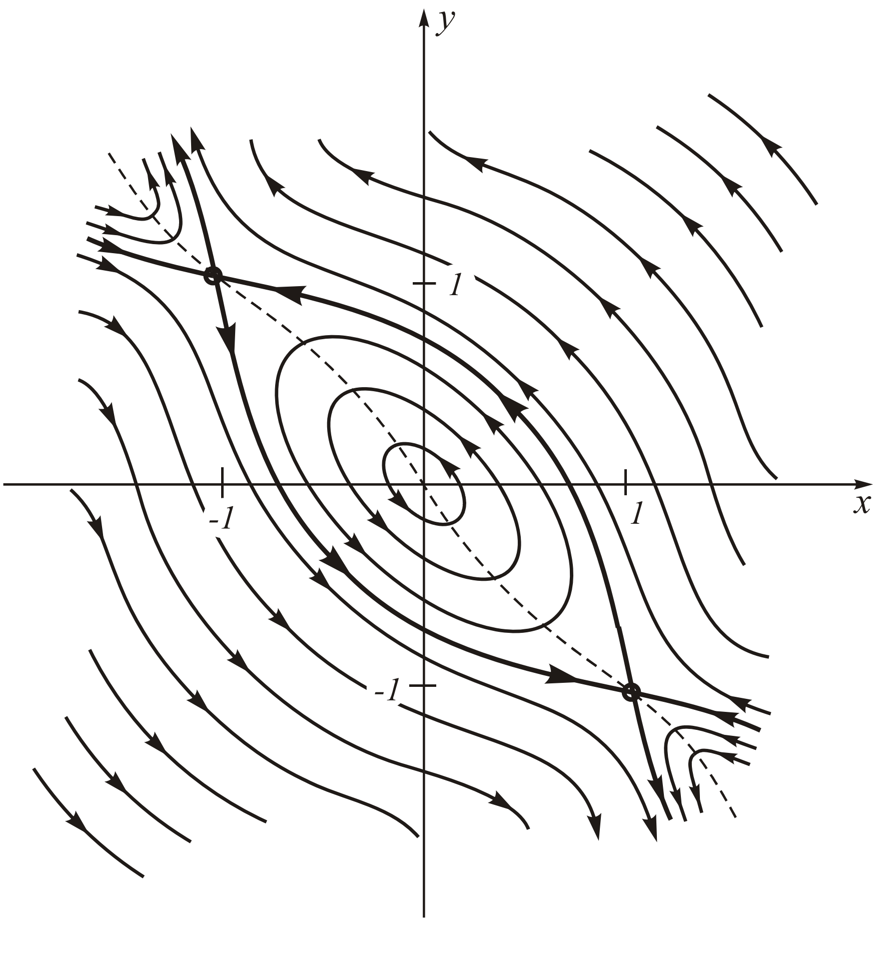
Ю. Ф. Лазарєв

MATLAB і моделювання динамічних систем

Навчальний посібник

Глава 5
Моделювання динамічних систем



Київ – 2009

УДК 681.3(0.75)
Л17

Лазарєв Ю. Ф.
Л17 MATLAB і моделювання динамічних систем. Навчальний посібник. Глава 5. Моделювання динамічних систем. – Київ: НТУУ "КПІ", 2009. – 65 с.

Зміст

5. Моделювання динамічних систем

5.1. Моделі і моделювання

Моделювання є основою пізнання людиною навколишнього світу. Проводячи експерименти, теоретичні досліджування, навіть обговорювання власних дій, намірів, висновків, ми практично здійснюємо моделювання. Цілі, задачі, засоби й методи моделювання у цих випадках значно відрізняються один від одного, але загальна спрямованість залишається єдиною - *одержання нового знання шляхом випробування (досліджування) деякого замінника реального об'єкта дослідження - моделі.*

Взагалі, спрощено, моделювання можна розглядати як певний експеримент, об'єктом якого у першому випадку є матеріальний аналог досліджуваного об'єкта, у другому випадку об'єктом випробувань є знакова (математична) модель, у третьому - відношення до моделі, яка обмірковується, з боку громади.

Поняття моделі можна визначити у такий спосіб:

модель – це природний або штучний реальний об‘єкт, який має певну відповідність до другого реального об‘єкта (оригінала), поводження якого потрібно вивчити, або до деяких сторін оригінала, які потребують вивчення.

У *процесі дослідження моделі* (який називають *моделюванням*) вона постає у якості відносно самостійного квазі-об‘єкта, який дозволяє шляхом його дослідження одержати деяке опосередковане знання про оригінал.

У випадку експериментальних досліджень моделлю є реальний об'єкт, який має ту саму фізичну природу, що й досліджуваний об'єкт. При теоретичних досліджуваннях модель має знакову форму - математичних формул, співвідношень, рівнянь, а задачею моделювання є встановлення нових знань про об'єкти, що описуються цими співвідношеннями. Обговорення встановлює слушність тих припущень і висновків, які були зроблені, шляхом моделювання відношення до них досвідчених співрозмовників.

Пізнання за допомогою моделювання, як це випливає з зазначеного, складається з наступних етапів:

1) побудова моделі або обрання її з існуючих;
2) дослідження моделі з потрібного боку – власне моделювання;
3) перенесення вивчених властивостей моделі на властивості оригінала, тобто виявлення поводження оригіналу за одержаними відомостями про вивчені властивості моделі.

До моделювання вдаються тоді, коли потребують пізнання деяких властивостей об‘єкта вивчення, але при цьому сам об‘єкт є недосяжним, або його вивчення наштовхується на значні труднощі і незручності . За таких обставин *одним з найважливіших етапів здійснення моделювання є утворення* (або обрання) спеціального реального об‘єкта дослідження – *моделі* – з наступними властивостями:

- він має властивості, що є подібними до відповідних властивостей об‘єкта досліджування (оригінала), які потребують досліджування;

- він є більш доступним, більш простим і зручним для досліджування, аніж оригінал, щоб можливо було безпосередньо дослідити бажані властивості.

Як бачимо, щоб утворити (побудувати) модель, з одного боку, потрібно щось знати про об‘єкт досліджування (щоб бути впевненим, що в ній збережені досліджувані властивості), хоча, з іншого боку, знання про об‘єкт досліджування обов‘язково є неповними (інакше створення моделі не матиме сенсу). Тобто модель не потрібно утворювати, коли в об‘єкті досліджування не має властивостей, які потрібно дослідити, і неможливо створити, коли про об‘єкт досліджування не відомо нічого.

У подальшому обмежимося розглядом науково-технічного моделювання, тобто моделювання технічних (штучно створюваних) об‘єктів на грунті наукових знань про поводження таких об‘єктів. Наукові знання базуються на математичном формулюванні головних властивостей об‘єкта. Тому опис поводження об‘єкта у вигляді математичних співвідношень, рівнянь (алгебричних, диференційних або інтегральних) є основою як для побудови моделі, так і для перенесення результатів моделювання на оригінал.

Зупинемося більш докладно на головних видах моделей.

Якщо модель відбудовується на основі реального об‘єкта тієї самої фізичної природи, що й у оригінала, її називають *фізичною моделлю*.

Перевагою створення фізичної моделі є те, що, завдяки тому, що модель і оригінал підпорядковуються тим самим закономірностям, для створення моделі можна не знати конкретних математичних співвідношень і рівнянь, що описують поводження орігіналу і моделі. Відповідність властивостей моделі і оригінала забезпечується автоматично.

Недоліком є необхідність:

- створення (проектування і виробництва) реального технічного об‘єкта (моделі), хоча зазвичай більш простого, аніж оригінал;
- проведення експериментальних досліджень (випробувань) цього технічного об‘єкта.

Це потребує значних витрат коштів, часу, кваліфікованих людських ресурсів, використання коштовного обладнання.

До фізичного моделювання вдаються, у головному, тоді, коли рівняння, що описують процес або явище, є невідомими або наближеними. Тому будується така модель, про яку можна заздалегідь сказати, що її рівняння такі самі, як й оригінала, причому не знаючи цих рівнянь. Це цілком можливо у випадку, коли модель є зменшеною (або збільшеною) копією оригінала або є тим самим орігіналом, але в інших умовах або з деякими зміненими масштабами.

Інший підхід – створювати матеріальну модель іншої фізичної природи, закономірності якої є аналогічними до закономірностей фізики оригіналу. Відповідна модель називається *аналоговою*. При цьому зазвичай найбільш зручним є обрання моделі електричної природи, бо електроелементи є найбільш доступними, невеликими за розміром, дешевими. За їх допомогою досить просто утворювати вельми складні системи з різноманітними властивостями. Досить просто і дешево забезпечити випробування електричних систем. Це складає головну перевагу аналогового моделювання. Неважко угледити і недоліки такого моделювання. У цьому випадку потрібно заздалегідь знати математичні співвідношення і рівняння поводження оригіналу, щоб забезпечити їх відворення при побудові аналогової моделі з використанням елементів іншої фізичної природи.

Найбільш дешевим і швидким є *математичне моделювання*, коли природа утворюваної моделі є *знаковою*. *Математична* (теоретична) модель заміщує собою оригінал тільки в інформаційному сенсі, не маючи нічого спільного з оригіналом ані в матеріальній його природі, ані в енергетичному відношенні. Спільним є лише взаємозв‘язок між реальним зв‘язком між фізичними величинами оригінала, з одного боку, і математичним зв‘язком між знаками, відображуючими ці величини в математичній моделі – з іншого боку.

Суто знакова (теоретична) модель оперує лише знаками, що відповідають фізичним величинам оригіналу. Задачею теоретичного моделювання є відшукати узагальнений розв‘язок рівнянь, які подають математичну модель, не задаючи конкретні числові значення знакам в рівняннях, що відповідають незмінним величинам. Якщо вдається відшукати такий узагальнений теоретичний розв‘язок, то стає можливим дослідити поводження оригіналу за довільних значень параметрів і, отже, обрати такі значення цих параметрів (якщо їх можна на практиці змінювати у широких межах), які забезпечували би найоптимальніше поводження оригіналу (технічного об‘єкта). Тому, якщо вдається відшукати такий розв‘язок, теоретичне моделювання є найбільш доцільним.

Але математика не є всесильною. Загальний теоретичний розв‘язок вдається відшукати далеко не для усіх видів рівнянь. Наприклад, такий розв‘язок мають лише лінійні звичайні диференційні рівняння з постійними коефіцієнтами. Загальних методів розв‘язування нелінійних диференційних рівнянь і лінійних зі змінними коефіцієнтами наразі не існує. У цих випадках доцільніше відшукувати розв‘язки рівнянь чисельними методами, застосовуючи обчислювальну техніку. Програмну модель, призначену для чисельного моделювання можна називати *чисельною математичною моделлю*. Саме про побудову таких моделей і проведення моделювання за ними йдеться далі.

5.1.1. Математика й реальність

Розповсюджений погляд, що математика - це специфічна мова. Ця думка має певне підґрунтя. Математика має усі ознаки мови. У зв‘язку з цим постають деякі практичні питання, пов‘язані із застосуванням математики у житті.

Завдяки певним рисам сучасного викладання математики у школі, іноді частина випускників сприймає математику як зібрання (зведення) деякої кількості правил, які мають до дійсності досить мале відношення, а у головному вигадані людьми - математиками. Це уявлення може бути досить стійким і підтримується в учнях завдяки тому, що головне наполягання у викладанні математиці здійснюється часто-густо не на задачі з життя, а на виконання математичних вправ, в яких головне - не відкрити для себе щось нове у оточуючому житті, а міцно закріпити математичні правила оперування з математичними об'-

єктами. Це те саме, що при вивченні мови замість опанування змістом нових слів, вивчати лише правила граматичного поєднання слів у речення. Таке уявлення про математику глибоко хибне й шкідливе. Варто нагадати, що саме завдяки досягненням математики, людство спромоглося піднятися на сучасний рівень цивілізації.

Зазначимо, що *будь-яка мова складається не лише з правил побудови слів та речень. Найважливішою складовою кожної мови є її змістовна частина*, тобто ділянка реальної дійсності, що описується за допомогою цієї мови. Без такої ділянки немає й самої мови. Без встановлення змістового зв'язку між словами мови й об'єктами дійсності, які вони позначають, немає сенсу і вести мову про мову. Власне *мову й призначено задля відображення частини реальної дійсності, зберігання й передавання інформації про неї*.

У математиці як мові є також ділянка дійсності, про яку математика розповідає. Наприклад, арифметика розмовляє з нами про деякі однорідні речі (предмети), надаючи можливість висновувати про їхні кількісні відношення і про їхнє змінювання при реальному оперуванні цими речами.

Коли ми пишемо $m+n$, то розуміємо, що маємо купу з m однакових предметів і іншу купу з n таких предметів і додаємо предмети з другої купи до першої. При цьому неявно припускається, що кожна річ із кожної купи існує окремо, незалежно від інших, має деяку стабільність (не змінюється з часом), займає деяку ділянку простору, може переміщуватися у просторі, не змінюючись, може приєднуватися до інших предметів, не змішуючись із ними. І всі ці особливості не вигадані, вони взяті зі спостережень за реальними речами, наприклад, за стадами тварин тощо. Саме із реальної дійсності узята й сама операція додавання, яка математично узагальнює реальні дії по переміщенню окремих речей з одного місця у друге, де вже розміщено інші аналогічні речі. Саме із практики, завдяки простому перераховуванню, було встановлено, що 2+2=4. Подібна операція зворотного напрямку (коли з купи речей відбираються окремі речі і переносяться у інше місце) була названа у математиці відніманням. А через те, що практично усі математичні дії походять з операції додавання як головної, то можна висновувати, що *уся математика спирається саме на описані властивості речей і дії з ними.*

Отже, практично усі *властивості математичних об'єктів узяті з реальної дійсності і лише дещо узагальнені*. При цьому варто дати собі раду у тому, що математичні дії й оператори мають відношення зовсім не до будь-якої сфери дійсності, а лише до таких її частин, які мають вищезазначені властивості.

Перш за все до таких властивостей відноситься *існування фізичної операції додавання*, яка має таки властивості:

- *асоціативності*: $a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c)$; ця властивість (*результат рахунку не залежить від того, у якому порядку здійснюється додавання*) має належати реальній операції додавання речей, які переліковуються;
- *комутативності*: $a+b=b+a$; *результат додавання не залежить від того, до якої купи додаються речі з інших куп*; ця властивість теж

не є вигаданою, вона має належати реальній операції додавання речей;

- *наявність нуля* - *є місце, а в ньому немає речей*; і ця властивість має виконуватися у дійсних операціях із речами, що перераховуються;
- *операція додавання має приводити до результату, який кількісно перевищує кожний з доданків.*

Якщо хоча б одна із зазначених властивостей на практиці не властива фізичній операції додавання, до цих речей не можна прикладати математичні дії. А таких речей безліч у нашому оточенні.

Перш за все до них відносяться так звані *якісні величини*. Наприклад, важко уявити собі реальні операції з речами, внаслідок якої можна було б додавати одна до одній гладкість, гіркоту, або твердість. Деякі з величин можна деяким чином вимірювати, наприклад, твердість матеріалів, або гладкість поверхонь. Але якщо для них неможливо вказати операції їхнього фізичного додавання, яка б мала усі зазначені властивості, такі кількісні величини називають *екстенсивними*. До них, наприклад, можна віднести таку фізичну величину, як температура, а також вищезгадані твердість і гладкість.

Кількісні (тобто такі, які можуть бути тим чи іншим способом виміряні) *величини*, для яких установлено реальну (фізичну) операцію додавання, називають *інтенсивними*. До інтенсивних відноситься більшість фізичних величин. Переміщення, маса тіл, електричний струм, напруга, механічна напруга, сила, моменти сил, час - усе це приклади інтенсивних величин. Деякі з цих величин мають власну фізичну операцію додавання, інші - ні, але можуть бути подані як деякі прості функції від тих величин, що мають таку операцію.

Наприклад, операцією додавання для *довжини* (або *переміщення*) є така, коли початок однієї із двох довжин сполучається з кінцем другої. Результатом при цьому вважається довжина від початку другої довжини до кінця першої. Неважко впевнитися, що за умови розташування довжин вдовж однієї прямої в одному напрямку, така операція матиме усі ознаки операції додавання. У випадку просторового переміщення (або довільного розташування довжин у просторі) аналогічна операція є слушною по відношенню до будь-яких трьох ортогональних напрямків. У цілому в результаті одержуємо правило векторного додавання переміщень у просторі.

Для *часу* операція додавання може виглядати наступним чином: початок другого процесу сполучається з кінцем першого. Результатом є тривалість від початку першого процесу до кінця другого.

Додавання *мас* збігається з операцією жорсткого з'єднання мас в одну масу.

Додавання *електричних зарядів* полягає у об'єднанні зарядів при дотиканні заряджених тіл.

Величини, що є похідними від тих, що мають операцію додавання, також є інтенсивними. Наприклад, інтенсивною величиною є швидкість, яка визначається як результат ділення переміщення на проміжок часу, протягом якого це переміщення здійснюється, а також прискорення матеріальної точки. Аналогічно, електричний струм, що визначається як відношення приросту електричного заряду до проміжку часу, за який цей приріст відбувся, також є інтенсивною величиною.

Виходячи з того, що усі арифметичні дії (математичні операції віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня, взяття похідної та інтегрування) є похідними від операції додавання, можна зробити висновок, що *у повній мірі математичні висновки торкаються лише інтенсивних величин*. Лише по відношенню до цих величин можна застосовувати усі здобутки математики як мови.

Математика (принаймні, це стосується диференціального й інтегрального зчислень, теорії диференціальних і інтегральних рівнянь) - *це мова про* інтенсивні *величини*, тобто, повторимо, про величини, *які, з одного боку, є вимірюваними (кількісними), а, з іншого боку, мають реальну фізичну операцію додавання*.

5.1.2. Теорія подібності і аналіз розмірностей

Побудова моделі (особливо фізичної і аналогової) потребує виконання наступних попередніх дій.

По-перше, необхідно уточнити задачу моделювання, тобто чітко визначити, які саме властивості оригіналу і в яких нових умовах потребують вивчення.

Далі слід виявити які саме фізичні величини і які параметри описують досліджувані властивості, і які фізичні величини та їхні параметри можуть суттєво впливати на ці властивості (до них обов'язково слід додати ті величини, вивчення впливу яких на поводження оригіналу потрібно вивчити). Усі інші величини і параметри, що характеризують оригінал, утворять множину характеристик оригіналу, які не впливають на досліджування і не входять у сферу цілей моделювання. Майбутню модель тепер слід будувати, встановлюючи останні величини з міркування, щоб модель була якомога більш доступною, простою і зручною для дослідження. При цьому потрібно слідкувати, щоб суттєві характеристики оригіналу зберігалися у моделі.

Виконання усіх перелічених дій ще не гарантує створення моделі, оскільки невідомо, які значення мають одержати суттєві параметри моделі щоб результати моделювання можна було б перерахувати у параметри поводження оригіналу без суттєвих похибок. Науково-обрунтовані методи визначення суттєвих параметрів моделі за заданими суттєвими параметрами оригіналу і переносу результатів моделювання на оригінал встановлюються *теоріей подібності*.

5.1.2.1 Подібність явищ і її ознаки

При протіканні будь-якого досліджуваного процесу змінюються деяки величини, що характеризують стан системи з досліджуваного боку. Ці величини називаються *параметрами процесу*. Система, в якій здійснюються процеси, складається з елементів, які характеризуються власними (зазвичай сталими) параметрами, які називають *параметрами системи*.

При досліджуванні механічних процесів до параметрів процесу відносяться величини сил, переміщень, швидкостей, прискорень, а до параметрів системи – маси тіл, моменти інерції, коефіцієнти тертя, в‘язкості і т.п. У випадку електричних систем параметрами процесу є величини напруг, струмів, електричних зарядів, а параметрами системи – величини індуктивностей, опорів, ємностей тощо.

Параметри системи або можна вважати незмінними протягом усього досліджуваного процесу, або можна враховувати їхнє змінювання у просторі і часі.

Якщо параметри системи змінюються при змінюванні одного чи кількох досліджуваних параметрів процеса (координат), то вони називаються *нелінійними* і, відповідно, система називається *нелінійною*,

Явище складається з сукупності процесів, що описуються рівняннями, які пов‘язують параметри процеса з параметрами системи, записаними в обраній системі відліку. Система головних рівнянь, що визначають певне явище, математично описує механізм цілого класу фізичних явищ. Щоб з нескінченної множини явищ цього класу виділити поодиноке конкретне явище, тобто щоб одержати частковий розв‘язок даної системи диференційних рівнянь, необхідно задати відповідні додаткові умови, так звані *умови однозначності*. Умови однозначності – це ті умови, якими визначаються индивідуальні відмінності явищ певного класу. Вони встановлюються незалежно від механізму процеса, але суттєво впливають на перебіг явищ.

До складу умов однозначності відносяться:

1) фізичні параметри середовища, що є суттєвими для плину процесу;

2) початкові (часові) умови (тільки для нестаціонарних процесів), тобто поля усіх змінних у початковий момент часу;

3) граничні умови, тобто умови взаємодії з оточуючим середовищем (зокрема, поля змінних на межах системи).

Сукупність системи основних рівнянь і умов однозначності принципіально є достатньою для одержання часткового розв‘язку, який визначає досліджуване конкретне явище. Однак точний аналітичний розв‘язок фактично може бути одержаний тільки у виняткових випадках. Набагато більш продуктивним є експериментальне досліджування поодиноких явищ з наступним по можливості більш широким узагальненням одержаних часткових результатів. Для цього потрібно мати науково обрунтовані методи такого узагальнення.

Вченням про науково-обрунтовані методи узагальнення результатів поодиноких експериментів і є теорія подібності.

5.1.2.2. Основні положення теорії подібності

1. Головна задача теорії подібності – виділення серед кожного класу явищ таких груп, у межах яких можливо узагальнення результатів поодиноких експериментів. Розв‘язок цієї задачі показує, що *науково-*

<u>обгрунтоване узагальнення результатів поодиноких експерименів можливо лише у межах групи подібних явищ</u>.

2. *Подібними* називаються фізичні явища, в яких є подібними, тобто *відповідно пропорційними, усі характерні величини*

$$\frac{R_{oi}}{R_{mi}} = k_R = const .$$

Тут позначено:

R_{oi} - деяка характерна скалярна або векторна фізична величина i -ої точки орігіналу;

R_{mi} - відповідна характерна фізична величина відповідної i -тої точки моделі.

При цьому для подібності векторів необхідною є також подібність їхніх компонент по осях систем відліку (тобто паралельність векторів):

$$\frac{R_{oiX}}{R_{miX}} = \frac{R_{oiY}}{R_{miY}} = \frac{R_{oiZ}}{R_{miZ}} = k_R = const .$$

3. *Необхідними і достатніми умовами подібності фізичних явищ є подібність умов однозначності при тотожності (інваріантності) систем основних диференційних рівнянь* (теорема М. В. Кирпичова і А. А. Гухмана).

