

УДК 531.383

## СОУДАРЕНИЕ РАМОК КАРДАНОВОГО ПОДВЕСА ГИРОСКОПА

*Лазарев Ю.Ф., Национальный технический университет Украины "Киевский политехнический институт", г. Киев, Украина*

*Рассмотрен теоретически и промоделирован процесс соударения рамок карданового подвеса гироскопа при вращении основания с постоянной угловой скоростью. Выведены формулы, позволяющие оценивать величину силы, действующей на упоры. Показана их удовлетворительная сходимость с результатами моделирования. Даны рекомендации по уменьшению силы соударения и ее влияния на прочность упоров*

**Ключевые слова:** гироскоп в кардановом подвесе, соударение рамок, динамика, прочность, моделирование

### **Введение**

При проектировании приборов на основе трехстепенного гироскопа в кардановом подвесе предусматриваются меры для исключения возможности соударения в процессе эксплуатации плоскостей рамок подвеса, так как при этом гироскоп теряет свою работоспособность. Чаще всего для этого используются упоры, ограничивающие относительный поворот рамок. При этом иногда возможны случаи, когда вне условий эксплуатации может произойти соударение рамок. Например, по окончании работы беспилотного транспортного средства (объекта) при испытаниях, когда движение объекта становится неуправляемым, и объект начинает вращаться вокруг продольной оси, а ротор гироскопа продолжает вращаться по инерции, возможно соударение рамок подвеса через упоры. Как показала практика, возникающие при таком соударении силы могут быть настолько значительными, что приводят к разрушению упоров, а значит, к непригодности giroприбора для дальнейшего использования. Поэтому актуальной является задача построения теоретической модели процесса соударения рамок и выявления конструктивных мер, обеспечивающих уменьшение величин сил, возникающих в упорах.

Решение такой задачи не имеет аналогов в известной автору литературе. Обычно задачи, связанные с движением гироскопов, посвящены изучению его движения при сравнительно малых значениях внешних сил, не приводящих к значительным поворотам главной оси гироскопа. В поставленной же задаче поворот главной оси гироскопа за малый промежуток времени происходит на весьма значительные углы (порядка  $180^\circ$ ), что значительно усложняет теоретическое изучение движения.

В статье сделана попытка решения этой задачи, используя для уточнения модели движения по одной из координат предварительное программное моделирование поведения гироскопа в описанных условиях.

### **Постановка задачи**

Пусть гироскоп в кардановом подвесе (ГКП) установлен на основании, вращающемся с постоянной угловой скоростью  $U$  вокруг неподвижной в инерциальном пространстве оси, которая в начальный момент времени совпадает с положением внутренней оси карданового подвеса.

Для рассматриваемой задачи уравнения движения ГКП можно использовать в такой приближенной форме:

$$\begin{cases} (J_1 + J_2 \cos^2 \beta) \dot{\omega}_x + H \omega_y \cos \beta = 0 \\ J_3 \dot{\omega}_y - H \omega_x = L \end{cases}, \quad (1)$$

где  $\omega_x = \dot{\alpha} \cos \beta + U \sin \alpha \sin \beta$ ;  $\omega_y = \dot{\beta} + U \cos \alpha$ ;  $\omega_z = \dot{\alpha} \sin \beta - U \sin \alpha \cos \beta$ ; (2)  
 $\alpha$  – угол поворота внешней рамки относительно основания;  $\beta$  – угол поворота внутренней рамки относительно наружной;  $J_1, J_2, J_3$  – моменты инерции гироскопа;  $H$  – кинетический момент гироскопа;

$$L = -c_u (\beta - \beta_u) - f_u \dot{\beta}; \quad (|\beta| \geq |\beta_u|)$$

момент силы, накладываемый на внутреннюю рамку со стороны упора, когда угол поворота  $\beta$  превышает по величине угол  $\beta_u$ , при котором происходит соприкосновение упоров;  $c_u$  – угловая жесткость упора относительно внутренней оси подвеса;  $f_u$  – угловой коэффициент демпфирования в упоре.

