}{dt}.$$

Диференціюючи за часом перше рівняння (3.109), підставляючи у нього $\dot{\alpha}$ з другого рівняння і нехтуючи малими другого порядку мализни, дійдемо одного рівняння другого порядку відносно куту β :

$$\ddot{\beta} + \omega_0^2 \beta = \left[\frac{1}{R_3} - \left(\omega_3 \cos \varphi_2 + \frac{V_E}{R_3}\right) \frac{ml}{H} \right] \frac{dV_N}{dt}. \quad (3.110)$$

Вираз у квадратних дужках у правій частині цього рівняння можна наближено подати так:

$$\frac{1}{R_3} - \left(\omega_3 \cos \varphi_2 + \frac{V_E}{R_3}\right) \frac{ml}{H} = \frac{1}{R_3} - \frac{\omega_0^2}{g}.$$

Частинний розв'язок рівняння (3.110) визначає додаткове (до перехідної і швидкісної складових) змінювання куту β , яке, у свою чергу викликає, у відповідності до першого рівняння (3.110), додаткову похибку з куту α , яка й є балістичною похибкою маятникового гірокомпаса.

З (3.110) випливає, що якщо забезпечити виконання умови

$$\omega_0 = \omega_{in} = \sqrt{\frac{g}{R_3}}, \quad (3.111)$$

то частинний розв'язок рівняння (3.110) (а отже, й балістична похибка маятникового гірокомпаса) дорівнюватиме нулю за будь-якого руху основи. Тому умову (3.111) називають умовою незбурності маятникового гірокомпаса прискоренням руху основи.

3.4.3. Опис програмного забезпечення

Моделювання поведження МГК здійснюється за допомогою програмної моделі **GMK_PO_upr** та процедури **GMK_PO**, що здійснює обчислення правих частин диференціальних рівнянь руху МГК.

В основу моделі покладені прецесійні рівняння руху МГК у такому виді:

$$1. \frac{d\alpha}{dt} = -u_\eta + (u_\xi \cos \alpha - u_\zeta \sin \alpha) \operatorname{tg} \beta - \omega_0 [-\cos \gamma \operatorname{tg} \beta + \\ + n_E(t) \cos \gamma \sin \alpha - n_N(t) \cos \gamma \cos \alpha] + \frac{\varphi_1}{\cos \beta} \dot{\beta} - \frac{m_z}{\cos \beta};$$

$$2. \frac{d\beta}{dt} = -(u_\zeta \cos \alpha + u_\xi \sin \alpha) + \frac{\omega_0}{\cos \beta} [n_E(t) (-\sin \gamma \sin \alpha + \cos \gamma \cos \alpha \sin \beta) +$$

$$+ n_N(t)(\sin \gamma \cos \alpha + \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta)] - \frac{\varphi_2}{\cos \beta} \dot{\alpha} + \frac{m_y}{\cos \beta};$$

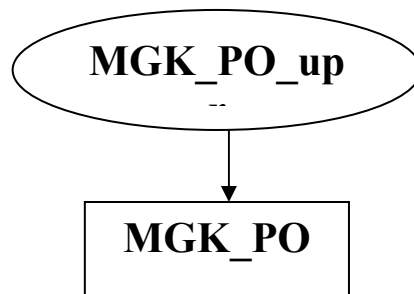
$$3. \operatorname{tg} \gamma = \frac{n_E(t) \cos \alpha + n_N(t) \sin \alpha}{\cos \beta - (n_N(t) \cos \alpha - n_E(t) \sin \alpha) \sin \beta},$$

де позначено

$$\omega_0 = \frac{mgl}{H}; \quad n_N(t) = \frac{w_\xi}{g}; \quad n_E(t) = \frac{w_\zeta}{g}; \quad \varphi_1 = \frac{f_1}{H}; \quad \varphi_2 = \frac{f_2}{H};$$

$$m_z = \frac{M_{z1}^*}{H}; \quad m_y = \frac{M_\eta^*}{H}.$$

Схема взаємодії програм наведена нижче.



Тексти зазначених файлів наведено нижче.

Програма *MGK_PO_upr*

```

%
% MGK_PO_upr
% Програма чисельного інтегрування прецесійних рівнянь
% Маятникового ГіроКомпаса на Рухомій основі
% Є. О. Воропаєва, кафедра ПСОН, КПІ, Україна,
% Почато 28-01-2009 Останні зміни 1-02-2009
clear all, clc
global OMz Rz cf tf g
global mz my fi1 fi2
global V0 W0 Vm om OM e K0 t1 t2 t3 t4
global om0
g=9.81; OMz=7.29e-5; Rz=4.4e6; fig=60*pi/180; cf=cos(fig);
tf=tan(fig); sname='Лазарев Ю. Ф.';
% Вшиті значення первісних даних
% 1. Період власних коливань гіромаятника
T0 =5064; om0k=2*pi/T0; om0=om0k^2/(OMz*cf);
% 2. Сталі складові моментів сил
mz=0; my=0;
% 3. Коефіцієнти вязкого тертя
fi1= 2e-3; fi2 = 2e-3;
% 4. Параметри руху основи
% початкова продольна швидкість
V0=10;
% прискорення
W0=0.0;
% мить початку дії прискоренняW0
t1=600;
% мить кінця дії прискорення
  
```

```

        t2=1800;
%   період хитавиці
        Tk=20;      om=2*pi/Tk;
%   амплітуда хитавиці
        fim=20*pi/180;  Vm=fim*om*10;
%   початкова фаза хитавиці зі швидкості
        e=0;
%   початковий курс корабля
        K0=180*pi/180;
%   період циркуляції
        Tc=600;      OM=2*pi/Tc;
%   мить початку циркуляції
        t3=0%600;
%   мить кінця дії прискорення
        t4=0%1200;
%   5. Тривалість інтегрування у періодах власних коливань
        ntk=3;
%   Підготовка початкових умов
t0=0
% 1) розрахунок швидкостей
V=V0;  K=K0;  VN00 = V*cos(K);  VE00 = V*sin(K);
% 2) розрахунок проєкцій кутової швидкості географічної СК
Uksi0 = OMz*cf+VE00/Rz, Ueta0 = Uksi0*tf,  Udzeta0 = -VN00/Rz;
alS=atan(-Udzeta0/Uksi0); saS=sin(alS); caS=cos(alS);
btS=atan(Ueta0/(om0+Uksi0*caS-Udzeta0*saS))
%   Початкові кути відхилення від вертикалі
al0=alS;  bt0=btS;  y0=[al0, bt0];  TK=T0*ntk;  tspan=[0,TK];
% Інтегрування диференційних рівнянь ГІРОМАЯТНИКА
options=odeset('RelTol',1e-12); [tout,yout]=ode45('MGK_PO',tspan,y0),%,options);
alfa=yout(:,1);  beta=yout(:,2);  t=tout;
% розрахунок поточної швидкісної похибки
n=length(t);
for k=1:n
    t0=t(k);  V=V0;
    if t0>=t1 & t0<=t2,  V=V+W0*(t0-t1);  elseif t0>t2,  V=V+W0*(t2-t1);  end
    K=K0;
    if t0>=t3 & t0<=t4,  K=K+OM*(t0-t3);  elseif t0>t4,  K=K+OM*(t4-t3);  end
    VNsk = V*cos(K);  VEsk = V*sin(K);
    UksiSk(k) = OMz*cf+VEsk/Rz;  UetaSk(k) = UksiSk(k)*tf;  UdzetaSk(k) = -VNsk/Rz;
end
alSk=atan(-UdzetaSk./UksiSk); saS=sin(alSk); caS=cos(alSk);
btSk=atan(UetaSk./(om0+UksiSk.*caS-UdzetaSk.*saS));
% Виведення графіків
subplot(2,2,1)
plot(alfa*180/pi,beta*180/pi,'.-',alSk*180/pi,btSk*180/pi,'sk-',...
     alS*180/pi,btS*180/pi,'sr',al0*180/pi,bt0*180/pi,'o'),grid,
set(gca,'Fontname','MS Sans Serif')
title('Картинна площина','FontSize',12,'FontWeight','bold')
xlabel('E \leftarrow \alpha, градуси \rightarrow W','FontSize',12)
ylabel('\beta','FontSize',12,'Fontname','Times New Roman'),
legend('Апекс','Півнога','ппP','ппA',0)
subplot(2,2,4)
plot(t/60,alfa*180/pi,t/60,beta*180*60/pi,'.-'),grid, set(gca,'Fontname','MS Sans Serif')
title('Залежність від часу','FontSize',12,'FontWeight','bold')
xlabel('Час, хвилини','FontSize',12), legend('\alpha (градуси)', '\beta (мінута)',0)
alb= alfa'-alSk;  btb=beta'-btSk;
subplot(2,2,3)
plot(t/60,alSk*180/pi,'s',t/60,alb*180/pi,'.-'),grid
% plot(t/60,alSk*180/pi,'s'),grid
set(gca,'Fontname','MS Sans Serif')
title('Похибка (градуси)','FontSize',12,'FontWeight','bold')
%title('Швидкісна похибка (градуси)','FontSize',12,'FontWeight','bold')