   Отже, необхідними і достатніми умовами подібності є:

   а) фізична подібність – подібність усіх фізичних параметрів середовища;

   б) подібність полів усіх змінних у початковий момент часу процесу (тільки для нестаціонарних процесів);

   в) подібність умов на межах системи;

   г) інваріантність системи основних диференційних рівнянь по відношенню до подібного перетворення змінних, тобто сумісне виконання рівнянь

   $$F(u_1, u_2,...,u_n) = 0 \quad \text{та} \quad F(c_1u_1, c_2u_2,...,c_nu_n) = 0 .$$

   де $u_1, u_2,...,u_n$ - змінні; $c_1, c_2,...,c_n$ - множники подібного перетворення.

4. *Необхідною же і достатньою ознакою інваріантності системи основних диференційних рівнянь по відношенню до подібного перетворення є* інваріантність (*рівність для відповідних точок полів і відповідних моментів часу*) *деяких безрозмірних* (не маючих фізичної розмірності) *степеневих комплексів з величин*, що характеризують поводження оригіналу і моделі. Ці безрозмірні степеневі комплекси прислуговуються у якості кількісних ознак подібності фізичних явищ і тому називаються <u>критеріями подібності</u>.

5. Для забезпечення подібності фізичних явищ (окрім подібності умов однозначності) достатньо рівності тільки <u>критеріїв, побудованих з величин, що входять в умови однозначності</u> (зазвичай, - параметрів системи і параметрів зовнішніх дій). Тому такі критерії називають <u>визна-</u>

чальними. Рівність решти критеріїв подібності є наслідком подібності фізичних явищ. Тому решта критерієв називаються визначуваними.

6. Уточнене формулювання головної теореми теорії подібності: *необхідними і достатніми умовами подібності фізичних явищ є рівність визначальних критеріїв подібності при наявності подібності умов однозначності.*

5.1.2.3. Аналіз розмірностей

Як випливає з теорії подібності, для науково-обгрунтованої побудови моделі потрібно попередньо відшукати критерії подібності, тобто безрозмірні степеневі комплекси з фізичних величин, що характеризують поводження досліджуваної системи і моделі. Основним методом відшукування критеріїв подібності є аналіз розмірностей. Він дозволяє одержати критерії подібності навіть у тому випадку, коли рівняння, що описують поводження системи, невідомі, відомі лише усі параметри, які однозначно визначають досліджуваний процес, і фізичні розмірності цих параметрів. Таке знання дається зазвичай досвідом і експериментом.

Відшукання критеріїв подібності методом аналізу розмірностей зводиться до наступної послідовності дій:

1) обираються необхідні одиниці вимірювання величин, що є суттєвими для опису досліджуваного процесу; наприклад, для механічних систем такими одиницями можуть бути три - T одиниця виміру часу, L - одиниця виміру переміщень і M - одиниця виміру маси; для електричних систем можна обрати такі основні одиниці: T - одиниця виміру часу, Q - одиниця виміру електричного заряду і V - одиниця виміру електричної напруги;
2) розмірності усіх параметрів системи, включаючи змінні і умови однозначності, виражаються через обрані одиниці виміру;
3) з числа постійних параметрів системи і зовнішніх сил обираються кілька з незалежними розмірностями (тобто з такими розмірностями, щоб жодну з них не можна було б подати у вигляді степеневого комплексу, складеного з розмірностей решти); очевидно, кількість таких *базових параметрів* буде дорівнювати або меншим за кількість основних одиниць виміру (3 – для механічних систем, 3 – для електричних систем);
4) відшукуються безрозмірні степеневі комплекси (критерії подібності) у вигляді

$$\frac{R_i}{A^{\alpha_i} B^{\beta_i} C^{\gamma_i}}$$

де R_i - деякий i-й параметр системи, який не входить до числа базових; A, B і C - базові параметри; α_i, β_i, γ_i - показники степенів, в які потрібно піднести відповідно розмірності параметрів A, B і C, щоб у знаменнику одержати розмірність параметра R_i;

5) далі, прирівнюючи показники при однакових одиницях виміру у чисельнику і знаменнику степеневого комплексу, одержують значення показників степенів $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, за яких розглядуваний степеневий комплекс стає безрозмірною величиною.

5.1.2.4. Приклади застосування аналізу розмірностей

Розглянемо коливальну механічну систему, яка складається з масивного тіла масою m, яке може переміщуватися вдовж горизонтальної осі X і з‘єднане з нерухомою основою за допомогою пружини з жорсткістю c і демпферу з коефіцієнтом в‘язкого тертя f. На тіло діє гармонічно змінювана у часі сила, амплітуда змінювання якої дорівнює F_m, частота змінювання ω, а початкова фаза - ε. Потрібно відшукати критерії подібності такої системи, враховуючи переходний режим.

До числа параметрів системи у цьому випадку відносяться: m - маса тіла, c - жорсткість пружини і f - коефіцієнт тертя.

Умови однозначності складаються з амплітуди сили F_m, частоти її змінювання ω, початкової фази ε і початкових умов: x_0 - початкового відхилення тіла від положення рівноваги і $\dot{x}_0$ - початкової швидкості.

До параметрів процесу можна віднести: поточний час t протікання процесу, поточне значення x відхилення тіла від положення рівноваги, поточне значення $\dot{x}$ швидкості тіла, поточне значення $\ddot{x}$ прискорення тіла.

Оберемо у якості основних одиниць виміру T одиницю виміру часу, L - одиницю виміру переміщень і M - одиницю виміру маси.

Виразимо розмірності усіх вищезгаданих величин через ці одиниці. Матимемо:

$$\{m\} = M; \qquad \{t\} = T; \qquad \{x\} = \{x_0\} = L; \qquad \{\dot{x}\} = \{\dot{x}_0\} = LT^{-1}; \qquad \{\ddot{x}\} = LT^{-2}$$

$$\{F_m\} = \{m\ddot{x}\} = \{m\}\{\ddot{x}\} = MLT^{-2}; \qquad \{c\} = \frac{\{F_m\}}{\{x\}} = MT^{-2}; \qquad \{f\} = \frac{\{F_m\}}{\{\dot{x}\}} = MT^{-1}.$$

Оберемо як базові три параметра:

m - масу тіла;

c - жорсткість пружини;

F_m - амплітуду змінювання зовнішньої сили.

Неважко впевнитися, що розмірності цих величин є взаємонезалежними. Тоді безрозмірні степеневі комплекси слід відшукувати у формі:

$$\overline{R}_i = \frac{R_i}{m^{\alpha_i} c^{\beta_i} F_m^{\gamma_i}}.$$

Запишемо розмірність цього степеневого комплексу:

$$\left\{\frac{R_i}{m^{\alpha_i} c^{\beta_i} F_m^{\gamma_i}}\right\} = \frac{\{R_i\}}{\{m\}^{\alpha_i}\{c\}^{\beta_i}\{F_m\}^{\gamma_i}} = \frac{\{R_i\}}{M^{\alpha_i}(MT^{-2})^{\beta_i}(MLT^{-2})^{\gamma_i}} =$$

$$= \frac{M^{r_M} T^{r_T} L^{r_L}}{M^{\alpha_i}(MT^{-2})^{\beta_i}(MLT^{-2})^{\gamma_i}} = \frac{M^{r_M} T^{r_T} L^{r_L}}{M^{(\alpha_i+\beta_i+\gamma_i)} T^{-2(\beta_i+\gamma_i)} L^{\gamma_i}}.$$

Тут позначено r_M, r_T, r_L - показники степеня у розмірності параметра R_i у які підносяться відповідно одиниці маси, часу і переміщення.

Для забезпечення безрозмірності степеневого комплексу потрібно розв‘язати систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} \alpha_i + \beta_i + \gamma_i = r_M \\ -2(\beta_i + \gamma_i) = r_T \\ \quad \gamma_i = r_L \end{cases}$$

і визначити у такий спосіб шукані показники $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$.

Неважко впевнитися, що застосування цієї процедури до базових параметрів приводить до того, що відповідні степеневі комплекси дорівнюватимуть одиниці:

$$\overline{m} = 1; \qquad \overline{c} = 1; \qquad \overline{F}_m = 1.$$

Здійснівши вищевказані дії по відношенню до решти параметрів, одержимо наступні критерії подібності:

$$\bar{t} = t\sqrt{\frac{c}{m}}; \quad \bar{x} = x\frac{c}{F_m}; \quad \dot{\bar{x}} = \bar{x}' = \dot{x}\frac{\sqrt{cm}}{F_m}; \quad \ddot{\bar{x}} = \bar{x}'' = \ddot{x}\frac{m}{F_m};$$

$$\bar{x}_0 = x_0\frac{c}{F_m}; \quad \dot{\bar{x}}_0 = \dot{x}_0\frac{\sqrt{cm}}{F_m}; \quad \overline{\omega} = \omega\sqrt{\frac{m}{c}}; \quad \bar{f} = \frac{f}{\sqrt{mc}}.$$

Якщо рівняння руху досліджуваної системи має вигляд

$$m \cdot \ddot{x} + f \cdot \dot{x} + c \cdot x = F_m \sin(\omega \cdot t + \varepsilon)$$

і якщо ввести позначення

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}; \quad \nu = \frac{\omega}{\omega_0}; \quad \varsigma = \frac{f}{2\sqrt{mc}}; \quad \tau = \omega_0 t; \quad \bar{x}' = \frac{d\bar{x}}{d\tau}; \quad \bar{x}'' = \frac{d^2\bar{x}}{d\tau^2},$$

то це рівняння в безрозмірному вигляді набуде форми

$$\bar{x}'' + 2\varsigma \cdot \bar{x}' + \bar{x} = \sin(\nu \cdot \tau + \varepsilon). \qquad \text{(a)}$$

Як бачимо, рівняння у безрозмірному вигляді значно простіше. Його визначають лише три числових параметри - $\varsigma, \nu, \varepsilon$, замість шести у початковому рівнянні.

Здійснимо аналогічні процедури по відношенню до фізичного маятника, момент інерції якого відносно його осі підвісу дорівнює J, опорний маятниковий момент - mgl (m - маса маятніка, g - прискорення сили тяжіння, l - зміщення центру мас відносно осі обертання маятника), R - коефіцієнт в‘язкого тертя у підшипниках осі обертання маятника. На маятник навколо осі маятника діє момент сил, який змінюється з часом за гармонічним законом з частотою ω, амплітудою M_m і початковою фазою ε.

У цьому випадку параметрами системи є J, R, mgl, параметрами процесу – величини поточного кута φ відхилення маятника від вертикалі, кутової швидкості $\dot{\varphi}$ і кутового прискорення $\ddot{\varphi}$. До умов однозначності слід віднести M_m, ω, ε, φ_0 і $\dot{\varphi}_0$.

Оберемо ті самі основні одиниці виміру: T - часу, L - переміщеня і M - маси. Тепер можна виразити розмірності усіх вищевказаних параметрів у такий спосіб:

φ, ε - безрозмірні величини за визначенням;

$\{J\} = ML^2$; $\{mgl\} = ML^2T^{-2}$; $\{R\} = ML^2T^{-1}$; $\{t\} = T$;

$\{\dot{\varphi}\} = \{\dot{\varphi}_0\} = T^{-1}$; $\{\ddot{\varphi}\} = T^{-2}$; $\{M_m\} = ML^2T^{-2}$; $\{\omega\} = T^{-1}$.

Тут вже неможливо обрати три базові параметри, а лише два. Оберемо базовими параметрами момент інерції J і опорний момент mgl. Тоді відповідні критерії подібності дорівнюватимуть:

$$\bar{J} = 1; \quad \overline{mgl} = 1; \quad \tau = \bar{t} = t\sqrt{\frac{mgl}{J}}; \quad \bar{R} = \frac{R}{\sqrt{mgl \cdot J}}; \quad \bar{\omega} = \omega\sqrt{\frac{J}{mgl}};$$

$$\bar{\dot{\varphi}} = \varphi' = \dot{\varphi}\sqrt{\frac{J}{mgl}}; \quad \bar{\dot{\varphi}}_0 = \varphi_0' = \dot{\varphi}_0\sqrt{\frac{J}{mgl}}; \quad \bar{\ddot{\varphi}} = \varphi'' = \ddot{\varphi}\frac{J}{mgl}; \quad \bar{M}_m = \frac{M_m}{mgl}.$$

Введемо позначення:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}}; \quad \tau = \omega_0 t; \quad \varphi' = \frac{d\varphi}{d\tau}; \quad \varphi'' = \frac{d^2\varphi}{d\tau^2}; \quad \nu = \frac{\omega}{\omega_0};$$

$$\varsigma = \frac{\bar{R}}{2} = \frac{R}{2\sqrt{mgl \cdot J}}.$$

Тоді, якщо рівняння руху фізичного маятника має вигляд

$$J \cdot \ddot{\varphi} + R \cdot \dot{\varphi} + mgl \cdot \varphi = M_m \sin(\omega \cdot t + \varepsilon),$$

то відповідне рівняння у безрозмірній формі набуде вигляду

$$\varphi'' + 2\varsigma \cdot \varphi' + \varphi = \bar{M}_m \sin(\nu \cdot \tau + \varepsilon). \qquad (6)$$

Нарешті розглянемо електричний коливальний контур, який складається з послідовно з‘єднаних котушки індуктивності з індуктивністю L, резистора з опором R, конденсатора з ємністю C і джерела електрорушійної сили (е.р.с.), який виробляє гармонічно змінювану е.р.с. з амплітудою E_m, частотою ω і початковою фазою ε. Параметрами цієї системи є поточне значення заряду q на кондесаторі, електричний струм $i = \dfrac{dq}{dt}$ у контурі і напруги на індуктивності, резисторі і конденсаторі.

У цьому випадку оберемо такі головні одиниці виміру: T - одиниця виміру часу, Q - одиниця виміру електричного заряду і V - одиниця виміру електричної напруги. Тоді розмірності визначальних параметрів можна подати у такий спосіб:

$\{t\} = T$; $\{\omega\} = T^{-1}$; $\{E_m\} = V$; $\{q\} = \{q_0\} = Q$; $\{i\} = \{i_0\} = QT^{-1}$;

$\left\{\dfrac{di}{dt}\right\} = QT^{-2}$; $\{L\} = VQ^{-1}T^2$; $\{R\} = VQ^{-1}T$; $\{C\} = V^{-1}Q$.

Оберемо у якості базових параметрів індуктивність L, ємність C і амплітуду е.р.с. E_m. Проводячи відшукування критеріїв подібності, дійдемо:

$$\overline{L}=1; \quad \overline{C}=1; \quad \overline{E}_m=1; \quad \bar{t}=\frac{t}{\sqrt{L\cdot C}}; \quad \overline{\omega}=\omega\sqrt{L\cdot C};$$

$$\overline{q}=\frac{q}{CE_m}; \quad \bar{i}=\frac{i}{E_m}\sqrt{\frac{L}{C}}; \quad \overline{q}_0=\frac{q_0}{CE_m}; \quad \bar{i}_0=\frac{i_0}{E_m}\sqrt{\frac{L}{C}}; \quad \overline{R}=R\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Використовуючи позначення:

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad \tau=\omega_0 t; \quad \overline{q}'=\frac{d\overline{q}}{d\tau}; \quad \overline{q}''=\frac{d^2\overline{q}}{d\tau^2}; \quad \nu=\frac{\omega}{\omega_0};$$

$$\varsigma=\frac{\overline{R}}{2}=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}},$$

можна рівняння електричного коливального контуру

$$L\frac{di}{dt}+R\cdot i+\frac{1}{C}q=E_m\sin(\omega\cdot t+\varepsilon)$$

подати у безрозмірному вигляді у такий спосіб:

$$\overline{q}''+2\varsigma\cdot\overline{q}'+\overline{q}=\sin(\nu\cdot\tau+\varepsilon). \qquad \text{(в)}$$

Порівнюючи рівняння (а, б, в), можна зробити деяки попередні висновки:

1) рівняння руху деяких матеріальних систем, навіть різної фізичної природи, у безрозмірній формі можуть набувати практично ідентичного вигляду;

2) завдяки цьому виникають можливості:

- розповсюджувати результати поодинокого експерименту на поводження цілого класу подібних явищ або тієї самої фізичної природи, або навіть зовсім іншої фізичної природи;
- проводити дослідження поводження оригіналу на основі експериментів з моделями або тієї самої фізичної природи, або іншої фізичної природи.

5.1.2.5. Застосування теорії подібності для побудови моделей

Подання параметрів досліджуваного процесу у вигляді безрозмірних критеріїв подібності надає широкі можливості у побудові моделей цього процесу. Наприклад, досліджування поводження механічної коливальної ланки, що описується рівнянням (а) можна здійснити:

1) на основі моделі того самого типу (маси з пружно-демпфіруючим зв‘язком з основою), але з зовсім іншими (більш доступними для дослідника) характеристиками маси, жорсткості пружини і амплітуди зовнішньої сили; до такого моделювання вдаються, коли потрібно вивчити поводження об‘єкта або надто великих, або надто малих розмірів, виготовлення і експериментування з якими потребує великих втрат, чи взагалі неможливе;

2) на основі електричної моделі, що описується рівнянням (в); у цьому випадку замість виготовлення і проведення експериментів з механічною моделлю, що є досить складною справою, достатньо зібрати електричний контур з досить великого асортименту індуктивностей, резисторів і конденсаторів, підключити його до джерела змінної напруги і, проводячи екперимент, вимірювати

струм і напруги за допомогою також досить великого і досяжного набору електричних вимірювачів (амперметрів і вольтметрів).

Розглянемо більш докладно побудову моделі, моделювання і розповсюдження результатів моделювання на поводження оригіналу у цих двох випадках.

Отже, нехай потрібно дослідити поводження механічної коливальної системи (оригіналу) з такими заданими значеннями її характеристик - m_O, f_O, c_O, $F_{mO}, \omega_O, \varepsilon_O, x_{0O}, \dot{x}_{0O}$, де індекс O позначає, що відповідний параметр відноситься до оригіналу.

Припустимо, що потрібно провести ці дослідження на механічному аналозі цієї системи. З того, що у якості базових параметрів при відшуканні критеріїв подібності обрані величини маси, жорсткості пружини і амплітуди діючої зовнішньої сили, випливає, що вказані величини у моделі можуть бути обрані дослідником довільними, виходячи з умов доступності, простоти експериментування, дешевизни тощо. Позначимо обрані значення цих величин через $m_м, c_м$ і $F_{mм}$, де индекс "$м$" позначає, що відповідні параметри характеризують модель.

Щоб забезпечити подібність явищ в моделі і оригіналі, достатньо обрати решту параметрів моделі з умови рівності критеріїв подібності, що відповідають умовам однозначності. У розглядуваному випадку цих критеріїв чотири - $\zeta, \nu, \bar{x}_0, \bar{\dot{x}}_0$. Отже, має бути забезпечено виконання наступних співвідношень між параметрами оригіналу і моделі:

$$\varsigma_O = \frac{f_O}{2\sqrt{m_O c_O}} = \varsigma_м = \frac{f_м}{2\sqrt{m_м c_м}}; \qquad \overline{\omega}_O = \omega_O\sqrt{\frac{m_O}{c_O}} = \overline{\omega}_м = \omega_м\sqrt{\frac{m_м}{c_м}};$$

$$\bar{x}_{0O} = x_{0O}\frac{c_O}{F_{mO}} = \bar{x}_{0м} = x_{0м}\frac{c_м}{F_{mм}}; \qquad \bar{\dot{x}}_{0O} = \dot{x}_{0O}\frac{\sqrt{c_O m_O}}{F_{mO}} = \bar{\dot{x}}_{0м} = \dot{x}_{0м}\frac{\sqrt{c_м m_м}}{F_{mм}}.$$

Це означає, що коефіцієнт тертя, частота коливань діючої сили і початкові значення відхилення і швидкості тепер не можуть бути довільними, а мають дорівнювати значенням, підрахованим з попередніх співвідношень на основі заданих значень параметрів оригіналу і обраних значень параметрів моделі:

$$f_м = f_O\sqrt{\frac{m_м}{m_O}}\sqrt{\frac{c_м}{c_O}}; \;\; \omega_м = \omega_O\sqrt{\frac{m_O}{m_м}}\sqrt{\frac{c_м}{c_O}}; \qquad x_{0м} = x_{0O}\frac{F_{mм}c_O}{F_{mO}c_м};$$

$$\dot{x}_{0м} = \dot{x}_{0O}\sqrt{\frac{m_O}{m_м}}\sqrt{\frac{c_O}{c_м}}\frac{F_{mм}}{F_{mO}}.$$

Після встановлення розрахункових значень у моделі, можна проводити екпериментальне її дослідження. Вимірюючи поточне переміщення, час і швидкість тіла у моделі і фіксуючи результати вимірювань, одержимо потрібні залежності $x_м(t_м), \dot{x}_м(t_м)$.

Далі потрібно розповсюдити ці залежності на шукані аналогічні залежності в оригіналі. Це здійснюється також на основі рівності відповідних критеріїв подібності

$$x_O(t) = x_м(t_м)\frac{c_м}{c_O}\frac{F_{mO}}{F_{mм}}; \qquad \dot{x}_O(t) = \dot{x}_м(t_м)\sqrt{\frac{m_м}{m_O}}\sqrt{\frac{c_м}{c_O}}\frac{F_{mO}}{F_{mм}},$$

причому зв'язок між часом t оригіналу і часом $t_м$ моделі (модельним часом) визначається співвідношенням

$$t = t_м\sqrt{\frac{c_м}{c_O}}\sqrt{\frac{m_O}{m_м}}.$$

Цікавою є така обставина. Модельний час можна зробити значно більш швидкоплинним у порівнянні з часом оригіналу, за рахунок, наприклад, обрання таких параметрів моделі, щоб виконувалася нерівність

$$\sqrt{\frac{m_O}{m_м}}\sqrt{\frac{c_м}{c_O}} >> 1.$$

Таке моделювання забезпечує значне скорочення часу дослідження. Цим часто користуються на практиці, наприклад, при моделюванні старіння будівельних конструкцій, аналізі поводження насипів протягом значного часу (десятки років) тощо. Таке моделювання називають іноді "лупою часу".

Тепер перейдемо до аналогового моделювання тієї самої механічної системи на електричній моделі.

З того, що базовими параметрами електричного аналога є індуктивність, ємність конденсатора і амплітуда змінювання е.р.с., ці параметри дослідник може обрати довільно. Позначимо обрані значення через $L_м, C_м$ і $E_{mм}$.