Проблема интегрирования уравнений (1) и (2) в указанных условиях состоит в следующем:

1) в процессе соударения угол  $\alpha$  поворота наружной рамки относительно основания изменяется в большом диапазоне (от  $0^\circ$  до  $180^\circ$ ), поэтому невозможно воспользоваться линеаризованными уравнениями;

2) упругая связь через упоры является неустойчивой, что делает невозможным аналитическое решение уравнений (1) в случаях, когда в процессе соударения происходит «отрыв» упоров друг от друга; а такие режимы не исключены.

Предварительно уточним характер движения гироскопа при соударении. Для этого воспользуемся программной моделью, осуществляющей численное интегрирование уравнений (1) и (2).

### Предварительное моделирование

Численное интегрирование осуществлено в среде Matlab с помощью программы SoudarenyueSR.m. На рис. 1 представлены результаты моделирования для таких значений параметров гироскопа и движения основания, близких к реальным ( $c$  – линейная жесткость упора,  $l$  – плечо упора относительно внутренней оси подвеса):

$$H = 10 \text{ Н м с}; \quad J_1 = J_2 = J_3 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ Н м с}^2; \quad \beta_u = 75^\circ;$$

$$U = -1 \text{ с}^{-1}; \quad c = 1 \cdot 10^5 \text{ Н/м}; \quad l = 5 \text{ см}; \quad c_u = cl^2 = 250 \text{ Н м}.$$

Из результатов моделирования вытекает следующее.

1. Процесс соударения длится незначительный промежуток времени ( $\tau = 0,302 \text{ с}$ ), который намного больше периода нутационных колебаний

$$(T_\lambda = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{H} \sqrt{\frac{J_3(J_1 + J_2 \cos^2 \beta_u)}{\cos \beta_u}} = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ с}) \text{ и парциального периода колеба-$$

ний гироскопа с упругим упором ( $T_c = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{2\pi \sqrt{J_3}}{\sqrt{c_u}} = 0,0126 \text{ с}$ ), но меньше пе-

риода вращения основания ( $T_U = \frac{2\pi}{U} = 6,28 \text{ с}$ ).

2. Зависимость деформации упора (а, значит, – и угла  $\Delta\beta = \beta - \beta_u$  и силы сопротивления со стороны упора) от времени напоминает половину синусоиды и может быть аппроксимирована формулой

$$\Delta\beta(t) = -\beta_m \sin(\omega_u t) \text{sign}(U), \quad (\beta_m > 0), \quad (3)$$