```

```

xlabel('Час, хвилини','FontSize',12), legend('швидкісна',' балістична',0)
% Текстове оформлення графічного вікна
subplot(2,2,2), axis off
h=text(-0.4,1.15,'Маятниковий гірокомпас на рухомій основі',...
    'FontSize',14,'FontWeight','bold','Fontname','MS Sans Serif');
h=text(-0.,1.06,sprintf('Географічна широта місця    \phi_\Gamma = %g^\circ',fig*180/pi),
    'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(-0.2,0.98,'Період власних коливань','Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.5,0.98,sprintf('T_0 = %g хв.:',T0/60),'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(-0.2,0.9,'Коеф-ти тертя','Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.5,0.9,sprintf('\phi_1 = %g;',fi1)); h=text(0.8,0.9,sprintf('\phi_2 = %g;',fi2));
h=text(-0.2,0.82,'Сталі моменти','Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.5,0.82,sprintf('\mu_Z = %g;',mz)); h=text(0.8,0.82,sprintf('\mu_Y = %g;',my));
h=text(-0.2,0.75,'Початкове положення:', 'FontSize',12,'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.5,0.75,sprintf('\alpha_0 = %g\prime;',a0*180*60/pi));
h=text(0.9,0.75,sprintf('\beta_0 = %g\prime;',bt0*180*60/pi));
h=text(0.2,.65,'Рух ОСНОВИ:', 'FontSize',12,'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(-0.2,.58,'V = V_o + W_ot | _t_1^t^2');
h=text(0.5,.58,'V_k = V_m sin(\omega_t + \epsilon_k)');
h=text(0.17,.5,'K = K_o + \Omega t | _t_3^t^4'); h=text(0.1,.45,'-----');
h=text(-0.2,0.35,sprintf('V_o = %g;',V0)); h=text(0.17,0.35,sprintf('K_0 = %g^\circ',K0*180/pi));
h=text(0.5,0.35,sprintf('V_m = %g;',Vm)); h=text(-0.2,0.25,sprintf('W_o = %g;',W0));
h=text(0.17,0.25,sprintf('T_\Omega = %g c',2*pi/OM),'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.5,0.25,sprintf('T_X = %g c',2*pi/om),'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(-0.2,0.15,sprintf('t_1 = %g хв',t1/60),'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.17,0.15,sprintf('t_3 = %g хв',t3/60),'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.5,0.15,sprintf('\epsilon = %g;',e*180/pi));
h=text(-0.2,0.05,sprintf('t_2 = %g хв',t2/60),'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.17,0.05,sprintf('t_4 = %g хв',t4/60),'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(-0.3,0,'=====');
h1=text(-0.3,-0.05,'Програма MGK-PO-upr.m;', 'Fontname','MS Sans Serif');
h1=text(0.35,-0.05,'Автор - Воропаєва Є. О., каф. ПСОН','Fontname','MS Sans Serif');
tm=fix(clock); Tv=tm(4:5); h1=text(0.5,-0.15,[sprintf(' %g:',Tv), ' ',date]);
h=text(-0.3,-0.2,'=====');

```

Програма *MGK_PO*

```

function z=MGK_PO(t,y)
% Процедура обчислювання правих частин диференційних рівнянь
% руху Маятникового ГіроКомпаса на РУХОМІЙ основі
% Вхідні параметри:
% t - поточний час
% y - масив з двох змінних стану: y1 = alfa - східне y2 = beta - південне
% відхилення осі ГМ
% Воропаєва Є. О. 28-01-2009
global OMz Rz cf tf g
global mz my fi1 fi2
global V0 W0 Vm om OM e K0 t1 t2 t3 t4
global om0
% 1) розрахунок швидкостей
V=V0;
if t>=t1 & t<=t2, V=V+W0*(t-t1); elseif t>t2, V=V+W0*(t2-t1); end
K=K0; Wk=0;
if t>=t3 & t<=t4, K=K+OM*(t-t3); Wk=V*OM;
elseif t>t4, K=K+OM*(t4-t3); Wk=0;
end
VN = V*cos(K); VE = V*sin(K);
% 2) розрахунок перевантажень
Vk=Vm*sin(om*t+e); dVk_dt=Vm*om*cos(om*t+e); dV_dt=0;
if t>=t1 & t<=t2, dV_dt=dV_dt+W0; end
Wp=dV_dt;%-Vk*OM; Wk=dVk_dt;%+V*OM
nN = (Wp*cos(K)-Wk*sin(K))/g; nE = (Wp*sin(K)+Wk*cos(K))/g;

```

```

% 3) розрахунок проекцій кут;=ової швидкості географічної СК
Uksi = OMz*cf+VE/Rz; Ueta = Uksi*tf; Udzeta = -VN/Rz;
% Проміжні розрахунки
sa=sin(y(1)); ca=cos(y(1)); tb=tan(y(2)); sb=sin(y(2)); cb=cos(y(2));
ga=atan((nE*ca+nN*sa)/(cb-(nN*ca-nE*sa)*sb)); sg=sin(ga); cg=cos(ga);
A=-Ueta+(Uksi*ca-Udzeta*sa)*tb+om0*cg*(tb+nN*ca-nE*sa)-mz/cb;
B=-(Udzeta*ca+Uksi*sa)+om0/cb*(nE*(cg*ca*sb-
sg*sa)+nN*(sg*ca+cg*sa*sb))+my/cb;
KS=1/(1+fi1*fi2/cb^2);
% Обчислення правих частин рівнянь
z(1)=KS*(A+B*fi1/cb); z(2)= KS*(B-A*fi2/cb); z=z';

```

3.4.4. Завдання

За програмою MGK_PO_ург виконати наступні дослідження.

1. Провести експериментальні дослідження вільного руху маятникового гірокомпаса (МГК) з виявлення впливу на нього:

- 1) швидкості руху основи відносно Землі;
- 2) періоду власних коливань гіромаятника;
- 3) коефіцієнтів моментів сил опору.

2. Провести експериментальні дослідження балістичної похибки маятникового гірокомпасу:

- 1) при рівноприскореному прямолінійному русі корабля, варіюючи а) величиною прискорення основи; б) тривалістю терміну руху з прискоренням, в) величиною куту курсу корабля;
- 2) при циркуляції корабля, варіюючи а) тривалістю руху корабля на циркуляції, б) початковим курсом корабля, в) величиною періоду повної циркуляції;
- 3) при хитавиці корабля, варіюючи: а) амплітудою хитавиці, б) курсом корабля, в) періодом хитавиці.

3. Порівняти експериментально одержані результати з тими, що випливають з теоретичного дослідження. Зробити висновки з адекватності програмної і теоретичної моделей.

3.4.5. Методичні вказівки до виконання

1. Увійти у програмне середовище Matlab.

Користуючись лінійкою інструментів відкрити у вікні редактора Matlab текст програми MGK_PO_ург.

2. У наступних рядках програми змінити значення первісних даних на потрібні у відповідності з завданням.

3. У командному вікні ввести ім'я програми

>> MGK_PO_ург і натиснути клавішу <Enter>.

Якщо все було зроблено вірно, на екрані монітора має з'явитися додаткове графічне вікно (див. рис. 3.23).

В цьому вікні відображуються результати моделювання і наведені значення усіх використаних параметрів.