Як і у попередньому випадку для визначення решти параметрів електричного аналога у відповідності до теорії подібності слід забезпечити рівність визначальних критеріїв подібності:

$$\varsigma_O = \frac{f_O}{2\sqrt{m_O c_O}} = \varsigma_м = \frac{R_м}{2}\sqrt{\frac{C_м}{L_м}}; \qquad \overline{\omega}_O = \omega_O\sqrt{\frac{m_O}{c_O}} = \overline{\omega}_м = \omega_м\sqrt{L_м \cdot C_м};$$

$$\overline{x}_{0O} = x_{0O}\frac{c_O}{F_{mO}} = \overline{q}_{0м} = \frac{q_{0м}}{C_м E_{mм}}; \qquad \overline{\dot{x}}_{0O} = \dot{x}_{0O}\frac{\sqrt{c_O m_O}}{F_{mO}} = \overline{i}_{0м} = \frac{i_{0м}}{E_{mм}}\sqrt{\frac{L_м}{C_м}}.$$

З них випливає, що величина опору резистора моделі має визначатися з співвідношення $R_м = \frac{f_O}{\sqrt{m_O c_O}}\sqrt{\frac{L_м}{C_м}}$, величина частоти змінювання е.р.с. визначиться рівністю $\omega_м = \frac{\omega_O}{\sqrt{L_м \cdot C_м}}\sqrt{\frac{m_O}{c_O}}$. При експерименті на моделі слід забезпечити початкову величину заряду на конденсаторі $q_{0м} = x_{0O}\frac{c_O}{F_{mO}}C_м E_{mм}$ і початкове значення струму у контурі $i_{0м} = \dot{x}_{0O}\frac{\sqrt{c_O m_O}}{F_{mO}}E_{mм}\sqrt{\frac{C_м}{L_м}}$. Одержані внаслідок моделювання залежності величини струму в контурі від модельного часу можна перевести у залежність швидкості тіла за формулою

$$\dot{x}_O(t) = i_м(t_м)\frac{F_{mO}}{\sqrt{c_O m_O}}\frac{1}{E_{mм}}\sqrt{\frac{L_м}{C_м}}.$$

При цьому модельний час пов‘язаний з часом оригіналу у такий спосіб:

$$t = \frac{t_м}{\sqrt{L_м \cdot C_м}}\sqrt{\frac{m_O}{c_O}}.$$

Примітки. 1. Звичайно, у розглянутих прикладах матеріальне моделювання не має сенсу, бо наведені рівняння досить просто розв‘язуються теоретично. Але якщо рівняння, що описують поводження оригіналу, є нелінійними і надто складними, моделювання може стати необхідним. Наведені приклади призначені лише для ілюстрації механізма застосування апарату теорії подібності для побудови моделей і розповсюдження результатів моделювання на оригінал.

2. Проведені операції з забезпечення подібності оригіналу і моделі і перерахунку результатів моделювання, основані на застосуванні аналізу розмірностей, не спираються на знання диференційних рівнянь руху. Тому забезпечення подібності можливо навіть тоді, коли рівняння руху взагалі є невідомими. Достатньо лише чітко визначити сукупність фізичних параметрів, які суттєво впливають на досліджуване явище, і встановити їхню фізичну розмірність.

5.1.3. Контрольні запитання

1. Що таке модель?
2. Що розуміють під моделюванням?
3. Що називають параметрами процеса? параметрами системи? умовами однозначності?
4. Що таке критерії подібності?
5. Що називають базовими параметрами в аналізі розмірностей і чому дорівнюють їх безрозмірні аналогі у безрозмірних рівняннях?
6. Які умови слід витримати, щоб модель і оригінал були подібними?

5.2. Етапи розв‘язування інженерних задач на ЕОМ

Результатом розв'язування інженерних (прикладних) задач будь-якого рівня є, як правило, чисельні оцінки (параметрів пристроїв, процесів, технічних і економічних характеристик, тощо), які є наслідком розрахунків, що здійснюються з наближеними первинними даними. *Більшість прикладних задач зводяться до математичних задач, які розв'язуються різноманітними обчислювальними методами.*

Послідовність розв'язуванні таких задач можна подати у виді наступних етапів (рис. 5.1):

1) постановка задачі;
2) створення математичної моделі (формулювання задачі); перевірка моделі на адекватність;
3) побудова розрахункової (обчислювальної) моделі, яка відповідає прийнятій математичній моделі;
4) проведення розрахунків за обраною обчислювальною моделлю при заданих (відомих) значеннях первісних даних;
5) аналіз одержаних результатів.

Розглянемо докладніше кожний з цих етапів.

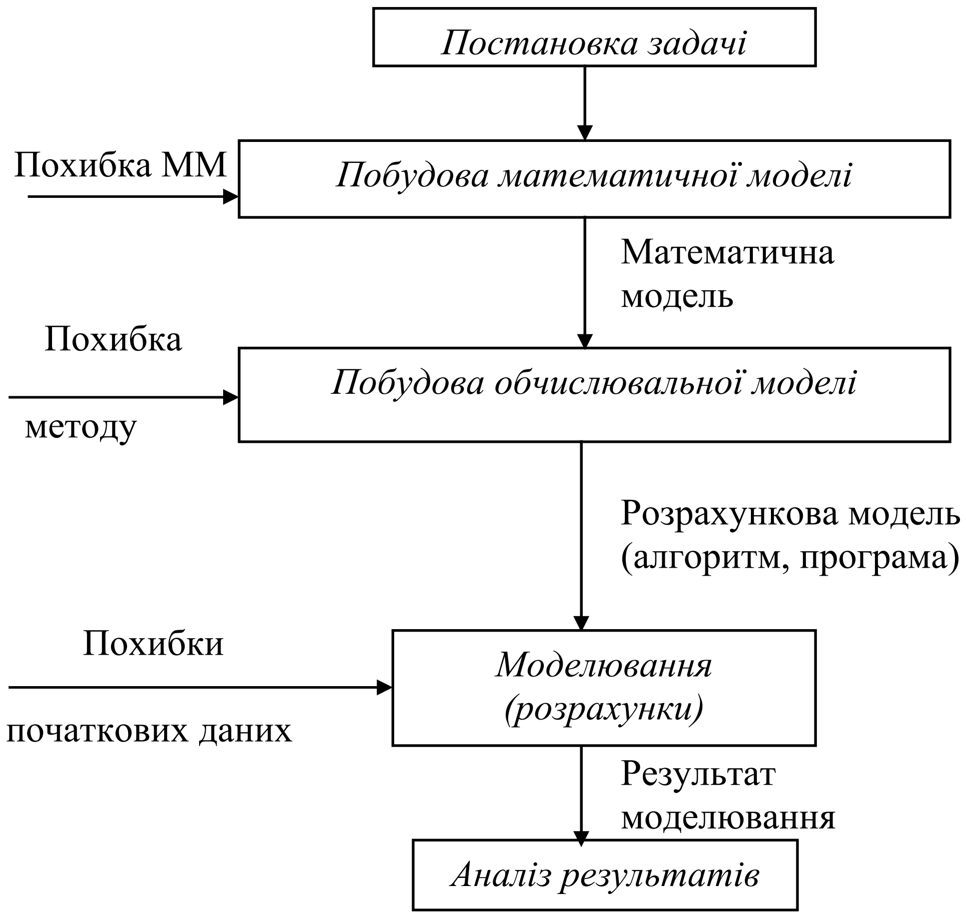


Рис. 5.1. Схема розв'язування інженерної задачі

5.2.1. Постановка задачі

Постановка задачі має передумовою словесне, змістовне формулювання задачі, умов, за яких вона ставиться, та вимог до її розв'язування. Слова "змістовне формулювання" слід розуміти так, що задача має бути сформульована у термінах опису реального об'єкта (технічного пристрою або процесу), поводження якого підлягає вивченню.

Як приклади розглядатимемо такі найпростіші інженерні задачі.

Задача 1. *Визначити характеристики власного руху фізичного маятника за умови малих його коливань.*

Задача 2. *Визначити змінювання швидкості тіла при його падінні, враховуючи опір оточуючого середовища.*

Задача 3. *Відшукати моменти інерції ротора гіроскопа.*

Задача 4. *Визначити характеристики власного руху гіроскопа у кардановому підвісі, а також характеристики його вимушеного руху під дією моментів зовнішніх сил, що діють по осях карданового підвісу і змінюються з часом за гармонічним законом.*

5.2.2. Створення математичної моделі

Математична модель - це математичний опис співвідношень постановки задачі. Такий опис можливий лише на ґрунті попередньо одержаних знань про поводження об'єкта, що вивчається, і про способи правильного й ефективного опису цього поводження у математичних термінах. В одних випадках утворення математичної моделі не складає труднощів (наприклад, модель є відомою заздалегідь за результатами раніше проведених досліджень), а в інших потрібно неодноразове уточнення постановки задачі, виділення головних визначальних чинників, відкидання чинників, які незначно впливають на результат і т.д..

Так, для задачі 1 математична модель може бути утворена, якщо врахувати наступні теоретичні відомості.

1. До характеристик власного руху коливальної ланки, яким є фізичний маятник, відносять:

1) частоту власних коливань;
2) коефіцієнт загасання цих коливань.

2. При малих відхиленнях від вертикалі рух маятника з достатньою точністю описується лінійним диференційним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$J \cdot \ddot{\varphi} + R \cdot \dot{\varphi} + mgl \cdot \varphi = 0, \qquad (5.1)$$

де φ - кут відхилення маятника від вертикалі; J - момент інерції маятника відносно його осі обертання; R - коефіцієнт демпфірування; m - маса маятника; g - прискорення вільного падіння; l - зміщення центра мас маятника відносно осі його обертання; $\dot{\varphi} = \dfrac{d\varphi}{dt}$ - кутова швидкість повороту маятника навколо його осі обертання; $\ddot{\varphi} = \dfrac{d\dot{\varphi}}{dt}$ - кутове прискорення маятника.

3. Власний рух маятника описується співвідношенням

$$\varphi(t) = A \cdot e^{-h \cdot t} \cdot \sin(\omega_o \cdot t + \varepsilon), \tag{5.2}$$

де A - початкове значення амплітуди власних коливань і ε - початкова фаза власних коливань визначаються початковими умовами руху маятника, а ω_o - частота власних коливань та h - коефіцієнт загасання власних коливань - це параметри, які визначаються лише параметрами самого маятника і не залежать від інших чинників. Фактично ω_o і h є шуканими величинами.

4. Величини ω_o і h є відповідно уявною і дійсною частинами пари комплексно спряжених коренів характеристичного рівняння

$$J \cdot p^2 + R \cdot p + mgl = 0, \tag{5.3}$$

яке випливає з диференційного рівняння (5.1), тобто корінь рівняння (5.3) має вигляд:

$$p_{1,2} = -h \pm \omega_o. \tag{5.4}$$

У підсумку розв'язування задачі 1 математично зводиться до *відшукування комплексних коренів квадратного рівняння (5.3) і виділенню їхніх дійсної й уявної частин* за заданими первинними даними - значеннями параметрів J, R та mgl.

В задачі 2 треба припустити, що тіло є матеріальною точкою маси m, з'ясувати, під дією яких сил відбувається падіння тіла, визначити чинники, що впливають на силу опору, встановити залежність сили опору від цих факторів. Якщо вважати, що на тіло діють сила тяжіння $F_1 = mg$ та сила опору, що є пропорційною до швидкості v падіння, тобто $F_2 = -k \cdot v$, то, на основі законів механіки одержимо рівняння $m \cdot a = m \cdot g - k \cdot v$, або

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m} v. \tag{5.5}$$

Це диференційне рівняння із врахуванням початкової умови $v(t_0) = v_0$ і є математичною моделлю задачі.

У задачі 3 насамперед слід з'ясувати форму ротора, його розміри, розподіл мас, потім виділити у тілі ротора ряд частин, відшукування моментів інерції яких робиться досить просто (циліндри, кільця, конуси тощо). Тоді задача зводиться до обчислень моментів інерції окремих елементарних тіл і їхньому підсумовуванню. Формули обчислення моментів інерції окремих частин ротора і їх підсумовування і складуть математичну модель цієї задачі.

Постановка задачі 4 має містити опис власних параметрів системи "гіроскоп у кардановому підвісі", опис параметрів зовнішніх моментів сил, опис рівнянь руху. Наприклад, рівняння руху гіроскопа для цієї задачі можуть бути взяті у наступному вигляді

$$\begin{cases} A \cdot \ddot{\alpha} + H_o \cos\beta_o \cdot \dot{\beta} = N_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varepsilon_1) \\ B \cdot \ddot{\beta} - H_o \cos\beta_o \cdot \dot{\alpha} = L_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varepsilon_2) \end{cases}. \tag{5.6}$$

Тут α і β - кути повороту гіроскопа навколо осей підвісу; A та B - його моменти інерції, H_o - власний кінетичний момент гіроскопа, β_o - початкове значення кута β; $\dot{\alpha} = \dfrac{d\alpha}{dt}$; $\dot{\beta} = \dfrac{d\beta}{dt}$; $\ddot{\alpha} = \dfrac{d\dot{\alpha}}{dt}$; $\ddot{\beta} = \dfrac{d\dot{\beta}}{dt}$; N_m, L_m - амплітуди змінювання моментів зовнішніх сил; ω - частота (колова) цього змінювання; ε_1, ε_2 - початкові фази коливань цих моментів.

За математичну модель у цьому випадку може правити сукупність розв'язків рівнянь (5.6), наведена нижче:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \alpha_o + C_1(1-\cos\lambda t)/\lambda + (C_2\sin\lambda t)/\lambda + F_{1s}(1-\cos\omega t)/\omega + \\
&\quad + (F_{1c}\sin\omega t)/\omega; \\
\beta &= \beta_o + [C_2(1-\cos\lambda t) - C_2\sin\lambda t]\sqrt{\frac{A}{B}}/\lambda + F_{2s}(1-\cos\omega t)/\omega + \\
&\quad + (F_{2c}\sin\omega t)/\omega,
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

де α_0 і β_0 - початкові значення кутів визначаються α і β; $\lambda = \dfrac{H_0\cos\beta_0}{\sqrt{AB}}$ - частота власних (нутаційних) коливань гіроскопа; F_{1s}, F_{1c}, F_{2s}, F_{2c}, C_1, C_2 визначаються сукупністю співвідношень:

$$F_{1s} = -\lambda\cdot(l_s + \sqrt{\frac{B}{A}}\nu\cdot n_c)/(1-\nu^2); \qquad F_{1c} = \lambda\cdot(-l_c + \sqrt{\frac{B}{A}}\nu\cdot n_s)/(1-\nu^2);$$

$$F_{2s} = \lambda\cdot(n_s - \sqrt{\frac{A}{B}}\nu\cdot l_c)/(1-\nu^2); \qquad F_{2c} = \lambda\cdot(n_c + \sqrt{\frac{A}{B}}\nu\cdot l_s)/(1-\nu^2);$$

$$C_1 = \lambda\cdot(\sqrt{\frac{B}{A}}n_c + \nu\cdot l_s)/(1-\nu^2) - \sqrt{\frac{B}{A}}\cdot\dot{\beta}_o;$$

$$C_2 = \lambda\cdot(l_c - \sqrt{\frac{B}{A}}\nu\cdot n_s)/(1-\nu^2) + \dot{\alpha}_o;$$

$$n_s = \frac{N_s\sqrt{AB}}{H_o^2\cdot\cos^2\beta_o}; \quad n_s = \frac{N_c\sqrt{AB}}{H_o^2\cdot\cos^2\beta_o}; \quad l_s = \frac{L_s\sqrt{AB}}{H_o^2\cdot\cos^2\beta_o}; \quad l_c = \frac{L_c\sqrt{AB}}{H_o^2\cdot\cos^2\beta_o};$$

$$N_c = N_m\cdot\sin\varepsilon_1; \; N_s = N_m\cdot\cos\varepsilon_1; \; L_c = L_m\cdot\sin\varepsilon_2; \quad L_s = L_m\cdot\cos\varepsilon_2;$$

$\nu = \dfrac{\omega}{\lambda}$ - відносна частота коливань моментів сил; $\dot{\alpha}_o$ і $\dot{\beta}_o$ - початкові значення кутових швидкостей $\dot{\alpha}$ і $\dot{\beta}$.

Рух гіроскопа за цими співвідношеннями може бути визначений у довільний момент часу.

Але як математичну модель можна також розглядати і первісну систему диференційних рівнянь (5.6) за вказаних початкових умов.

Складання математичної моделі у прикладній задачі є найбільш складним і відповідальним етапом розв'язування і потребує, окрім істотних знань у спеціальній області, також й математичних й теоретичних знань.

Вже на цьому етапі розв'язування прикладної задачі *доводиться нехтувати багатьма реальними процесами*, як такими, що незначно впливають на досліджувані процеси, *абстрагуватися від впливу багатьох чинників*. Інакше кажучи, навіть коректно утворена математична модель завжди неповно, лише наближено. відображає реальні процеси. Але при цьому вона набуває риси більшої ясності, прозорості, більш доступна вичерпному дослідженню (з того боку, який підлягає вивченню).

5.2.3. Математичне моделювання

Модель утворюється задля подальшого її дослідження з метою одержати нові знання про відповідний реальний об'єкт. Таке дослідження вже готової моделі називають *моделюванням*. Дослідження математичної моделі називатимемо математичним моделюванням.

Математична задача є абстрагованою від конкретної сутності задачі. Для її розв'язування створюються спеціальні обчислювальні методи, причому *до тої самої математичної моделі можуть зводитися зовсім різні прикладні задачі*.

Так, задача 1 звелася до розв'язування квадратного рівняння, яке може відображувати характеристичне рівняння не тільки фізичного, але й математичного маятника, маси, яка з'єднана пружиною з корпусом (лінійного акселерометра), гіроскопічного тахометру і т. п.

Диференційне рівняння (5) у задачі 2 може бути моделлю і для багатьох інших задач (вивчення змінювання швидкості тіла у в'язкому середовищі, змінювання електричного струму у найпростішому електричному ланцюзі, змінювання швидкості репродукції бактерій тощо).

Задля розв'язування задачі 3 потрібно обчислити низку визначених інтегралів. До обчислення визначених інтегралів приходять і при відшукуванні площ складних фігур, об'єму тіла або дуги плоскої кривої, розрахунках роботи змінної сили й у багатьох інших фізичних задачах.

Математична модель (7) задачі 4 може описувати не тільки поводження гіроскопу, але й будь-якої іншої системи, якщо диференційні рівняння руху останньої подібні до рівнянь (6).

5.2.4. Побудова обчислювальної моделі

Побудова обчислювальної моделі може здійснюватися різними методами, які можна поділити на *точні* й *наближені*. *Точні методи - це такі, які після скінченої кількості дій (обчислень) приводять до точного результату за умови, що обчислення здійснюються без похибок*. Наближеними називають такі методи, які за тих же умов дозволяють одержати результат лише з деякою похибкою.

При використанні точних методів етап досліджування математичної моделі поділяється на такі підетапи: 1) відшукування точного розв'язку математичної моделі; 2) підставляння вихідних даних у знайдений точний розв'язок і реалізація передбачених ним обчислень.

Наприклад, для розв'язування задачі 1 краще використати точний метод, тобто формулу

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2J} \pm j \cdot \sqrt{\frac{mgl}{J} - (\frac{R}{2J})^2} \qquad (5.8)$$

(припускається, що $mgl / J > [R / (2J)]^2$), але можна застосовувати й наближені способи відшукування коренів квадратного рівняння.

Диференційне рівняння (5.5) задачі 2 краще розв'язувати, розділяючи змінні, тобто приводячи його до вигляду

$$\frac{m}{mg - kv} dv = dt . \qquad (5.9)$$

Однак, його можна розглядати і як лінійне диференційне рівняння зі сталими коефіцієнтами, або розв'язувати (інтегрувати) наближеними чисельними методами.

При розв'язуванні задачі 3 слід використовувати методи наближеного обчислення визначених інтегралів.

Задачу 4 також можна розв'язувати двома шляхами. Розглядаючи систему диференційних рівнянь (5.6) як вихідну математичну модель, можна, з одного боку, знайти точний її розв'язок (5.7), а потім здійснити підставляння значень вихідних даних і дійти явних залежностей $\alpha(t)$ і $\beta(t)$, а отже, й $\alpha(\beta)$. З іншого боку, до системи (5.6) можна безпосередньо застосувати методи чисельного інтегрування диференційних рівнянь (наближені методи).

Досліджування математичної моделі наближеними методами поділяється на такі етапи:

1) обрання обчислювального методу (зазвичай наближених чисельних методів буває декілька);
2) вивчення або складання алгоритму методу;
3) реалізація алгоритму за допомогою обчислювальних засобів.

При виборі чисельного методу суттєвими є *обсяг обчислень*, *швидкість збіжності обчислень* (як швидко здобувається результат) та інші чинники. Зокрема, обрання методу залежить і від вхідних даних.

Крім того, на вибір метода впливають засоби його реалізації (ручний розрахунок, наявність обчислювальної машини, наявність готової програми тощо). Так, якщо буде використані швидкодіюча ЕОМ і готова програма, то обсяг обчислень не має засмучувати виконавця і бути визначальним фактором при обранні метода. При ручному ж розрахункові слід віддати перевагу методу, який, можливо, потребує деяких певних попередніх досліджень і перетворень математичної моделі, але завдяки цьому потребує й значно меншу кількість обчислень.

5.2.5. Алгоритм методу

Алгоритмом методу називається *система правил, яка задає точно визначену послідовність операцій, яка приводить до шуканого результату* (точного або наближеного).

Алгоритм - одне із ґрунтовних понять математики. Хід розв'язування обчислювальної (і взагалі будь-якої) задачі має бути поданий через алгоритм.

Алгоритм можна записати словесно-формульно або у вигляді *схеми*. Так, словесно-формульний опис алгоритму розв'язування задачі 1 за формулою (8) має наступний вигляд:

1. Обчислити $h = \dfrac{R}{2J}$.
2. Обчислити $D = h^2 - \dfrac{mgl}{J}$.
3. Якщо $D < 0$, перейти до п. 7.
4. Обчислити $p_1 = -h + \sqrt{D}$ і $p_2 = -h - \sqrt{D}$.
5. Подати на пристрій виведення інформацію: "Рівняння має два дійсні корені:" і роздрукувати значення шуканих коренів p_1 і p_2.
6. Перейти до п. 8.
7. Вивести на пристрій виведення інформацію:
   "Коефіцієнт загасання дорівнює " і вивести значення h
   "Частота власних коливань дорівнює" і роздрукувати значення $\sqrt{-D}$.
8. Кінець обчислень.

При виконанні алгоритму перехід від однієї дії до іншої здійснюється строго у порядку їхнього запису. Якщо ж потрібно перервати природний хід дій за деякої умови, слід указувати на це (див. п. 3 наведеного алгоритму).

