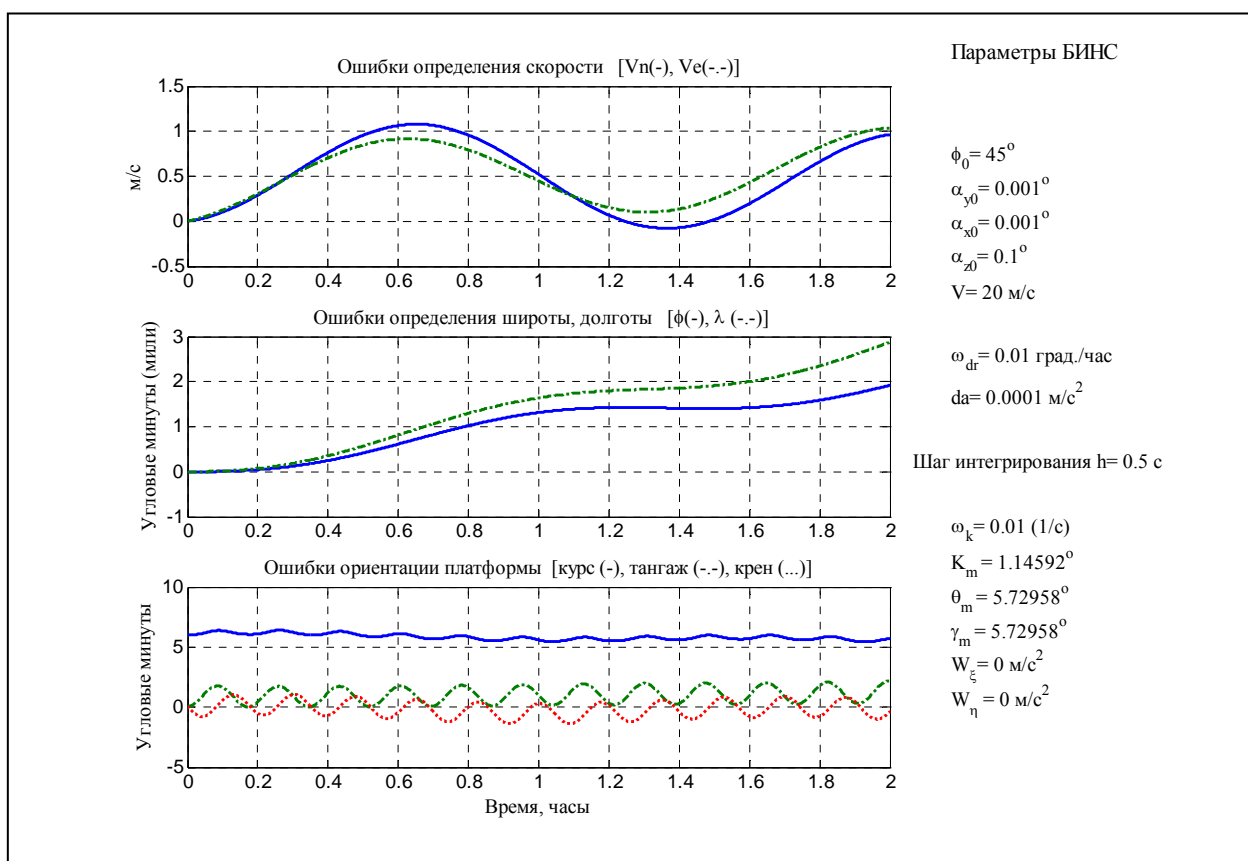


Мелешко В.В., Нестеренко О.И.

БЕСПЛАТФОРМЕННЫЕ ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ НАВИГАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ

Учебное пособие



ББК 34.9
УДК 629.056.6
М-47

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Леонец А.А., доктор технических наук

Панов А.П., доктор технических наук

Мелешко В.В., Нестеренко О.И.

М-47 **Бесплатформенные инерциальные навигационные системы.**
Учебное пособие. – Кировоград: ПОЛИМЕД - Сервис, 2011. – 164с.

ISBN 978-966-7813-75-8

Изложены основы теории бесплатформенных инерциальных систем. Приведены основные сведения для пояснения принципа работы, показаны разновидности уравнений ориентации, различные формы записи скоростей и ускорений в подвижных системах координат. Представлены примеры возможных алгоритмов работы. Рассматривается начальная выставка. Значительное внимание уделено калибровке параметров чувствительных элементов как в производстве, так и в полете. Приведены алгоритмы коррекции от спутниковой навигационной системы и астровизиров. Приведены примеры моделирования.

Для студентов приборостроительных специальностей высших учебных заведений. Может быть полезна инженерам этих специальностей.

Ил. 59, табл. 11

ББК 34.9
УДК 629.056.6
М-47

© Мелешко В.В., Нестеренко В.В.

ISBN 978-966-7813-75-8

В.В.Мелешко, О.И.Нестеренко

БЕСПЛАТФОРМЕННЫЕ ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ НАВИГАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	5
1. Основы инерциальной навигации	7
1.1. Фигура Земли	8
1.2. Гравитационное поле и поле силы тяжести	11
1.3. Системы координат	15
1.4. Акселерометры. Основное уравнение инерциальной навигации	19
1.5. Обобщенная схема ИНС	22
1.6. Принцип построения бесплатформенной ИНС	25
2. Уравнения ориентации	29
2.1. Уравнения ориентации Эйлера	29
2.2. Уравнения ориентации Пуассона	31
2.3. Уравнения с параметрами Родрига-Гамильтона.	36
2.4. Уравнения в параметрах вектора ориентации	38
3. Представления скоростей и ускорений	43
4. Алгоритмы БИНС	49
4.1. БИНС в инерциальной системе координат	49
4.2. БИНС в географическом сопровождающем базисе с обобщенными уравнениями Пуассона	53
4.3. БИНС с уравнением в параметрах Родрига-Гамильтона	55
4.4. БИНС с вектором ориентации	57
4.5. Методы и алгоритмы вычислений	60
4.6. Избыточность измерений	65
5. Уравнения идеальной и реальной работы.	69
5.1. Уравнения идеальной работы в инерциальной системе координат	69
5.2. Уравнения реальной работы в инерциальной системе координат	71
5.3. Уравнения идеальной работы в географической системе координат	73
5.4. Уравнения реальной работы в географической системе координат	74
6. Уравнения ошибок.	75
7. Начальная выставка	81
8. Демпфирование колебаний	88
8.1. Демпфирование с помощью внутренних связей	88
8.2. Демпфирование по скорости от внешней системы	91

9. Коррекция БИНС	95
9.1.Разомкнутая схема комплексирования (интегрирования) со спутниковой навигационной системой (СНС)	96
9.2.Замкнутая схема комплексирования с СНС.	105
9.3.Астрокоррекция в географической системе координат	108
10. Калибровка БИНС.	117
10.1. Модели выходных сигналов инерциальных измерителей	117
10.1.1. Модель выходных сигналов акселерометров	117
10.1.2. Модель выходных сигналов гироскопов	119
10.1.3. Упрощение моделей выходных сигналов измерителей	121
10.2. Калибровка измерительного модуля в производстве	122
10.2.1. Калибровка акселерометров	123
10.2.2. Калибровка гироскопов	126
10.2.3. Температурная калибровка инерциальных измерителей	132
10.3. Использование результатов калибровки в алгоритме БИНС	136
10.4. Калибровка и довыставка БИНС на подвижном основании	140
10.4.1. Алгоритм калибровки и довыставки	141
10.4.2. Расширение возможностей калибровки и довыставки	146
11. Моделирование БИНС	152
Литература	156
 <i>Приложения</i>	
1. Сведения из алгебры кватернионов	158
2. Характеристики БИНС	163

Предисловие

Инерциальные навигационные системы (ИНС) стали основой навигационных комплексов современных подвижных объектов. Это обусловлено тем, что они дают полную информацию о навигационных параметрах движения - углах курса, тангажа (дифферента), крена; ускорении, скорости движения и координатах места объекта. При этом они полностью автономны, т.е. не требуют какой-либо информации извне. Благодаря возможности определять угловое положение объекта с высокой точностью в любом диапазоне углов и с высокой частотой выдачи информации, ИНС к настоящему времени не имеют альтернативы.

Несмотря на активность разработок бесплатформенных инерциальных систем (БИНС), большое количество научной литературы по БИНС, учебная литература по БИНС практически отсутствует или устарела. С целью дополнить учебную литературу по БИНС подготовлено это учебное пособие. Оно может быть использовано как студентами соответствующих специальностей, так и инженерами. Пособие предполагает наличие базовой подготовки.

Авторы стремились осветить все аспекты работы БИНС. В работе рассматриваются как основной режим работы, так и начальная выставка БИНС. Выставка рассматривается как на неподвижном, так и на подвижном основании. Значительное внимание уделяется режимам калибровки параметров и коррекции. В качестве корректирующих систем рассматриваются спутниковая и астронавигационная системы. В пособии освещены наиболее массовые БИНС, использующие датчики угловой скорости. Рассмотрение БИНС с другими измерителями угловой ориентации объекта выходит за рамки пособия.

Пособие содержит достаточное количество примеров численной оценки характеристик системы.

Главы 1-9, 11, приложения 1,2 подготовлены Мелешко В.В., гл. 10 подготовлена Нестеренко О.И., п. 2.4 подготовлен совместно.

Авторы высказывают большую благодарность рецензентам Леонцу А.А., Панову А.П. за труд по прочтению рукописи. Большинство их замечаний были учтены и способствовали улучшению качества пособия.

Авторы примут все замечания и пожелания, которые постараются учесть при подготовке следующего издания. Их можно направить по адресу: Украина, Киев, 03056, проспект Победы, 37, НТУУ “Киевский политехнический институт”, кафедра приборов и систем ориентации и навигации, Мелешко Владиславу Валентиновичу.

Основные сокращения и обозначения

- БИНС – бесплатформенная инерциальная навигационная система
 ИНС – инерциальная навигационная система
 СНС – спутниковая навигационная система
 БЦВМ – бортовая цифровая вычислительная машина
 ДУС – датчик угловой скорости
 ИИМ – инерциальный измерительный модуль
 ПК – преобразователь координат
 АЦП – аналого-цифровой преобразователь
 ОФК – оптимальный фильтр Калмана
 МНК – метод наименьших квадратов
 ψ – угол курса
 ϑ – угол тангажа
 γ – угол крена
 φ – широта
 λ – долгота
 \vec{r} – радиус-вектор положения объекта
 v – относительная линейная скорость
 V, \dot{r} – абсолютная линейная скорость
 W – абсолютное ускорение
 a – кажущееся ускорение
 g – ускорение силы тяжести
 g' – ускорение силы тяготения (гравитационное)
 ω – угловая скорость
 \mathbf{u} – угловая скорость вращения Земли
 R – радиус Земли
 $R_N (R_2)$ – радиус кривизны земного эллипсоида в плоскости меридиана
 $R_E (R_1)$ – радиус кривизны земного эллипсоида в плоскости первого вертикала
 (перпендикулярной плоскости меридиана)
 $\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости
 Ω – матрица угловой скорости
 $\omega \times$ – матричная форма представления вектора
 XYZ – инерциальная система координат (базис \mathbf{i})
 $\xi\eta\zeta (ENH)$ – географический сопровождающий трехгранник (базис \mathbf{g})
 $\xi_G\eta_G\zeta_G$ – геоцентрическая земная система координат (базис \mathbf{e})
 $x_c y_c z_c$ – связанный с объектом трехгранник (базис \mathbf{b})
 C^{ib} – матрица направляющих косинусов, соответствующая преобразованию
 от связанного базиса \mathbf{b} к инерциальному \mathbf{i}
 Ω_b^{ib} – матрица угловой скорости вращения от связанного базиса \mathbf{b}
 к инерциальному \mathbf{i} в проекциях на оси связанного базиса \mathbf{b}
 Λ^{ib} – кватернион поворота от связанного базиса к инерциальному

1. Основы инерциальной навигации

Идея создания инерциальных навигационных систем (ИНС) возникла в начале 20-го века. Базовым чувствительным элементом такой системы стал акселерометр – прибор для измерения ускорения движения объекта. Поскольку акселерометр, а также и используемые в ИНС гироскопы являются инерциальными чувствительными элементами (основаны на использовании инерции массы), системы называют инерциальными.

Метод навигации, используемый в системе – метод счисления пути. Суть его в том, что в заданной системе координат измеряют проекции абсолютного ускорения, интегрируя их дважды, получают скорость и текущие координаты. Поскольку измерение должно проводиться в заданной системе координат, необходимы гироскопические устройства, обеспечивающие моделирование (физическое или математическое) этой системы. Только к 40-м годам прошлого века уровень гироскопов и акселерометров поднялся до такого, который позволил приступить к реальной разработке ИНС.

Если схема построения системы для измерения координат в инерциальном пространстве (относительно звезд) сравнительно проста, то решение задачи определения параметров движения относительно вращающейся Земли было сложнее. Для решения такой задачи плодотворным стало использование маятника Шулера. Хотя такой маятник является математической абстракцией, в ИНС удалось построить его электромеханический аналог, который обеспечил невозмущаемость системы ускорениями движения относительно Земли и значительно снизил рост ошибок.

С 60-х годов прошлого века началась активная разработка бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС). Привлекательность таких систем в том, что в них не требуется гиростабилизированная платформа (ГСП) – наиболее сложный, следовательно, дорогостоящий узел ИНС. В БИНС акселерометры и гироскопы устанавливаются непосредственно на борту объекта, а электромеханическую модель (ГСП) системы координат заменяют математической моделью. Однако эти преимущества не удавалось сразу реализовать в связи с жесткими условиями работы чувствительных элементов (ЧЭ) непосредственно на борту при высоких требованиях к их характеристикам. При этом также предъявлялись высокие требования к вычислительным устройствам. Наконец, к 80 годам было освоено серийное производство БИНС, в первую очередь, в США.