4. Вимірювання необхідних параметрів руху здійснюється по графіку, наведеному у цьому вікні. Для підвищення точності вимірювань слід використувати функцію збільшення зображення *Zoom in* в лінійці інструментів на панелі цього вікна.

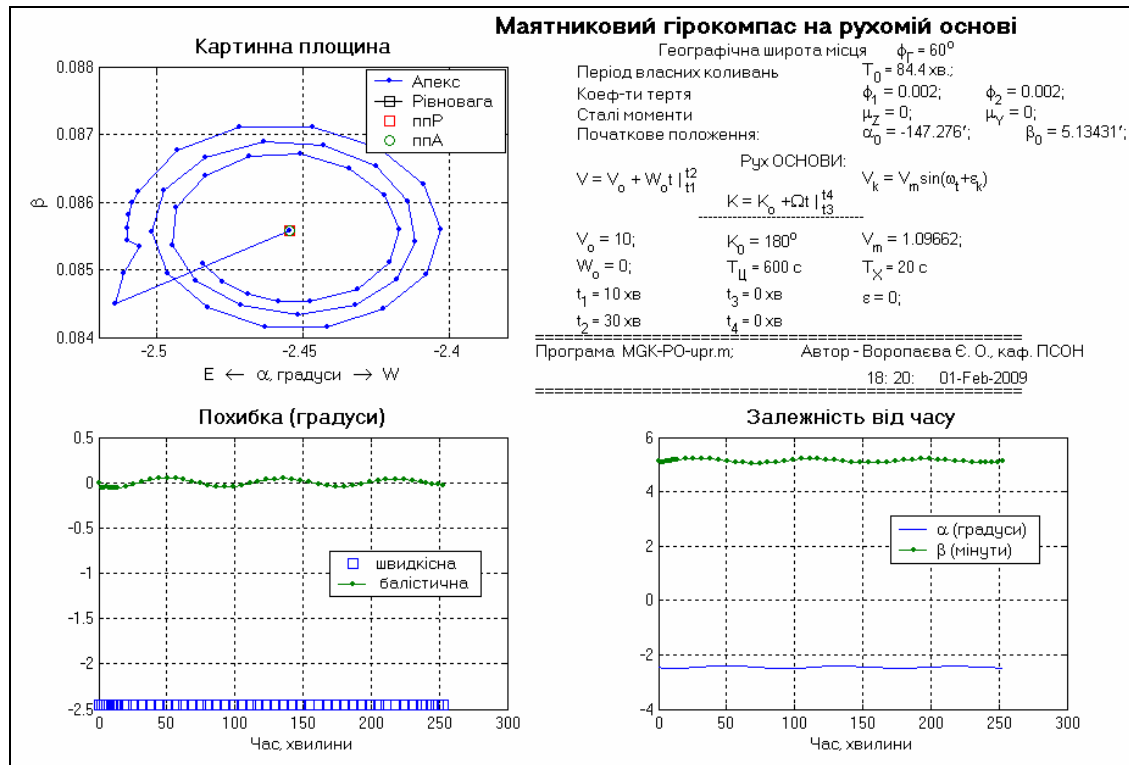


Рис. 3.23. Вид графічного вікна з результатами моделювання

5. Результати вимірювань слід занотувувати у робочому зошиті у вигляді таблиці, одним з стовпців якої має бути змінюваний параметр, а іншими – виміряні значення і, можливо, розрахований за ними параметр.

6. Показати одержані результати викладачеві.

3.4.6. Контрольні запитання

1. Які рівняння руху маятникового гірокомпаса чисельно інтегруються у програмній моделі? в яких саме програмних одиницях вони реалізовані?

2. Які можливості з імітування руху основи надає застосоване програмне забезпечення? які обмеження накладає воно на рух основи?

3. Які можливості з імітування моментів сил опору надає застосоване програмне забезпечення? які обмеження накладає воно на ці моменти?

4. Як впливає період власних коливань гіромаятника на а) швидкісну похибку, б) балістичну похибку, в) вібраційну похибку?

5. Як впливають сили опору на похибки МГК?

4. Що таке умова незбурності? у чому вона полягає? для чого потрібне забезпечення її виконання?

7. Що розуміють під балістичною похибкою маятнікового гірокомпаса?

8. Як зміниться власний рух маятнікового гірокомпаса під дією моментів сил сухого тертя, якщо його розташувати на Місяці?

9. Як зміниться швидкісна похибка маятнікового гірокомпаса, встановленого на екваторі на основі, яка рухається точно на північ, якщо його перемістити на Місяць в аналогічні умови та збільшити кінетичний момент вдвічі?

Додаток. Зразок звіту з лабораторної роботи

*Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут”*

Кафедра приладів і систем орієнтації і навігації

Дослідження руху гіромаятника на рухомій основі

*Звіт з лабораторної роботи № 3
циклу «Дослідження динаміки чутливих елементів систем орієнтації, встановлених на рухомій основі»
з дисципліни “Основи теорії чутливих елементів систем орієнтації”*

Керівник Лазарев Ю.Ф.

Захищено з оцінкою:

Виконали:

*ст. гр. ПГ-71 Сапегін О.М.
зал. кн. ПГ-7212*

*ст. гр. ПГ-71 Царенко С.В.
зал. кн. ПГ-7217*

Київ 2010

1. Мета лабораторної роботи

Шляхом експериментальних досліджень на програмній моделі вивчити вільний рух гіромаятника, його балістичну похибку і порівняти з висновками теоретичного аналізу.

2. Лабораторна установка

Експериментальні дослідження проводяться на програмній моделі в середовищі MatLab. Моделювання поведінки гіромаятника (ГМ) як приладу, що зберігає свою головною віссю гіроскопа напрямком вертикалі місця, здійснюється шляхом чисельного інтегрування прецесійних диференціальних рівнянь ГМ за допомогою програмної моделі GM_PO_urg.m та процедури GM_PO.m, яка здійснює обчислення правих частин диференціальних рівнянь руху ГМ.

3. Теоретичні відомості

Гіромаятником (ГМ) називають гіроскоп, центр ваги якого зміщений відносно точки підвісу гіроскопа вдовж його головної осі.

Прецесійні рівняння руху гіромаятника, встановленого на рухомій відносно Землі основі, мають вид:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} + \omega'_0 \beta = -\frac{V_{aE}}{R_3} - \omega_0 \frac{W_N}{g} + \frac{M_{Y1}}{H} \\ \dot{\beta} - \omega'_0 \alpha = \frac{V_{aN}}{R_3} - \omega_0 \frac{W_E}{g} - \frac{M_{\xi_0}}{H} \end{cases} \quad (3.1)$$

Відповідна кінематика поворотів, що використана при їх складанні, наведена на рис. 3.1.

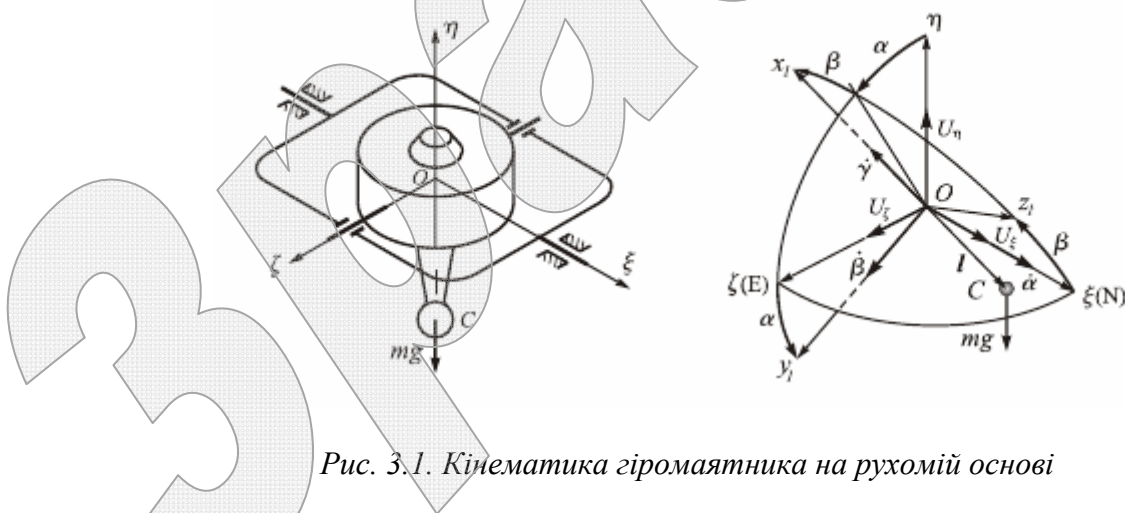


Рис. 3.1. Кінематика гіромаятника на рухомій основі

Тут позначено: $\xi\eta\zeta$ – географічна опорна система координат, вісь η якої спрямована вдовж геоцентричної вертикалі місця, вісь ξ горизонтальна і спрямована на північ, ζ спрямована на схід; α – кут відхилення головної осі гіромаятника від вертикалі на схід (у вертикальній площині «схід-захід»); β – кут відхилення головної осі гіромаятника від вертикалі у вертикальній площині «південь-північ»;