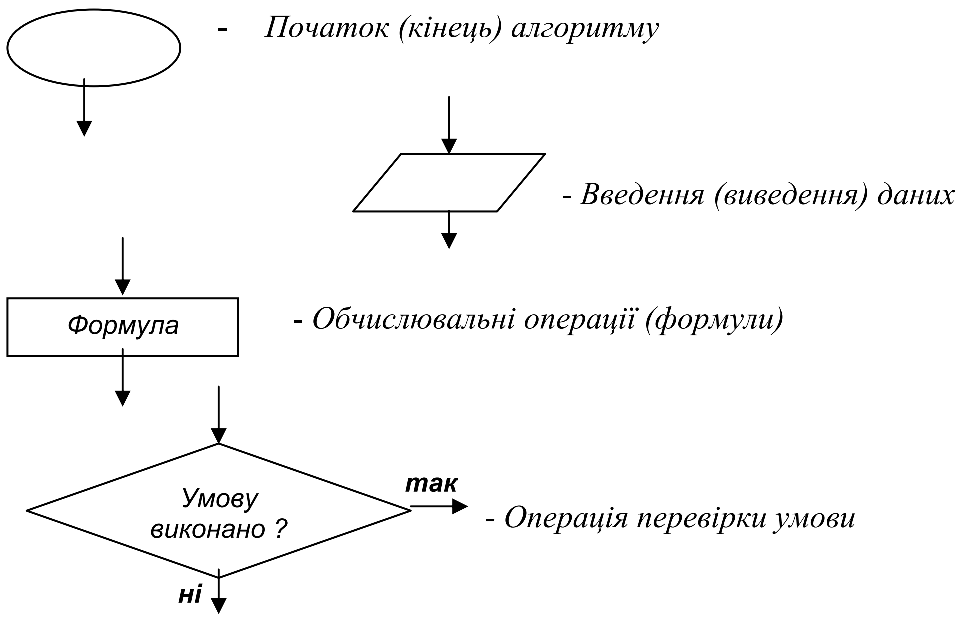


Рис. 5.2. Елементи блок-схеми алгоритму

На рис. 5.2. подані зображуючі елементи блок-схеми алгоритму обчислень. Фігури з'єднуються лініями зі стрілками, які вказують на операцію, до виконання якої слід перейти.

Структурною *схемою алгоритму називають графічне зображення послідовності дій обчислювального процесу*. У схемі кожна дія розміщується у певному геометричному символі (фігурі). Послідовність дій указується на схемі напрямком стрілок на лініях, якими з'єднують ці символи. Зазвичай прийнято *<u>початок і кінець</u>* обчислень зображувати *<u>овалами</u>*, *<u>введення</u>* даних і *<u>виведення</u>* результатів - у вигляді *<u>паралелограма</u>*. *<u>Обчислювальні операції</u>* розміщуються у *<u>прямокутниках</u>*, а операція *<u>перевірки</u>* деякої *<u>умови</u>* зображується у вигляді *<u>ромбу</u>*. Усередині кожної фігури розміщується стислий формульний опис відповідної операції. Символи операцій перевірки умови мають два виходи: "так" і "ні". Стрілка на лінії, що виходить із виходу "так" вказує на операцію, до виконання якої потрібно перейти, якщо умову, яка перевіряється, виконано. Стрілка з написом "ні" вказує на операцію, до виконання якої слід перейти у випадку, коли умову не виконано.

Для прикладу на рис 5.3 зображено схему алгоритму відшукування коренів квадратного рівняння.

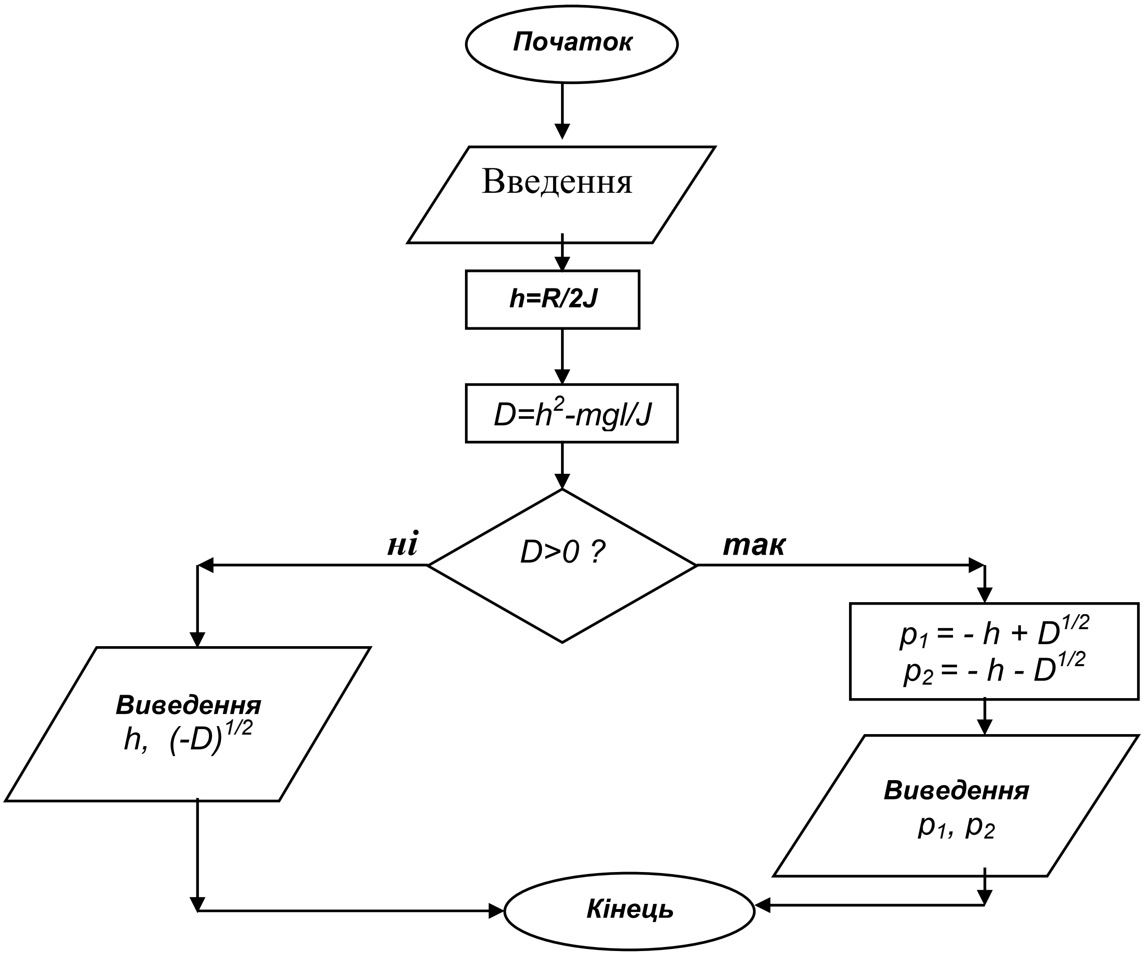


Рис. 5.3. Схема алгоритму відшукання коренів квадратного рівняння

5.2.6. Реалізація методу обчислень

Обчислення по алгоритмах відбувається за допомогою різних обчислювальних засобів.

При ручних (безпосередніх) розрахунках зазвичай використовуються найпростіші обчислювальні засоби: логарифмічна лінійка, таблиці, механічні, електричні, електронні клавішні обчислювальні машини. Проміжні результати дій алгоритму треба записувати у спеціальний розрахунковий бланк. Наявність програмувальних мікрокалькуляторів дозволяє реалізовувати обчислення автоматично, під керуванням програми.

Суттєвим є *контроль обчислень*, який проводять за так званим *контрольним прикладом* (тестом). Результат контрольного прикладу має бути заздалегідь відомим, тобто він або є очевидним, або його відшукують яким-небудь іншим способом. При ручному рахунку контроль рекомендується проводити поетапно. При розрахунках на ЕОМ за складеною програмою контрольний приклад заздалегідь прораховують вручну, а потім звіряють поетапно результати розрахунків із здійснюваними машиною.

5.2.7. Контрольні запитання

1. Що таке "модель"? "моделювання"?
2. Які об'єктивні й суб'єктивні чинники можуть впливати на створювану модель?
3. Які види моделей трапляються в інженерній практиці?
4. Що таке "математична модель"? "обчислювальна модель"?
5. Як можна охарактеризувати постановку інженерної задачі?
6. Які етапи проходить у загальному випадку розв'язування інженерної задачі?
7. Що таке "алгоритм"? На які види поділяються алгоритми?
8. Що таке "блок-схема алгоритму"? Які позначення прийняті при побудові блок-схеми алгоритму?
9. Якими є загальні правила побудови блок-схеми алгоритму?

5.3. Організація наближених обчислень

Як вже зазначалося, неминучим етапом розв'язування інженерних задач є проведення розрахунків із наближеними вихідними даними. Тому до основних умінь, необхідних інженеру в його професійної діяльності, слід віднести *вміння грамотно (раціонально) організувати обчислення*, під чим слід розуміти наступне:

- знати можливі джерела похибок;
- уміння правильно записувати наближені дані й результати (у тому числі проміжні);
- уміння оцінювати похибку результату за заданими похибками компонент;
- уміння обирати найбільш раціональний *порядок обчислень*;
- уміння обирати алгоритм обчислення, найстійкішій до похибок обчислень;
- уміння контролювати хід і результати обчислень із метою виключення грубих похибок.

Не маючи достатніх умінь і навичок практичних обчислень можна при розв'язуванні задачі одержати результат, який не матиме нічого спільного з дійсним розв'язком задачі.

5.3.1. Джерела й види похибок

Практично на кожному етапі розв'язування прикладної задачі виникають власні джерела похибок.

Математична модель - це вже наближене подання реального об'єкта. Вихідні дані, що використовуються у розрахунках і виходять з експерименту, можна визначити лише наближено. Деякі точні числа, такі як π, $\sqrt{3}$, 6/7 і т. п., при обчисленнях на ЕОМ вимушено замінюють десятковими дробами, залишаючи лише певну кількість знаків після десяткової коми. Обчислювальні методи у більшості також є наближеними. Навіть при використанні найпростішої формули результат, як правило, одержують наближений.

Основні джерела виникнення похибок наближеного розв'язування прикладних задач такі.

1. *Похибки математичної моделі*. Їх пов'язано з використаними припущеннями, які дозволяють спростити математичну модель задачі. Вони не контролюються у процесі чисельного розв'язування задачі і можуть бути зменшені лише за рахунок більш точного математичного опису фізичної задачі.
2. *Похибки первісних даних*. Значення параметрів, що входять у математичний опис задачі, вимірюються експериментально з деякою похибкою. Похибки математичної моделі і вихідних даних у цілому утворюють так звані *неусувні* похибки. Назву обумовлено тим, що ці види похибок не можна усунути шляхом організації обчислень. Зменшення їх лежить

лише на шляху перебудови математичної моделі і точнішого виміру вихідних даних.

3. *Похибки* наближеного *методу*, або *похибки усікання*. При чисельному розв'язуванні задачі точний оператор, в якому кількість чисел або операцій перевищує допустимі межі, замінюється наближеним, який потребує скінченої кількості операцій. Наприклад, замінюють інтеграл сумою, функцію - поліномом (багаточленом) або будують нескінченний процес і обривають його після скінченої кількості операцій.
4. Обчислювальні *похибки*, що виникають в результаті вимушеного *округлення* чисел, наприклад, внаслідок скінченої кількості розрядів у запису числа в оперативній пам'яті ЕОМ.

Якщо розв'язок деякої задачі *неперервно* залежить від вхідних даних, тобто малому змінюванню вхідних даних відповідає мале змінювання розв'язку, то задача називається *стійкою за вхідними даними*, або *грубою.* У стійкому обчислювальному алгоритмі похибки округлення не накопичуються.

Точність наближеного числа характеризується поняттями абсолютної й відносної похибки.

Абсолютною похибкою наближеного числа a називається абсолютне значення різниці між ним і точним його значенням:

$$\Delta = |A - a|,$$

де A - точне значення, a - наближене значення. Абсолютна похибка має суто теоретичний інтерес, оскільки точне значення A невідоме. Тому на практиці частіше використовують *граничну абсолютну похибку* Δ_a наближеного числа a, рівну по можливості найменшому числу, що є більшим за абсолютну похибку

$$\Delta = |A - a| \le \Delta_a .$$

Значення a і Δ_a дозволяють вказати інтервал, що містить точне значення A:

$$a - \Delta_a \le A \le a + \Delta_a .$$

Частіше використовується компактніший запис

$$A = a \pm \Delta_a .$$

Очевидно, таке визначення абсолютної похибки не є однозначним. Так, якщо $A = \pi$, а як наближене значення узяти $a = 3{,}14$, то, враховуючи, що $3{,}140 < \pi < 3{,}142$, можна записати:

$$|\pi - a| < 0{,}002; \ |\pi - a| < 0{,}01; \ |\pi - a| < 0{,}1.$$

Кожне з чисел 0,002; 0,01; 0,1 буде граничною абсолютною похибкою числа a. Але чим ближче між собою числа $|A - a|$ і Δ_a, тим точніше абсолютна похибка оцінює фактичну похибку.

Основною характеристикою точності наближеного числа є його *відносна похибка*

$$\delta = \frac{\Delta}{|A|}.$$

Оскільки число A невідоме, то, як правило, вважають

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}.$$

Аналогічно з нерівності $\delta \le \delta_a$ визначають *граничну відносну похибку* числа a, вважаючи

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}.$$

Величина δ характеризує якість наближення. Це безрозмірна величина, зазвичай її виражають у процентах. Так, відносна похибка числа π, прийнятого за наближене значення числа π, при $\Delta(3{,}14) = 0{,}002$ дорівнює

$$\delta(3{,}14) = \frac{0{,}002}{3{,}14} = 0{,}00064\,,\ (0{,}064\%).$$

5.3.2. Запис наближених чисел. Правило округлення

Записувати наближене число у вигляді $a \pm \Delta_a$ незручно. Тому в обчислювальній практиці часто вдаються до різних прийомів, що дозволяють тільки за записом наближеного числа a судити про його похибку.

Нехай наближене число a подане у вигляді скінченого десяткового дробу:

$$a = \alpha_m \cdot 10^m + \alpha_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \ldots + \alpha_{m-n+1} \cdot 10^{m-n+1}; \quad (\alpha_m \ne 0),$$

де α_i - цифри числа a ($\alpha_i = 0, 1, \ldots, 9$).

Значущими цифрами числа називають усі цифри у запису числа, починаючи з першої ненульової зліва. Наприклад, у чисел $a = 0{,}0\underline{503}$, $b = 0{,}\ 00\underline{630500}$ значущими є підкреслені цифри.

Значущу цифру називають *вірною*, якщо абсолютна похибка числа не перевищує половини одиниці розряду, який відповідає цій цифрі. У зворотному випадку цифра вважається *сумнівною*.

Наприклад, число 647, 326 при $\Delta(a)$=0,03 ($< 0{,}5 \cdot 10^{-1}$) має чотири вірні цифри 6, 4, 7, 3 і дві сумнівні 2, 6.

За правилом, запропонованому А. Н. Криловим, наближене число потрібно записувати так, щоб усі значущі цифри у запису числа були вірними, а перша цифра з відкинутої частини відносилася до сумнівних. Так, число 0,884, відоме з похибкою 0,004, має бути записано так: 0,88. Раніше згадане число 647,326 при описаних умовах слід записати у вигляді 647,3.

У математичних таблицях значень функцій приводяться тільки вірні цифри. Відносна похибка табличних значень, наприклад, у тризначних таблицях не перевищує $0{,}5 \cdot 10^{-3}$, у семизначних - $0{,}5 \cdot 10^{-7}$.

Точність наближеного числа залежить не від кількості значущих цифр, а від кількості вірних цифр.

При проведенні розрахунків остаточний наближений результат зазвичай округлюють до його вірних цифр, залишаючи одну сумнівну, а у проміжних результатах зберігають одну, дві, а часом і три сумнівні цифри.

Приклад. *Задані числа при вказаних абсолютних похибках округлити до вірних цифр. Визначити абсолютну похибку результату.*

1. $a_1 = 2{,}6219$, $\Delta_{a1} = 0{,}024$; 2. $a_2 = 47{,}35$, $\Delta_{a2} = 1{,}3$;

2. $a_3 = 6{,}9971$, $\Delta_{a3} = 0{,}0009$; 4. $a_4 = 0{,}648$, $\Delta_{a4} = 0{,}04$.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Оскільки 0,024<0,05, то число a_1 потрібно округлити до 0,1. Одержимо число a_1=2,6 із двома вірними цифрами. Визначимо абсолютну похибку результату $\Delta = 0{,}024 + |2{,}6219 - 2{,}6| = 0{,}0459 \approx 0{,}05$.
2. Через те що $1{,}3 < 0{,}5 \cdot 10^1$, то число a_2 слід округлити до десятків. Одержимо $a_2 \approx 5 \cdot 10$ з однією вірною цифрою. Варто відзначити, що не можна писати ані 50, ані $5{,}0 \cdot 10$, бо у обох випадках у відповідності із прийнятою системою запису це буде означати, що похибка записаного числа менша за 0,5, що суперечить умові. Абсолютна похибка результату дорівнює $\Delta(5 \cdot 10) = 1{,}3 + |50 - 47{,}35 = 1{,}3 + 2{,}65 = 3{,}95 \approx 4$.
3. Оскільки 0,0009<0,005, то округлення числа a_3 здійснюємо до 0,01. Одержимо $a_3 \approx 7{,}00$ із трьома вірними цифрами. Абсолютна похибка результату буде наступною $\Delta(a_3) = 0{,}0009 + |7{,}00 - 6{,}9971| \approx 0{,}004$. У запису 7,00 нулі свідчать про три його вірні знаки, і цей запис відрізняється від 7 або 7,0.
4. Оскільки 0,04<0,05, то число a_4 округлюємо до 0,1. Одержуємо $a_4 \approx 0{,}6$ з однією вірною цифрою. Абсолютна похибка результату дорівнюватиме $\Delta(0{,}6) = 0.04 + 0{,}048 = 0{,}088 > 0{,}05$, тобто цифра 6 вже є сумнівною. Тому при округленні рекомендується залишати одну-дві сумнівні цифри

$$a_4 = 0,(65); \quad \Delta(0{,}65) = 0{,}042 < 0{,}05.$$

Зазначимо, що термін "вірні цифри" не слід розуміти буквально. Так, у числі 7,00, яке замінює 6,9971 у попередньому прикладі, жодна з цифр не збігається з цифрами числа, хоча усі цифри цього числа є "вірними" в описаному вище сенсі |6,9971-7,00|<0,005. Однак вірні знаки наближеного числа часто збігаються з відповідними цифрами точного числа.

Відносна похибка наближеного числа безпосередньо залежить від кількості його вірних знаків. Наприклад, якщо наближене число a має три вірних знаки, то його відносна похибка δ_a перебуває у межах від 0,05 до 0,5% (залежить від першої значущої цифри числа a). При збільшенні кількості вірних знаків на 1 відносна похибка зменшується у 10 разів.

На практиці зазвичай вважають, що число a є наближенням числа A з n вірними десятковими знаками, якщо $\Delta_a \le 10^{-n}$. При такому визначенні в числі

$a = 647{,}35$ при $\Delta_a = 0{,}095 < 0{,}1$ будуть вірними цифри 6, 4, 7, 3 і його слід записувати у вигляді 647,3. Згідно з колишнім визначенням, оскільки $\Delta(a) = 0{,}095 < 0{,}5$, то у цьому числі будуть вірними лише три цифри 6, 4 і 7 і його слід записувати як 647.

5.3.3. Похибки результату при діях із наближеними числами

Дії над наближеними числами приводять до <u>поширення</u> похибок. Для оцінки похибок результатів потрібно знати похибки вихідних чисел і правила обчислення похибки результату. Розглянемо ці правила.

5.3.3.1. Похибки підсумовування

Неважко впевнитися у слушності наступних тверджень.

<u>*Абсолютна похибка суми й різниці дорівнює сумі абсолютних похибок доданків*</u>

$$a = b \pm c \quad \Rightarrow \quad \Delta_a = \Delta_b + \Delta_c .$$

<u>*Відносна похибка суми двох величин однакового знаку перебуває в інтервалі між найменшою й найбільшою відносними похибками доданків*</u>

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} = \frac{\Delta_b + \Delta_c}{|b+c|} .$$

За умови $|b|=|c|$ матимемо $\delta_a = \dfrac{\Delta_b + \Delta_c}{2|b|} = \dfrac{\delta_b + \delta_c}{2}$.

Якщо ж $|b| >> |c|$, через що останнім доданком у знаменнику можна знехтувати, то

$$\delta_a = \frac{\Delta_b + \Delta_c}{|b|} = \delta_b + \frac{\Delta_c}{|b|} = \delta_b + \delta_c \frac{|c|}{|b|} \approx \delta_b .$$

Подамо вираз для відносної похибки у такий спосіб

$$\delta_a = \delta_b \frac{|b|}{|b+c|} + \delta_c \frac{|c|}{|b+c|} .$$

З його розгляду випливає наступне.

<u>*Додавання величин протилежного знаку*</u> (або віднімання величин однакового знаку) <u>*практично завжди приводить до збільшення відносної похибки результату у порівнянні з найбільшою з відносних похибок доданків*</u>.

<u>*Особливо небезпечним є віднімання дуже близьких величин.*</u> У цьому випадку відносна похибка результата може сягати неприпустимих величин.

Приклад. *Потрібно обчислити площу кругового тонкого кільця із внутрішнім радіусом* $r = 1{,}750$ *і товщиною* $h = 5{,}0 \cdot 10^{-3}$ *за формулами* $S = \pi[(r+h)^2 - r^2]$ *або* $S = \pi \cdot h \cdot (2r + h)$. *Відшукати похибки.*

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Перш за все потрібно зазначити, що, як випливає з угоди про форму запису наближеного числа, абсолютні похибки вихідних даних є такими:

$$\Delta_r = 5\cdot 10^{-4}; \quad \Delta_h = 5\cdot 10^{-5},$$

а відносні похибки

$$\delta_r = \frac{5\cdot 10^{-4}}{1,75} \approx 2,9\cdot 10^{-4}; \quad \delta_h = \frac{5\cdot 10^{-5}}{5\cdot 10^{-3}} \approx 10^{-2}.$$

Розрахунки згідно першої формули приводять до таких похибок:

$$\Delta_{r+h} = \Delta_r + \Delta_h = 5\cdot 10^{-4} + 5\cdot 10^{-5} = 5,5\cdot 10^{-4};$$

$$\delta_{r+h} = \frac{\Delta_{r+h}}{r+h} = \frac{5,5\cdot 10^{-4}}{1,755} = 3,13\cdot 10^{-4};$$

$$\delta_{(r+h)^2} = 2\delta_{r+h} = 6,26\cdot 10^{-4};$$

$$\Delta_{(r+h)^2} = \delta_{(r+h)^2}\cdot (r+h)^2 = 6,26\cdot 10^{-4}\cdot (1,755)^2 = 19,3\cdot 10^{-4};$$

$$\delta_{r^2} = 2\cdot \delta_r = 5,8\cdot 10^{-4};$$

$$\Delta_{r^2} = \delta_{r^2}\cdot r^2 = 5,8\cdot 10^{-4}\cdot (1,75)^2 = 17,8\cdot 10^{-4};$$

$$\Delta_{(r+h)^2-r^2} = \Delta_{(r+h)^2} + \Delta_{r^2} = 19,3\cdot 10^{-4} + 17,8\cdot 10^{-4} \approx 3,7\cdot 10^{-3};$$

$$\delta_{(r+h)^2-r^2} = \frac{\Delta_{(r+h)^2-r^2}}{(r+h)^2 - r^2} = \frac{3,7\cdot 10^{-3}}{17,5\cdot 10^{-3}} = 0,21.$$

Якщо ж скористатися другою формулою, то одержимо такі похибки:

$$\Delta_{2r+h} = \Delta_{2r} + \Delta_h = 2\Delta_r + \Delta_h = 10\cdot 10^{-4} + 5\cdot 10^{-5} = 10,5\cdot 10^{-4};$$

$$\delta_{2r+h} = \frac{\Delta_{2r+h}}{2r+h} = \frac{10,5\cdot 10^{-4}}{3,505} = 3\cdot 10^{-4};$$

$$\delta_{(2r+h)h} = \delta_{2r+h} + \delta_h = 3\cdot 10^{-4} + 10^{-2} \approx 1\cdot 10^{-2};$$

$$\Delta_{(2r+h)h} = \delta_{(2r+h)h}\cdot (2r+h)\cdot h = 1\cdot 10^{-2}\cdot (3,505)\cdot 0,005 = 1,75\cdot 10^{-4};$$

Як бачимо

$$\frac{\Delta_{(2r+h)h}}{\Delta_{(r+h)^2-r^2}} = \frac{1,75\cdot 10^{-4}}{3,7\cdot 10^{-3}} = 4,75\cdot 10^{-2} \approx 0,05,$$

тобто підрахунок за другою формулою дає змогу одержати результат у 20 разів точніший, ніж розрахунок за першою формулою, де відбувається віднімання близьких за значенням величин.