где

$$\omega_u = \frac{\pi}{\tau}.$$

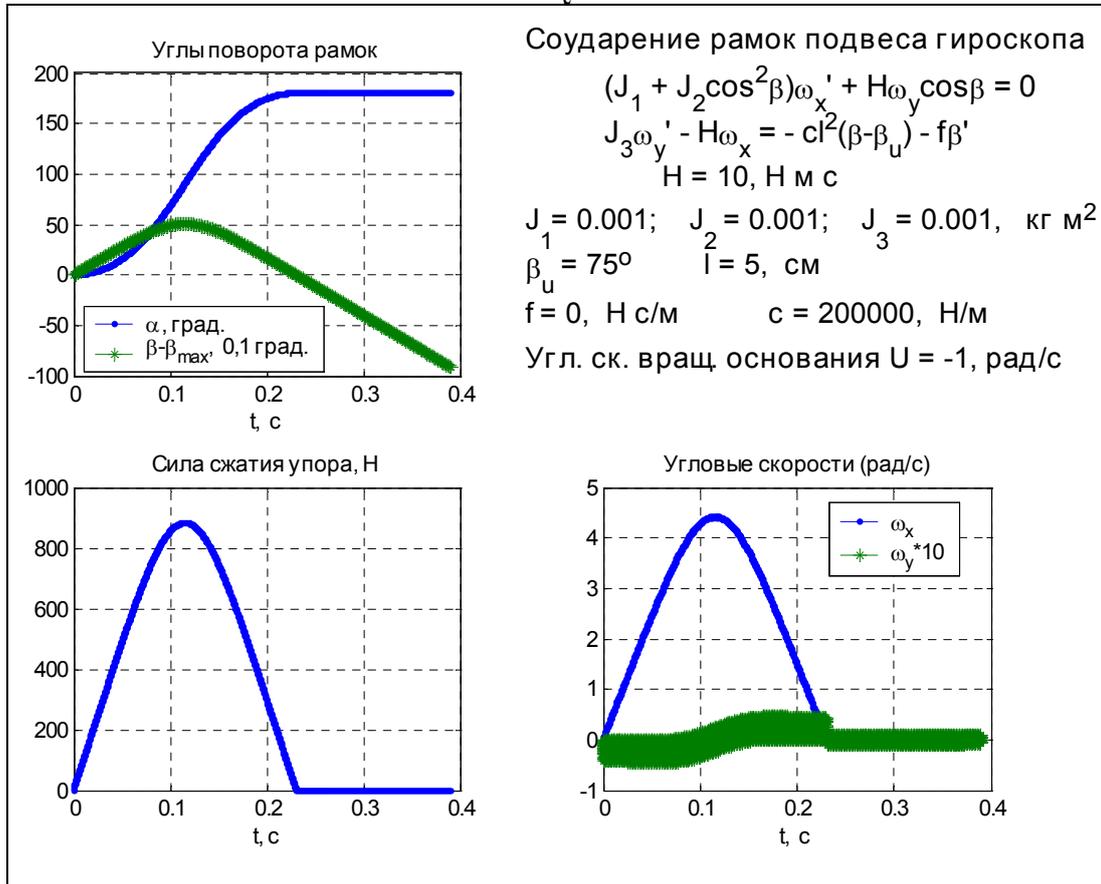


Рис. 1. Результат моделирования процесса соударения рамок

3. За время соударения гироскоп успевает повернуться вокруг наружной оси подвеса на угол, равный  $180^\circ$ . Максимум деформации и силы наблюдается в момент времени, когда поворот гироскопа вокруг этой оси составляет  $90^\circ$ .

4. При соударении угловая скорость  $\dot{\beta}$  поворота внутренней рамки карданового подвеса относительно наружной изменяется от  $(-U)$  в начальный момент времени (при  $t = 0$ ) до нуля при  $t = \frac{\tau}{2} = \frac{\pi}{2\omega_u}$ , когда достигается максимум

деформации упора и силы сопротивления, а затем до  $U$  в момент  $t = \tau = \frac{\pi}{\omega_u}$  окончания соударения.

### Теоретическое исследование

Сделанные наблюдения достаточны, чтобы установить приближенные зави-

симости максимальной силы и длительности соударения от параметров гироскопа, упора и вращения основания.

Для этого допустим, что угол поворота гироскопа вокруг внутренней оси подвеса вследствие деформации упора при соударении изменяется во времени по закону (3). В этом случае можно приближенно полагать, что угловая скорость поворота гироскопа вокруг внутренней оси подвеса изменяется во времени по закону:

$$\dot{\beta}(t) = \frac{d\Delta\beta(t)}{dt} = -\beta_m \omega_u \cos(\omega_u t) \text{sign}(U) = -\frac{M_m}{c_u} \omega_u \cos(\omega_u t) \text{sign}(U), \quad (4)$$

где

$$M_m = F_m l$$

– максимальное значение момента силы сопротивления упора;  $F_m$  – максимальное значение силы сжатия упора при соударении. Как было установлено ранее, в начальный момент эта скорость равна  $(-U)$ . Поэтому из (4) следует первое соотношение, связывающее две неизвестные  $F_m$  и  $\omega_u$ :

$$\boxed{\frac{M_m}{c_u} \omega_u = |U|}. \quad (5)$$

Уравнения (1) в пренебрежении демпфированием и предположении малости изменения угла  $\beta$  в процессе соударения приобретают вид