$$\omega'_0 = \frac{mgl}{H} + u_\eta; \quad \omega_0 = \frac{mgl}{H}; \quad (3.2)$$

m – маса гіромаятника; g – прискорення поля сили тяжіння; l – вектор зміщення центру мас відносно точки підвісу; H – кінетичний момент гіроскопа; V_{aE} , V_{aN} – відповідно східна і північна складові абсолютної (з врахуванням власного обертання Землі) швидкості рух основи (точніше – точки підвісу гіроскопа); W_E , W_N – відповідно східна і північна складові абсолютного прискорення точки підвісу; вертикальна складова абсолютної кутової швидкості географічної системи координат

$$u_{\eta} = \omega_3 \sin \varphi_{\Gamma} + \frac{V_E}{R_3} \operatorname{tg} \varphi_{\Gamma}; \quad (3.3)$$

ω_3 – кутова швидкість обертання Землі; R_3 – радіус Землі як сфери; φ_{Γ} – географічна широта місця; M_{ξ} , M_{γ_1} – північна і східна складові збурювального моменту сил.

Швидкісна похибка визначається таким виразом:

$$\alpha^* = -\frac{V_N}{R_3 \omega'_0}; \quad \beta^* = -\frac{V_E + R_3 \omega_3 \cos \varphi_{\Gamma}}{R_3 \omega'_0} \quad (3.4)$$

Балістична похибка гіромаятника визначається частинним розв'язком рівняння

$$\dot{z}_{\text{бал}} - j\omega'_0 z_{\text{бал}} = -\bar{W} \left(\frac{1}{R_3 \omega_0} - \frac{\omega_0}{g} \right), \quad (3.5)$$

де обозначено

$$z = \alpha + j\beta; \quad \bar{W} = W_N + jW_E; \quad (j = \sqrt{-1}). \quad (3.6)$$

4. Завдання 1

Провести експериментальні дослідження вільного руху гіромаятника з виявлення впливу на нього періоду власних коливань гіромаятника;

4.1. Результати експериментального дослідження

Розглянемо випадок, коли у початковий момент часу головна вісь гіромаятника розташована точно вздовж вертикалі місця ($\alpha_0 = 0$; $\beta_0 = 0$), корабель рухається в районі екватора ($\varphi_{\Gamma} = 0$) протягом усього часу з постійною швидкістю $V = 30$ м/с за курсом $K_0 = 45^\circ$ без хитаவிці. По осях підвісу діють лише моменти сил в'язкого тертя. Задачею є дослідження того, як змінюється рух осі гіромаятника і його положення рівноваги при змінюванні частоти ω_0 власних коливань маятника (або, що те саме – період T_0 власних коливань).

Для цього встановлюємо

- поздовжнє прискорення $W_0 = 0$;
- амплітуду змінювання швидкості за хитаவிці $V_m = 0$;
- коефіцієнти вязкого тертя по осях підвісу гіромаятника $\varphi_1 = 0,1$, $\varphi_2 = 0,1$.

Решта параметрів можуть бути довільними, бо не впливають на характеристики руху корабля.

Далі наведені результати (рис. 4.1...4.6) моделювання за наступних значень періоду власних коливань $T_0 = 7.5; 20; 40; 60; 70$ і 84.4 хвилини.

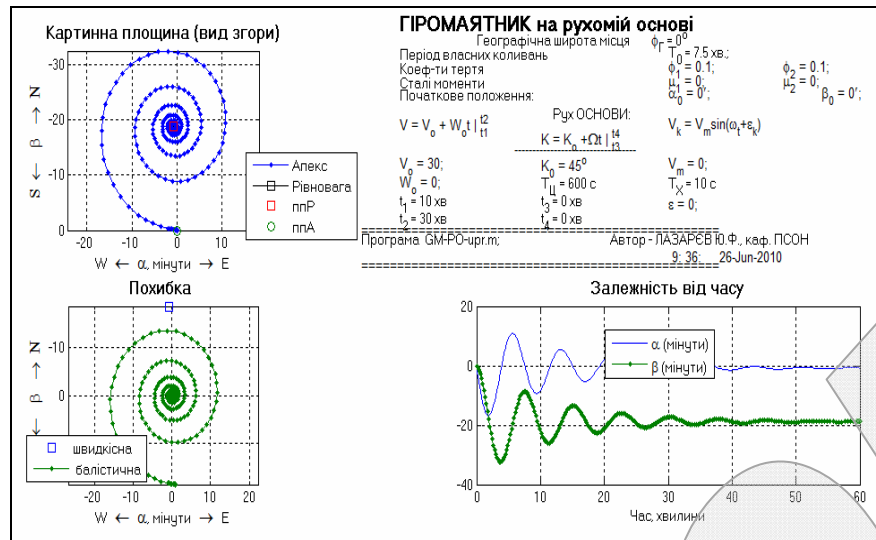


Рис. 4.1. Період власних коливань $T_0 = 7.5$ хв.

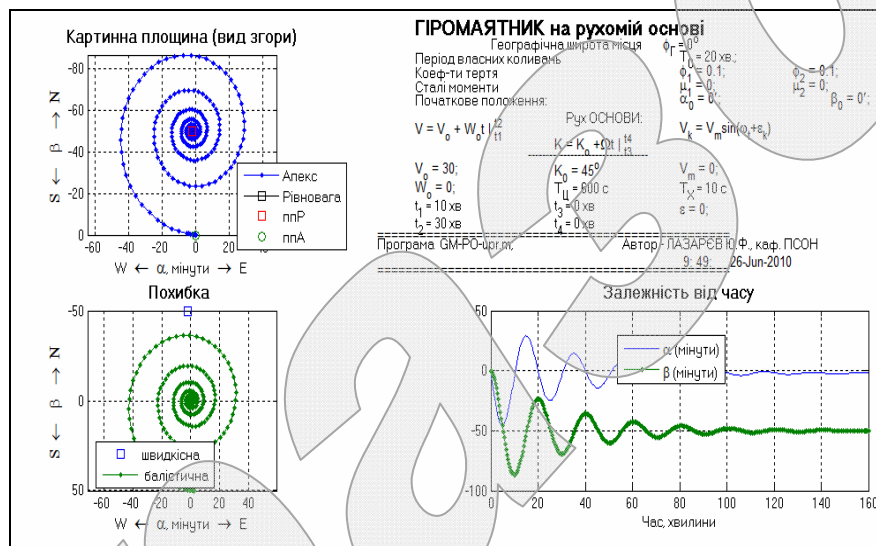


Рис. 4.2. Період власних коливань $T_0 = 20$ хв.