Наведений приклад засвідчує, що *похибка результату залежить від порядку проведення обчислень* і це потрібно враховувати при розрахунках. Алгебрично наведені формули тотожні, але для проведення обчислень кращою є друга. У першій формулі при відніманні близьких величин $(r+h)^2$ і r^2 різко збільшується відносна похибка.

5.3.3.2. Похибки добутку, ділення й обчислення довільної функції

Доведемо, що *відносна похибка добутку дорівнює сумі відносних похибок співмножників*.

Дійсно:

$$a = b \cdot c \quad \Rightarrow \quad (a + \Delta_a) = (b + \Delta_b)(c + \Delta_c) = b \cdot c + \Delta_b \cdot c + \Delta_c \cdot b + \Delta_b \cdot \Delta_c,$$

звідки випливає

$$\Delta_a = \Delta_b \cdot c + \Delta_c \cdot b + \Delta_b \cdot \Delta_c \quad \Rightarrow \quad \delta_a = \delta_b + \delta_c + \delta_b \cdot \delta_c.$$

Через те що $\delta_b << 1$ і $\delta_c << 1$, то $\delta_b \delta_c << \delta_b$, а тому

$$\boxed{\delta_a \approx \delta_b + \delta_c};$$

$$\Delta_a = \delta_a \cdot |a| = (\delta_b + \delta_c) \cdot |b \cdot c|,$$

що й треба було довести.

Відносна похибка обчислення величини, зворотної до даної, дорівнює відносній похибці вихідної величини.

Щоб довести це, врахуємо, що, якщо $d = \frac{1}{c} = c^{-1}$, то

$$d + \Delta d = \frac{1}{c - \Delta c} \approx \frac{1}{c}(1 + \frac{\Delta c}{c}) = \frac{1}{c}(1 + \delta_c).$$

З цього випливає $d = \frac{\delta_c}{c}$, а значить $\delta_d = \frac{\Delta d}{d} = \frac{\delta_c / c}{1/c} = \delta_c$, що й треба було довести.

Враховуючи це, можна дійти висновку, що *відносна похибка частки дорівнює сумі відносних похибок діленого та дільника*:

$$\boxed{a = \frac{b}{c} \qquad \Rightarrow \qquad \delta_a = \delta_b + \delta_c \qquad \Rightarrow \qquad \Delta_a = (\delta_b + \delta_c) b / c}.$$

Аналогічно можна встановити, що *відносна похибка піднесення до степеня* n *наближеного числа* (n -натуральне ціле) *дорівнює добуткові відносної похибки основи на абсолютну величину показника степеня*

$$a = b^n \quad \Rightarrow \quad \delta_a = |n| \cdot \delta_b \quad \Rightarrow \quad \Delta_a = |n| \cdot \Delta_b \cdot b^{n-1}.$$

Абсолютна похибка обчислення функції дорівнює добутку абсолютної похибки аргументу на абсолютну величину похідної від функції:

$$a = f(b) \quad \Rightarrow \quad \Delta_a = \Delta_b \cdot |\frac{df(b)}{db}| \quad \Rightarrow \quad \delta_a = \delta_b \cdot |\frac{df(b)}{db} \cdot \frac{b}{f(b)}|.$$

Приклад 1. *Похибка обчислення лінійної функції* $y = k \cdot x$.

Маємо $\frac{dy}{dx} = k \quad \Rightarrow \quad \Delta_y = \Delta_x \cdot k \quad \Rightarrow \quad \delta_y = \frac{\Delta_y}{y} = \frac{\Delta_x \cdot k}{k \cdot x} = \frac{\Delta_x}{x} = \delta_x$.

Приклад 2. *Похибки обчислення синуса* $y = \sin(x)$.

У цьому випадку $\frac{dy}{dx} = \cos(x)$, а тому $\Delta_y = \Delta_x \cdot |\cos(x)|$, а $\delta_y = \delta_x \cdot \frac{|x|}{|tgx|}$.

Приклад 3. *Похибки обчислення косинуса* $y = \cos(x)$.

У цьому випадку $\frac{dy}{dx} = -\sin(x)$, а тому $\Delta_y = \Delta_x \cdot |\sin(x)|$, а $\delta_y = \delta_x \cdot |x \cdot tgx|$.

Аналіз останніх прикладів дозволяє висновувати, що

1) *похибка обчислень суттєво залежить від значення аргументу*;
2) при малих значеннях аргументу обчислення косинуса здійснюється зі значно меншою відносною похибкою, ніж похибка завдання аргументу;
3) обчислення косинуса при значеннях аргументу, близьких до $\pm\pi/2$ приводить до вельми значних обчислювальних похибок; відносна похибка визначення косинуса у цьому випадку у багато разів перевищує відносну похибку завдання кута;
4) відносна ж похибка визначення синуса у діапазоні $[-\pi/2, \pi/2]$ завжди менша за відносну похибку аргументу.

5.3.4. Поширення похибок округлення при обчисленнях

До того ми розглянули приклади розрахунків похибок результатів обчислень, обумовлених впливом похибок вихідних даних. Тепер зосередимо увагу на похибках результату обчислень за рахунок похибок округлення.

При виконанні арифметичних дій на будь-якому обчислювальному пристрої (логарифмічній лінійці, калькуляторі або ЕОМ) неминуче округлення проміжних результатів до певної кількості розрядів, а *арифметичні операції з округленням мають інші властивості, аніж точні операції*. Так, точні операції є комутативними, асоціативними і дистрибутивними. Ті ж операції, реалізовані на обчислювальному пристрої (ОП), вже не є такими.

Машинна арифметика має власні характерні особливості. Правильно враховуючи їх, можна досягти високої ефективності у розв'язуванні задач на ЕОМ. Неуважність до цих особливостей нерідко приводить до помилкових результатів.

Нехай обчислення відбуваються на ЕОМ, в якій кожне число подається п'ятьма значущими цифрами. Складемо два числа

9,2654+7,1625 = 16,4279.

Результат містить 6 значущих цифр і не вміщується у розрядну сітку машини. Його буде округлено до 16,428, і при цьому виникне (крім похибки внаслідок похибок вихідних даних) похибка округлення.

Оскільки в оперативній пам‘яті число завжди зберігається з фіксованою кількістю розрядів, то округлення виникає весь час при запису проміжних результатів у пам‘ять машини. Округлення полягає у корегуванні останнього (молодшого) розряду. Але й буває, що ніякого корегування не відбувається, а відкидається частина числа, яка не вміщується. Похибка округлення при цьому більша, але значне скорочення машинного часу й довжини робочої програми у цілому є економічно вигідними.

Число в ЕОМ подається у такому *нормалізованому вигляді*

$$\boxed{x = \pm q^{p} \cdot (\sum_{k=1}^{s} \alpha_k \cdot q^{-k})},$$

де q - основа системи позиційного зчислення; p - *порядок числа*; s - кількість значущих розрядів (додатне ціле); α_k - цифри числа у заданій системі зчислення, причому вважається, що α_1 не дорівнює нулеві. Отже для десяткової системи зчислення $q = 10$, порядок числа - p, кількість значущих десяткових розрядів - s, цифри $\alpha_k = 0, 1, \ldots, 9$. Наприклад, для числа $0{,}00123406 \cdot 10^{-5} = 0{,}123406 \cdot 10^{-7}$ десятковий порядок дорівнює $p = -7$, кількість значущих розрядів $s = 6$, а цифри

$$\alpha_1 = 1; \quad \alpha_2 = 2; \quad \alpha_3 = 3; \quad \alpha_4 = 4; \quad \alpha_5 = 0; \quad \alpha_6 = 6.$$

У нормалізованій формі (6) вираз у дужках подає так звану *мантису числа*. Мантиса у нормалізованому десятковому поданні завжди менша за одиницю і більша або дорівнює 0,1. У цілому будь-яке число однозначно описується трьома його характеристиками:

1) знаком числа;
2) значенням мантиси (вираз у дужках у (6));
3) цілим числом p - порядком числа.

ЕОМ працюють в основному у двійковій системі зчислення, тому для них $q = 2$. Обсяг оперативній пам'яті ЕОМ, який віддається на запис окремого числа, вимірюється у байтах (8 двійкових розрядів - бітів) і залежить від мови програмування, на який записано програму, і типу числа, під яким його оголошено у програмі.

Наприклад, у мові Fortran під запис цілого числа типу INTEGER відводять 2 байти, тобто 16 двійкових розряди. Один із цих розрядів займає запис знака числа (додатне число чи від'ємне). У решті розрядів записується абсолютне значення цього числа. Неважко зрозуміти, що у такий обсяг можна записати число, за абсолютним значенням не більше за 32512.

Довільне число типу REAL записується у Фортрані у 4 байти оперативної пам'яті. З 32 бітів цього обсягу один біт займає запис знака числа, 7 розрядів - двійковий запис десяткового порядку числа (з них 1 розряд - запис знака порядку) і 24 розряди займає запис мантиси числа. З цього випливає, що абсолютне значення порядку десяткового числа у цьому випадку не перевищує 32. Тобто тип REAL дозволяє оперувати з числами за абсолютним значенням від 10^{-32} до 10^{+32}. При цьому мантиса числа, маючи для запису 24 розряди, зберігає $k = n \cdot \lg(2) = 24 \cdot 0.3 \approx 7$ десяткових розрядів числа. Тобто розглядуваний тип зберігає сім вірних десяткових цифр у кожному числі.

Розглянемо типи даних, передбачені мовою Паскаль.

Тут для подання цілих чисел існують 5 типів даних:

- byte - займає 1 байт пам'яті; за його допомогою можуть зберігатися цілі додатні числа від 0 до 255;
- shortint (коротке ціле) - займає теж 1 байт пам'яті; цей тип зберігає цілі числа від -128 до 127;

- integer (ціле) - для даних цього типу відводять 2 байти пам'яті; за його допомогою записуються цілі числа від -32768 до +32767;
- word - займає теж 2 байти; ним записуються лише додатні цілі від 0 до 65535;
- longint (довге ціле) - обіймає 4 байти пам'яті; зберігає числа від -2.147.483.648 до + 2.147.483.647.

Дійсні дані у Паскалі подані наступними типами:

- single - на запис числа цього типу відводять 4 байти пам'яті, з них 24 біти займає запис мантиси, а 7 бітів - запис порядку числа; ним можуть бути подані дійсні числа з абсолютним значенням від $1{,}5 \cdot 10^{-45}$ до $3{,}4 \cdot 10^{+38}$ і з 7 вірними десятковими розрядами;
- real - займає 6 байтів (48 бітів); із них 7 бітів - запис порядку, а 40 бітів - мантиса числа; записуються числа з абсолютним значенням від $2{,}9 \cdot 10^{-39}$ до $1{,}7 \cdot 10^{+38}$ з 12 вірними десятковими розрядами;
- double - запис має обсяг у 8 байтів (64 бітів), запис порядку займає 10 бітів, запис мантиси - 54 бітів; ним зберігаються числа з абсолютним значенням від $5 \cdot 10^{-324}$ до $1{,}7 \cdot 10^{+308}$ і з 16 вірними десятковими розрядами;
- extended - тип, під який відводять 10 байтів оперативної пам'яті (14 бітів - під запис порядку і 65 - під запис мантиси); при цьому забезпечується збереження чисел від $1{,}9 \cdot 10^{-4951}$ до $1{,}1 \cdot 10^{+4932}$ з 19 вірними десятковими розрядами.

У середовищі комп'ютерної системи MatLAB усі числові дані мають тип ***double***, який по всіх показниках збігається з відповідним типом мови Паскаль.

Максимальна відносна похибка округлення при записі числа у пам'ять ЕОМ залежить не від його величини, а лише від кількості s *десяткових розрядів у запису мантиси у його поданні на ЕОМ*:

$$\delta \approx 1 \cdot 10^{-s+1}.$$

Наприклад, для типу REAL у Фортрані $\delta = 1 \cdot 10^{-6}$, для того ж типу мови Паскаль $\delta = 1 \cdot 10^{-11}$. Дані типу ***double*** у мові Паскаль і системі MatLAB мають елементарну похибку округлення

$$\delta = 1 \cdot 10^{-15}.$$

Розглянемо процес поширення похибок округлення при обчисленнях і впливу їх на похибку визначення результату обчислення.

Припустимо, потрібно скласти на ЕОМ дві величини

$$y = x_1 + x_2 .$$

Цей процес розкладається на 4 етапи:

1) запис числа x_1 у пам'ять ЕОМ; при цьому, навіть коли вихідне значення x_1 відоме точно, при його запису може виникнути похибка округлення δ (це може бути, якщо точне значення величини містить більшу кількість десяткових розрядів, ніж s - кількість розрядів для запису числа в ЕОМ): $\delta_{x1} = \delta$; $\Delta_{x1} = \delta \cdot x_1$;

2) запис числа x_2 у пам'ять; це приводить до появи аналогічної похибки $\delta_{x2} = \delta$; $\Delta_{x2} = \delta \cdot x_2$;

3) підсумовування величин x_1 і x_2; при цьому перші дві похибки вплинуть на результат сумування $\delta_{x1+x2} = \dfrac{\Delta_{x1} + \Delta_{x2}}{x_1 + x_2} = \dfrac{\delta \cdot (x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} = \delta$;

4) запис результату у пам'ять; при цьому може виникнути похибка округлення δ, якщо кількість розрядів в результаті перевищує кількість розрядів у запису числа у пам'ять; у цілому результуюча відносна похибка результату може сягати величини $\delta_y = \delta_{x1+x2} + \delta = 2\delta$, а абсолютну похибку сумування можна оцінити за формулою $\Delta_y = 2\delta \cdot (x_1 + x_2)$.

Якщо тепер перейти до сумування (послідовного) трьох величин

$$y = (x_1 + x_2) + x_3,$$

то, повторюючи попередній аналіз, дістанемо

- похибка результату першого підсумовування $(x_1 + x_2)$ знайдена перед цим $\Delta_y = 2\delta \cdot (x_1 + x_2)$;
- похибка запису числа x_3 $\Delta_{x3} = \delta \cdot x_3$;
- похибка сумування (проходження похибок вихідних даних) $\Delta_{x1+x2+x3} = \Delta_{x1+x2} + \Delta_{x3} = 2\delta \cdot (x_1 + x_2) + \delta \cdot x_3$;
  $\delta_{x1+x2+x3} = \dfrac{\Delta_{x1+x2+x3}}{x_1 + x_2 + x_3} = \delta \dfrac{2(x_1 + x_2) + x_3}{x_1 + x_2 + x_3}$;
- похибка запису результату у пам'ять ЕОМ - δ.

Разом, одержуємо

$$\delta_y = \delta_{x1+x2+x3} + \delta = \delta \cdot [\frac{2(x_1 + x_2) + x_3}{x_1 + x_2 + x_3} + 1] = \delta \cdot \frac{3(x_1 + x_2) + 2x_3}{x_1 + x_2 + x_3};$$

$$\Delta_y = \delta \cdot [3(x_1 + x_2) + 2x_3].$$

Поширення цього результату на підсумовування n чисел

$$y = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

приводить до наступних висновків

$$\Delta_y = \delta \cdot [n(x_1 + x_2) + (n-1) \cdot x_3 + \ldots + 3x_{n-1} + 2x_n];$$

$$\delta_y = \delta \cdot \frac{n(x_1 + x_2) + (n-1) \cdot x_3 + \ldots + 3x_{n-1} + 2x_n}{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n}.$$

Одержаний результат є слушним у випадку, коли усі доданки додатні. Якщо вони усі від'ємні, можна користуватися одержаними результатами, розуміючи в них під x_i їхні абсолютні значення.

Становище різко змінюється при відніманні чисел (підсумовуванні чисел із протилежними знаками).

Отже, нехай $y = x_1 - x_2$; $(x_1 > x_2 > 0)$. Повторюючи попередні міркування, одержимо

$$\delta_y = \delta + \frac{\Delta_{x1} + \Delta_{x2}}{|x_1 - x_2|} = \delta \cdot [1 + \frac{|x_1 + x_2|}{|x_1 - x_2|}] = 2\delta \cdot \frac{x_1}{x_1 - x_2}.$$

Як бачимо, похибка при відніманні чисел більше за похибку при їхньому додаванні у $\frac{x_1}{x_1 - x_2} > 1$ разів. Якщо віднімаються близькі величини, ця похибка може бути вельми значною.

Приклад 1. *Нехай* $x_1 = 3{,}14569$, $x_2 = 3{,}14551$. *Оцінимо похибку віднімання цих чисел.*

Вважаючи, що відносна похибка округлення $\delta = 1 \cdot 10^{-6}$, із формули (9) одержимо

$$\delta_y = 2\delta \cdot \frac{x_1}{x_1 - x_2} = 2 \cdot 10^{-6} \frac{3{,}14569}{0{,}00018} = 0{,}035.$$

Ця похибка більша за похибку підсумовування тих самих чисел у 17 500 разів.

Приклад 2. *Порівняємо похибки одержання того самого результату за двома формулами*

$$y_1 = \frac{x_1 - x_2}{x_3}; \quad y_2 = \frac{x_1}{x_3} - \frac{x_2}{x_3}.$$

Похибки округлення при розрахунку згідно першої формули:

1) занесення x_1 у пам'ять: $\delta_{x1} = \delta$; $\Delta_{x1} = \delta \cdot x_1$;

2) занесення x_2 у пам'ять: $\delta_{x2} = \delta$; $\Delta_{x2} = \delta \cdot x_2$;

3) віднімання x_1 і x_2:

$$\Delta_{x1-x2} = \Delta_{x1} + \Delta_{x2} = \delta \cdot (x_1 + x_2); \quad \delta_{x1-x2} = \delta \cdot \frac{x_1 + x_2}{|x_1 - x_2|};$$

4) занесення різниці у пам'ять

$$\delta_y = \delta_{x1-x2} + \delta = \delta \cdot (\frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} + 1) = \delta \cdot \frac{2x_1}{x_1 - x_2};$$

5) занесення x_3 у пам'ять: $\delta_{x3} = \delta$;

6) ділення $\delta_{(x1-x2)/x3} = \delta_y + \delta_{x3} = \delta \cdot \frac{3x_1 - x_2}{x_1 - x_2}$;

7) занесення результату у пам'ять

$$\delta_{y1} = \delta_{(x1-x2)/x3} + \delta = \delta_y + \delta_{x3} = \delta \cdot \frac{4x_1 - 2x_2}{x_1 - x_2}.$$

Оцінка похибок розрахунку за другою формулою:

1) занесення x_1 у пам'ять: $\delta_{x1} = \delta$; $\Delta_{x1} = \delta \cdot x_1$;

2) занесення x_3 у пам'ять: $\delta_{x3} = \delta$;

3) ділення x_1 на x_3: $\delta_{x1/x3} = \delta_{x1} + \delta_{x3} = 2\delta$;

4) занесення результату у пам'ять $\delta_1 = \delta_{x1/x3} + \delta = 3\delta$; $\Delta_1 = 3\delta \cdot x_1 / x_3$;

5) аналогічно похибка від другого ділення x_2 на x_3: $\delta_2 = 3\delta$;

$\Delta_2 = 3\delta \cdot x_2 / x_3$;

6) віднімання : $\Delta_{x1/x3-x2/x3} = \Delta_1 + \Delta_2 = 3\delta \cdot (x_1 + x_2) / x_3$;

$\delta_{x1/x3-x2/x3} = \Delta_1 + \Delta_2 = 3\delta \cdot (x_1 + x_2) / (x_1 - x_2)$;

7) занесення результату у пам'ять

$$\delta_{y2} = \delta_{x1/x3-x2/x3} + \delta = \delta \cdot \frac{4x_1 + 2x_2}{x_1 - x_2}.$$

Тепер можна порівняти похибки розрахунків за цими двома формулами, поділивши похибку за другою формулою на похибку за першою:

$$\frac{\delta_{y2}}{\delta_{y1}} = \cdot \frac{4x_1 + 2x_2}{4x_1 - 2x_2}.$$

Якщо, наприклад, $x_1 \approx x_2$, то *розрахунок за другою формулою приведе до похибки у 3 рази більшій*, ніж розрахунок за першою формулою.

Приклад 3. *Розглянемо відносну похибку результату обчислень, обумовлену округленням, для двох варіантів обчислення площі тонкого кільця*

$y_1 = (r + h)^2 - r^2$; $\qquad y_2 = (2r + h) \cdot h$.

Нехай $r = 1{,}750$; $h = 5{,}0 \cdot 10^{-3}$. *Відносні похибки вихідних даних покладемо рівними нулеві. Елементарну відносну похибку при округленні приймемо рівною* $\delta = 10^{-6}$.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ.