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x + \frac{H \cos \beta_u}{J_1 + J_2 \cos^2 \beta_u} \omega_y = 0 \\ \dot{\omega}_y - \frac{H}{J_3} \omega_x = \frac{c_u}{J_3} \cdot \beta_m \sin(\omega_u t) \text{sign}(U) \end{cases}.$$

Исключая переменную  $\omega_y$ , приведем эту систему к одному уравнению относительно одной переменной  $\omega_x$ :

$$\ddot{\omega}_x + \lambda^2 \omega_x = -\lambda^2 a_m \sin(\omega_u t) \text{sign}(U).$$

Здесь обозначено:

$$\lambda = H \sqrt{\frac{\cos \beta_u}{J_3 (J_1 + J_2 \cos^2 \beta_u)}}; \quad a_m = \frac{M_m}{H}.$$

Решение этого уравнения таково:

$$\omega_x = -\frac{\lambda^2 a_m}{\lambda^2 - \omega_u^2} \left( \sin \omega_u t - \frac{\omega_u}{\lambda} \sin \lambda t \right) \text{sign}(U),$$

из чего следует

$$\omega_y = \frac{\omega_u}{\lambda^2 - \omega_u^2} \frac{M_m}{J_3} (\cos \omega_u t - \cos \lambda t) \text{sign}(U).$$

Первое соотношение в совокупности с (1) приводит к уравнению

$$\dot{\alpha} \cos \beta + U \sin \alpha \sin \beta = -\frac{\lambda^2 a_m}{\lambda^2 - \omega_u^2} \left( \sin \omega_u t - \frac{\omega_u}{\lambda} \sin \lambda t \right) \text{sign}(U).$$

Так как  $\omega_u \ll \lambda$ , а угол  $\beta$  изменяется незначительно при соударении, то приближенно можно это уравнение на такое приближенное ( $\beta_u > 0$ )

$$\dot{\alpha} \cos \beta_u - |U| \sin \alpha \sin \beta_u = -a_m \sin \omega_u t \cdot \text{sign}(U). \quad (6)$$

Будем искать приближенное решение уравнения (6) в виде

$$\dot{\alpha} = -A \sin \omega_u t \cdot \text{sign}(U); (A > 0).$$

Из этого следует

$$\alpha = -\frac{A}{\omega_u} (1 - \cos \omega_u t) \text{sign}(U). \quad (7)$$

За время соударения угол поворота гироскопа вокруг внешней оси подвеса изменится, как было установлено раньше, на  $180^\circ = \pi$ . Из (15) следует в соответствии с этим, что

$$\frac{A}{\omega_u} = \frac{\pi}{2}. \quad (8)$$

Для того, чтобы найти величину  $A$  в уравнении (6), зависимость угла  $\alpha$  от времени  $\alpha = -\frac{\pi}{2} (1 - \cos \omega_u t) \text{sign}(U)$  заменим на приближенную линейную зави-

симость  $\alpha = -\omega_u t \cdot \text{sign}(U)$ , которая совпадает с реальной в точках  $t = 0, \frac{\tau_u}{2}, \tau_u$ .

Тогда уравнение (6) дает следующее выражение для определения  $A$ :

$$A = \frac{1}{\cos \beta_u} \left( \frac{M_m}{H} + |U| \sin \beta_u \right),$$

или, с учетом (6)

$$\omega_u = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\cos \beta_u} \left( \frac{M_m}{H} + |U| \sin \beta_u \right) \quad (9)$$

Итак, имеем два соотношения (5) и (9) для определения двух неизвестных  $M_m$  и  $\omega_u$ .