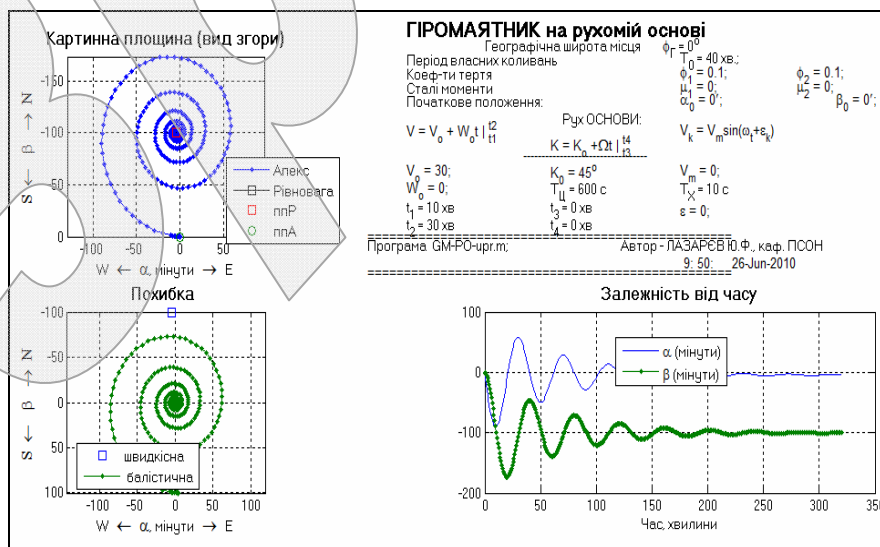


Рис. 4.3. Період власних коливань $T_0 = 40$ хв.

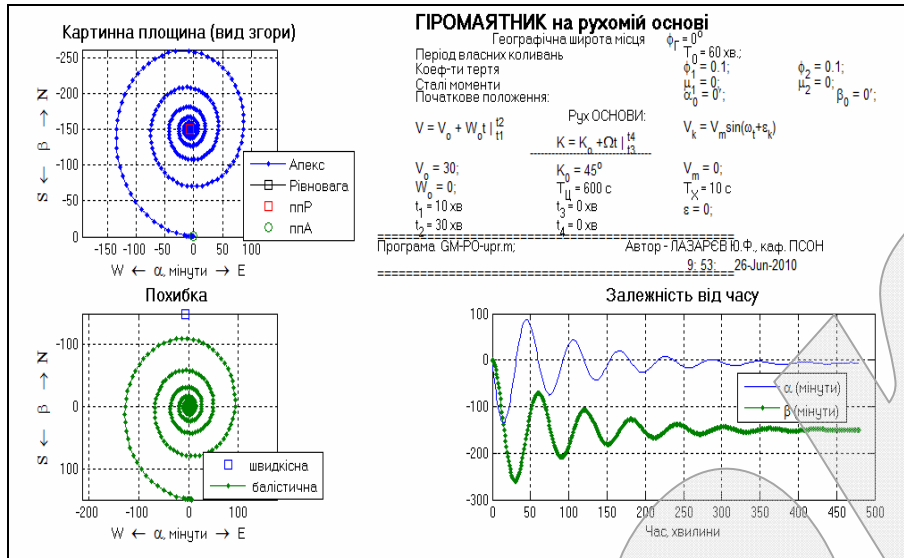


Рис. 4.4. Період власних коливань $T_0 = 60$ хв.

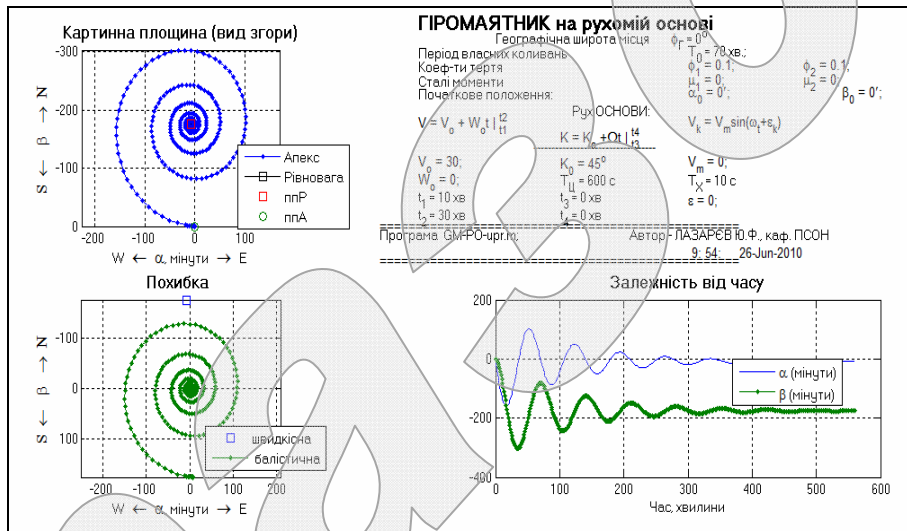


Рис. 4.5. Період власних коливань $T_0 = 70$ хв.

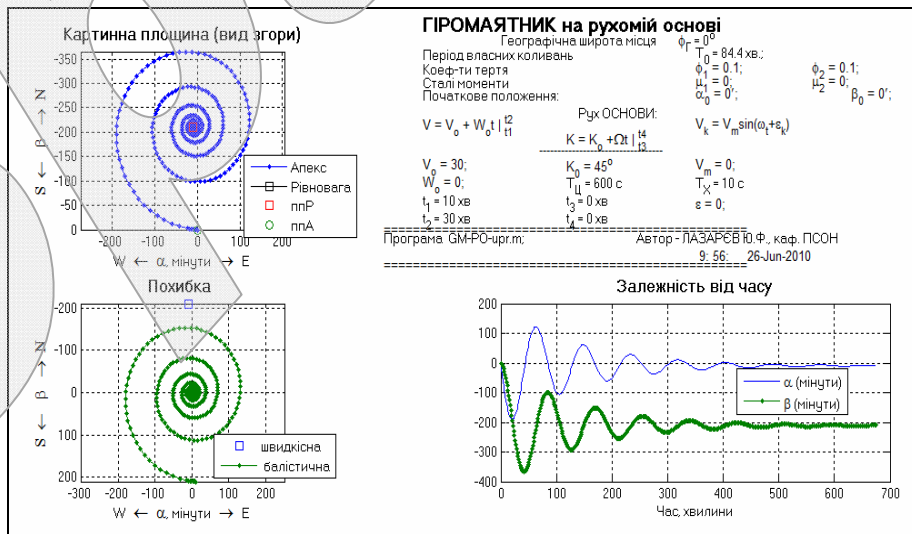


Рис. 4.6. Період власних коливань $T_0 = 84.4$ хв.

4.2. Аналіз і висновки

У вільному русі положення рівноваги осі гіромаятника має збігатися зі швидкісною похибкою. Результати вимірів положення рівноваги відповідно до рис. 4.1...4.6 представлені у таблиці 4.1.

Таблиця 4.1

T_0 , хвилини	7.5	20	40	60	70	84.4
α^* експерим., мінути	-0.8	-2.2	-4.4	-6.5	-7.6	-9.2
β^* експерим., мінути	-18.75	-50	-100	-150	-175	-210.9

Теоретичний розрахунок швидкісних похибок можна здійснити за формулами (3.4), які у розглядуваному випадку ($\varphi_r = 0$) набувають вигляду:

$$\alpha^* = -\frac{V_N}{R_3\omega_0} = -\frac{V_N}{2\pi R_3} T_0; \quad \beta^* = -\frac{V_E + R_3\omega_3}{R_3\omega_0} = -\frac{V_E + R_3\omega_3}{2\pi R_3} T_0$$

Розрахунок за цими формулами приводить до значень швидкісних похибок наведених у таблиці 4.2

Таблиця 4.2

T_0 , хвилини	7.5	20	40	60	70	84.4
α^* теорет., мінути	-0.82	-2.18	-4.4	-6.5	-7.6	-9.2
β^* теорет., мінути	-18.77	-50.04	-100.08	-150.12	-175.14	-211.17

Нижче наведений текст програми, яка будує графіки залежностей, визначені у таблицях

```
% Sapegin
clc, clear all
T0=[7.5 20 40 60 70 84.4]*60; % масив значень періода
Aexp=[0.8 2.2 4.4 6.5 7.6 9.2]; % виміряні значення швидкісної похибки
Bexp=[18.75 50 100 150 175 210.9];
% Розрахунки швидкісних похибок за теорією
V0=30; K0=45*pi/180; RZ=6.4e6; omZ=7.29e-5;
VN=V0*cos(K0); VE=V0*sin(K0); Chislit=VE+RZ*omZ;
Ateor=-VN./(2*pi*RZ)*T0*180*60/pi;
Bteor=-Chislit/(2*pi*RZ)*T0*180*60/pi;
% Побудова графіків
subplot(2,1,1)
plot(T0/60,Aexp,'ks-',T0/60,Ateor,'-'),grid
ylabel('\alpha^*, мінути')
title('Залежність швидкісних похибок гіромаятника від періоду власних коливань');
legend('експеримент','теорія',0);
subplot(2,1,2)
plot(T0/60,Bexp,'ks-',T0/60,Bteor,'-'),grid
xlabel('Період T_0, хвилини')
ylabel('\beta^*, мінути')
title('Графік експ. досліджень і теор. розрахунків');
legend('експеримент','теорія',0);
```

Відповідні графіки подані на рис. 4.7.