В настоящее время возможности БИНС существенно возрастают. Связано это с прогрессом в производстве высокоточных гироскопов и акселерометров, вычислительной техники. Появились массовые микрогабаритные БИНС, построенные на микромеханических ЧЭ. При этом большое значение имеют возросшие возможности коррекции от спутниковых навигационных систем (СНС), также получивших существенное развитие в последние десятилетия. В результате сфера применения БИНС заметно расширяется - беспилотные летательные аппараты, наземные транспортные средства, роботы и др.

1.1. Фигура Земли

Наиболее простая модель фигуры (формы) Земли – **сфера** радиусом $R=6371,3$ км. Объем именно такой сферы наиболее близок к объему реальной Земли. Для такой модели введены геоцентрические координаты: геоцентрическая широта φ' - угол между плоскостью экватора и геоцентрической вертикалью места, изменяется в пределах $\pm 90^\circ$, положительные значения соответствуют северной широте, отрицательные - южной; долгота λ - угол между нулевым (гринвичским) меридианом и меридианом места, изменяется в пределах от $0^\circ \dots 360^\circ$ или $\pm 180^\circ$, положительные значения соответствуют восточной долготе, отрицательные - западной.

Длина окружности сферической Земли равна примерно 40000 км. Длине дуги в 1 градус соответствует 111 км. Дуга в одну угловую минуту ($1'$) равна 1853,3 метра и получила название морская миля. Более точно, перемещение на одну морскую милю вдоль меридиана примерно соответствует изменению на одну минуту широты. Международная морская миля равна 1852 метрам. Международный кабельтов равен 0,1 морской мили и соответствует 185,2 м.

Такое представление нашей планеты подходит для задач, точность вычислений в которых не превышает 0,5%.

Более точно фигура Земли описывается **двухосным эллипсоидом**, сплюснутым у полюсов. Меридиональное сечение эллипсоида показано на рис.1.1. Здесь a – большая полуось эллипсоида, b – малая полуось. Основные характеристики эллипсоида

$$\alpha = \frac{a-b}{a} - \text{сжатие}, \quad e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} - \text{эксцентриситет}, \quad e^2 \approx 2\alpha = 6,72e^{-3}.$$

Важными характеристиками эллипсоида являются радиусы кривизны его поверхности:

радиус кривизны в плоскости, перпендикулярной плоскости меридиана

$$R_1 \equiv R_E = \frac{a+h}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (1.1)$$

и радиус кривизны в плоскости меридиана

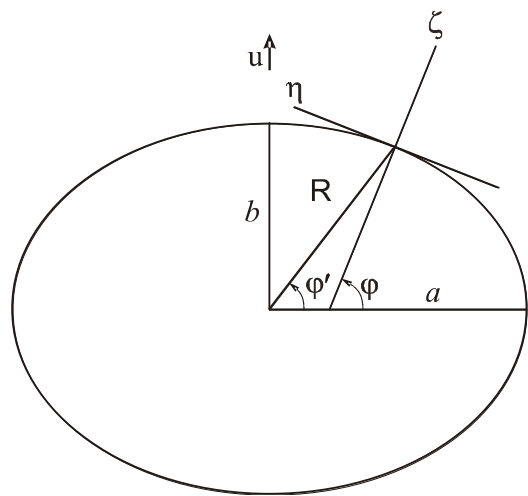


Рис.1.1. Сечение эллипсоида

$$R_2 \equiv R_N = \frac{R_E(1-e^2)}{1-e^2 \sin^2 \varphi} = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}. \quad (1.2)$$

Индексы E и N означают восточную и северную составляющие соответственно. В этих выражениях φ - географическая (геодезическая) широта, равная углу между плоскостью экватора и нормалью к поверхности эллипсоида. Между геоцентрической и географической широтой существует соотношение

$$\varphi - \varphi' = \alpha \sin 2\varphi', \quad \alpha \approx 11,5 \text{ угл. мин.}$$

Радиусы кривизны могут быть записаны приближенно, используя разложение в ряд в виде $\frac{1}{1 \pm x^n} \approx 1 \mp nx + \dots$

$$R_1 \equiv R_E = a \left(1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi + \dots \right), \quad R_2 \equiv R_N = a(1-e^2) \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 \varphi + \dots \right).$$

Радиус параллели $\rho = R_1 \cos \varphi$.

В разных странах существуют различные модели эллипсоидов. Например, сжатие их находится в пределах $\alpha = 1/295 \dots 1/299$. Для того, чтобы наилучшим образом приблизить к эллипсоиду реальную поверхность Земли на ограниченной территории, введены референц-эллипсоиды.

Референц-эллипсоид (от лат. referens – сообщающий, вспомогательный) – земной эллипсоид с определёнными размерами и положением в теле Земли, служащий вспомогательной математической поверхностью, к которой приводят результаты всех геодезических измерений на земной поверхности.

Референц-эллипсоид наилучшим образом согласуется с поверхностью фигуры, наиболее точно соответствующей форме Земли - **геоидом** на ограниченной части его поверхности.

Требования к референц-эллипсоиду:

- 1) Ось вращения должна быть параллельна оси вращения Земли
- 2) Плоскость экватора должна быть параллельна плоскости земного экватора
- 3) Сумма квадратов отступлений геоида от общеземного эллипсоида должна быть наименьшей из всех возможных для данной территории.

Существуют и другие требования.

На территории Советского Союза использовали референц-эллипсоид Красовского (1964 г.) с параметрами $a=6378245$ м, $b=6356863$ м, $\alpha=1/298,3$, $e^2 \approx 2\alpha = 6,72e^{-3}$.

В США и Канаде используют эллипсоид Кларка, в Италии – Хейфорда, в Норвегии – Бесселя. С расширением использования глобальных навигационных

систем (например, спутниковых) широко используют **общеземной эллипсоид (ОЗЭ)**.

Общеземной эллипсоид – наилучшим образом согласующийся с поверхностью геоида в целом.

Требования к общеземному эллипсоиду:

- 1) Центр эллипсоида должен совпадать с центром масс Земли
- 2) Плоскость экватора и малая ось его должны совпадать соответственно с плоскостью экватора и осью вращения Земли
- 3) Объем его должен быть равен объему геоида
- 4) Сумма квадратов отступлений геоида от общеземного эллипсоида должна быть по всей Земле наименьшей из всех возможных:
- 5) Сумма квадратов уклонений отвесных линий (см. п.1.3) должна быть по всей Земле наименьшей из всех возможных.

В США принят общеземной эллипсоид системы World Geodetic System (**WGS-84**) с параметрами $a=6378136,991$ м $b=6356752,3$ м $\alpha=1/298,257$.

В России действует государственная система координат «Параметры Земли 1990 года» (**ПЗ-90**). За отсчетную поверхность в государственной геоцентрической системе координат (ПЗ-90) принят общий земной эллипсоид со следующими геометрическими параметрами:

- большая полуось 6378 136 м;
- сжатие 1:298,257839;
- центр этого эллипсоида совмещен с началом геоцентрической системы координат; плоскость начального (нулевого) меридиана совпадает с плоскостью ZX этой системы.

Масса Земли M , включая массу ее атмосферы, умноженная на постоянную тяготения G , составляет

геоцентрическую гравитационную постоянную $GM = 398600,44$ км³/с², гравитационное ускорение на экваторе Земли - 978 032,84 мгал (1 Гал=1 см/с², 1 миллиГал=10⁻³ см/с²).

Поправка к гравитационному ускорению на уровне моря, обусловленная влиянием атмосферы Земли - 0,87 мГал.

Основные параметры общеземных эллипсоидов сведены в таблицу 1.1.

Геоид - фигура, соответствующая эквипотенциальной поверхности силы тяжести (соответствует уровню океана). По определению эквипотенциальной поверхности, поверхность геоида везде перпендикулярна отвесной линии.

Форма геоида отличается от фигуры (формы) Земли. Эти отклонения внесены в карту. На ней приведены изолинии равных отклонений уровня геоида от уровня эллипсоида. Отрицательное отклонение достигает величины - 105 метров и находится на севере Индийского океана, а положительное отклонение достигает 85 метров и находится на западе Тихого океана.

Таблица 1.1. Параметры общеземных эллипсоидов систем WGS – 84 и ПЗ-90

Параметры	Обозначения	WGS – 84	ПЗ-90
Большая полуось эллипсоида	a	6378137 м	6378136 м
Сжатие	α	1/298,25722356	1/298,257839
Угловая скорость вращения Земли	ω	$7,292115 \cdot 10^{-5}$ рад/с	$7,292115 \cdot 10^{-5}$ рад/с
Геоцентрическая гравитационная постоянная с учетом массы атмосферы Земли	GM	$398600,5 \text{ км}^3/\text{с}^2$	$398600,44 \text{ км}^3/\text{с}^2$

1.2. Системы координат

Определения координат объектов, их навигация могут проводиться в различных системах координат.

Инерциальная геоцентрическая система координат OXYZ имеет ось OX, направленную по линии равноденствия в точку весеннего равноденствия [1], ось OZ направлена по оси вращения Земли, ось OY образует с осями OX и OZ правый координатный трехгранник. В иностранной литературе эту систему координат иногда обозначают ECI (*Earth-centered inertial*), кратко обозначают буквой *i*. (Иногда в качестве инерциальной принимают стартовую систему координат, положение которой известно относительно системы *i*)

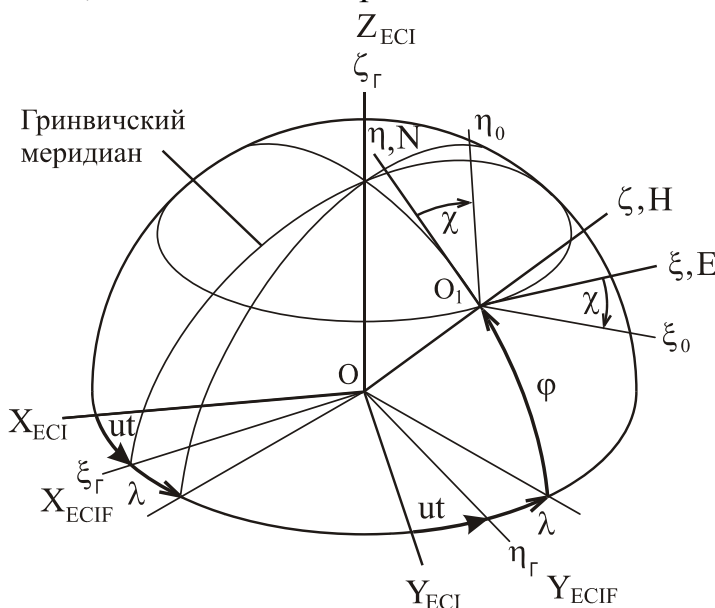


Рис.1.2. Системы координат

положение которой задано широтой ϕ и долготой λ . Если широта задана как

Относительно этой системы координат вместе с Землей вращается геоцентрическая земная система координат $O\xi\eta\zeta$. Ее обозначают ECIF (*Earth-centered earth-fixed*), кратко обозначают *e*. Угол поворота ее соответствует величине ut , где u - угловая скорость вращения Земли, t – время. Ось $O\eta$ находится в плоскости гринвичского меридиана.

Сопровождающая система координат (сопровождающий трехгранник) имеет начало в точке на поверхности Земли,

угол между плоскостью экватора и геоцентрическим радиусом (вертикалью), она называется геоцентрической и обозначается φ' . Оси сопровождающего географического трехгранника $O_1\xi\eta\zeta$ (или O_1ENH) направлены так: ось $O_1\xi$ по касательной к параллели на восток, ось $O_1\eta$ направлена на Север, ось $O_1\zeta$ направлена по вертикали. Иногда этот трехгранник обозначают буквой **g**. Относительно нее повернута на угол χ в плоскости горизонта свободная в азимуте система координат. Если угол χ является путевым углом ортодромии, то $O_1\xi_0\eta_0\zeta$ - ортодромическая система координат. Связанную с объектом систему координат (на рис. не показана) будем обозначать $O_1x_cy_cz_c$, O_1y_c - продольная ось объекта, O_1x_c - поперечная ось объекта (на правый борт), O_1z_c - нормальная ось объекта (вверх). Такую систему координат иногда обозначают буквой **b** (от слова *body*).

Сопровождающие трехгранники

Сопровождающий трехгранник вращается в инерциальном пространстве с угловой скоростью, проекции которой можно выразить соответствующими соотношениями.

Географический сопровождающий трехгранник

Проекции угловой скорости вращения трехгранника (системы координат, базиса) относительно инерциального пространства (абсолютной угловой скорости) можно записать в следующем виде

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= -v_N / (R_2 + h); & h &= h_0 + v_\zeta t; \\ \omega_\eta &= v_E / (R_1 + h) + u \cos \varphi; & & \\ \omega_\zeta &= (v_E / (R_1 + h)) \operatorname{tg} \varphi + u \sin \varphi; & \omega_\zeta &= \omega_\eta \operatorname{tg} \varphi. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Кроме ранее введенных обозначений, здесь $v_N = v \cos \chi$ - северная составляющая вектора относительной скорости движения объекта, $v_E = v \sin \chi$ - восточная составляющая, h - высота объекта, h_0 - ее начальное значение, v_ζ - вертикальная составляющая скорости, t - время.