Исключая  $M_m$  получим квадратное уравнение

$$\omega_u^2 - \frac{2}{\pi} |U| \text{tg} \beta_u \omega_u - \frac{2}{\pi} \frac{1}{\cos \beta_u} \frac{c_u}{H} |U| = 0, \quad (10)$$

откуда можно определить длительность ударного импульса. Ему будет соответствовать наибольший корень уравнения (10):

$$\tau_u = \frac{\pi}{\omega_u^*}; \quad \omega_u^* = \frac{1}{\pi} |U| \text{tg} \beta_u + \sqrt{\frac{1}{\pi^2} U^2 \text{tg}^2 \beta_u + \frac{2}{\pi} \frac{1}{\cos \beta_u} \frac{cl^2}{H} |U|}.$$

Из (5) теперь найдем выражение для максимальной силы, действующей на упор при соударении

$$F_m = \frac{c_u}{l \omega_u^*} |U| = \frac{cl}{\omega_u^*} |U| = \frac{\tau_u}{\pi} cl |U|.$$

Таковы искомые формулы для определения длительности ударного импульса и максимальной силы при соударении.

### Сопоставление теоретических результатов с результатами моделирования

Определим, как изменяются главные характеристики соударения – максимальная сила  $F_m$  в упоре и длительность соударения  $\tau$  - при изменении: 1) жесткости упора; 2) кинетического момента гироскопа; 3) угловой скорости осно-

вания. Задачей является сопоставление результатов, полученных расчетом по найденным теоретическим формулам и полученных путем численного интегрирования дифференциальных уравнений движения гироскопа. Результаты представлены на рис. 2. Из них вытекает удовлетворительное совпадение теоретических результатов с результатами моделирования.