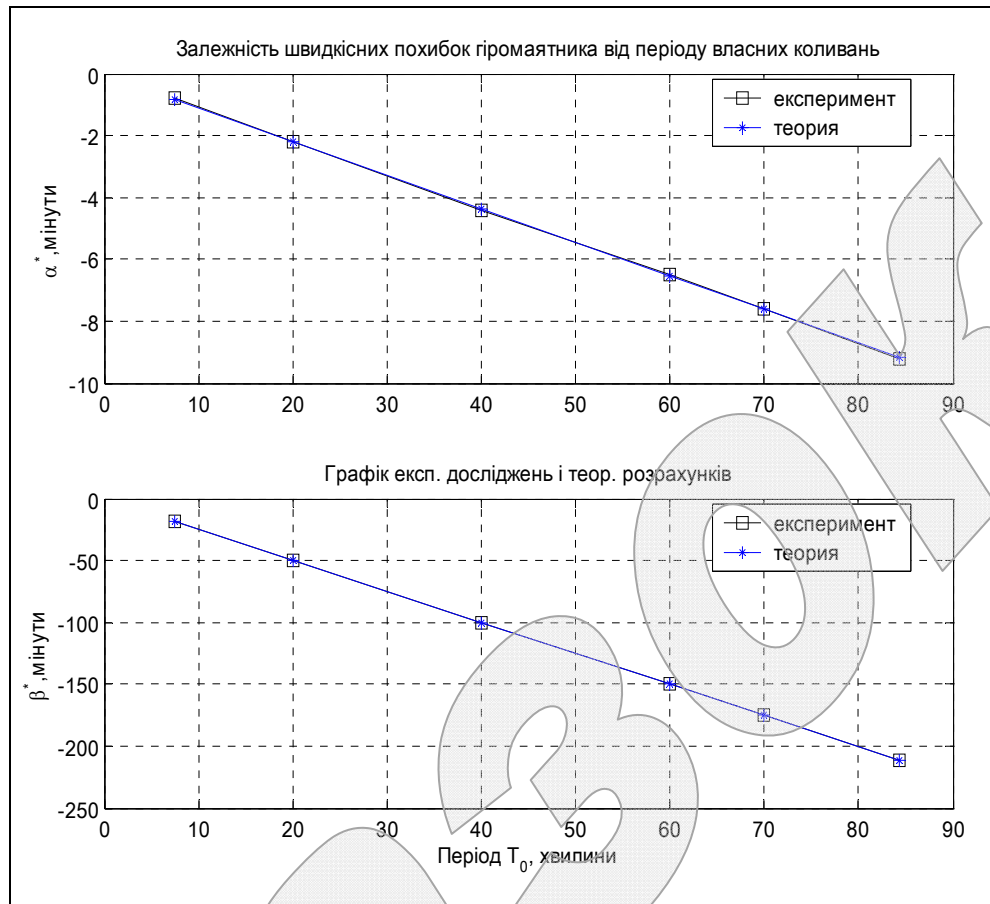


Рис. 4.7. Графіки експериментальних і теоретичних залежностей швидкісних похибок гіромаятника від періоду його власних коливань

Аналізуючи отримані дані, можна дійти таких висновків:

1. Перехідний процес гіромаятника відображається на картинній площині як коло з центром, зміщеним відносно вертикалі на кути, які дорівнюють швидкісним похибкам α^* та β^* (3.4).
2. За наявності сил тертя, коло обертається у спіраль, яка сходиться до положення рівноваги (α^* , β^*).
3. Положення рівноваги залежить від частоти власних коливань, широти, на якій встановлений гіроскоп, та від північної і східної складових лінійної швидкості об'єкта.
4. При збільшенні періоду власних коливань, спостерігається лінійне збільшення величин швидкісної похибки.
5. Результати одержані експериментально за програмною моделлю практично повністю збігаються і якісно, і кількісно з результатами одержаних з теоретичної формули (3.4).

5. Завдання 2

Провести експериментальні дослідження впливу балістичної похибки на рух гіромаятника з метою виявлення впливу на нього зміни періоду власних коливань.

5.1. Результати експериментального дослідження

Балістична похибка спричинюється рухом корабля з прискоренням. Тому розглядаємо випадок, коли корабель рухається увесь час за курсом $K_0 = 45^\circ$. Спочатку, протягом перших 10 хвилин, рух здійснюється з постійною швидкістю $V = 30$ м/с. Потім, протягом

наступних 20 хвилин, корабель рухається з постійним поздовжнім прискоренням $W_0 = 0,1$ м/с². За цей час його швидкість збільшиться на 120 м/с. Решту часу корабель знову рухається з незмінною швидкістю $V = 150$ м/с. Вважатимемо що ані циркуляції, ані хитавиці корабель не здійснює.

Тому приймемо у моделі:

- швидкість $V = 30$ м/с;
- початковий курс корабля $K_0 = 45^\circ$;
- поздовжнє прискорення корабля $W_0 = 0,1$ м/с;
- момент початку прискорення $t_1 = 10$ хв;
- момент кінця прискорення $t_2 = 30$ хв;
- амплітуда змінювання швидкості за хитавиці $V_m = 0$;
- моменти початку і кінця циркуляції рівними ($t_3 = t_4 = 0$).

На рис. 5.1...5.6 наведені результати моделювання поведінки гіромаятника при русі основи з постійним прискоренням за таких значень періоду власних коливань: $T_0 = 7.5; 20; 40; 60; 70; 84.4$ відповідно.

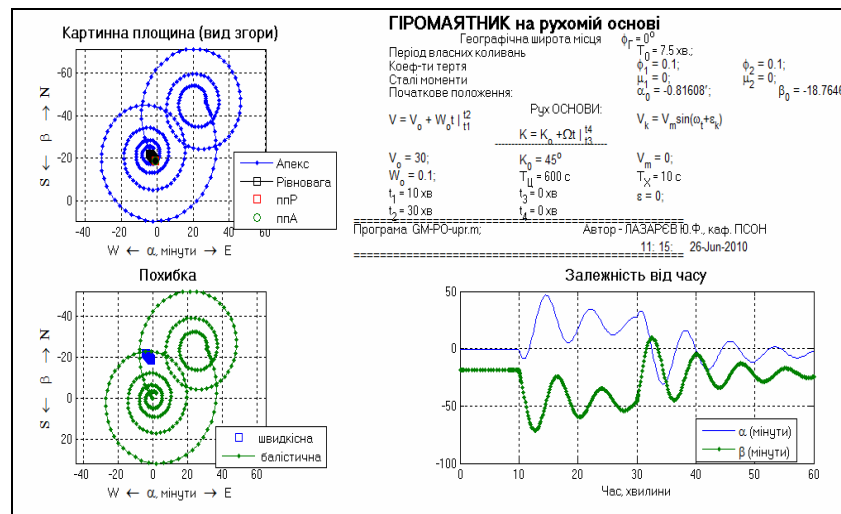


Рис. 5.1. Період власних коливань $T_0 = 7.5$ хв.