Розрахунки похибок за першою формулою:

1) при додаванні $r + h$ і запису результату у пам'ять відносна похибка становитеме $\delta_{r+h} = \delta$;
2) при піднесенні у квадрат попередня відносна похибка подвоїться, а при запису результату додасться ще δ: $\delta_{(r+h)^2} = 2\delta + \delta = 3\delta$;

   $\Delta_{(r+h)^2} = 3\delta \cdot (r + h)^2$;
3) при записі результату множення r^2 у пам'ять виникає похибка округлення $\delta_{r^2} = \delta$; $\Rightarrow$ $\Delta_{r^2} = \delta \cdot r^2$;
4) при обчисленні різниці абсолютні похибки додаються

$$\Delta_{y1} = \Delta_{(r+h)^2} + \Delta_{r^2} = 3\delta \cdot (r + h)^2 + \delta \cdot r^2 \approx 2\delta r(2r + 3h); \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \delta_{y1} \approx \delta \frac{2r(2r + 3h)}{h(2r + h)} \approx \delta \frac{2r}{h} = 10^{-6} \cdot \frac{3{,}5}{5 \cdot 10^{-3}} = 7 \cdot 10^{-4}.$$

Розрахунки похибок за другою формулою:

1) відносна похибка після занесення результату додавання $2r + h$ у пам'ять $\delta_{2r+h} = \delta$;
2) відносна похибка після множення результату на h і занесення результату у пам'ять $\delta_{y2} = \delta + \delta = 2\delta = 2 \cdot 10^{-6}$.

Відношення одержаних похибок дорівнює

$$\frac{\delta_{y1}}{\delta_{y2}} = \frac{7 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{-6}} = 350 .$$

Отже, похибка результату при обчисленні різниці двох близьких величин у 350 разів більша за похибку за формулою, яка виключає таке віднімання.

Резюмуючи, слід відзначити таку важливу особливість похибок округлення, яка відрізняє її від інших видів похибок: похибки внаслідок округлення проміжних результатів можуть накопичуватися, внаслідок чого підсумкова похибка збільшується із зростанням кількості здійснених операцій. З цього випливає, що *основним засобом зменшення підсумкової похибки округлення є зменшення кількості обчислювальних операцій*.

ВИСНОВКИ. Задля зменшення похибок результату обчислень внаслідок округлення проміжних результатів слід уживати наступних заходів:

1) потрібно *зводити до мінімуму кількість* арифметичних *дій*;
2) *додавання чисел слід здійснювати у порядку зростання їхніх абсолютних величин*;
3) по можливості *потрібно уникати віднімання близьких величин*;
4) якщо при обчисленнях зустрічаються різниці близьких величин, слід спочатку обчислити ці різниці, а лише потім здійснити решту операцій.

5.3.5. Контрольні запитання

1. У чому полягає вміння раціонально організувати обчислювальний процес?
2. Які існують джерела виникнення похибок при обчисленнях?
3. Що таке "неусувні" похибки? З яких саме похибок складаються вони?
4. Що таке похибки "усікання"? похибки округлення? похибки поширення?
5. Дайте визначення поняттю абсолютної похибки, граничної абсолютної похибки наближеного числа. Що таке відносна похибка? Чим визначається відносна похибка при округленні числа?
6. Як подаються числові дані в оперативній пам‘яті ЕОМ? Від чого це залежить?
7. Перелічіть основні правила, що дозволяють зменшити вплив на похибку результата обчислень похибок вихідних даних.
8. Перелічіть основні правила, що дозволяють зменшити вплив на похибку результата обчислень похибок округлення.
9. Порівняйте можливості внутрішнього подання числових даних у різних мовах програмування.

5.4. Динамічні системи

Динамічною системою зазвичай *називають реальний об‘єкт, поводження якого з задовільною для практичних потреб точністю може бути описано системою звичайних диференційних рівнянь, аргументом яких є час*.

Нагадаємо деякі визначення.

Дифференційним рівнянням прийнято називати рівняння, яке пов’язує значення деякої невідомої функції певних аргументів у деякій точці зі значенням її похідних різних порядків по цих аргументах у тій самій точці. Диференційне рівняння містить содержит у своєму запису невідому функцію, її похідні та незалежні змінні (аргументи). Система диференційних рівнянь складається з кількох диференційних рівнянь, в які входять кілька (за кількістю рівнянь) невідомих функцій та їхні похідні.

Розв’язком (інтегралом) диференційного рівняння називається функція, при підставленні якої, рівняння стає тотожністю. Процес розв’язування диференційного рівняння называють інтегруванням. Розв’язок системи диференційних рівнянь являє собою сукупність функцій (за кількістю рівнянь), одночасне підставлення яких у рівнняння обертає їх усі у тотожності.

Порядок, або *степінь диференційного рівняння* - це найбільший порядок похідних, що входять в нього. Порядок системи диференційних рівнянь являє собою суму найбільших порядків похідних усіх невідомих функцій, що входять у ці рівняння.

Диференційні рівняння поділяють на **звичайні** (ЗДР), *в які входять лише функції* (і їхні похідні) від одного аргумента, **і рівняння з частинними похідними** (РЧП), *в яких функції залежать від кількох незалежних змінних* (аргументів).

Серед звичайних диференційних рівнянь математика виділяє так звані **лінійні диференційні рівняння**, *усі члени якого є лінійними функціями або самих невідомих функцій* (за кількістю рівнянь), *або їх похідних аргументом* (того чи іншого порядку). Особливо повно розроблена теорія відшукування розв’язків **лінійних диференційних рівнянь з постійними коефіцієнтами**, *в яких усі кутові коефіцієнти відповідних лінійних залежностей є постійними величинами* (тобто не залежать від аргументу).

У подальшому мова йтиме лише про <u>звичайні диференційні рівняння</u>. Саме такі рівняння описують поводження динамічних систем. Єдиним аргументом цих диференційних рівнянь зазвичай є час. Це ми й будемо мати на увазі у подальшому.

Коли говорять про диференційні рівняння як засіб опису поводження реальних систем слід узяти до уваги наступне.

Будь-яке подання реального процесу чи явища у виді сукупності диференційних рівнянь, навіть якщо воно побудовано на основі твердо встановлених законів (механіки, електрики тощо), завжди є наближеним до реального процесу, і тому може розглядатися лише як його теоретична модель. Це пов’язано з тією обставиною, що наукові закони формулюються для ідеализованих об’єктів, якими реальні об’єкти не є. Як будь-яка модель, система диференційних рівнянь відбиває реальну дійсність лише з певною точністю, яка може бути задовільною для досягнення поставленої мети дослідження, або незадовільною. В останньому випадку слід замінити теоретичну модель на більш точну, більш досконалу. Тому в теорії динамічних систем склалася наступна термінологія щодо реальних систем і їх теоретичного опису.

Реальні системи, поводження яких із задовільною для потреб практичного дослідження точністю може бути описано за допомогою системи лінійних диференційних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, називають лінійними стаціонарними ситемами (ЛСС) (англійською – Line Time-invariant Systems – лінійні системи, інваріантні у часі).

Якщо ж задовільного опису реальних процесів у ситемі можна досягти лише за системою лінійних диференційних рівнянь, в яких хоча б один коефіцієнт пропорційності членів, пропорційних невідомим змінним чи їхнім похідним, не є постійним (тобто є заданою явною функцією часу), то такі реальні системи носять назву лінійних нестаціонарних систем (ЛНСС).

В реальних технічних системах з розвитком техніки все частіше зустрічаються випадки, коли поводження системи неможливо описати, застосовуючи лише лінійні диференційні рівняння, бо в реальній системі виникає низка особливостей руху, що не притаманні лінійній стаціонарній системі.

Тому в інженерній практиці великого значення набуває теоретичне дослідження саме нелінійних систем (НЛС), що описуються диференційними рівняннями, в яких трапляються члени (сили), нелінійно залежні від узагальнених координат і (або) узагальнених швидкостей.

Наприклад, рівняння руху гіроскопа у кардановому підвісі мають вигляд:

$$\begin{cases} (J_1 + J_2\cos^2\beta)\ddot{\alpha} - 2J_2\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta\cos\beta + H\dot{\beta}\cos\beta = N - R\sin\beta \\ J_3\ddot{\beta} + J_2\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta - H\dot{\alpha}\cos\beta = L \\ \dfrac{dH}{dt} = R + M_{cm} \end{cases}$$

Як бачимо, одна з трьох вихідних величин α, β і H цієї системи диференційних рівнянь – кут β повороту рамки підвісу - входить до окремих членів системи диференційних рівнянь як аргумент тригонометричних функцій. Крім того, деякі члени містять добутки цих тригонометричних функцій, добутки їх і похідних від вихідної величини і добутки похідних. У правій частині міститься добуток вхідної величини R (момент відносно головної осі гіроскопа сил, що діють на ротор) і функції від вихідної ($\sin\beta$). Джерелом нелінійностей можуть бути також моменти сил N, L, R і M_{cm}, які в реальних умовах, будучи моментами сил взаємодії між елементами карданова підвісу, можуть залежати або від самих кутів α, β і γ відносного повороту рамок (коли сили взаємодії мають пружний характер), або від кутових швидкостей $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ і $\dot{\gamma}$ (якщо це сили тертя), або й від тих та інших одночасно. Ці залежності також можуть бути нелінійними (наприклад, сухе чи турбулентне тертя).

Зазвичай усі нелінійності розподіляють на два великих класи, підходи до дослідження яких суттєво відрізняються. До першого класу відносять так звані *гладкі нелінійності*, які відображуються математично неперервними і диференційовними залежностями від узагальнених координат і швидкостей. До другого класу належать *суттєві нелінійності*, у яких їх математична залежність від узагальнених координат чи швидкостей або має розриви першого роду, або похідна цих залежностей по аргументах (q чи $\dot{q}$) не є неперервною.

Нелінійні системи з гладкими нелінійностями вивчати значно простіше, оскільки при цьому можна застосовувати численні аналітичні методи й, зокрема, подання нелінійних залежностей у виді степеневого ряду. Тому <u>більшість методів теоретичного дослідження нелінійних систем</u> розраховані саме на системи <u>з гладкими нелінійностями</u>. Зокрема, <u>до них належить теорія дослідження стійкості за Ляпуновим</u>.

5.4.1. Рівняння руху систем з гладкими нелінійностями

У теорії динамічних систем склалася термінологія, запозичена по більшій мірі з теоретичної механіки. Так, усі окремі *члени диференційних рівнянь називаються силами. Члени диференційних рівнянь, які не залежать ні від узагальнених координат, ні їхніх похідних* (вони можуть залежати лише від часу), *прийнято називати "зовнішніми силами"*.

Позначатимемо у подальшому $q(t)$ узагальнені координати (тобто ті величини, завдання яких у сукупності повністю визначає поточне положення системи у просторі). Кількість узагальнених координат визначається кількістю ступенів вільності системи.

Лінійними системами називаються такі динамічні системи, усі члени диференціальних рівнянь яких (окрім вільних членів (зовнішніх сил)) є лінійними функціями узагальнених координат і їх похідних. Лінійна динамічна система з s степенями вільності описується у загальному випадку такою системою лінійних диференційних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + \ldots + a_{1s}\ddot{q}_s + b_{11}\dot{q}_1 + \ldots + b_{1s}\dot{q}_s + c_{11}q_1 + \ldots + c_{1s}q_s = e_1(t) \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + \ldots + a_{2s}\ddot{q}_s + b_{21}\dot{q}_1 + \ldots + b_{2s}\dot{q}_s + c_{21}q_1 + \ldots + c_{2s}q_s = e_2(t) \\ \ldots \quad \ldots \quad = \quad \ldots \\ a_{s1}\ddot{q}_1 + a_{s2}\ddot{q}_2 + \ldots + a_{ss}\ddot{q}_s + b_{s1}\dot{q}_1 + \ldots b_{ss}\dot{q}_s + c_{s1}q_1 + \ldots + c_{ss}q_s = e_s(t) \end{cases} \tag{5.10}$$

Тут члени $e_k(t)$, які залежать лише від аргументу (часу) і не залежать від шуканих змінних q_k та їх похідних, презентують зовнішні сили.

Якщо використати позначення матриць:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \end{bmatrix}; \; B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{ss} \end{bmatrix};$$

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{s1} & c_{s2} & \cdots & c_{ss} \end{bmatrix};\ q=\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_s \end{bmatrix};\ E(t)=\begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ \dots \\ e_s(t) \end{bmatrix}, \tag{5.11}$$

то систему <u>лінійних диференціальних рівнянь</u> системи, подану через узагальнені координати, можна записати у такому матричному вигляді:

$$A\cdot\ddot{q}+B\cdot\dot{q}+C\cdot q=E(t). \tag{5.12}$$

Якщо реальну динамічну систему вдається задовільно для потреб теоретичного вивчення з заданою метою описати сукупністю рівнянь виду (5.10), то її називають <u>*лінійною динамічною системою*</u> (ЛС). Якщо при цьому усі матриці A, B і C системи (5.12) не змінюються з часом (тобто усі коефіцієнти в системі рівнянь (5.10) є сталими), то таку динамічну систему називають <u>*лінійною стаціонарною системою*</u> (ЛСС). У випадку ж, коли хоча б один з коефіцієнтів a_{ij}, b_{ij} або c_{ij} змінюється з часом, то така динамічна система зветься <u>*нестаціонарною лінійною*</u> (НЛС), або *параметрично збуджуваною*.

Далі зупинимося на деякій класифікації сил (тобто членів диференційних рівнянь).

Перш за все члени диференційних рівнянь, що є пропорційними узагальненим прискоренням, по аналогії з силами Даламбера, називають *інерційними силами*. Матриця A коефіцієнтів при інерційних силах зазвичай (внаслідок того, що кінетична енергія є квадратичною функцією узагальнених швидкостей) є симетричною.

Матриці ж B і C коефіцієнтів при узагальнених швидкостях і узагальнених координатах можуть бути довільними. Їх зручно подати у вигляді суми двох матриць, одна з яких є симетричною, а друга – кососиметричною (це можна зробити завжди, для будь-якої заданої матриці):

$$B=B_d+G;\qquad C=C_p+P. \tag{5.13}$$

Внаслідок цього рівняння (5.12) можна подати у більш розгорнутому вигляді:

$$A\cdot\ddot{q}+B_d\cdot\dot{q}+G\cdot\dot{q}+C_p\cdot q+P\cdot q=E(t). \tag{5.14}$$

Тут B_d і C_p - симетричні, а G і P - кососиметричні матриці.

Члени рівняння, пропорційні узагальненим швидкостям, коефіцієнти при яких утворюють у сукупності по усіх рівняннях симетричну матрицю (B_d), називають *демпфіруючими силами*. Аналогічні члени, коефіцієнти при яких утворюють кососиметричну матрицю (G), називають *гіроскопічними силами*.

Члени рівняння, пропорційні узагальненим координатам, коефіцієнти при яких утворюють у сукупності по усіх рівняннях симетричну матрицю (C_d), називають *потенціальними* або *консервативними силами*. Аналогічні члени, коефіцієнти при яких утворюють кососиметричну матрицю (P), називаються *неконсервативними силами* або *силами радіальної корекції*.

Члени рівнянь, що утворюють матрицю-стовпець $E(t)$, називають *зовнішніми силами*.

У загальному випадку залежності сил від узагальнених координат, узагальнених швидкостей і прискорень можуть бути довільними, зокрема - нелінійними. Реальні системи, поводження яких можна задовільно описати лише використовуючи нелінійні сили, дістали назву *нелінійних* динамічних *систем* (НС).

Якщо розглядати систему з одним ступенем вільності (тобто з однією узагальненою координатою q, то залежно від того, як і від чого залежить відповідний член диференційного рівняння, розрізнюють такі сили:

- *лінійна пружна сила*, якщо вона лінійно (пропорційно) залежить від узагальненої координати і спрямована у бік, протилежний її відхиленню від положення рівноваги q_0:

$$Q = -c(q - q_0), \tag{5.15}$$

де $c > 0$ - коефіцієнт жорсткості;

- *лінійна демпфіруюча сила* або *сила в‘язкого тертя*, якщо вона лінійно залежить від узагальненої швидкості $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ і спрямована у протилежний бік:

$$Q = -f \cdot \dot{q}, \tag{5.16}$$

де $f > 0$ - коефіцієнт в‘язкого тертя (демпфірування);

- *нелінійна пружна відновлююча сила*, яка завжди спрямована у бік, протилежний відхиленню від положення рівноваги q_0:

$$Q = -F(q - q_0), \tag{5.17}$$

де $F(x)$ - функція, яка є додатною при $x > 0$, дорівнює нулеві при $x = 0$ і від‘ємна при $x < 0$;

- *нелінійна демпфіруюча сила*, яка залежить від узагальненої швидкості $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ і спрямована у протилежний бік:

$$Q = -\Phi(\dot{q}), \tag{5.18}$$

де $\Phi(x)$ - функція, яка є додатною при $x > 0$, дорівнює нулеві при $x = 0$ і від‘ємна при $x < 0$; серед таких сил ще виділяють

- *сила сухого тертя*, якщо її залежність від узагальненої швидкості має вид

$$Q = -k \cdot \frac{\dot{q}}{|\dot{q}|},\ (k > 0); \tag{5.19}$$

для цієї сили характерно, що її величина не залежить від величини узагальненої швидкості;

- *сила квадратичного (турбулентного) тертя*, залежність якої від швидкості описується співвідношенням:

$$Q = -k \cdot \dot{q}|\dot{q}|, (k > 0); \tag{5.20}$$

- *сила зовнішнього збурення*, якщо вона залежить лише від часу і не залежить ані від узагальненої координати, ані від узагальненої швидкості, ані від узагальненого прискорення.

У багатьох випадках стійкість руху визначається структурою сил, під якими розуміються, як зазвичай, окремі складові диференційні рівнянь, що описують рух.

Якщо усі нелінійні залежності, що входять у систему диференційних рівнянь, є гладкими, тобто неперервними і необмежено диференційовними, то розкладаючи їх у степеневий ряд по узагальнених координатах і швидкостях, можна таку систему подати у виді

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1+\ldots+a_{1s}\ddot{q}_s+b_{11}\dot{q}_1+\ldots+b_{1s}\dot{q}_s+c_{11}q_1+\ldots+c_{1s}q_s=f_1(q,\dot{q})+e_1(t) \\ a_{21}\ddot{q}_1+\ldots+a_{2s}\ddot{q}_s+b_{21}\dot{q}_1+\ldots+b_{2s}\dot{q}_s+c_{21}q_1+\ldots+c_{2s}q_s=f_2(q,\dot{q})+e_2(t) \\ \qquad\ldots\quad\ldots\quad=\quad\ldots \\ a_{s1}\ddot{q}_1+\ldots+a_{ss}\ddot{q}_s+b_{s1}\dot{q}_1+\ldots b_{ss}\dot{q}_s+c_{s1}q_1+\ldots+c_{ss}q_s=f_s(q,\dot{q})+e_s(t) \end{cases} \tag{5.21}$$

або, у матричній формі

$$A\cdot\ddot{q}+B\cdot\dot{q}+C\cdot q=F(q,\dot{q})+E(t)\,. \tag{5.22}$$

де позначено

$$F(q,\dot{q})=\begin{bmatrix} f_1(q,\dot{q}) \\ f_2(q,\dot{q}) \\ \ldots \\ f_s(q,\dot{q}) \end{bmatrix}$$

вектор стовпець з так званих "нелінійних" сил, які являють собою у загальному випадку нескінченні степеневі ряди, що містять $q_1,\ q_2,\ldots q_s,\ \dot{q}_1,\ \dot{q}_2\ ,\ldots\dot{q}_s$, у степенях, не нижче другого.

Вважатимемо, що матриця A є симетричною і квадратична форма

$$\mathrm{T}=\frac{1}{2}\dot{q}^t\cdot A\cdot\dot{q}=\frac{1}{2}(a_{11}\dot{q}_1^2+a_{22}\dot{q}_2^2+\cdots+a_{ss}\dot{q}_s^2+$$

$$+2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2+\cdots+2a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k)=\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k\,;\quad(a_{ik}=a_{ki}) \tag{5.23}$$

є певнододатною.

Рівнянню (5.22) можна зпівставити деяку матеріальну систему, у якій змінні $q_1,q_2,\cdots,q_s$ є координатами, їх похідні за часом $\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_s$ - швидкостями, а квадратична форма (5.23) у випадку механічної системи – кінетичною енергією. Часто ця квадратична форма й насправді є кінетичною енергією реальної системи, але у багатьох випадках форма (5.23) утворюється в результаті перетворень рівнянь руху.

Складові матриць-стовпців у лівій і правій частинах рівняння (5.22) можна трактувати як сили, причому у деяких випадках вони є реальними силами, а в інших – лише деякими членами рівнянь.

Надалі для простоти квадратичну форму (5.23) називатимемо кінетичною енергією (незалежно від того, розглядається механічна, електрична, електромеханічна чи інша реальна система), змінні q_k - координатами системи, їх похідні за часом $\dot{q}_k$ - швидкостями, матриці-стовпці $A\ddot{q}, B\dot{q}, Cq, F$ і їхні елементи – силами. при цьому сили $A\ddot{q}$ називатимемо *силами інерції*, а сили F - *нелінійними силами*. Розкладемо матриці B і C на симетричні B_d і C_p і кососиметричні G і P складові (5.13):

$$B = B^t = \frac{B_1 + B_1^t}{2}; \quad G = -G^t = \frac{B_1 - B_1^t}{2}; \; C = C^t = \frac{C_1 + C_1^t}{2}; \; P = -P^t = \frac{C_1 - C_1^t}{2}.$$

Тепер рівняння (5.22) матиме вигляд:

$$A \cdot \ddot{q} + B_d \cdot \dot{q} + G \cdot \dot{q} + C_p \cdot q + P \cdot q = F + E(t). \tag{5.24}$$

Сили $C_p \cdot q$, які є пропорційними координатам, з симетричною матрицею коефіцієнтів $C_p = [c_{ik}]$, називають *потенційними* або *консервативними*. Як правило, вони є просто лінійними частинами реальних потенційних сил тяжіння, пружності тощо (нелінійні частини потенційних сил входять до матриці F).

Квадратичну форму

$$\Pi = \frac{1}{2} q^t \cdot C \cdot q \tag{5.25}$$

назвемо *потенційною енергією* системи. Насправді вона є у більшості випадків лише частиною реальної потенційної енергії.

Складемо за допомогою симетричної матриці $B_d = [b_{ik}]$ квадратичну форму

$$\Phi = \frac{1}{2} \dot{q}^t \cdot B_d \cdot \dot{q}. \tag{5.24}$$

Якщо ця функція є невід‘ємною, то вона називається *функцією розсіювання енергії* або *дисипативною функцією Релея*. Відповідні сили $B_d \dot{q}$ у цьому випадку звуться *дисипативними силами*. Якщо квадратична форма Φ є не просто додатною, а певнододатною, то *дисипація* називається *повною*, у противному разі – *неповною*. Нарешті, якщо функція Φ може набувати від‘ємні значення, то серед сил, що входять до матриці $B_d \dot{q}$, існують *"прискорювальні" сили*. Зазвичай дисипативні сили виникають природним шляхом при русі тіл у середовищі, яке чинить опір, в електричних колах при наявності омічного опору тощо. Прискорювальні сили, як правило, утворюються за допомогою спеціальних пристроїв.

Сили $G\dot{q}$, які лінійно залежать від швидкостей і коефіцієнти при яких утворюють кососиметричну матрицю $G = [g_{ik}]$, називаються *гіроскопічними силами*. Найчастіше ці сили зустрічаються у системах, що містять гіроскопи, але можуть існувати і в системах без гіроскопів.