Иногда вектор угловой скорости представляют в виде суммы

$$\vec{\omega} = \vec{u} + \vec{\omega}^o,$$

где \vec{u} - вектор угловой скорости вращения Земли, а $\vec{\omega}^o$ - вектор угловой скорости из-за перемещения объекта относительно Земли (относительная угловая скорость). Эти векторы можно записать в проекциях на оси сопровождающего базиса как

$$\vec{u} = [0, \quad u_\eta, \quad u_\xi]^T; \quad \vec{\omega}_\xi^o = [\omega_\xi^o, \omega_\eta^o, \omega_\zeta^o]^T. \quad (1.4)$$

Здесь $u_\eta = u \cos \varphi$, $u_\zeta = u \sin \varphi$;

$$\omega_\xi^o = -v_N / (R_2 + h), \quad \omega_\eta^o = v_E / (R_1 + h), \quad \omega_\zeta^o = v_E \operatorname{tg} \varphi / (R_1 + h).$$

Абсолютная линейная скорость равна сумме относительной линейной скорости и линейной скорости из-за вращения Земли. Проекции абсолютной линейной скорости представляют в следующем виде

$$V_N = V \cos \chi, \quad V_E = V \sin \chi, \quad V_N = v_N, \quad V_E = v_E + (R_1 + h)u \cos \varphi.$$

Отсюда следует форма записи проекций абсолютной угловой скорости географического сопровождающего трехгранника

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= -V_N / (R_2 + h); \\ \omega_\eta &= V_E / (R_1 + h); \\ \omega_\zeta &= V_E \operatorname{tg} \varphi / (R_1 + h); \end{aligned}$$

Если использовать выражение скорости изменения долготы

$$\dot{\lambda} = v_E / ((R_1 + h) \cos \varphi),$$

то (1.3) можно переписать в другом виде:

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= -V_N / (R_2 + h); \\ \omega_\eta &= (u + \dot{\lambda}) \cos \varphi; \\ \omega_\zeta &= (u + \dot{\lambda}) \sin \varphi. \end{aligned}$$

Ортодромический сопровождающий трехгранник

Выражения для проекций абсолютной угловой скорости ортодромического трехгранника можно получить перепроектированием проекций угловой скорости географического трехгранника [2]

$$\begin{aligned} \omega_{\xi o} &= -u \cos \varphi \sin \chi - v / (R + h); & R - \text{радиус сферической Земли} \\ \omega_{\eta o} &= u \cos \varphi \cos \chi; \\ \omega_{\zeta o} &= u \sin \varphi; \end{aligned}$$

Если есть боковое движение со скоростью $v_{\xi o}$:

$$\begin{aligned} \omega_{\xi o} &= -u \cos \varphi \sin \chi - v_{\eta o} / R; & R - \text{радиус сферической Земли} \\ \omega_{\eta o} &= u \cos \varphi \cos \chi + v_{\xi o} / R; \\ \omega_{\zeta o} &= u \sin \varphi - \frac{v_{\xi o}}{R} \operatorname{tg} \Phi, \end{aligned}$$

где Φ – ортодромическая широта¹ [1].

Существуют другие варианты описания движения ортодромического сопровождающего трехгранника, в том числе с учетом эллиптичности Земли [1].

Матрица направляющих косинусов между осями гринвичской системы координат $0\varepsilon_{\Gamma}\eta_{\Gamma}\zeta_{\Gamma}$ и осями полусвободной (ортодромической) в азимуте системы координат $0\varepsilon_0\eta_0\zeta$ (рис.1.4) имеет вид:

Таблица 1.2. Направляющие косинусы между осями гринвичского и ортодромического трехгранников

C^{ge}	ξ_{Γ}	η_{Γ}	ζ_{Γ}
ξ_0	$c_{11} = -\sin \varphi \cos \lambda \sin \varepsilon - \sin \lambda \cos \varepsilon;$	$c_{12} = -\sin \varphi \sin \lambda \sin \varepsilon + \cos \lambda \cos \varepsilon;$	$c_{13} = \cos \varphi \sin \varepsilon;$
η_0	$c_{21} = -\sin \varphi \cos \lambda \cos \varepsilon + \sin \lambda \sin \varepsilon;$	$c_{22} = -\sin \varphi \sin \lambda \cos \varepsilon - \cos \lambda \sin \varepsilon;$	$c_{23} = \cos \varphi \cos \varepsilon;$
ζ_0	$c_{31} = \cos \lambda \cos \varphi;$	$c_{32} = \sin \lambda \cos \varphi;$	$b_{33} = \sin \varphi.$

Матрица обозначена как C^{ge} , где вторая буква индекса обозначает исходный трехгранник, а первая буква индекса – конечный трехгранник.

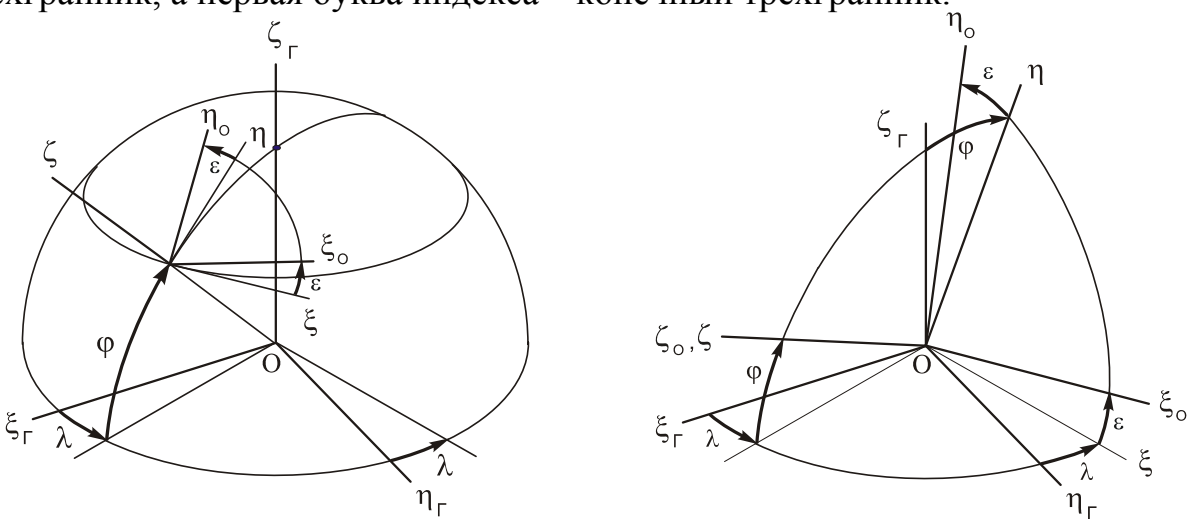


Рис.1.3. Гринвичский и ортодромический трехгранники

Трехгранник $0\varepsilon_0\eta_0\zeta$ движется с относительной угловой скоростью ω^o , связанной с путевой скоростью v соотношением $\vec{v} = \vec{\omega}^o \times \vec{R}$, где \vec{R} - радиус кривизны земного эллипсоида в плоскости траектории.

¹ В ортодромической системе координат ортодромия является экватором, полюс системы координат соответствует точке пересечения земной сферы с перпендикуляром к плоскости ортодромии, проведенном из центра Земли.

Проекции вектора $\vec{\omega}^o$ на оси трехгранника $O\varepsilon_0\eta_0\zeta$ представим в виде:

$$\omega^o_{\xi 0} = -\frac{v_{\eta 0}}{R_{\eta 0}} - \frac{v_{\xi 0}}{a} e^2 b_{13} b_{23}, \quad \omega^o_{\eta 0} = \frac{v_{\xi 0}}{R_{\xi 0}} - \frac{v_{\eta 0}}{a} e^2 b_{13} b_{23}.$$

Здесь $R_{\eta 0}$ и $R_{\xi 0}$ - радиусы кривизны нормальных сечений эллипсоида в плоскостях $O\eta_0\zeta$ и $O\xi_0\zeta$ соответственно, e^2 - квадрат эксцентриситета земного эллипсоида.

Величины, обратные радиусам кривизны, вычисляются по соотношениям:

$$\frac{1}{R_{\xi 0}} = \left(1 - \frac{1}{2} e^2 b_{33}^2 + \frac{1}{2} e^2 b_{13}^2 - \frac{h}{a} \right) / a;$$

$$\frac{1}{R_{\eta 0}} = \left(1 - \frac{1}{2} e^2 b_{33}^2 + \frac{1}{2} e^2 b_{23}^2 - \frac{h}{a} \right) / a,$$

где h – высота, a – большая полуось земного эллипсоида.

1.3. Гравитационное поле и поле силы тяжести Земли

В соответствии с законом всемирного тяготения все тела притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной произведению масс этих тел и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними:

$$F = G \frac{Mm}{r^2}, \tag{1.5}$$

где F — сила притяжения; M и m — массы двух взаимно притягивающихся тел (гравитирующие массы); r — расстояние между ними; G — коэффициент пропорциональности, называемый гравитационной постоянной и являющийся фундаментальной константой физики. С другой стороны, сила притяжения, действующая на материальную точку массы m , определяется формулой

$$\vec{F} = m\vec{g}', \tag{1.6}$$

где \vec{g}' — гравитационное ускорение, или ускорение силы тяготения. Сила притяжения \vec{F} и гравитационное ускорение имеют одинаковое направление.

Сопоставляя формулы (1.5) и (1.6), находим

$$g' = G \frac{M}{r^2}. \tag{1.7}$$

Величина гравитационной постоянной $G = 6,6742 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{с}^2 \text{ кг})$. Как показано в табл.1.1., для эллипсоида ПЗ-90 произведение $GM \equiv K = 398600,44 \text{ км}^3/\text{с}^2$.

Приведенное выражение представляет простейшую модель гравитационного поля. Реальное поле имеет более сложный характер. Оно может быть представлено составляющими вектора \vec{g}' в плоскости меридиана.

Радиальная составляющая, направленная к центру Земли [1]

$$g'_r = -\frac{K}{r^2} \left[1 + \frac{3\mu}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 (1 - 3\sin^2 \varphi') \right]. \quad (1.8)$$

Здесь общий знак минус говорит о том, что составляющая направлена против направления радиуса из центра Земли, $\mu = 1,09 \cdot 10^{-3}$ - коэффициент, характеризующий распределение масс Земли, a - большая полуось эллипсоида, r - геоцентрический радиус, φ' - геоцентрическая широта.

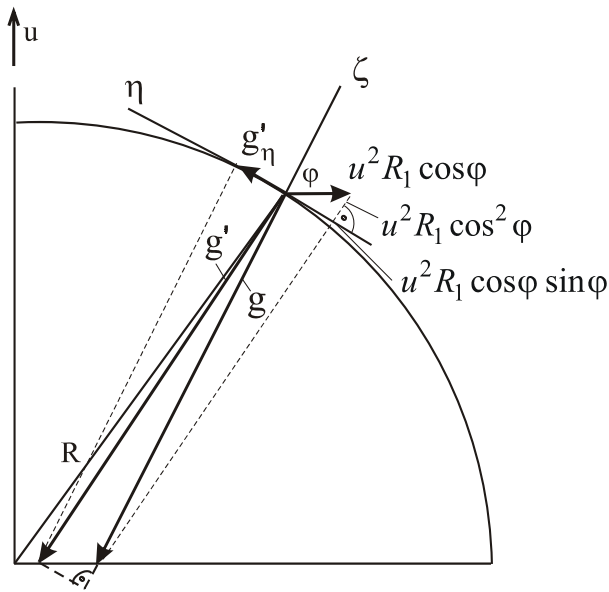


Рис.1.4. Проекции ускорений

вует выражению

$$\vec{g} = \vec{g}' - \vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{R}). \quad (1.10)$$

Величина центробежного ускорения $W_{yc} = u^2 R_E \cos \varphi$.

В [1] получены составляющие ускорения силы тяжести в следующем виде

$$g_r = -g_{\varphi 0} \frac{a^2}{(a+h)^2} (1 + \beta \sin^2 \varphi'), \quad (1.11)$$

$$g_\varphi = -g_{\varphi 0} \alpha \frac{a^2}{(a+h)^2} \sin 2\varphi'.$$

Трансверсальная составляющая, направленная в плоскости горизонта к плоскости экватора (противоположно отсчету широты)

$$g'_\varphi = -\frac{K}{r^2} \cdot \frac{3\mu}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \sin 2\varphi'. \quad (1.9)$$

Сила тяжести есть равнодействующая силы тяготения и центробежной силы (силы инерции центростремительного ускорения из-за вращения Земли $\vec{W}_{yc} = \vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{R})$). Ускорение силы тяжести в общем случае соответ-

Здесь $g_{\varphi 0}$ - ускорение силы тяжести на экваторе, α - сжатие эллипсоида. Величины β и $g_{\varphi 0}$ имеют следующие значения

$$\beta = 0,005317, \quad g_{\varphi 0} = 978,049 \text{ см/с}^2.$$

Отношение величин

$$\frac{g_{\varphi}}{g_r} \approx \alpha \sin 2\varphi' \quad (1.12)$$

соответствует тангенсу угла между вектором \vec{g} ускорения силы тяжести и геоцентрическим радиусом вектором точки местоположения. В силу малости величины тангенса, можно принять, что он равен углу. Как видно из формулы, максимальный угол на широте 45° имеет величину 0,003356, что соответствует величине около 11,5 угловых минут.

Абсолютную величину ускорения силы тяжести $g = \sqrt{g_r^2 + g_{\varphi}^2}$ в силу малости (1.11) можно принять равной абсолютной величине g_r .

Для расчетов величины ускорения силы тяжести иногда применяют формулу Гельмерта (1909 г.):

$$g = 9,78030(1 + 0,005302 \sin^2 \varphi - 0,000007 \sin^2 2\varphi),$$

где используют географическую широту φ .