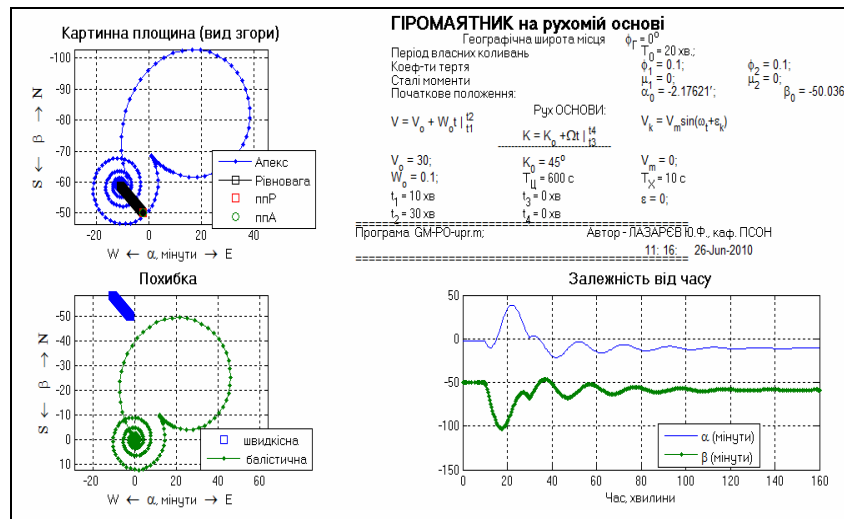


Рис. 5.2. Період власних коливань $T_0 = 20$ хв.

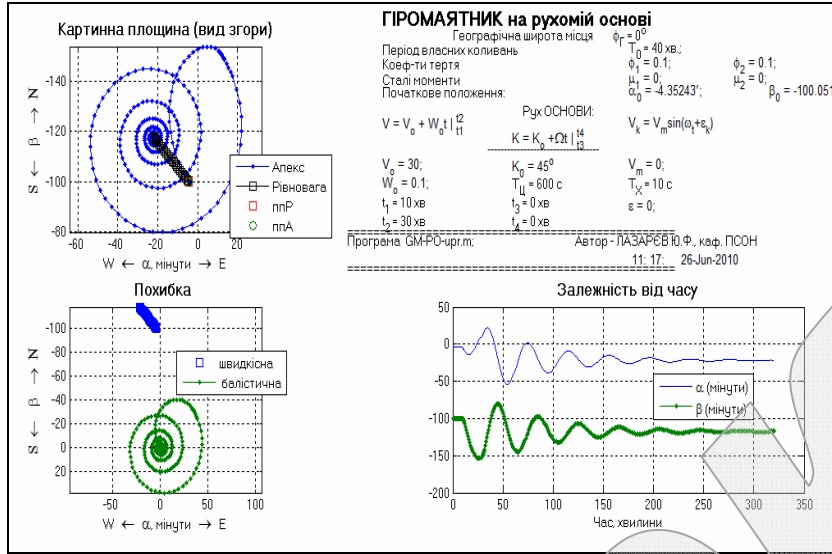


Рис. 5.3. Період власних коливань $T_0 = 40$ хв.

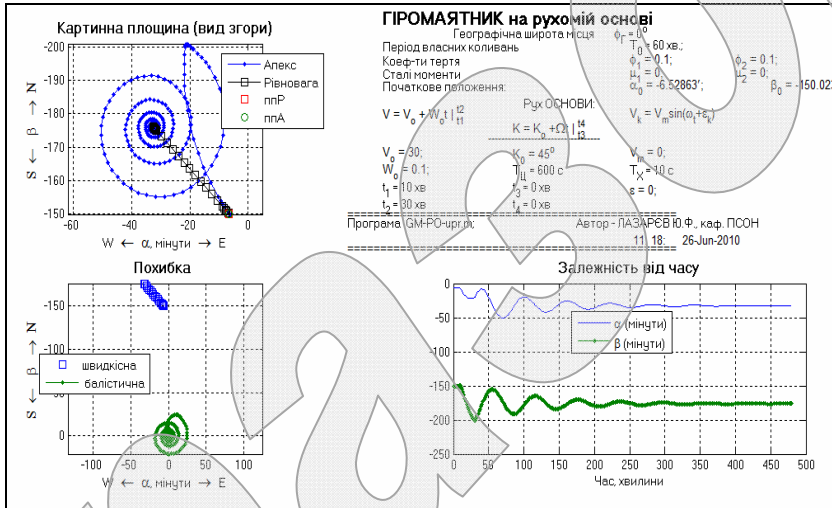


Рис. 5.4. Період власних коливань $T_0 = 60$ хв.

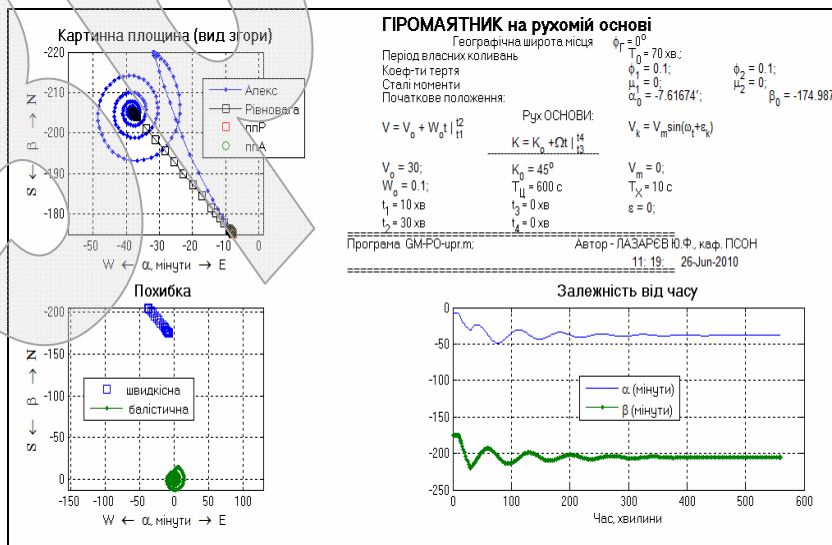


Рис. 5.5. Період власних коливань $T_0 = 70$ хв.

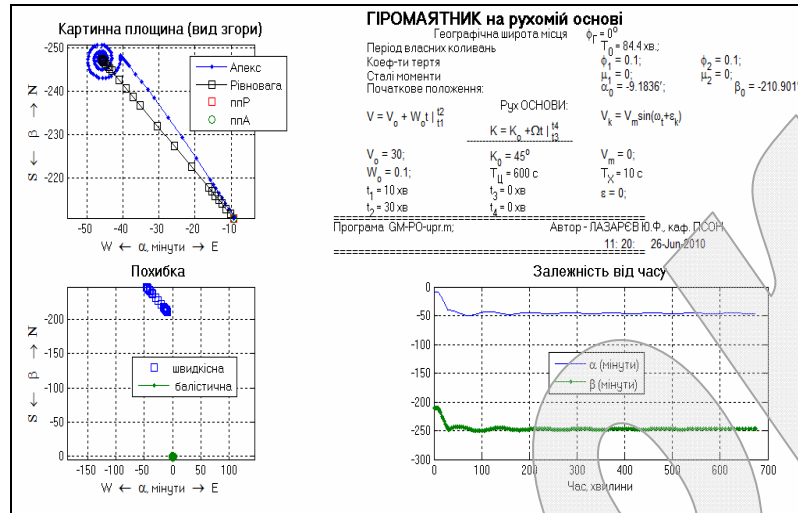


Рис. 5.6. Період власних коливань $T_0 = 84.4$ хв.

Для того, щоб рух осі гіромаятника не був затьмарений перехідним процесом, вісь гіромаятника у кожному випадку у початковий момент часу встановлювалася у положення рівноваги (яке визначається швидкісними похибками гіромаятника, тобто $\alpha(0) = \alpha^*(0)$ і $\beta(0) = \beta^*(0)$).

5.2. Аналіз і висновки

У розглядуваному випадку частину усього досліджуваного часу основа, на якій встановлено гіромаятник, рухається з постійним прискоренням. Тому для визначення балістичної похибки, зумовленої цим прискоренням слід скористатися рівнянням (3.5)

$$\dot{z}_{\text{бал}} - j\omega'_0 z_{\text{бал}} = -\overline{W} \left(\frac{1}{R_3 \omega_0} - \frac{\omega_0}{g} \right)$$

і знайти частинний його розв'язок за умови, що величина прискорення \overline{W} є сталою величиною.