Сили Pq, які лінійно залежать від координат і коефіцієнти при яких утворюють кососиметричну матрицю $P = [p_{ik}]$, не мають точно встановленої назви. В літературі їх називають *циркуляційними*, *неконсервативними*, силами *радіальної корекції*, *псевдогіроскопічними*. У подальшому називатимемо їх неконсервативними, пам‘ятаючи, що термін цей не зовсім точний, бо всі сили, окрім потенційних, не є консервативними.

Приклад. Розглянемо гіроскоп у кардановому підвісі, зображений на рис. 5.1.

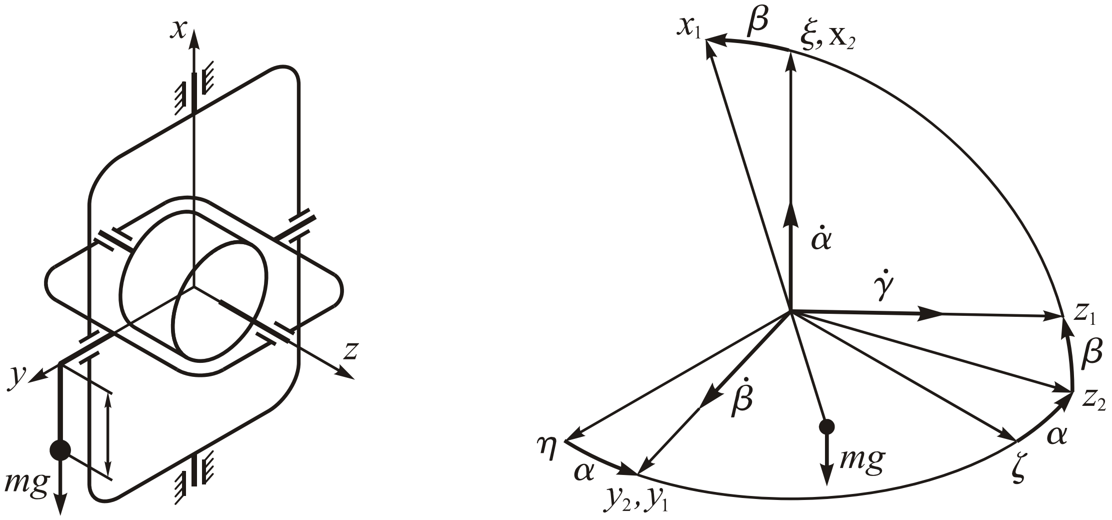


Рис. 5.1. ГКП зі зміщеним центром мас

Його рівняння були наведені раніше і мають вид:

$$\begin{cases} (J_1 + J_2\cos^2\beta)\ddot\alpha - 2J_2\dot\alpha\dot\beta\sin\beta\cos\beta + H\dot\beta\cos\beta = N - R\sin\beta \\ J_3\ddot\beta + J_2\dot\alpha^2\sin\beta\cos\beta - H\dot\alpha\cos\beta = L \\ \dfrac{dH}{dt} = R \end{cases}$$

Припустимо:

1) моменти сил, що діють на ротор гіроскопа навколо головної осі врівноважені:

$$R \equiv 0;$$

2) вздовж зовнішньої і внутрішньої осей карданова підвісу діють моменти сил в‘язкого тертя

$$N_1 = -f_2\dot\alpha; \qquad L_1 = -f_1\dot\beta;$$

3) вдовж зовнішньої осі підвісу діє момент сил міжрамкової корекції, пропорційний куту відхилення внутрішньої рамки (для цього, очевидно, цей кут має вимірюватися датчиком кута, а електричний сигнал з цього датчика має подаватися до входу датчика моментів на зовнішній осі підвісу, який й утворить момент сил вдовж цієї осі):

$$N_2 = k\beta;$$

4) центр мас гіроскопа зміщений вдовж осі, перпендикулярній як внутрішній осі підвісу, так й головній осі гіроскопа; в результаті відносно внутрішньої осі підвісу утворюється момент сил тяжіння

$$L_2 = -mgl\sin\beta;$$

5) кути α і β є малими

$$x = \alpha; \quad y = \beta.$$

Лінеаризуючи початкові рівняння, одержимо

$$\begin{cases} (J_1 + J_2)\ddot{x} + f_2\dot{x} + H_0\dot{y} - ky = F_1(y,\dot{x},\dot{y}) \\ J_3\ddot{y} + f_1 \cdot \dot{y} - H_0\dot{x} + mgl \cdot y = F_2(y,\dot{x},\dot{y}) \end{cases}.$$

Тут $F_1(y,\dot{x},\dot{y})$ і $F_2(y,\dot{x},\dot{y})$ - нелінійні сили.

Позначаючи

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix},$$

подамо цю систему диференційних рівнянь у матричній формі:

$$A\ddot{X} + B\dot{X} + CX = F(X),$$

де $A = \begin{bmatrix} J_1 + J_2 & 0 \\ 0 & J_3 \end{bmatrix}$ - симетрична матриця коефіцієнтів інерції;

$$B = \begin{bmatrix} f_2 & H_0 \\ -H_0 & f_1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -k \\ 0 & mgl \end{bmatrix}.$$

Виділимо сили демпфірування, гіроскопічні, потенційні і неконсервативні:

- матриця демпфіруючих сил

$$B_d = \frac{1}{2}(B + B^t) = \begin{bmatrix} f_2 & 0 \\ 0 & f_1 \end{bmatrix};$$

- матриця гіроскопічних сил

$$G = \frac{1}{2}(B - B^t) = \begin{bmatrix} 0 & H_0 \\ -H_0 & 0 \end{bmatrix};$$

- матриця консервативних сил

$$C_p = \frac{1}{2}(C + C^t) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{k}{2} \\ -\frac{k}{2} & mgl \end{bmatrix};$$

- матриця сил радіальної корекції

$$P = \frac{1}{2}(C - C^t) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{k}{2} \\ \frac{k}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Функція Релея у цьому випадку має вигляд $\Phi = \frac{1}{2}(f_2 \cdot \dot{x}^2 + f_1 \cdot \dot{y}^2)$. Вона є певнододатною, і тому нею відображуються сили повної дисипації

5.4.2. Фазові координати, фазовий простір і фазові портрети

Більшість методів теоретичного дослідження систем диференційних рівнянь спивається на подання цієї системи у виді сукупності диференційних рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно похідних, тобто такого виду:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = Z_1(y_1, y_2, ...y_n, t) \\ \dfrac{dy_2}{dt} = Z_2(y_1, y_2, ...y_n, t) \\ \quad ... \\ \dfrac{dy_n}{dt} = Z_n(y_1, y_2, ...y_n, t) \end{cases}, \qquad (5.25)$$

де n - порядок системи диференційних рівнянь, а $Z_k(y_1, y_2, ...y_n, t)$, де $k = 1, 2, ..., n$, є довільними (у тому числі – нелінійними) функціями вказаних аргументів. Форму (5.25) системи диференційних рівнянь називають *нормальної формою Коші*.

До такого виду може бути приведена будь-яка система диференційних рівнянь. Але таке приведення зв'язано з введенням додаткових (по відношенню до узагальнених координат) змінних. Тому ця операція не є однозначною. І нормальних форм Коші однієї системи диференційних рівнянь може бути безліч.

Змінні y_1, y_2,..., y_n називають *змінними стану* системи, або *фазовими змінними* системи. Їх сукупність утворює *стан*, або *фазу системи*. Характерною особливістю стану (фази) системи є те, що його задання у початкову мить повністю визначає усе подальше поводження системи (тобто значення цього стану у подальші моменти часу).

Умовний математичний простір, в якому координатами є фазові змінні (змінні стану), зазвичай називають *фазовим простором* (простором стану). Конкретна фаза (стан) системи відображується певною точкою у цьому просторі, яка отримала назву *зображуючої точки*. При русі системи зображуюча точка змінює своє положення у фазовому просторі. Геометрично при своєму русі зображуюча точка (яка повністю характеризує стан системи у поточний момент часу) описує у фазовому просторі траєкторію, яку називають *фазовою траєкторією*. Вид цієї фазової траєкторії і напрямок руху вдовж неї зображуючої точки дає можливість скласти уявлення про рух системи в околі незбуреного руху (якому, як відомо, відповідає початок координат у фазовому просторі).

У відповідності до (5.25) значення функцій Z_k, що розташовані у правих частинах рівнянь, визначають поточні значення проекцій $v_k = \dfrac{dy_k}{dt}$ *фазової швидкості* $\mathbf{v}$ на осі координат фазового простору.

Найбільш ефективно використовувати метод фазового простору для систем другого порядку, коли кількість фазових координат дорівнює двом. У цьому випадку фазові траєкторії можна реально й наочно відображати на площині (рис. 5.2) фазових змінних $y_1 = x_1$ і $y_2 = x_2$, і це зображення називають *фазовим портретом* системи.

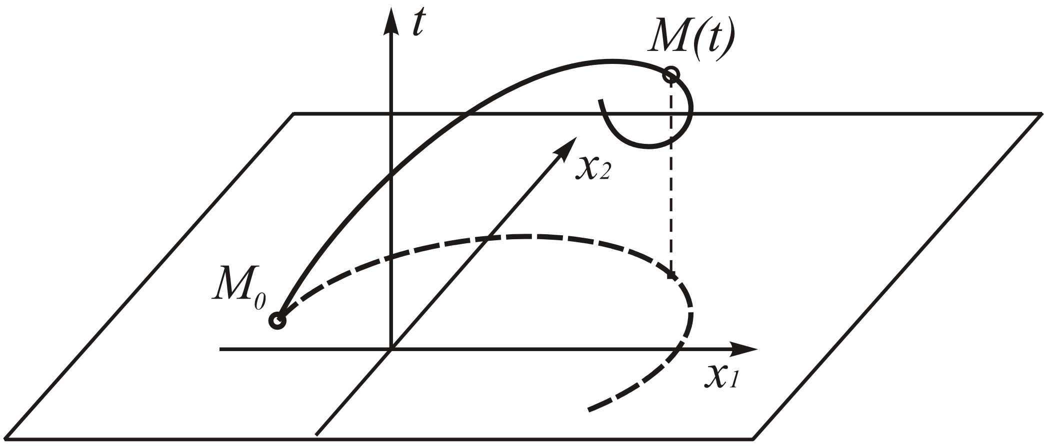


Рис. 5.2. Фазовий портрет і інтегральна крива

Рівняння (5.25) для вільного руху системи (тобто коли зовнішні сили $E(t)$ відсутні) при $n = 2$ набувають вигляду:

$$\frac{dx_1}{dt} = Z_1(x_1, x_2); \qquad \frac{dx_2}{dt} = Z_2(x_1, x_2). \tag{5.26}$$

Виключаючи час, одержимо з них диференційне рівняння фазової траєкторії:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{Z_2(x_1, x_2)}{Z_1(x_1, x_2)}. \tag{5.27}$$

Точки *стану рівноваги* системи визначаться з рівнянь (6.2) прирівнюванням нулю фазової швидкості системи ($\dot{x}_1 = 0$ і $\dot{x}_2 = 0$):

$$Z_1(x_1, x_2) = 0; \qquad Z_2(x_1, x_2) = 0. \tag{5.28}$$

У цих точках права частина рівняння (5.27) фазової траєкторії стає невизначеною. Тому *точки стану рівноваги є так званими особливими точками на фазовій площині*.

Заміною змінних можна привести рівняння (5.26) до більш простого виду:

$$\frac{dx}{dt} = y; \qquad \frac{dy}{dt} = \Phi(x, y). \tag{5.29}$$

У цьому випадку координата y, яка відкладається по осі ординат фазової площині, являє собою швидкість змінювання координати x, яка відкладається по осі абсцис.

Таке подання дозволяє більш наочно подати зв‘язок між фазовим портретом руху системи і часовим змінюванням координати x і її швидкості y. При цьому виконуються такі особливості фазової траєкторії:

а) у верхній півплощині (рис. 5.3) *зображуюча точка рухається вдовж фазової траєкторії зліва направо, тобто у бік збільшення* x, *бо там швидкість є додатною (* $y > 0$ *);*

б) в нижній півплощині, навпаки, зображуюча точка рухається справа наліво;

в) фазова траєкторія перетинає вісь координати x *під прямим кутом, бо у цій точці* $y = 0$ (швидкість обертається у нуль), *тобто має місце екстремум (максимум або мінімум) величини* x.

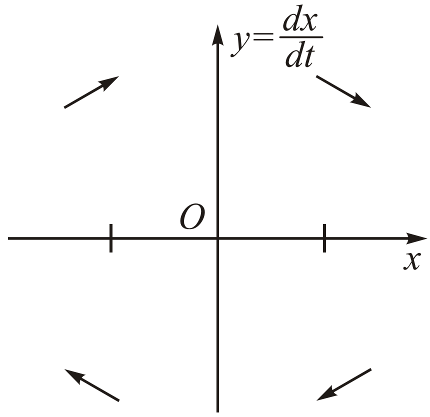


Рис. 5.3. Напрямки руху зображуючої точки на фазовій площині

На рис. 5.4...5.8 показано, як відбувається різний характер процесів на виді фазового портрету.

Рисунок 5.4 відображує загасаючий коливальний процес. На фазовій траєкторії відмічені точки A, B, C, D, E, в яких координата x має або максимум, або мінімум, або обертається у нуль.

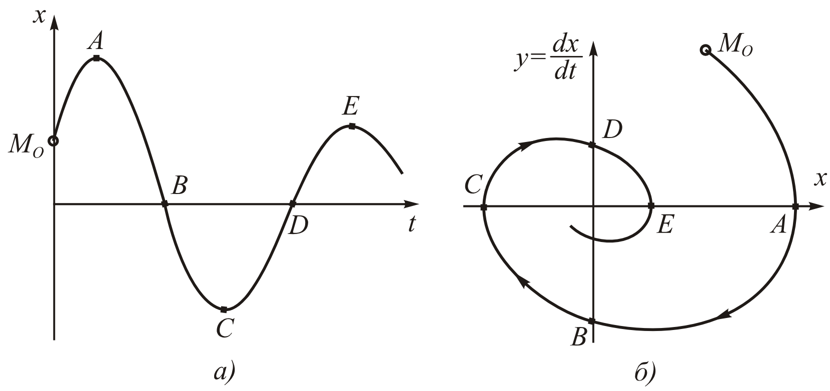


Рис. 5.4. Фазовий портрет загасаючих коливань

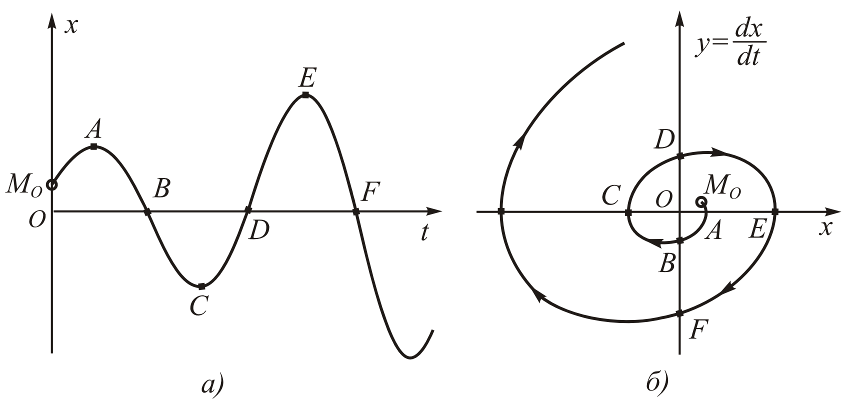
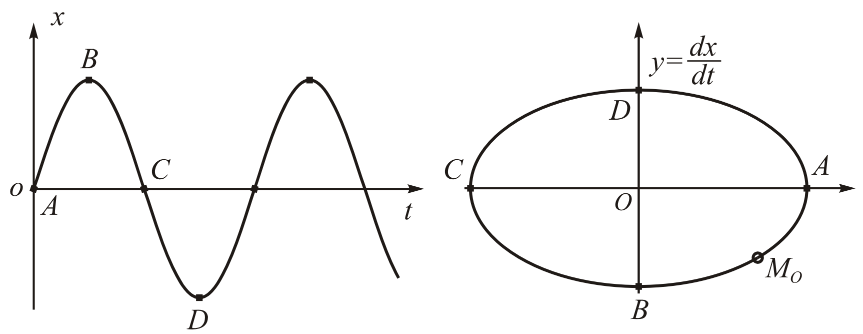


Рис. 5.5. Фазовий портрет розбіжних коливань



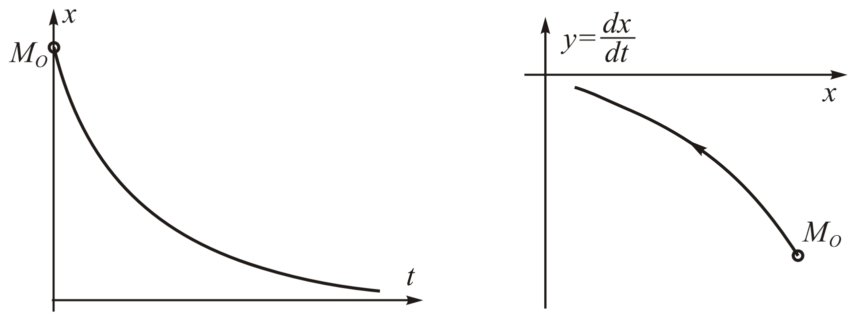
а) *б)*

Рис. 5.6. Фазовий портрет періодичних коливань

Як бачимо, *загасаючий коливальний процес зображується на фазовій площині у виді збіжної спиралевидної кривої.*

Аналогічно, розбіжний коливальний процес (рис. 5.5) відображується на фазовій площині як розбіжна спиралевидна крива.

Періодичний процес (рис. 5.6) на фазовій площині має вигляд замкненої кривої. За один період коливань зображуюча точка обігає увесь замкнений контур, а потім повторює рух по ньому.



а) *б)*

Рис. 5.7. Фазовий портрет монотонно збіжного процесу

Монотонно загасаючому процесу (рис. 5.8) відповідає на фазовій площині крива, що монотонно наближається до положення рівноваги, а монотонно розбіжному процесу (рис. 5.8) – крива, яка монотонно віддаляється від нього.

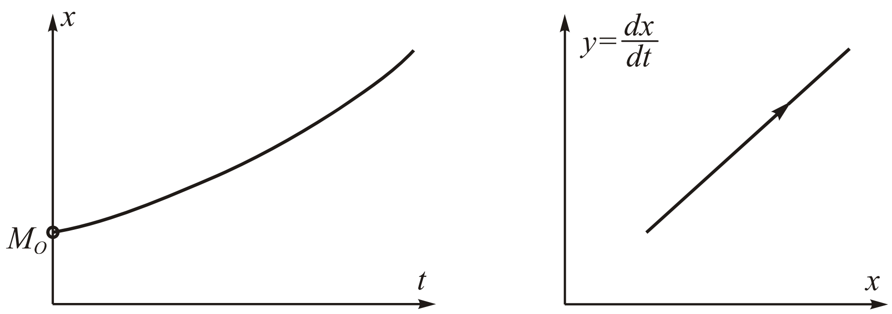


Рис. 5.8. Фазовий портрет монотонно розбіжного процесу

Зручність подання процесу у виді фазових траєкторій на площині полягає у тому, що уся сукупність можливих форм перехідних процесів за будь-яких початкових умов подається у вигляді єдиного "фазового портрету". Недоліком є те, що при цьому ми вимушені обмежуватися розгляданням систем лише другого порядку. Для дослідження нелінійних систем більш високого порядку застосовуються інші методи.

5.4.2.1. Фазові портрети лінійних систем

Розглянемо, які особливості мають фазові портрети лінійних систем другого порядку. Рівняння лінійної системи можна привести до виду:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dy} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = a_1 x + a_2 y \end{cases}, \tag{5.30}$$

або у векторно-матричній формі

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A \cdot \mathbf{x}; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{5.31}$$

Диференційне рівняння фазової траєкторії у цьому випадку матиме вигляд:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1 x + a_2 y}{y}. \tag{5.32}$$

Єдиною особливою точкою (точкою рівноваги системи) є точка $x = 0$, $y = 0$.

Позначимо λ_1 і λ_2 корені характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ a_1 & a_2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - a_2 \lambda - a_1 = 0. \tag{5.33}$$

Тут E - одинична матриця.

Якщо $\lambda_1 \neq \lambda_2$, корені є різними і дійсними, то шляхом підстановки $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ де P - невироджена матриця, рівняння (5.30) можна привести до наступної форми

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = P^{-1}AP \cdot \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{y} = diag(\lambda_1, \lambda_2)\mathbf{y}; \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

або

$$\frac{dy_1}{dt} = \lambda_1 y_1; \qquad \frac{dy_2}{dt} = \lambda_2 y_2.$$

Розв‘язок цих рівнянь з поділеними змінними є таким:

$$y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}; \quad y_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{5.34}$$

Розглянемо фазові траєкторії в цій системі координат (y_1, y_2), а потім відобразимо фазові траєкторії на площині первісних координат (x, y).

Перехідний процес є аперіодичним. Нехай $|\lambda_2| > |\lambda_1|$. Вилучаючи t з розв‘язку (5.34), одержимо рівняння фазової траєкторії:

$$y_2 = Cy_1^{\lambda_2/\lambda_1}.$$

Якщо знаки коренів λ_1 і λ_2 є однаковими, то з врахуванням зробленого припущення маємо $\lambda_2/\lambda_1 > 1$, і фазові траєкторії відображуються у виді парабол (рис. 6.8). При цьому напрямок руху зображуючої точки вдовж будь-якої фазової траєкторії визначається рівнянням (6.10), а саме: випадку $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ (рис. 6.8а) відповідає загасаючим перехідним процесам; випадок $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ (рис. 6.8б) відповідає розбіжним перехідним процесам.

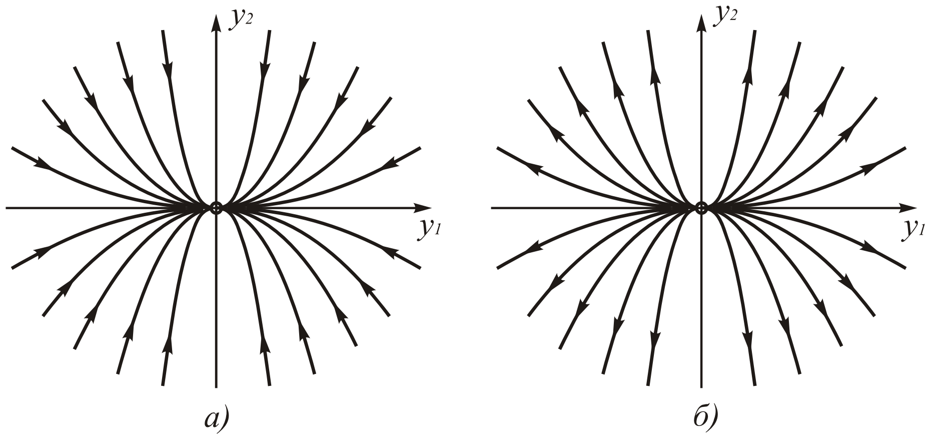


Рис. 5.9. Фазові траєкторії при дійсних коренях однакових знаків

Якщо ж знаки коренів λ_1 і λ_2 є різними, то $\lambda_2/\lambda_1 < -1$, і фазові траєкторії мають вид гіпербол (рис. 5.10).