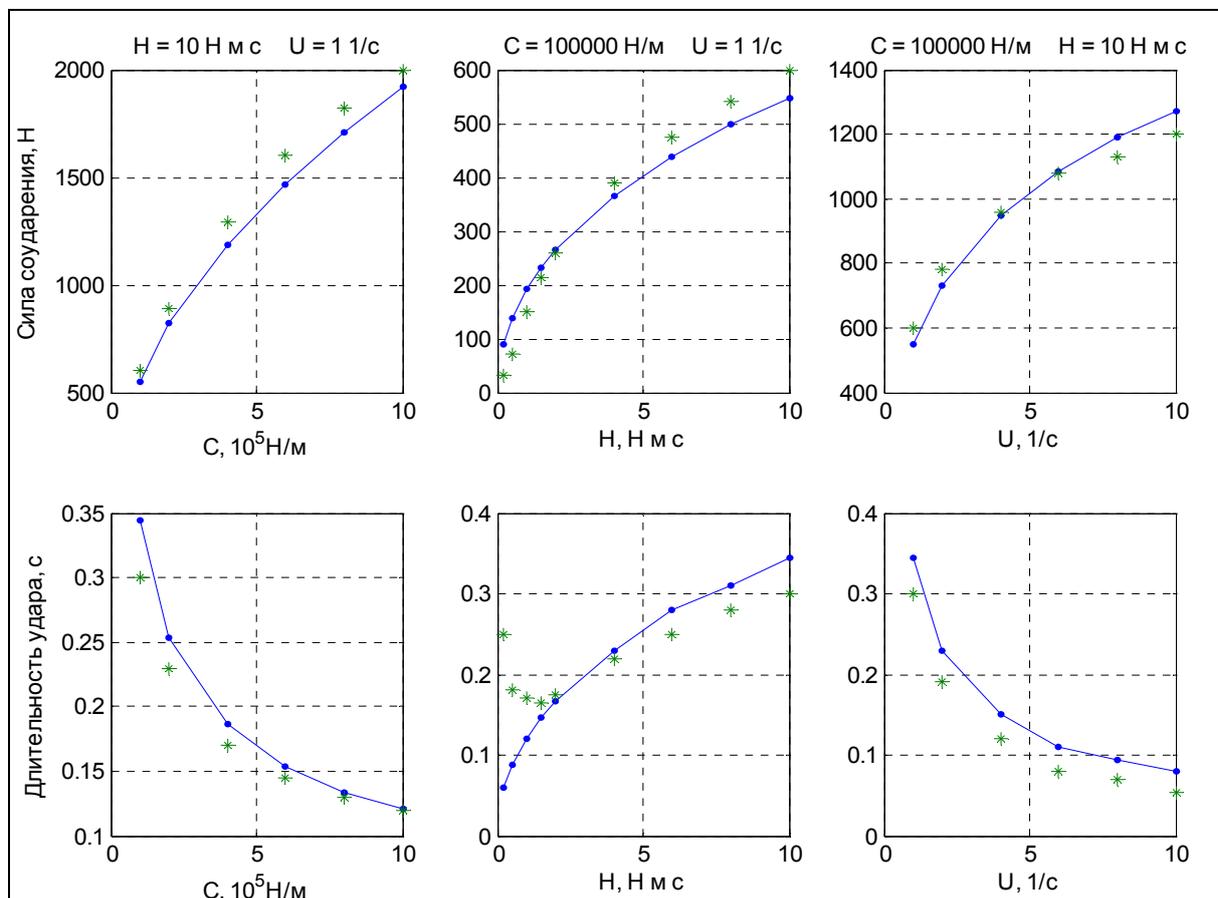


Рис. 2. Сопоставление результатов расчета по формулам и моделирования  
 —●— — теория; \* — моделирование

Особенно интересно проследить на модели, как изменяется картина соударения при уменьшении кинетического момента гироскопа (что и происходит на практике, так как гироскоп находится в режиме выбега). На рис. 3 показаны результаты моделирования при  $H = 0,1$  Н м с. Эти результаты не могут быть получены теоретически, так как упругая связь через упоры является неудерживающей.

Как видим, в этом случае наблюдается значительно повышающаяся роль высокочастотных колебаний силы упора, период которых совпадает с периодом нутационных колебаний гироскопа (около 100 Гц). В результате гироскоп испытывает действие не плавно меняющейся по величине силы в течение всей длительности соударения, а ряд значительно более частых следующих один за другим ударов чрезвычайно малой длительности (порядка 5 мс) и достаточно больших по амплитуде (до 45 Н при  $H = 0,2$  Н м с). Именно такой режим соударения является наиболее опасным и его следует избегать.