Формула Кассиниса (1930 г.), называемая международной, имеет вид:

$$g = 9,78049 (1 + 0,0052884 \sin^2 \varphi - 0,0000059 \sin^2 2\varphi). \quad (1.13)$$

Для свободной в азимуте системы координат $\xi_0 \eta_0 \zeta$ трансверсальная составляющая гравитационного ускорения может быть представлена формулами

$$g'_{\xi_0} = \frac{-u^2 R_E \sin 2\varphi \sin \chi}{2}, \quad g'_{\eta_0} = \frac{u^2 R_E \sin 2\varphi \cos \chi}{2}. \quad (1.14)$$

Появление этих проекций можно увидеть из рис.1.4 (проекция g'_{η}).

На рис.1.5 представлены графики изменения ускорений, рассчитанные по формулам (1.9), (1.11).

С изменением высоты ускорение изменяется в соответствии с зависимостью

$$g(h) = \frac{g'_{\zeta}}{(1 + h/R)^2}.$$

Приращения ускорения силы тяжести можно рассчитать по формуле

$$\Delta g = -\frac{2g}{R} \Delta h.$$

Если Δg измеряется в мГал, а Δh в метрах, то $\Delta g = -0,3086\Delta h$. При увеличении высоты на 100 м сила тяжести уменьшится на 30,9 мГал. Для объектов, находящихся под водой, действует следующий закон изменения ускорения силы тяжести

$$\delta g = 0,3086\Delta h - 0,0838\sigma \cdot \Delta h,$$

где $\sigma = 1,03 \text{ г/см}^3$ – плотность морской воды. С учетом приведенной плотности

$$\delta g = +0,225\Delta h.$$

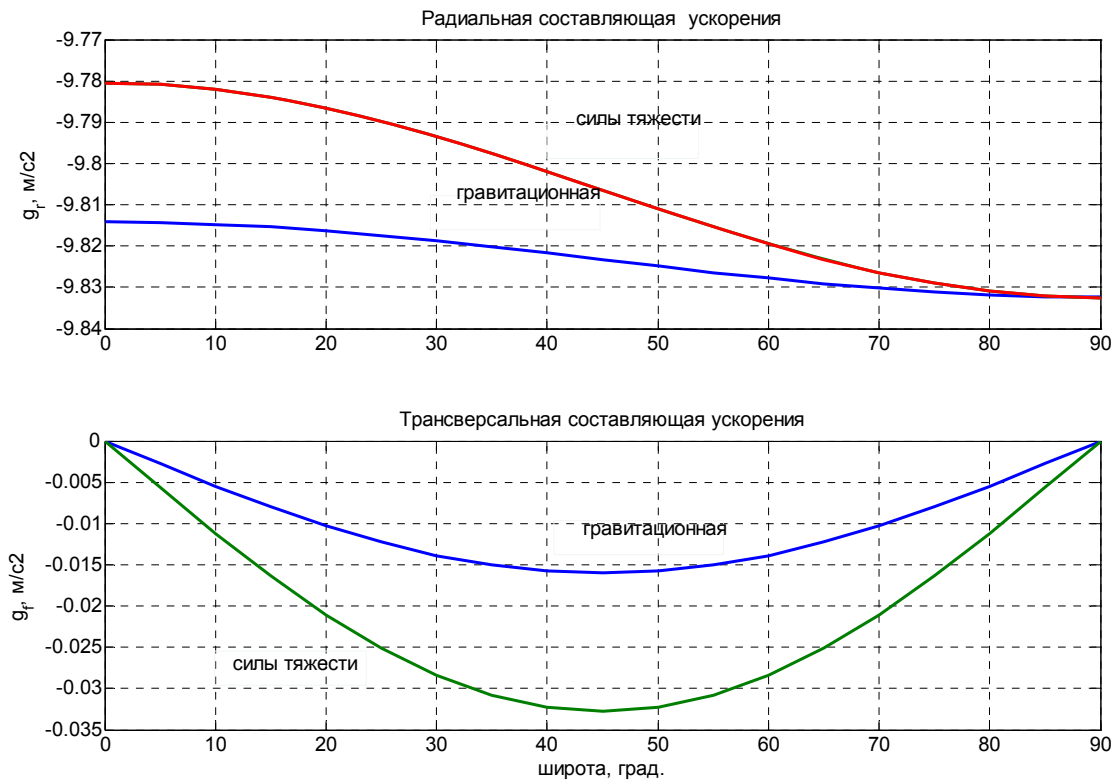


Рис.1.5. Графики проекций ускорений

При углублении в воду на 100 м сила тяжести увеличится на 22,5 мГал.

Иногда необходимо знать проекции гравитационного ускорения на оси инерциальной системы координат. Для этого сначала необходимо рассчитать модуль ускорения g' в точке с заданными инерциальными координатами X, Y, Z , а затем получить необходимые проекции в соответствии с рис. 1.6.

$$\vec{g} = -\frac{fM}{r^2} \vec{r}_0 = -\frac{fM}{r^3} \vec{r};$$

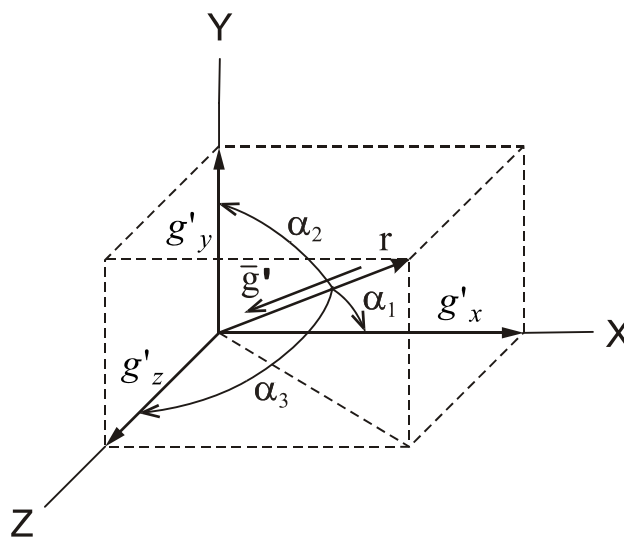


Рис.1.6. Проекция гравитационного ускорения

$$g'_x = -g' \cos \alpha_1 = -g' \frac{X}{r}; \quad g'_y = -g' \cos \alpha_2 = -g' \frac{Y}{r}; \quad g'_z = -g' \cos \alpha_3 = -g' \frac{Z}{r}; \quad (1.15)$$

Существуют более точные выражения (п. 4.1).

Аномалии гравитационного поля

Гравитационное поле Земли, следовательно, и поле силы тяжести, весьма неоднородно. Реальные значения составляющих поля отличаются от расчетного «нормального» поля. Отклонения величины ускорения могут достигать 0,05% и составить величину до 160 мГал. Направления вектора ускорения также могут меняться. Уклонение (отклонение) отвесной линии может достигать 40" (угловых секунд). На территории СНГ максимальные уклонения достигают 4". Картины изменения составляющих гравитационного поля представляют на соответствующих картах.

1.4. Акселерометры.

Основное уравнение инерциальной навигации

Инерциальные навигационные системы в качестве измерителей используют инерциальные чувствительные элементы: акселерометры и гироскопы.

Акселерометры предназначены для измерения ускорения движения объекта, на котором они установлены. Рассмотрим принцип его работы.

В корпусе прибора (рис.1.7), установленного на подвижном объекте, расположена инертная масса 1, движение которой ограничено пружиной 2. При действии ускорения движения объекта W , инертная масса вследствие инерции перемещается вдоль оси чувствительности x до тех пор, пока сила инерции не уравновесится силой упругости пружины. Но кроме силы инерции от действия ускорения W , на инертную массу действует также сила тяготения с гравитаци-

онным ускорением g' . Для уменьшения времени переходного процесса исполь-

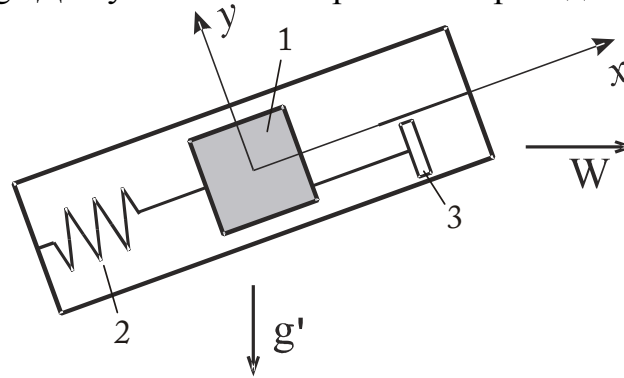


Рис.1.7. Осевой акселерометр

зуют демпфер 3. Выходной сигнал акселерометра (обычно электрический) соответствует перемещению инертной массы относительно корпуса акселерометра по оси x .

Составим уравнение движения инертной массы в корпусе, с которым связана система xu (связанная с объектом). Используем для этого **метод кинестатики**. В соответствии с принципом дАламбера, сумма активных сил, сил инерции и сил реакции связей равна нулю [3]:

$$\vec{F}_a + \vec{F}_R + \vec{F}_u = 0.$$

Поскольку инертная масса имеет лишь одну степень свободы относительно оси x , составим уравнение равенства проекций сил на эту ось:

$$F_{ax} = mg'_x - \text{силы тяготения},$$

$$F_{Rx} = -cx - f\dot{x} - \text{реакций связей (пружины и демпфера)},$$

$$F_{ux} = -m(W_x + \ddot{x}) - \text{силы инерции}.$$

В этих выражениях m – масса, c – линейная жесткость пружины, f – линейный коэффициент демпфирования, \ddot{x} – относительное ускорение инертной массы (относительно корпуса).

В результате

$$\begin{aligned} -m(W_x + \ddot{x}) - cx - f\dot{x} + mg'_x &= 0, \\ m\ddot{x} + f\dot{x} + cx &= -m(W_x - g'_x) = -ma_x. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Здесь $a_x = W_x - g'_x$ - называют кажущимся ускорением.

В общем случае [1]

$$\boxed{\vec{a} = \vec{W} - \vec{g}'} \quad \begin{array}{l} - \text{основное уравнение акселерометра} \\ - \text{основное уравнение инерциальной навигации} \end{array} \quad (1.17)$$

Основное уравнение подчеркивает важнейшую особенность акселерометра – инертная масса всегда находится под действием как силы инерции, так и силы тяготения.

Поскольку эту особенность обязательно необходимо учитывать при проектировании алгоритма работы ИНС, уравнение называют также основным уравнением инерциальной навигации.

Рассмотрим характерные примеры сигнала акселерометра.

Примеры:

Уравнение статики акселерометра можно записать из (1.16) в виде

$$x = -\frac{m}{c} a_x.$$

1. На рис. 1.8а акселерометр движется с ускорением W так, что ось чувствительности его горизонтальна. В этом случае

$$W_x = W, \quad g'_x = 0, \quad x = -\frac{m}{c} W \quad \text{т.к.} \quad a_x = W - 0.$$

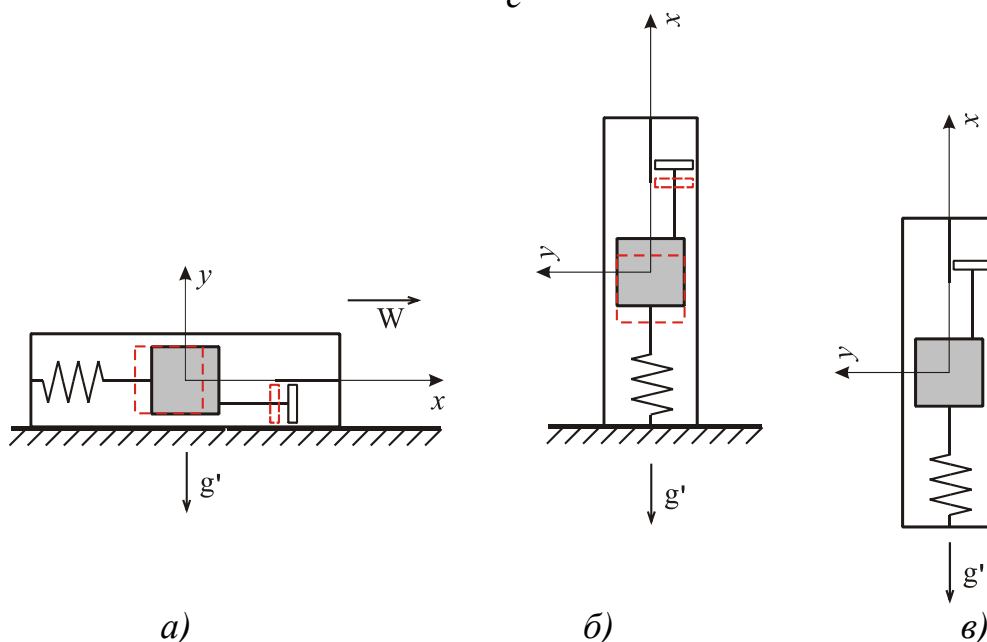


Рис.1.8. Поведение акселерометра

2. На рис. 1.8б акселерометр стоит на столе так, что ось чувствительности его вертикальна. Ускорение движения отсутствует. В этом случае

$$W_x = 0, \quad g'_x = -g', \quad x = -\frac{m}{c} g' \quad \text{т.к.} \quad a_x = 0 - g'.$$

3. На рис. 1.8в акселерометр свободно падает так, что ось чувствительности его вертикальна. В этом случае

$$x = 0 \quad \text{т.к.} \quad a_x = -g' + g', \quad W_x = -g', \quad g'_x = -g';$$

Эти примеры показывают, что для определения величины ускорения движения объекта необходимо в выходном сигнале акселерометра учитывать или исключать из него проекцию гравитационного ускорения.