У випадку від‘ємних дійсних коренів (рис. 5.9а) особлива точка називається *стійким вузлом*. При додатних дійсних коренях особлива точка одержала назву *нестійкого вузла*. Якщо ж дійсні корені є різних знаків, особлива точка називається *сідловиною*. Сідловинна точка завжди є нестійкою.

Припустимо тепер, що корені є комплексними. Тоді вони складають комплексно спряжену пару:

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta.$$

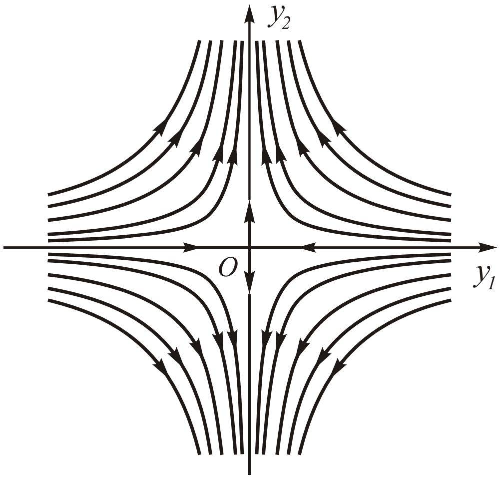


Рис. 5.10. Фазові траєкторії при дійсних коренях різних знаків

Розв‘язки рівняння (5.30) набувають виду

$$x = e^{at}[A\sin(\beta t) + B\cos(\beta t)];$$

$$y = \frac{dx}{dt} = e^{at}[(aA - \beta B)\sin(\beta t) + (aB + \beta B)\cos(\beta t)].$$

Фазові траєкторії у цьому випадку являють собою східні (у випадку від‘ємної дійсної частини коренів a), або розхідні (при додатній дійсній частині) еліптичні спіралі навколо особливої точки - початку координат. У першому випадку (рис. 5.11, а) особлива точка О називається точкою типа "*стійкий фокус*", у другому (рис. 5.11, б) - точкою типа *"нестійкий фокус"*.

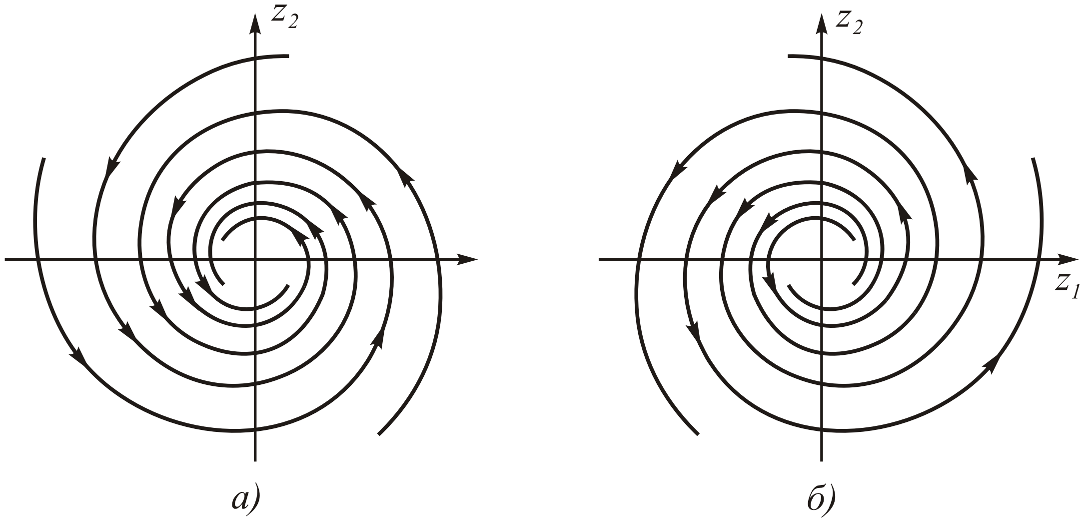


Рис. 5.11. Випадок комплексних коренів

У частковому випадку суто уявних коренів ($\alpha = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm j\beta$), фазові траєкторії мають вид (рис. 5.12) замкнених еліпсовидних кривих. Це відповідає періодичним у часі процесам. У цьому випадку особлива точка називається точкою типа *"центр"*.

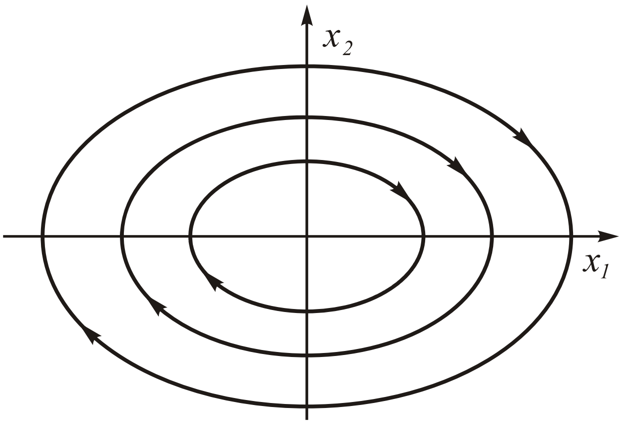


Рис.5.12. Випадок уявних коренів

5.4.2.2. Фазові портрети нелінійних систем

У нелінійних системах, які описуються рівняннями виду (6.2) і (6.3), спостерігаються деякі відмінні особливості процесів.

Перш за все, в нелінійній системі можлива наявність кількох станів рівноваги, а отже, й особливих точок (рис. 5.13). Тому на фазовій площині виходять області з різними типами фазових траєкторій. Області з різними типами фазових траєкторій відділяються одна від одної кривими, які називають *особливими кривими*, або *сепаратрисами*.

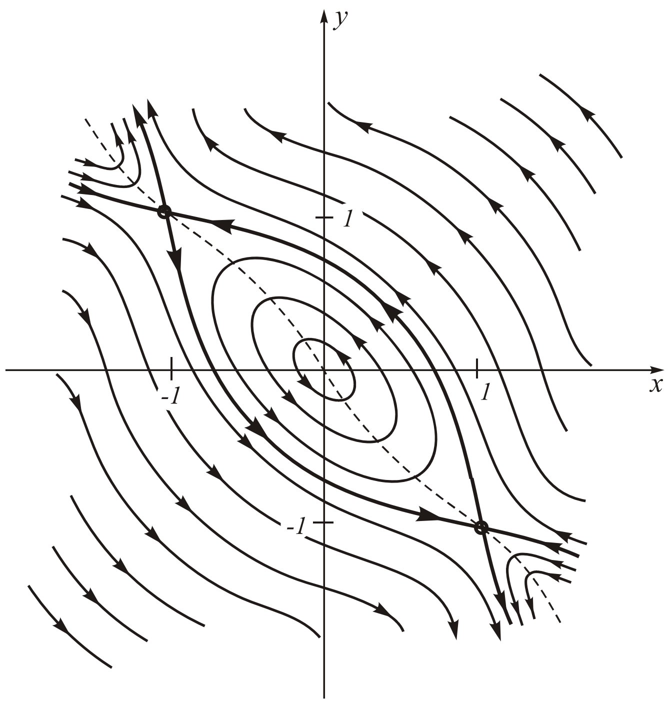


Рис. 5.13. Фазовий портрет нелінійної системи з кількома положеннями рівноваги

Окрім того, фазові портрети нелінійних систем можуть містити такий вид особливих кривих, як *межові цикли* – замкнені криві, що відповідають періодичним коливанням, в околі яких мають місце коливальні перехідні процеси. Якщо фазові траєкторії, що відповідають цим перехідним процесам з середині і ззовні сходяться до межового циклу (рис. 5.14, а), то такий цикл є *стійким межовим циклом*. Якщо ж вони віддаляються в обидва боки (рис. 5.14,б), - маємо *нестійкий межовий цикл.* Можливий також і випадок двох межових циклів (рис. 5.14, в), з яких один є стійким (на рисунку – зовнішній), а другий є нестійким.

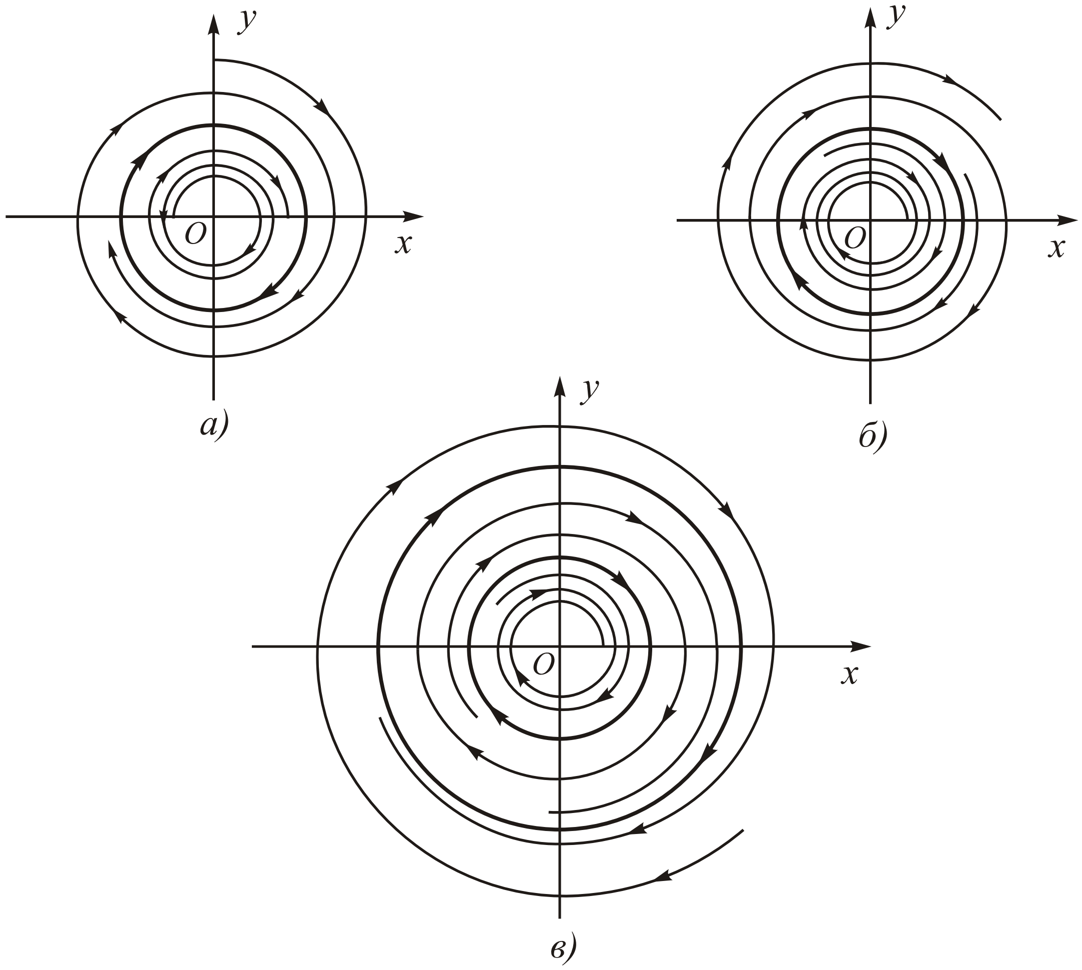


Рис. 5.14. Межові цикли

Особлива точка О на рис. 5.14 у першому випадку являє собою нестійке положення рівноваги, а у другому і третьому – стійке.

Стійкий періодичний процес, який відповідає стійкому межовому циклу, являє собою *автоколивання системи*. Це є власні періодичні коливання, що здійснюються при відсутності зовнішньої періодичної дії, причому амплітуда і частота автоколивань не залежать від початкових умов, а визначаються внутрішніми властивостями системи. Автоколивання можуть виникати лише в нелінійних системах, причому за рахунок наявності внутрішнього джерела енергії, яке компенсує втрати енергії внаслідок завжди присутніх дисипативних сил (сил опору).

5.4.3. Приведення рівнянь до форми Коші

Приведення системи первісних диференційних рівнянь математичної моделі до нормальної форми Коші є обов'язковим етапом складання програмної моделі для чисельного інтегрування цієї системи. Усі розв'язувачі, тобто програми, що здійснюють чисельне інтегрування диференційних рівнянь спираються на попереднє представлення цих рівнянь у формі Коші, бо на кожному кроці інтегрування звертаються до процедури обчислення правих частин, тобто функцій $Z_k(y_1, y_2, ...y_n, t)$.

Тому перед складанням програми, яка здійснює чисельне інтегрування диференційних рівнянь, потрібно здійснити наступні дії:

1) привести первісні рівняння до нормальної форми Коші (5.25);

2) скласти програму (процедуру), яка б обчислювала значення функцій Z_k по заданих значеннях вектора $y_1, y_2, ...y_n$ змінних стану і часу t.

У випадку використання системи MatLab цю процедуру слід зберегти на диску як М-файл з певним ім'ям, наприклад, PravDR.m.

У середовищі Matlab задля здійснення чисельного інтегрування передбачені дві процедури ode23 і ode 45 завтоматичним обчисленням кроку інтегрування на кожному кроці (див. п. 2.5.1, глава 2).

У Simulink для цієї мети у розпорядженні користувача є 13 процедур чисельного інтегрування – шість з фіксованим розміром кроку інтегрування і сім - з автоматичним обчисленням цього кроку (див. п. 4.1.1., глава 4).

Якщо математична модель системи вже відома, тобто складена відповідна система з s диференційних рівнянь загального порядку n відносно s невідомих шуканих змінних x_k ($k = 1, 2,..., s$), то найбільш простим способом одержання рівнянь у формі Коші є такий:

1) позначити усі s шукані змінні як перші s змінні стану:

$y_1 = x_1$; $y_2 = x_2$; ... $y_s = x_s$;

2) рештою $(n - s)$ змінними стану позначити усі похідні від первинних шуканих змінних x_k, за виключенням похідної найбільш високого порядку, яка зустрічається у первинних рівняннях.

Як приклад, розглянемо застосування цього способу до рівнянь руху гіроскопа у кардановому підвісі

$$\begin{cases} (J_1 + J_2 \cos^2 \beta)\ddot{\alpha} - 2J_2\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta\cos\beta + H\dot{\beta}\cos\beta = N - R\sin\beta \\ J_3\ddot{\beta} + J_2\dot{\alpha}^2 \sin\beta\cos\beta - H\dot{\alpha}\cos\beta = L \\ \dfrac{dH}{dt} = R + M_{cm} \end{cases},$$

в яких моменти сил N, L, R і M_{cm} вважатимемо заданими функціями часу.

У цьому випадку є три шукані змінні - α, β і H і три відповідних рівняння ($s = 3$). Загальний порядок системи диференційних рівнянь $n = 2 + 2 + 1 = 5$. Отже, у відповідності до зазначеного, позначимо

$$y_1 = \alpha; \quad y_2 = \beta; \quad y_3 = H; \quad y_4 = \dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt}; \; y_5 = \dot{\beta} = \frac{d\beta}{dt}.$$

Останні два позначення у сукупності з першими двома дадуть додаткові два рівняння

$$\frac{dy_1}{dt} = y_4; \qquad \frac{dy_2}{dt} = y_5. \tag{5.35}$$

Решта три рівняння випливають з первинних трьох рівнянь, якщо їх розв'язати відносно старших похідних і зробити зазаначену заміну змінних:

$$\frac{dy_4}{dt} = \frac{N(t) - R(t)\sin y_2 + 2J_2 y_4 y_5 \sin y_2 \cos y_2 - y_3 y_5 \cos y_2}{J_1 + J_2 \cos^2 y_2};$$

$$\frac{dy_5}{dt} = \frac{L(t) - J_2 y_4^2 \sin y_2 \cos y_2 + y_3 y_4 \cos y_2}{J_3}; \tag{5.36}$$

$$\frac{dy_3}{dt} = R(t) + M_{cm}(t).$$

Сукупність рівнянь (5.35) і (5.36) і є рівняннями у формі Коші.

Порівнюючи їх з (5.25), одержимо такі вирази функцій у правих частинах рівнянь у формі Коші:

$$Z_1 = y_4;$$

$$Z_2 = y_5;$$

$$Z_3 = R(t) + M_{cm}(t);$$

$$Z_4 = \frac{N(t) - R(t)\sin y_2 + 2J_2 y_4 y_5 \sin y_2 \cos y_2 - y_3 y_5 \cos y_2}{J_1 + J_2 \cos^2 y_2};$$

$$Z_5 = \frac{L(t) - J_2 y_4^2 \sin y_2 \cos y_2 + y_3 y_4 \cos y_2}{J_3}.$$

Саме обчислення значень цих функцій має здійснюватися у процедурі PravDR.m на кожному кроці інтегрування по відомих поточних значеннях модельного часу t і змінних стану.

Але привести до форми Коші можна й не складаючи попередньо і детально ситеми диференційних рівнянь. Для вирішення цієї задачи прислуговуються самі закони механіки, електрики чи електромеханіки, які зазвичай мають диференційну форму. Особливо це стосується законів механіки.

5.4.4. Контрольні запитання

1. Яке поняття вкладається у термін "динамічна система"?
2. Що розуміють під нормальною формою Коші диференційних рівнянь?
3. Як привести систему диференційних рівнянь до нормальної форми Коші? Чиє ця операція однозначною? Чому?

5.5. Задачі і особливості моделювання гіроскопічних пристроїв

Специфіку динамічних процесів у гіроскопічних пристроях і приладах складають наступні особливості.

1. Основним режимом роботи практично усіх гіроприладів є коливання головної осі гіроскопа. Ці коливання можуть бути обумовлені різними причинами і мати різний характер – власні прецесійні і нутаційні коливання (гірокомпас, гіромаятник); вимушені коливання, обумовлені завнішніми і внутрішніми вібраціями і хитавицею основи; автоколивання у гіростабілізаторах; сполучення різних видів коливань, наприклад, у наземного гірокомпаса при вібрації основи.
2. У робочому режимі коливання гіроскопа здійснюються одночасно з кількома частотами. Наприклад, власні частоти гірокомпаса носять двочастотний характер (прецесійні і нутаційні коливання). Зовнішні дій є також багаточастотними.
3. Частоти коливань гіроскопа можуть значно різнитися за величиною. Так, період прецесійних коливань морського гірокомпаса приблизно дорівнює півтори години, період його нутаційних коливань складає відсотки секунд, тобто вони відрізняються на п’ять порядків. Робочий діапазон частот зовнішніх дій також вельми широкий – від довгоперіодичних (порядка десятків хвилин – циркуляція корабля, віраж і фугоїдні коливання літака) до високочастотних (порядка кількох сотен герц), обумовлених вібраціями маршового двигуна рухомого транспортного засобу, на якому встановлений гіроскопічнй прилад.
4. Вплив коливань зі настільки відмінними за величиною частотами на точність гіроприладу зазвичай є порівнянним (того самого порядку), хоча й обумовлений різними причинами і носить різний характер. Тому неможливо досліджувати поводження гіроприладу, відкидаючи (не враховуючи) або високочастотні, або низькочастотні коливання.

Хоча коливання з настільки різними частотами допускають, здавалося б, розділення рухів, тобто роздільне вивчення високочастотних і низькочасотних рухів, але на практиці цьому перешкоджають дві обставини:

а) через те, що рівняння руху гіроприладу є нелінійними, принцип суперпозиції тут не може бути застосованим: дія на гіроскоп сукупності низькочастотних і високочастотних збурень не дорівнювати сумі впливів окремо розглядуваних низькочастотного і високочастотного збурень;

б) збурення, які розглядаються як сталі при дослідженні високочастотного процесу, можуть при переході до вивчення низькочастотних процесів виявляти себе як повільно змінювані, закон змінювання у часі яких визначатиметься низькочастотним рухом гіроскопа.

Описані характерні особливості динамічних процесів у гіроскопічних приладах приводять, з одного боку, до необхідності моделювати рух гіроприладу за повними рівняннями руху, враховуючи увесь спектр діючих збурень, а з іншого боку, - до необхідності вивчати і застосовувати засоби, які б дозволяли на кілька порядків зменшити час досліджування цих рівнянь на ЕОМ при збереженні припустимої точності опису динамічних процесів, що вивчаються.

Основні задачі, які вирішує проектувальник моделюванням поводження гіроприладу на ЕОМ, можуть бути наступними:

1) вивчення стійкості власних коливань гіроприладу з врахуванням його нелінійних властивостей; підбір параметрів гіроприладу, які б забезпечували заданий запас стійкості; оболиво це відноситься до можливих автоколивань;
2) вивчення динамічної похибки гіроприладу, тобто тієї накопиченої сталої складової похибки вимірювання вхідної величини, яка обумовлена зовнішніми збурюючими моментами сил; підбір таких параметрів гіроприладу і корегуючих пристроїв, які б забезпечували мінімізацію цієї похибки у заданих умовах експлуатації (зовнішніх дій).

Слід додати, що часто проектувальнику немає потреби вивчати закони коливань похибок по відношенню до її середньої величини, достатньо лише знання самої цієї середньої величини (сталої складової похибки). Звідси, здавалося б, можна зробити висновок про можливість відкидання високочастотних складових руху. Це було б дійсно можливим, якщо б параметри високочастотного руху не впливали би суттєво на появу додаткових постійних складових похибок внаслідок так званого "випрямного ефекту", обумовленого нелініністю диференційних рівнянь гіроскопа. Ці сталі складові зазвичай є порівнянними з середньою сумарною похибкою гіроприладу і нехтувати ними неможна. Це ще раз підкреслює необхідність вивчення високочастотних рухів гіроскопа, хоча метою дослідження зазвичай є вивчення саме низькочастотної складової.

5.6. Література

1. Лазарєв Ю. Ф. Моделювання на ЕОМ. Навчальний посібник. – К.: Корнійчук, 2007. – 290 с.
2. Лазарєв Ю. Ф. Математичні моделі та методи теоретичного дослідження стаціонарних лінійних динамічних систем. Конспект лекцій. – К.: КПІ, 1991. – 156 с.
3. Лазарєв Ю. Ф. Методи теоретичного дослідження нелінійних і нестаціонарних динамічних систем. Конспект лекцій. – К.: КПІ, 1991. – 180 с.
4. Методические указания по моделированию поведения гироприборов на ЭВМ. / Составители: Ю. Ф. Лазарев, Ю. Н. Камаев, В. Я. Гигиняк. – К.: КПІ, 1983. – 70 с.