На рис. 4 показан результат учета демпфирования в упоре. Из него следует,

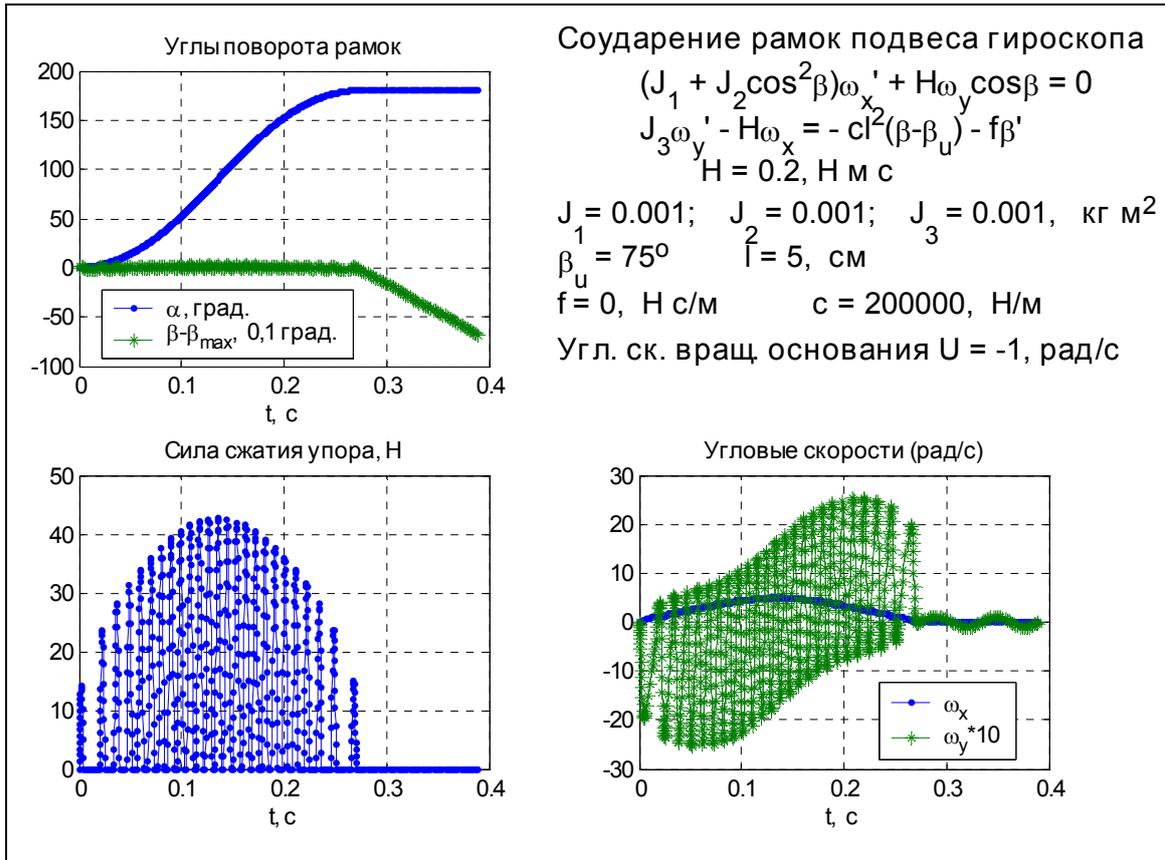


Рис. 3. Малый кинетический момент гироскопа

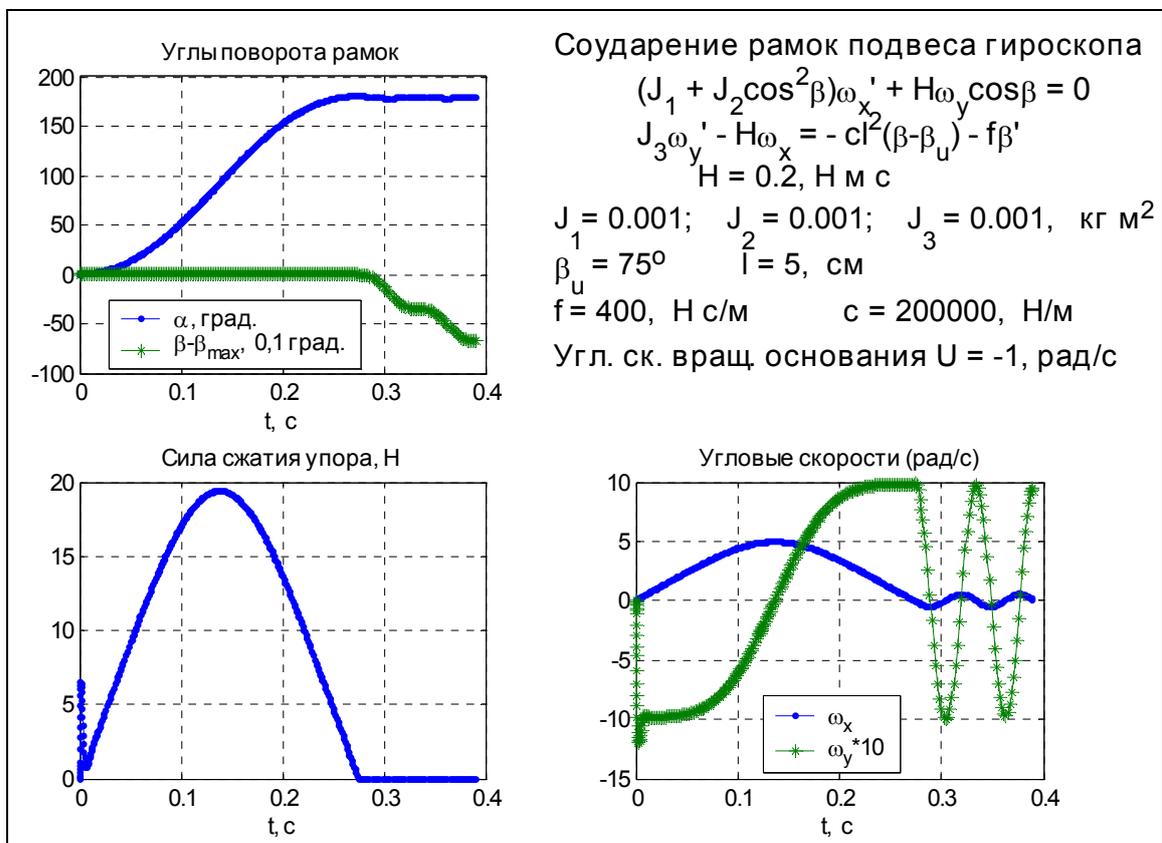


Рис. 4. Влияние демпфирования в упорах

что введение демпфирования позволяет избежать этого опасного явления и одновременно уменьшить величину максимальной силы соударения.

### Выводы

1. Полученные теоретические формулы удовлетворительно качественно и количественно отображают процесс соударения рамок карданового подвеса гироскопа при вращении основания и могут быть использованы при проектировании гироскопических приборов. Однако при малых значениях кинетического момента гироскопа, когда амплитуда возникающих нутационных колебаний становится настолько значительной, что происходит многочисленные отрывы гироскопа от упора в процессе соударения, полученными формулами пользоваться нельзя, так как в этом случае связь рамок карданового подвеса становится неудерживающей.

2. Главным фактором уменьшения силы соударения является уменьшение жесткости упоров. Уменьшение жесткости упора в 10 раз приводит к уменьшению силы соударения в 3,5 раза.

3. Наиболее опасным соударение становится при малом значении кинетического момента, что типично для рассматриваемых режимов. В этом случае соударение представляет собой ряд следующих друг за другом силовых ударов чрезвычайно малой длительности и достаточно больших по амплитуде. Эффективным способом борьбы с этим явлением является усиление демпфирующих свойств упора.