Существует множество вариантов конструкций акселерометров. Можно отметить, что в настоящее время в ИНС применяют, в основном, маятниковые акселерометры компенсационного типа. Проектирование акселерометров - отдельное направление в навигационном приборостроении и в настоящем учебном пособии не рассматривается. Приведем только таблицу характеристик 1.3.

1.5. Обобщенная схема ИНС

В основе построения инерциальных навигационных систем (ИНС) лежит метод счисления пути. Суть его состоит в том, что сигналы измерителей скорости или ускорения, оси чувствительности которых удерживаются в заданной системе координат, интегрируются. Интегралы скорости соответствуют приращениям пути, интегралы ускорений соответствуют приращениям скорости. Складывая значения приращений с начальными значениями пути или скорости, получают текущие значения пройденного пути и скорости. В системах, где первичными измерителями являются акселерометры, для получения скорости сигнал акселерометра интегрируют один раз, а для получения пройденного пути этот интеграл (скорость) интегрируют второй раз. Зная направления проекций пройденного пути на оси системы координат, определяют координаты подвижного объекта.

Устройство ИНС, реализующей метод счисления пути, можно проиллюстрировать обобщенной схемой, приведенной на рис.1.9.

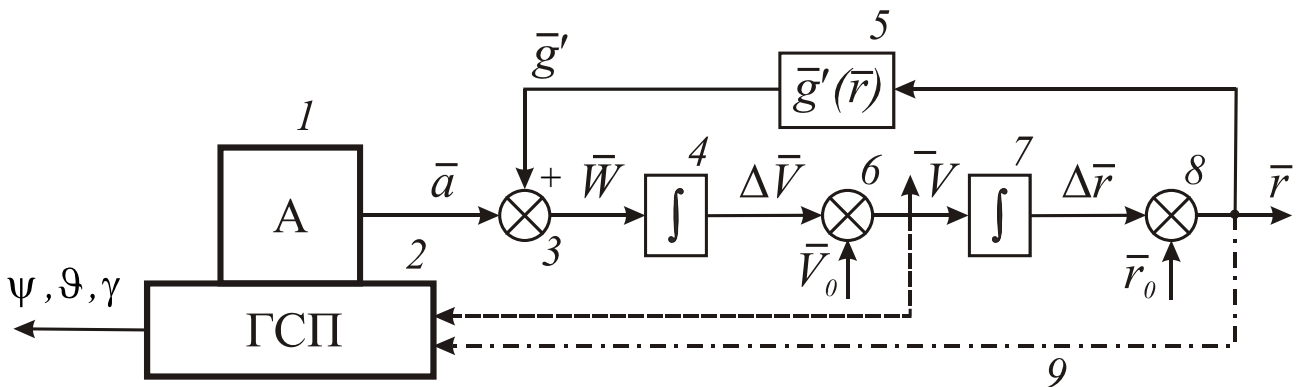


Рис.1.9. Обобщенная схема платформенной ИНС

На рис.1.9. показаны:

1 - ГСП – гиростабилизированная платформа, удерживающая оси чувствительности акселерометров в заданной системе координат; **2** - А – блок акселерометров (трехосный акселерометр); **3,6,8** - сумматоры; **4,7** - интеграторы; **5** – вычислитель вектора гравитационного ускорения; **9** - обратные связи;

введены следующие обозначения:

\vec{a}, \vec{g}' - векторы кажущегося и гравитационного ускорений соответственно; \vec{W}, \vec{V} - векторы абсолютного ускорения и абсолютной скорости соответственно; $\Delta \vec{V}, \Delta \vec{r}$ - приращения абсолютной скорости и радиуса-вектора местоположения объекта; \vec{r} - радиус-вектор местоположения объекта; $\Delta \vec{V}_0, \Delta \vec{r}_0$ - начальные значения векторов; ψ, ϑ, γ - углы ориентации объекта (возможно, курс, тангаж, крен).

Если в системе имеются обратные связи **9** по скорости или по координатам, систему называют замкнутой, если обратных связей нет – система разомкнутая.

Таблица 1.3. Основные технические характеристики прецизионных маятниковых компенсационных акселерометров.

Характеристика	Модель акселерометра, фирма-изготовитель.							
	А-4 Litton, QA-3000 Sundstrand (США)	А-12, А-15 РПКБ (Россия)	АК-6 «Авиаприбор » (Россия)	КИ-67-11 «Ротор» (Россия)	КЕАФ-67 «Электромех аника» (Россия)	АТ-1104 «Темп» (Россия)	АК-10 «Дельфин» (Россия)	А-4Г Litton, Sagem (Фр.)
Основная область применения	Авиационные ИНС			Ракетные ИНС				Наземные ИНС
Диапазон измерения, g	±10; ±20;	±20;	±10	±10	±20; ±40	±10; ±20	±2	±10
Пороговая чувствительность, *10 ⁻⁶ g	0.5	0.5	0.5	1	5	1	0.1	5
Основная погрешность «нуля»: -в запуске, *10 ⁻⁵ g/час -от запуска к запуску, *10 ⁻⁵ g	0.5 5	2 3 ... 5	3 5	5 15	10 60	2 10	2.5 3 ... 5	10 10 ... 15
Основная погрешность КП, *10 ⁻⁶ %	0.5 ... 1	2	3 ... 5	3 ... 5	2	5	1	5
Температурные погрешности -«нуля», *10 ⁻⁵ g. °C ⁻¹ -КП, *10 ⁻⁴ . °C ⁻¹	1 ... 3 1	2 0.5	3 1.8		5 1.5	10 5	2 0.5	
Диапазон рабочих температур, °C	-60 ... +80	-60 ... +80	-60 ... +85	-60 ... +80	-60 ... +80	-50 ... +85	-50 ... +70	-40 ... +55
Габаритные размеры, мм (масса), г	Ø30×20 (50)	Ø25×21 (40)	(50)	(80)	(100)	Ø20×24 (45)	38×38×25 (115)	(70)
Время готовности, с	30	60	30	30	120	60	250	
Цена, тыс.\$	3 ... 4	3 ... 4	2 ... 2.5	4 ... 5	1.5 ... 2	1.2		
Вид выходного сигнала А/К	U=f	I=f	U=f	I=f	U=f	U=f	U=	U=f

КП – коэффициент передачи, А/К – аналоговый сигнал/кодовый сигнал, U= постоянное напряжение, I= - постоянный ток, f – частота

В БИНС вместо гириостабилизированной платформы используют блок гироскопов и акселерометров с вычислителем. Гироскопы с акселерометрами (блок инерциальных чувствительных элементов) при этом устанавливают жестко на борту объекта. На рис.1.10. показаны 1 – блок чувствительных элементов, выдающих информацию о векторе кажущегося ускорения \bar{a}_{xyz} в проекциях на оси связанной с объектом системы координат xyz , а также о векторе угловой скорости $\bar{\theta}_{xyz}$ в проекциях на оси той же системы координат. В вычислителе 2 происходит преобразование проекций ускорения из связанной системы в навигационную (например, географическую сопровождающую). Для этого по данным об угловой скорости (или другой информации) вычисляют направляющие косинусы между осями указанных систем координат. Из них также вычисляют углы положения объекта: курс ψ , крен ϑ , тангаж γ .

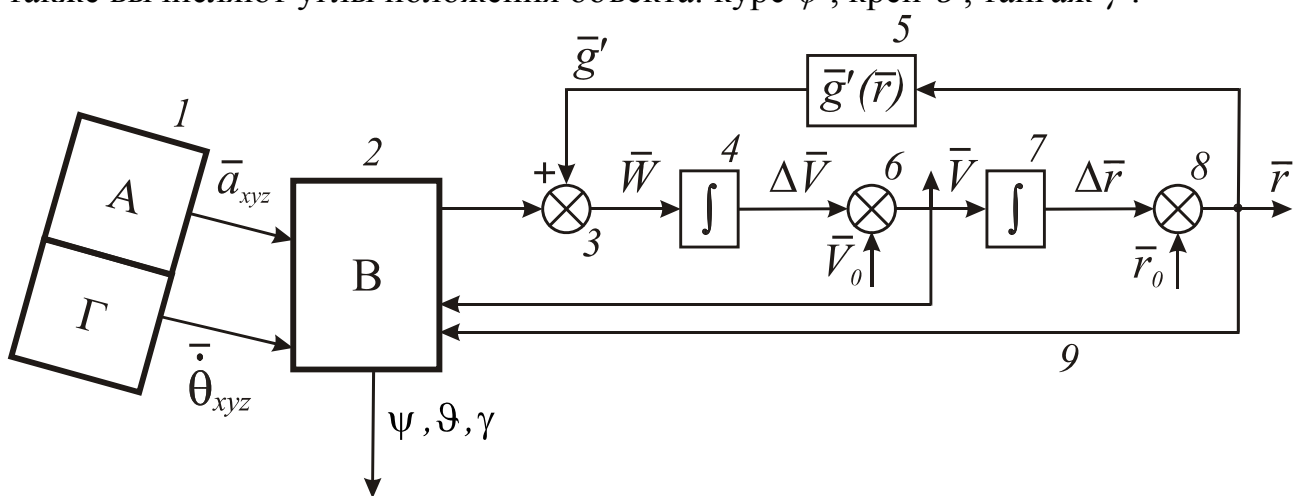


Рис.1.10. Обобщенная схема БИНС

В БИНС используют различные гироскопические датчики. Они могут выдавать информацию о различных угловых параметрах. В таблице 1.4 приведены данные о типах используемых в настоящее время в БИНС гироскопических датчиков.

Таблица 1.4. Типы применяемых гироскопических датчиков

Тип гироскопа	Угловая скорость ухода	Выходные параметры
Поплавковые ДУС	до 0,01 °/час	Угловая скорость
Лазерные гироскопы	до 0,001 °/час	Угл. скор., Угол
Волоконно-оптические гироскопы	до 0,01 °/час	Угловая скорость
Динамически настраиваемые гироскопы	до 0,01 °/час	Угловая скорость
Микромеханические гироскопы	до 10 °/час	Угловая скорость
Твердотельные волновые гироскопы	до 0,01 °/час	Угл. скор., Угол
Сферические гироскопы с электростатическим подвесом ротора	до 10 ⁻⁵ °/час	Направляющие косинусы
Сферические гироскопы с магнитным подвесом ротора	до 10 ⁻⁴ °/час	Направляющие косинусы
Сферические гироскопы с воздушным подвесом ротора	до 0,01 °/час	Направляющие косинусы

Достоинства ИНС:

1. Измерение полного набора навигационных параметров – ускорения, скорости, координат, углов положения объекта (курс, крен, тангаж), угловых скоростей объекта и ряда других вспомогательных.
2. Полная автономность, т.е. возможность работать независимо ни от видимости ориентиров, маяков, светил, ни от положения или движения объекта; помехозащищенность (невозможно создать помехи, мешающие работе ИНС).
3. Высокая скорость определения и выдачи данных (100 Гц и более)
4. Невозмущаемость относительными ускорениями, т.е. отсутствие колебаний гиросtabilизированной платформы или ее аналитического аналога (в БИНС) при действии относительных (относительно Земли) ускорений. Как следствие, отсутствуют погрешности в выходных данных по всем навигационным параметрам. При этом собственная частота колебаний погрешностей, вызванных различными возмущающими факторами, в основном, соответствует частоте колебаний маятника Шулера.

Недостатки ИНС:

1. Необходимость ввода начальных условий (начального положения платформы (объекта для БИНС), начальных значений скорости, начальных координат), что необходимо для использования метода счисления пути; необходимость учета формы Земли и параметров гравитационного поля в точке расположения подвижного объекта.
2. Требуется непрерывность работы (или после перерыва в работе необходимо вновь вводить начальные условия)
3. Нарастание ошибок со временем

1.5. Принцип работы БИНС

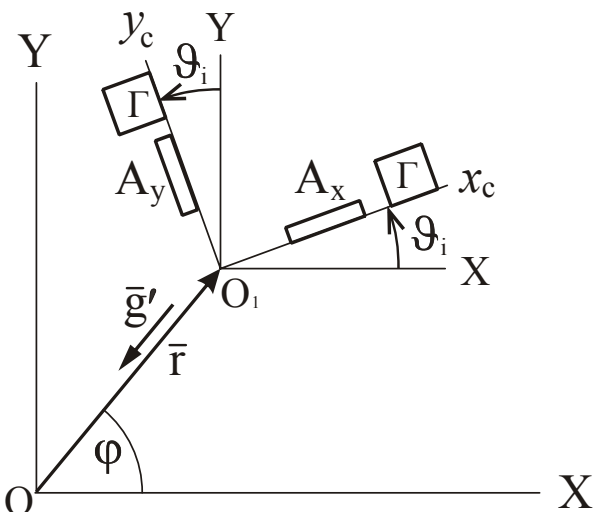


Рис.1.10. Положение объекта в инерциальной системе координат

Рассмотрим принцип работы БИНС в инерциальной системе координат на примере плоской задачи. Пусть \$XOY\$ – инерциальная система координат. Положение объекта, с которым связана система координат \$x_cO_1y_c\$, задано радиусом-вектором \$\vec{r}\$.

Гравитационное ускорение в точке \$O_1\$ соответствует вектору \$\vec{g}'\$ по формуле (1.7)

$$\vec{g}' = -\frac{GM}{r^2} \vec{r}_0 = -\frac{GM}{r^3} \vec{r},$$

где \vec{r}_0 - орт радиуса-вектора \vec{r} . Знак $-$ учитывает, что ускорение направлено против направления радиуса-вектора.