Через те, що у цьому випадку права частина рівняння є сталою величиною, частинний розв'язок його має також вигляд постійної величини

$$z_{\text{бал}} = \text{const}. \quad (5.1)$$

Підставивши (5.1) у рівняння (3.5), отримаємо

$$-z_{\text{бал}} = -j \frac{\overline{W}}{\omega'_0} \left(\frac{1}{R_3 \omega_0} - \frac{\omega_0}{g} \right). \quad (5.2)$$

Тепер врахуємо позначення (3.6), щоб відшукати координати $\alpha_{\text{бал}}$ і $\beta_{\text{бал}}$, які визначають положення рівноваги головної осі гіромаятника з врахуванням прискорення основи відносно положення рівноваги, що визначається швидкісною похибкою:

$$\alpha_{\text{бал}} = \frac{W_E}{\omega'_0} \left(\frac{1}{R_3 \omega_0} - \frac{\omega_0}{g} \right) \approx \frac{W_E}{g} \left(\frac{1}{R_3 \omega_0^2} - 1 \right) = -\frac{W_E}{g} \left(1 - \frac{1}{R_3 \omega_0^2} \right); \quad (5.3)$$

$$\beta_{\text{бал}} = -\frac{W_N}{\omega'_0} \left(\frac{1}{R_3 \omega_0} - \frac{\omega_0}{g} \right) \approx -\frac{W_N}{g} \left(\frac{1}{R_3 \omega_0^2} - 1 \right) = \frac{W_N}{g} \left(1 - \frac{1}{R_3 \omega_0^2} \right), \quad (5.4)$$

де T_0 – період власних коливань гіромаятника; T_{Sh} – період Шюлера.

Рух основи в усіх випадках складається з трьох етапів:

– руху основи з постійною швидкістю 30 м/с за курсом 45° (у проміжку часу $0 \leq t \leq t_1$);

– руху основи з постійним прискоренням $W_0 = 0,1 \text{ м/с}^2$ з моменту $t = t_1$ до моменту $t = t_2$;

– з моменту $t = t_2$ і далі основа знову рухається рівномірно з новою накопиченою швидкістю 150 м/с і з новими початковими умовами.

На першому етапі початкове положення осі гіромаятника збігається з положенням рівноваги, яке визначається швидкісними похибками α^* і β^* . Тому рух апексу гіроскопа на цьому етапі буде відсутній.

Протягом другого етапу швидкість основи змінюється з 30 м/с до 150 м/с; одночасно за лінійним законом змінюється й швидкісна похибка, яка набуває наприкінці етапу значення, яке залежить, окрім поточної швидкості корабля, ще й від частоти власних коливань гіромаятника. Початкове положення апекса на цьому етапі є тим самим, що й на першому етапі. Але апекс гіроскопа тепер має нове положення рівноваги, яке зміщено відносно положення, що визначається швидкісними похибками, на величини балістичних похибок (5.3) і (5.4).

Розрахунок балістичних похибок, швидкісних похибок та сумарних відхилень осі гіромаятника від вертикалі здійснимо за допомогою програми:

```
% Bal_Dev_GM
clear all,clc
RZ= 6.4e6;g=9.8;
Tsh=84.4*60;
T0=[7.5 20 40 60 70 84.4]*60
W0=0.1
Mnog=1-T0.^2/Tsh^2
WN=W0*sqrt(2)/2;
WE=W0*sqrt(2)/2;
al_bal_min=(WE*Mnog/g)*180*60/pi
bt_bal_min=-(WN*Mnog/g)*180*60/pi
% Розрахунки швидкісних похибок за теорією
V0=150; K0=45*pi/180; RZ=6.4e6; omZ=7.29e-5;
VN=V0*cos(K0); VE=V0*sin(K0); Chislit=VE+RZ*omZ;
Ateor=-VN./(2*pi*RZ)*T0*180*60/pi
Bteor=-Chislit/(2*pi*RZ)*T0*180*60/pi
Al_sum=al_bal_min+Ateor
Bt_sum=bt_bal_min+Bteor
```

Результати розрахунку наведені у таблиці 5.1

Таблиця 5.1

T_0 , хвилини	7.5	20	40	60	70	84.4
$\alpha_{\text{бал}}$, мінути	24.61	23.41	19.23	12.27	7.74	0
$\beta_{\text{бал}}$, мінути	-24.61	-23.41	-19.23	-12.27	-7.74	0
$\alpha_{\text{шв}}$, мінути	-4.08	-10.88	-21.80	-32.64	-38.08	-45.92
$\beta_{\text{шв}}$, мінути	-22.03	-58.74	-117.48	-176.23	-205.6	-247.9
α_{Σ} , мінути	20.53	12.53	-2.53	-20.37	-30.34	-45.92
β_{Σ} , мінути	-46.64	-82.16	-136.72	-188.5	-213.35	-247.9

Зіставлення отриманих розрахункових даних з вище наведеними рисунками показує їх достатню збіжність.

Отже, на другому етапі апекс гіроскопу, починаючи свій рух з положення рівноваги для швидкості 30 м/с, у подальшому рухається навколо нового положення рівноваги по спіралі, наближуючись до неї внаслідок існуючого тертя. Це й спостерігається на поданих рисунках.

На третьому етапі основа знову рухається рівномірно зі швидкістю 150 м/с. Тому рух апексу на цьому етапі являє собою спіраль, яка сходиться до нового положення рівноваги, яке відповідає швидкісним похибкам ГМ для цього значення швидкості, тобто значенням, наведеним у четвертому і п'ятому рядках таблиці 5.1. Все це можна спостерігати на наведених рисунках.

З порівняння отриманих даних і графіків можна зробити такі висновки.

1. Збільшення періоду власних коливань приводить до зменшення балістичної похибки гіромаятника.
2. Найменшого значення балістична похибка сягає при рівності періоду власних коливань періоду Шюлера (84,4 хв).
3. Балістична похибка навіть при виконанні умови незбурності ($T_0 = T_{Sh}$) не дорівнює нулю внаслідок наявності сил тертя в опорах гіромаятника. Якщо тертя відсутнє, то налаштування на період Шюлера призводить до практично повного зникнення балістичної похибки (див. рис. 5.7)

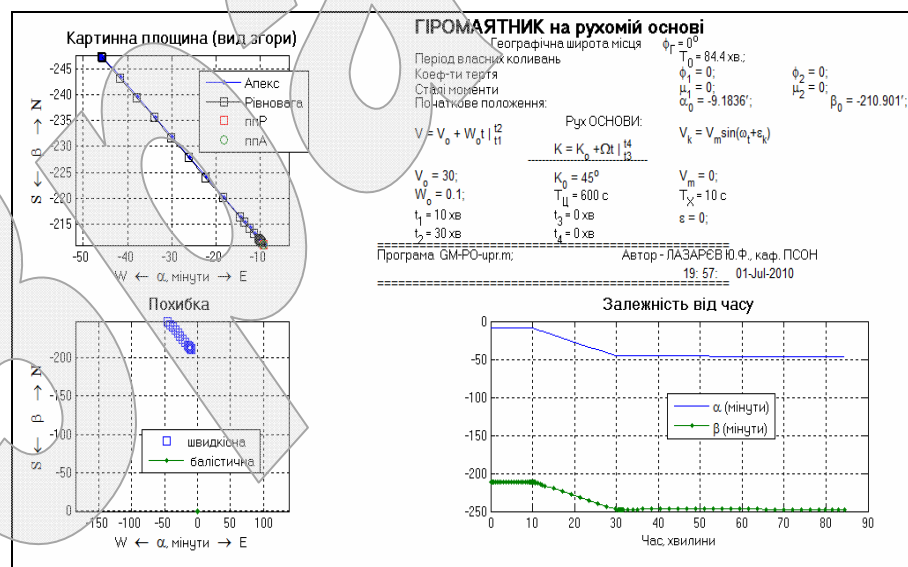


Рис. 5.7. Період Шюлера $T_0 = 84,4$ хв. без демпфівування

4. Результати розрахунків за теоретичними формулами якісно і кількісно добре узгоджуються з результатами чисельного інтегрування диференціальних рівнянь.

Загальні висновки

1. При збільшенні періоду власних коливань, збільшується величина швидкісної похибки.
2. При збільшенні періоду власних коливань, зменшується величина балістичної похибки.
3. Найменшого значення балістична похибка досягає при налаштуванні на період Шюлера, але не дорівнює нулю внаслідок наявності сил тертя в опорах гіромаятника.