4. Полученные результаты могут быть полезными для проектирования гироскопических приборов.

Изложенный метод теоретического исследования путем предварительного определения основных характеристик движения программным моделированием полных уравнений может быть с успехом использован в теории гироскопических приборов и устройств, инерциальной ориентации и навигации.

<p>Лазарев Ю.Ф. <b>Зіткнення рамок карданового підвісу гіроскопа</b> Розглянуто теоретично і промодельовано процес зіткнення рамок карданового підвісу гіроскопа за обертання основи з постійною кутовою швидкістю. Виведено формули, які дозволяють оцінювати величину сили, що діє на упори. Показана їх задовільна збіжність з результатами моделювання. Надані рекомендації щодо зменшення сили зіткнення і її впливу на міцність упорів. <b>Ключові слова:</b> гіроскоп в кардановому підвісі, зіткнення рамок, динаміка, міцність, моделювання</p>	<p>Lazarev Yu F. <b>The collision framework gimbals of the gyroscope</b> The theoretical and simulated collision process framework gimbals of the gyroscope by rotating basis with a constant angular velocity. We derive a formula to measure the force acting on the stop. Shown them satisfactorily converge with the simulation results. Recommendations to reduce the impact force and its influence on the strength of stops. <b>Keywords:</b> gyroscope on gimbals, the collision of frames, dynamics, durability, modeling</p>
--	--

Надійшло до редакції  
22 лютого 2010 року