На борту объекта жестко установлены акселерометры А и гироскопы Г. В соответствии с основным уравнением (1.17)

$$\bar{W} = \bar{a} + \bar{g}'.$$

Отсюда выражения для проекций абсолютного ускорения в инерциальной системе координат можно записать в виде

$$\ddot{X} = a_{xc}c_{11} + a_{yc}c_{12} + g'_X;$$

$$\ddot{Y} = a_{xc}c_{21} + a_{yc}c_{22} + g'_Y.$$

В этих формулах a_{xc} и a_{yc} , проекции кажущегося ускорения, измеряемые акселерометрами, $c_{11} \dots c_{22}$ - направляющие косинусы между осями инерциальной и связанной систем координат. Для рис.1.10 матрица направляющих косинусов

C	x_c	y_c
X	$c_{11} = \cos \theta;$	$c_{12} = -\sin \theta;$
Y	$c_{21} = \sin \theta;$	$c_{22} = \cos \theta;$

Далее запишем проекции гравитационного ускорения:

$$g'_X = -\frac{GM}{r^2} \cos(rX), \quad g'_Y = -\frac{GM}{r^2} \cos(rY).$$

Знак $-$ учитывает, что проекция ускорения направлена против направления оси. Направляющие косинусы из рис.1.10 можно записать

$$\cos(rX) = X/r, \quad \cos(rY) = Y/r.$$

После подстановки

$$g'_x = -\frac{GM}{r^3} X, \quad g'_y = -\frac{GM}{r^3} Y.$$

В векторно-матричной форме выражение для ускорения имеет вид

$$\boxed{\ddot{\vec{r}} = C\bar{a} - \frac{GM}{r^3} \vec{r}}.$$

Это соотношение лежит в основе построения и полноразмерной БИНС. Зная вектор абсолютного ускорения, получим вектор абсолютной линейной скорости

$$\dot{\vec{r}} \equiv \bar{V} = \int_0^t \ddot{\vec{r}} dt + \dot{\vec{r}}_0.$$

Аналогично получим радиус вектор места $\bar{r} = \int_0^t \dot{\bar{r}} dt + \bar{r}_0$.

Уравнения идеальной работы в скалярном виде в инерциальной системе координат

Работу рассмотренной схемы можно описать системой скалярных уравнений. Предположим, что в качестве гироскопического измерителя используется датчик угловой скорости. Угол поворота объекта получим как интеграл от угловой скорости с учетом начального значения угла

$$\mathcal{G} = \int_0^t \omega_z dt + \mathcal{G}_0.$$

В дифференциальной форме это уравнение получает вид $\dot{\mathcal{G}} = \omega_z$. Выражения для кажущихся ускорений в инерциальной системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} a_X &= a_{xc} \cos \mathcal{G}_i - a_{yc} \sin \mathcal{G}_i, \\ a_Y &= a_{xc} \sin \mathcal{G}_i + a_{yc} \cos \mathcal{G}_i. \end{aligned}$$

Проекции абсолютной скорости получим в виде

$$\begin{aligned} V_X &= \int_0^t (a_X + g'_X) dt + V_{X0}, \\ V_Y &= \int_0^t (a_Y + g'_Y) dt + V_{Y0}. \end{aligned}$$

В дифференциальной форме

$$\begin{aligned} \dot{V}_X &= a_X + g'_X, \\ \dot{V}_Y &= a_Y + g'_Y. \end{aligned}$$

Аналогично можно записать выражения для вычисления координат

$$X = \int_0^t V_X dt + X_0, \quad Y = \int_0^t V_Y dt + Y_0.$$

Уравнения идеальной работы во вращающейся (земной) системе координат

Подавляющее большинство инерциальных систем решают задачи навигации на земной поверхности, т.е. в сопровождающем трехграннике. Северный канал такой БИНС показан на рис. 1.11. Рассмотрим уравнения идеальной работы в географическом трехграннике.

Угол поворота объекта (связанного базиса $0x_c y_c$) в сопровождающем трехграннике обозначим \mathcal{G} . Гироскоп измеряет абсолютную угловую скорость ω_z . Переносная угловая скорость из-за перемещения объекта $\omega_\xi = -V_\eta / (R + h)$,

где R – радиус Земли, h – высота объекта. Исходя из положения, что абсолютная угловая скорость равна сумме переносной и относительной скорости, запишем следующие выражения.

$$\dot{\vartheta} = \omega_z - V_\eta / (R + h), \quad \vartheta_0 = 0; \quad (\vartheta = \int_0^t \dot{\vartheta} dt + \vartheta_0); \quad (1.18)$$

Эти уравнения можно назвать уравнениями ориентации.

В блоке вычисления направляющих косинусов и преобразования координат НК и ПК выполняется преобразование ускорений из связанной в навигационную систему координат

$$\begin{aligned} a_\eta &= -a_{xc} \cos \vartheta + a_{yc} \sin \vartheta, \\ a_\zeta &= a_{xc} \sin \vartheta + a_{yc} \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (1.19)$$

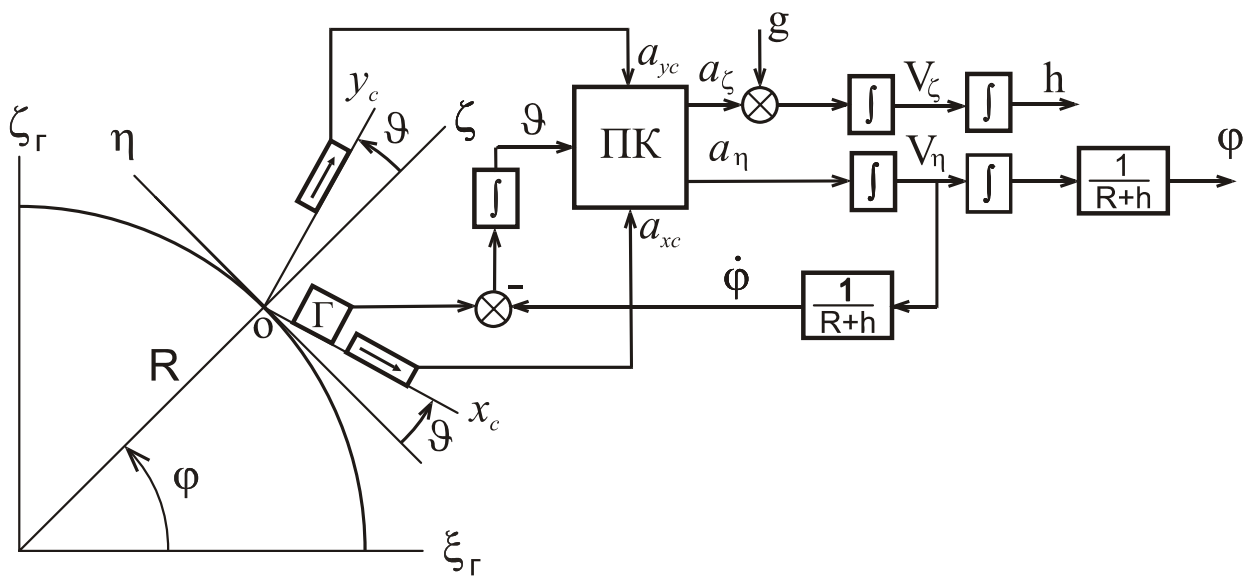


Рис.1.11. Северный канал БИНС

Из полученных проекций кажущегося ускорения, учитывая основное уравнение инерциальной навигации ($\bar{a} = \bar{W} - \bar{g}'$), после интегрирования получим северную составляющую скорости

$$\dot{V}_\eta = a_\eta, \quad V_{\eta 0} = 0; \quad (V_\eta = \int_0^t \dot{V}_\eta dt + V_{\eta 0}) \quad (1.20)$$

и вертикальную составляющую скорости

$$\dot{V}_\zeta = a_\zeta + g', \quad V_{\zeta 0} = 0; \quad (V_\zeta = \int_0^t \dot{V}_\zeta dt + V_{\zeta 0}). \quad (1.21)$$

Далее получаем широту и высоту в соответствии с очевидными выражениями

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{V_\eta}{R + h}, \quad \varphi_0 = 0; \quad (\varphi = \int_0^t \dot{\varphi} dt + \varphi_0); \\ \dot{h} &= V_\zeta, \quad h_0 = 0. \end{aligned} \quad (1.22)$$

2. Уравнения ориентации

Уравнениями ориентации называют дифференциальные уравнения, в результате решения которых получают параметры, характеризующие положение подвижного объекта относительно выбранной системы координат. Такими параметрами могут быть углы Эйлера – Крылова, направляющие косинусы, параметры Родрига-Гамильтона и др. Исторически первыми уравнениями ориентации были известные в теоретической механике кинематические уравнения Эйлера. Дополним эти уравнения учетом переносного движения сопровождающего трехгранника.

2.1. Уравнения ориентации Эйлера

Уравнения позволяют по измеренным проекциям абсолютной угловой скорости объекта и вычисленным проекциям угловой скорости сопровождающего трехгранника вычислить углы курса, тангажа и крена объекта.

На рис.2.1 $O\xi\eta\zeta$ - географический сопровождающий трехгранник, ось

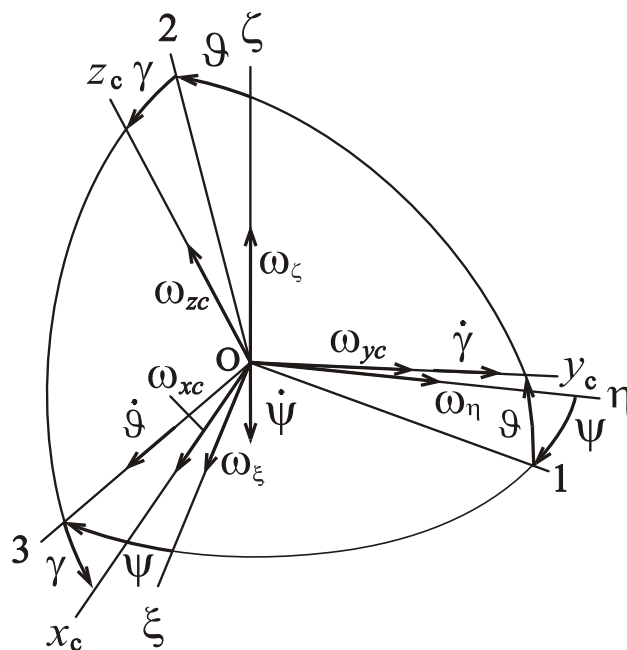


Рис.2.1. Углы и угловые скорости

$O\eta$ -направлена на Север, $Ox_cy_cz_c$ - связанный с объектом трехгранник, ψ - угол курса, θ - угол тангажа, γ - угол крена; $\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$ - проекции угловой скорости сопровождающего трехгранника; $\omega_{x_c}, \omega_{y_c}, \omega_{z_c}$ - проекции абсолютной угловой скорости объекта, измеряемые датчиками угловой скорости; $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\gamma}$ - проекции относительной угловой скорости. Исходя из того, что абсолютная скорость равна сумме относительной и переносной скоростей

$$\vec{\omega}_{abc} = \vec{\omega}_{nep} + \vec{\omega}_{omn},$$

составим выражения проекций угловых скоростей.

Сумма проекций на ось $O1$ даст

$$\dot{\gamma} = \omega_{yc} + tg \mathcal{G}(\omega_{xc} \sin \gamma - \omega_{zc} \cos \gamma) - \frac{1}{\cos \mathcal{G}}(\omega_{\eta} \cos \psi + \omega_{\xi} \sin \psi). \quad (2.1)$$

Сумма проекций на ось $O2$ даст

$$\dot{\psi} = \omega_{xc} \sin \gamma - \omega_{zc} \cos \gamma + tg \mathcal{G}(\omega_{\eta} \cos \psi + \omega_{\xi} \sin \psi) + \omega_{\zeta}. \quad (2.2)$$

Сумма проекций на ось $O3$ даст

$$\dot{\mathcal{G}} = \omega_{xc} \cos \gamma + \omega_{zc} \sin \gamma + \omega_{\eta} \sin \psi - \omega_{\xi} \cos \psi. \quad (2.3)$$

Недостаток уравнений (2.1) и (2.2) – их некорректность при $\mathcal{G} = \pm 90^\circ$. Следовательно, использовать их можно только в ограниченном диапазоне углов \mathcal{G} или же необходимо исключать некорректную ситуацию дополнительными алгоритмами.

Уравнения могут быть представлены в векторно-матричной форме

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\mathcal{G}} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \gamma & 0 & -\cos \gamma \\ \cos \gamma & 0 & \sin \gamma \\ tg \mathcal{G} \sin \gamma & 1 & -tg \mathcal{G} \cos \gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_{xc} \\ \omega_{yc} \\ \omega_{zc} \end{bmatrix} + \frac{1}{\cos \mathcal{G}} \begin{bmatrix} \sin \psi \sin \mathcal{G} & \cos \psi \sin \mathcal{G} & \cos \mathcal{G} \\ -\cos \psi \cos \mathcal{G} & \sin \psi \cos \mathcal{G} & 0 \\ -\sin \psi & -\cos \psi & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_{\xi} \\ \omega_{\eta} \\ \omega_{\zeta} \end{bmatrix}.$$

По данным о полученных после интегрирования углах курса, крена и тангажа вычисляют матрицу направляющих косинусов

C^{gb}	x_c	y_c	z_c	
ξ	$c_{11} = \cos \gamma \cos \psi +$ $+ \sin \gamma \sin \psi \sin \mathcal{G};$	$c_{12} = \cos \mathcal{G} \sin \psi$	$c_{13} = \cos \psi \sin \gamma -$ $- \sin \psi \cos \gamma \sin \mathcal{G};$	(2.4)
η	$c_{21} = -\cos \gamma \sin \psi +$ $+ \sin \gamma \cos \psi \sin \mathcal{G};$	$c_{22} = \cos \mathcal{G} \cos \psi;$	$c_{23} = -\sin \psi \sin \gamma -$ $- \cos \gamma \cos \psi \sin \mathcal{G};$	
ζ	$c_{31} = -\cos \mathcal{G} \sin \gamma;$	$c_{32} = \sin \mathcal{G};$	$c_{33} = \cos \mathcal{G} \cos \gamma.$	

2.2. Уравнения ориентации Пуассона

Производная вектора в абсолютной системе координат, если вектор представлен в подвижной системе координат, определяется формулой

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{e}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{e}, \quad (2.5)$$

где первое слагаемое (т.н. локальная производная) описывает скорость изменения вектора (производную) в подвижной системе, а второе – его скорость, вызванную движением подвижной системы с угловой скоростью $\vec{\omega}$.

На рис.2.2 показаны инерциальная и подвижная системы координат, $\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0$ - орты инерциальной системы координат $0XYZ$, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орты связанной системы координат $0x_c y_c z_c$, $\vec{\omega}$ - вектор угловой скорости этой системы координат.

Введем матрицу направляющих косинусов

C^{bi}	X	Y	Z
x_c	c_{11}	c_{12}	c_{13}
y_c	c_{21}	c_{22}	c_{23}
z_c	c_{31}	c_{32}	c_{33}
или			
C^{bi}	\vec{i}_0	\vec{j}_0	\vec{k}_0
\vec{i}	c_{11}	c_{12}	c_{13}
\vec{j}	c_{21}	c_{22}	c_{23}
\vec{k}	c_{31}	c_{32}	c_{33}

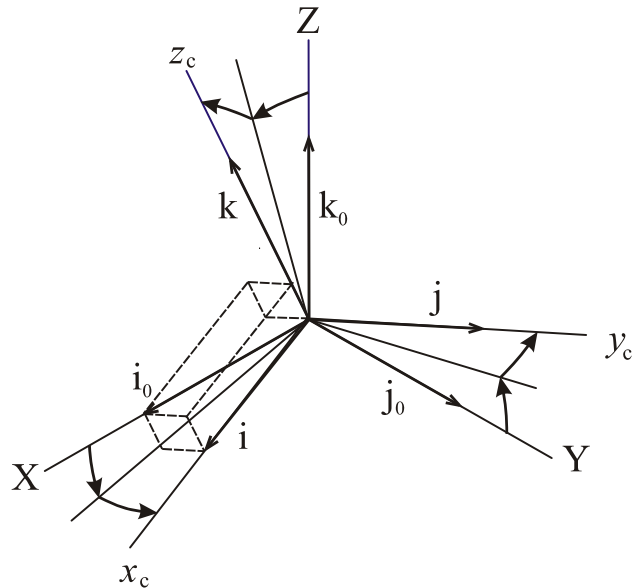


Рис.2.1. Инерциальная и связанная системы координат

Пользуясь этой матрицей, можно записать выражения

$$\begin{aligned} \vec{i}_0 &= c_{11}\vec{i} + c_{21}\vec{j} + c_{31}\vec{k}, \\ \vec{j}_0 &= c_{12}\vec{i} + c_{22}\vec{j} + c_{32}\vec{k}, \\ \vec{k}_0 &= c_{13}\vec{i} + c_{23}\vec{j} + c_{33}\vec{k}. \end{aligned}$$

В соответствии с (2.5)

$$\frac{d\vec{i}_0}{dt} = \dot{c}_{11}\vec{i} + \dot{c}_{21}\vec{j} + \dot{c}_{31}\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_{xc} & \omega_{yc} & \omega_{zc} \\ c_{11} & c_{21} & c_{31} \end{vmatrix},$$

с другой стороны скорость изменения орта инерциальной системы координат $\frac{d\vec{i}_0}{dt} = 0$. Аналогично

$$\frac{d\vec{j}_0}{dt} = \dot{c}_{12}\vec{i} + \dot{c}_{22}\vec{j} + \dot{c}_{32}\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_{xc} & \omega_{yc} & \omega_{zc} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \end{vmatrix}, \quad \frac{d\vec{j}_0}{dt} = 0;$$

$$\frac{d\vec{k}_0}{dt} = \dot{c}_{13}\vec{i} + \dot{c}_{23}\vec{j} + \dot{c}_{33}\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_{xc} & \omega_{yc} & \omega_{zc} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{vmatrix}, \quad \frac{d\vec{k}_0}{dt} = 0.$$

Суммируя коэффициенты при ортах, получим 3 системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{c}_{11} = \omega_{zc}c_{21} - \omega_{yc}c_{31} \\ \dot{c}_{21} = \omega_{xc}c_{31} - \omega_{zc}c_{11} \\ \dot{c}_{31} = \omega_{yc}c_{11} - \omega_{xc}c_{21} \end{cases} \begin{cases} \dot{c}_{12} = \omega_{zc}c_{22} - \omega_{yc}c_{32} \\ \dot{c}_{22} = \omega_{xc}c_{32} - \omega_{zc}c_{12} \\ \dot{c}_{32} = \omega_{yc}c_{12} - \omega_{xc}c_{22} \end{cases} \begin{cases} \dot{c}_{13} = \omega_{zc}c_{23} - \omega_{yc}c_{33} \\ \dot{c}_{23} = \omega_{xc}c_{33} - \omega_{zc}c_{13} \\ \dot{c}_{33} = \omega_{yc}c_{13} - \omega_{xc}c_{23} \end{cases} \quad (2.6)$$

Это уравнения Пуассона. В матричном виде

$$\dot{C}^{bi} = \Omega_b^{bi} C^{bi1} \quad (2.7)$$

где

$$C^{bi} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}, \quad \Omega_b^{bi} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{zc} & -\omega_{yc} \\ -\omega_{zc} & 0 & \omega_{xc} \\ \omega_{yc} & -\omega_{xc} & 0 \end{bmatrix}.$$

Уравнение (2.7) можно транспонировать

$$\dot{C}^{biT} = C^{biT} \Omega_b^{biT}.$$

Отметим, что $\Omega_b^{biT} = -\Omega_b^{bi}$ и тогда

$$\dot{C}^{biT} = -C^{biT} \Omega_b^{bi} \quad (2.8)$$

¹ Отметим, что в обозначении матрицы направляющих косинусов верхние индексы показывают название исходного базиса (правый индекс) и конечного базиса (левый индекс). В нашем примере C^{bi} обозначает преобразование от базиса \mathbf{i} к базису \mathbf{b} . В обозначении матрицы угловой скорости верхние индексы используют аналогично, а нижний индекс показывает, на какую систему координат проектируется угловая скорость.

Другие формы записи

$$\dot{C}^{bi} - \Omega_b^{bi} C^{bi} = 0 ;$$

$$\dot{C}^{biT} + C^{biT} \Omega_b^{bi} = 0 .$$

Если учесть, что $C^{biT} = C^{ib}$, можно записать

$$\dot{C}^{ib} + C^{ib} \Omega_b^{bi} = 0 \quad \text{или} \quad \dot{C}^{ib} = C^{ib} \Omega_b^{ib} .$$

Свойства матрицы направляющих косинусов

Напомним основные свойства матриц направляющих косинусов. Матрица направляющих косинусов ортогональна:

$$C^{ibT} \cdot C^{ib} = I, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ - единичная матрица;}$$

$$C^{ibT} = C^{ib^{-1}}, \quad \text{т.е. транспонированная матрица есть обратная матрица.}$$

Для матрицы C^{bi} (как и для другой любой матрицы направляющих косинусов) существуют соотношения для элементов строк

$$\begin{aligned} c_{11}^2 + c_{12}^2 + c_{13}^2 &= 1, \\ c_{21}^2 + c_{22}^2 + c_{23}^2 &= 1, \\ c_{31}^2 + c_{32}^2 + c_{33}^2 &= 1; \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} c_{11}c_{21} + c_{12}c_{22} + c_{13}c_{23} &= 0, \\ c_{11}c_{31} + c_{12}c_{32} + c_{13}c_{33} &= 0, \\ c_{31}c_{21} + c_{32}c_{22} + c_{33}c_{23} &= 0. \end{aligned} \quad (2.9a)$$

Аналогичные соотношения можно привести и для элементов столбцов. Формулы (2.9) описывают условие масштаба (нормировки), (2.9a) – условие ортогональности осей системы координат.

В общем виде

$$c_{\alpha 1}c_{\beta 1} + c_{\alpha 2}c_{\beta 2} + c_{\alpha 3}c_{\beta 3} = \delta_{\alpha\beta} \quad \text{где символ Кронекера} \quad \begin{aligned} \delta_{\alpha\beta} &= 1 \quad \text{при} \quad \alpha = \beta \\ \delta_{\alpha\beta} &= 0 \quad \text{при} \quad \alpha \neq \beta \end{aligned}$$

Определитель матрицы направляющих косинусов равен 1:

$$\det(C)=1.$$

Раскроем определитель по элементам первой строки

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & l_{33} \end{vmatrix} = c_{11}(c_{22}c_{33} - c_{23}c_{32}) + c_{12}(c_{23}c_{31} - c_{21}c_{33}) + c_{13}(c_{21}c_{32} - c_{22}c_{31}).$$

Сравнивая полученное выражение с первым элементом (2.8), можно записать

$$\begin{aligned} c_{11} &= c_{22}c_{33} - c_{23}c_{32}, \\ c_{12} &= c_{23}c_{31} - c_{21}c_{33}, \\ c_{13} &= c_{21}c_{32} - c_{22}c_{31}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Аналогично можно записать еще 2 тройки соотношений

$$\begin{aligned} c_{21} &= c_{12}c_{33} - c_{13}c_{32}, & c_{31} &= c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22}, \\ c_{22} &= c_{13}c_{31} - c_{11}c_{33}, & c_{32} &= c_{13}c_{21} - c_{11}c_{23}, \\ c_{23} &= c_{31}c_{12} - c_{32}c_{11}, & c_{33} &= c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}; \end{aligned} \quad (2.11)$$

т.е. каждый элемент равен своему алгебраическому дополнению.

Обобщенное уравнение Пуассона

Обобщенное уравнение Пуассона запишем в виде [5,13]

$$\dot{C}^{gb} = C^{gb}\Omega_b^{ib} - \Omega_g^{ig}C^{gb}, \quad (2.12)$$

$$\Omega_b^{ib} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{zc} & \omega_{yc} \\ \omega_{zc} & 0 & -\omega_{xc} \\ -\omega_{yc} & \omega_{xc} & 0 \end{bmatrix} - \text{матрица проекций на оси связанного базиса } \mathbf{b} \text{ век-$$

тора угловой скорости связанной системы координат \mathbf{b} относительно инерциальной (i), этой матрице соответствует вектор $\vec{\omega}_b = [\omega_{xc} \quad \omega_{yc} \quad \omega_{zc}]^T$;

$$\Omega_g^{ig} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_\zeta & \omega_\eta \\ \omega_\zeta & 0 & -\omega_\xi \\ -\omega_\eta & \omega_\xi & 0 \end{bmatrix} - \text{матрица проекций на оси базиса } \mathbf{g} \text{ вектора угловой}$$

скорости географического сопровождающего базиса \mathbf{g} относительно инерциального \mathbf{i} , этой матрице соответствует вектор $\vec{\omega}_g = [\omega_\xi \quad \omega_\eta \quad \omega_\zeta]^T$.

Обобщенное уравнение применяется, когда необходимо определить направляющие косинусы одной вращающейся системы координат относительно другой вращающейся системы. В нашем случае в развернутом виде уравнение имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{c}_{11} & \dot{c}_{12} & \dot{c}_{13} \\ \dot{c}_{21} & \dot{c}_{22} & \dot{c}_{23} \\ \dot{c}_{31} & \dot{c}_{32} & \dot{c}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{zc} & \omega_{yc} \\ \omega_{zc} & 0 & -\omega_{xc} \\ -\omega_{yc} & \omega_{xc} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{\zeta} & \omega_{\eta} \\ \omega_{\zeta} & 0 & -\omega_{\xi} \\ -\omega_{\eta} & \omega_{\xi} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

В скалярном виде

$$\begin{aligned} \dot{c}_{11} &= c_{12}\omega_{zc} - c_{13}\omega_{yc} + \omega_{\zeta}c_{21} - \omega_{\eta}c_{31}; \\ \dot{c}_{12} &= -c_{11}\omega_{zc} + c_{13}\omega_{xc} + \omega_{\zeta}c_{22} - \omega_{\eta}c_{32}; \\ \dot{c}_{13} &= c_{11}\omega_{yc} - c_{12}\omega_{xc} + \omega_{\zeta}c_{23} - \omega_{\eta}c_{33}; \\ \dot{c}_{21} &= c_{22}\omega_{zc} - c_{23}\omega_{yc} - \omega_{\zeta}c_{11} + \omega_{\eta}c_{31}; \\ \dot{c}_{22} &= -c_{21}\omega_{zc} + c_{23}\omega_{xc} - \omega_{\zeta}c_{12} + \omega_{\xi}c_{32}; \\ \dot{c}_{23} &= c_{21}\omega_{yc} - c_{22}\omega_{xc} - \omega_{\zeta}c_{13} + \omega_{\xi}c_{33}; \\ \dot{c}_{31} &= c_{32}\omega_{zc} - c_{33}\omega_{yc} - \omega_{\xi}c_{21} + \omega_{\eta}c_{11}; \\ \dot{c}_{32} &= -c_{31}\omega_{zc} + c_{33}\omega_{xc} + \omega_{\eta}c_{12} - \omega_{\xi}c_{22}; \\ \dot{c}_{33} &= c_{31}\omega_{yc} - c_{32}\omega_{xc} + \omega_{\eta}c_{13} + \omega_{\xi}c_{23}; \end{aligned} \quad (2.13)$$

Если известны направляющие косинусы, можно найти углы курса, крена, тангажа из (2.4)

$$\psi = \operatorname{arctg}\left(\frac{c_{12}}{c_{22}}\right), \quad \gamma = -\operatorname{arctg}\left(\frac{c_{31}}{c_{33}}\right), \quad \vartheta = \arcsin(c_{32}) \text{ или } \vartheta = \operatorname{arctg}\left(\frac{c_{32}}{\sqrt{1-c_{32}^2}}\right) \quad (2.14)$$

Вместо обобщенного уравнения Пуассона можно использовать два обычных уравнения Пуассона. Первое уравнение описывает движение связанного базиса \mathbf{b} относительно инерциального \mathbf{i} :

$$\dot{C}^{ib} = C^{ib}\Omega_b^{ib}.$$

Второе уравнение описывает движение сопровождающего базиса \mathbf{g} :

$$\dot{C}^{ig} = C^{ig}\Omega_g^{ig}.$$

Далее используют понятное соотношение

$$C^{ib} = C^{ig}C^{gb},$$

откуда искомая матрица
$$C^{gb} = (C^{ig})^{-1}C^{ib}. \quad (2.15)$$

Еще один вариант получения направляющих косинусов предполагает использование вектора ориентации или вектора конечного поворота [13] (см. п.2.4, формулы (2.25),(2.26)).

Контроль правильности вычисления направляющих косинусов основан на свойствах матрицы направляющих косинусов. Для правильно вычисленных направляющих косинусов должны выполняться условия масштаба (нормирования) (2.9) и ортогональности (2.9а). Если условия не выполняются, может быть выполнена коррекция:

- если $1 - (c_{i1}^2 + c_{i2}^2 + c_{i3}^2) = \Delta_i$, $i = 1, 2, 3$ корректируем значения направляющих косинусов $\check{c}_{i1} = c_{i1} - \frac{1}{2} \Delta_i c_{i1}$.

В общем виде, если обозначить C_i строку i матрицы направляющих косинусов, а C_j - другую строку этой же матрицы, то можно записать

$\Delta_{ij} = C_i C_j^T$. Если $\Delta_{ij} \neq 0$, выполняем коррекцию [6]:

- нормализацию $\check{C}_i = C_i - \frac{1}{2} \Delta_{ii} C_i$,

- ортогонализацию $\check{C}_i = C_i - \frac{1}{2} \Delta_{ij} C_j$, $\check{C}_j = C_j - \frac{1}{2} \Delta_{ij} C_i$.

Пояснения к формулам можно найти в [13].

2.3. Уравнения ориентации с параметрами Родрига-Гамильтона

В этих уравнениях информацию об угловом положении объекта содержат параметры Родрига-Гамильтона, которые являются компонентами кватерниона Λ , описывающего этот поворот (см. приложение 1). Начальные значения параметров кватерниона определяют по известным начальным значениям углов курса ψ_0 , тангажа \mathcal{G}_0 и крена γ_0 (см. п1.3).

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \cos \frac{\psi_0}{2} \cos \frac{\mathcal{G}_0}{2} \cos \frac{\gamma_0}{2} + \sin \frac{\psi_0}{2} \sin \frac{\mathcal{G}_0}{2} \sin \frac{\gamma_0}{2}, \\ \lambda_1 &= \cos \frac{\psi_0}{2} \sin \frac{\mathcal{G}_0}{2} \cos \frac{\gamma_0}{2} + \sin \frac{\psi_0}{2} \cos \frac{\mathcal{G}_0}{2} \sin \frac{\gamma_0}{2}, \\ \lambda_2 &= \cos \frac{\psi_0}{2} \cos \frac{\mathcal{G}_0}{2} \sin \frac{\gamma_0}{2} - \sin \frac{\psi_0}{2} \sin \frac{\mathcal{G}_0}{2} \cos \frac{\gamma_0}{2}, \\ \lambda_3 &= \cos \frac{\psi_0}{2} \sin \frac{\mathcal{G}_0}{2} \sin \frac{\gamma_0}{2} - \sin \frac{\psi_0}{2} \cos \frac{\mathcal{G}_0}{2} \cos \frac{\gamma_0}{2}. \end{aligned}$$

Матрица направляющих косинусов через параметры кватерниона может быть представлена в следующем виде

C^{gb}	x_c	y_c	z_c
ξ	$2\lambda_0^2 + 2\lambda_1^2 - 1$	$2(-\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2)$	$2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2)$
η	$2(\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2)$	$2\lambda_0^2 + 2\lambda_2^2 - 1$	$2(-\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)$
ζ	$2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2)$	$2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)$	$2\lambda_0^2 + 2\lambda_3^2 - 1$

(2.16)

В соответствии с (2.14)

$$\psi = \arctg\left(\frac{2(-\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2)}{\lambda_0^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2}\right), \quad \gamma = -\arctg\left(\frac{2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2)}{\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2}\right),$$

$$\vartheta = \arcsin(2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)) \quad \text{или} \quad \vartheta = \arctg\left(\frac{2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)}{\sqrt{1 - 4(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)^2}}\right) \quad (2.17)$$

Дифференциальное уравнение, описывающее изменение параметров Родрига-Гамильтона в зависимости от проекций абсолютной угловой скорости $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ и проекций переносной угловой скорости $\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$, может быть записано

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_0 \\ \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -(\omega_x - \omega_\xi) & -(\omega_y - \omega_\eta) & -(\omega_z - \omega_\zeta) \\ \omega_x - \omega_\xi & 0 & \omega_z + \omega_\zeta & -(\omega_y + \omega_\eta) \\ \omega_y - \omega_\eta & -(\omega_z + \omega_\zeta) & 0 & \omega_x + \omega_\xi \\ \omega_z - \omega_\zeta & \omega_y + \omega_\eta & -(\omega_x + \omega_\xi) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Если обозначить матрицу угловых скоростей $\mathbf{\Omega}$, то уравнение можно записать в компактной векторно-матричной форме

$$\dot{\Lambda}^{gb} = \frac{1}{2} \mathbf{\Omega} \cdot \Lambda^{gb}.$$

Если в уравнении (2.18) пренебречь проекциями переносной угловой скорости, получим уравнение, описывающее изменение кватерниона в инерциальной системе координат.

Вместо кинематического уравнения (2.18) можно использовать 2 кинематических уравнения и операцию перемножения кватернионов, аналогично (2.15).

Для решения уравнений применяют широко известные численные методы первого, второго, третьего, четвертого порядка [8] или специализированные методы [9].

Контроль точности вычислений проводят по отклонению нормы кватерниона (п1.1) от 1:

$$\Delta = 1 - (\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2).$$

Если $\Delta < \Delta_d$, т.е. вычисленная норма отличается от 1 в допуске Δ_d , параметры кватерниона уточняют по формуле

$$\check{\Lambda} = \frac{\Lambda}{\sqrt{1-\Delta}},$$

или по формуле $\check{\Lambda} = \Lambda + \frac{1}{2}\Delta \cdot \Lambda$ [13], которая соответствует разложению в ряд предыдущей формулы.

2.4. Уравнения ориентации с параметрами вектора ориентации

Параметры Родрига-Гамильтона, Кейли-Клейна, координаты вектора ориентации, координаты вектора конечного поворота относятся к группе векторных параметров [14] и все они основываются на известной теореме Эйлера: любое вращательное движение твердого тела эквивалентно плоскому вращению вокруг некоторой оси и может быть задано конечным поворотом вокруг этой оси.

Из этой теоремы следует, что поворот одной системы координат (связанной) относительно другой (исходной) в любой момент может быть описан некоторым единичным вектором \vec{e} (называемым иногда вектором Эйлера), перпендикулярным плоскости конечного поворота, и углом ϕ на который осуществляется поворот. Различные кинематические параметры, относящиеся к группе векторных, являются некоторыми функциями \vec{e} и θ [13,14].

Вектор Эйлера (вектор ориентации)

$$\vec{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{bmatrix} = \theta \vec{e} = \begin{bmatrix} \theta e_x \\ \theta e_y \\ \theta e_z \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

где e_x, e_y, e_z - направляющие косинусы орта \vec{e} в подвижном базисе.

Вектор конечного поворота $\vec{\Theta}$ по направлению совпадает с вектором Эйлера, а по величине равен $2tg \frac{\theta}{2}$:

$$\vec{\Theta} = \begin{bmatrix} \Theta_x \\ \Theta_y \\ \Theta_z \end{bmatrix} = 2tg \frac{\theta}{2} \vec{e} = \begin{bmatrix} 2e_x tg \frac{\theta}{2} \\ 2e_y tg \frac{\theta}{2} \\ 2e_z tg \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}.$$

Кинематическое уравнение, описывающее изменения вектора конечного поворота во времени, имеет вид:

$$\frac{d\vec{\Theta}}{dt} = \vec{\omega} + \frac{1}{2}\vec{\Theta} \times \vec{\omega} + \frac{1}{4}(\vec{\omega} \cdot \vec{\Theta})\vec{\Theta}, \quad \vec{\Theta}(t_0) = \vec{\Theta}_0. \quad (2.20)$$

Здесь вектор $\vec{\omega}$ описывает угловую скорость связанной системы координат $Oxyz$ относительно исходной. Если измерителями являются гироскопические измерители угловой скорости, то $\vec{\omega}$ - вектор абсолютной угловой скорости относительно инерциальной системы координат.

Как кинематические параметры используются проекции (координаты) вектора конечного поворота на оси подвижной системы координат.

В скалярном виде получим

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_x &= \omega_x + \frac{1}{2}(\omega_y\theta_z - \omega_z\theta_y) + \frac{1}{4}\theta_x(\omega_x\theta_x + \omega_x\theta_y + \omega_z\theta_z), \\ \dot{\theta}_y &= \omega_y + \frac{1}{2}(\omega_z\theta_x - \omega_x\theta_z) + \frac{1}{4}\theta_y(\omega_x\theta_x + \omega_x\theta_y + \omega_z\theta_z), \\ \dot{\theta}_z &= \omega_z + \frac{1}{2}(\omega_x\theta_y - \omega_y\theta_x) + \frac{1}{4}\theta_z(\omega_x\theta_x + \omega_x\theta_y + \omega_z\theta_z). \end{aligned}$$

Кинематическое уравнение для вектора Эйлера $\vec{\phi}$ имеет вид:

$$\frac{d\vec{\phi}}{dt} = \vec{\omega} + \frac{1}{2}(\vec{\phi} \times \vec{\omega}) + \frac{1}{\phi^2} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\phi \sin \phi}{1 - \cos \phi}\right) \vec{\phi} \times (\vec{\phi} \times \vec{\omega}); \quad \vec{\phi}(t_0) = \vec{\phi}_0, \quad (2.21)$$

где $\vec{\omega}$ - вектор угловой скорости поворота. Отметим, что $\frac{\sin \phi}{1 - \cos \phi} = \operatorname{ctg} \frac{\phi}{2}$, разложением коэффициента при третьем слагаемом (2.21) в степенной ряд до первого порядка относительно величины ϕ можно показать, что

$$\frac{1}{\phi^2} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\phi \sin \phi}{1 - \cos \phi}\right) \approx \frac{1}{12}.$$

Это уравнение нелинейное и вырождается при $\phi = 2\pi k$, ($k = 0, 1, \dots$).

В качестве кинематических параметров используют проекции вектора Эйлера на оси подвижной системы координат.

Уравнение (2.21) может быть записано в векторно-матричной форме

$$\frac{d\vec{\phi}}{dt} = \vec{\omega} - \frac{1}{2}\Omega\vec{\phi} + \frac{1}{\phi^2} \left(1 - \frac{\phi}{2} \operatorname{ctg} \frac{\phi}{2}\right) \Phi^2 \vec{\omega}, \quad (2.22)$$

$$\text{где } \vec{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{bmatrix}; \quad \vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}; \quad \Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}; \quad \Phi = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_z & \phi_y \\ \phi_z & 0 & -\phi_x \\ -\phi_y & \phi_x & 0 \end{bmatrix} \dots$$

На малых интервалах времени h обычно выполняется условие $|\vec{\phi}| \ll 1$. Тогда нелинейный член уравнения, который имеет порядок $(\omega h)^3$, можно не учитывать и рассматривать уравнение

$$\frac{d\vec{\phi}}{dt} = \vec{\omega} - \frac{1}{2}\Omega\vec{\phi}. \quad (2.23)$$

С учетом интегрального характера первичной информации численные методы решения уравнения (2.23) целесообразно строить на основе метода последовательных приближений, когда $\vec{\phi} = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{\phi}^{(n)}$.

Нулевое приближение: $\phi^{(0)} = 0$.

Первое приближение: $\phi^{(1)} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \omega(\tau) d\tau$.

Второе приближение: $\phi^{(2)} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \omega(\tau) d\tau - \frac{1}{2} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Omega(\tau') \int_{t_{i-1}}^{\tau'} \omega(\tau) d\tau d\tau'$.

и т.д.

Если в качестве измерителей используют интегрирующие гироскопы (или интегрирующие выходы лазерного гироскопа, твердотельного волнового гироскопа и др.), то для численного интегрирования можно использовать простейший одношаговый алгоритм (интервал интегрирования равен периоду съема информации) третьего порядка точности [9]

$$\vec{\phi}_i = \vec{\theta}_i + \frac{1}{12} \Theta_{i-1} \vec{\theta}_i,$$

$$\vec{\theta}_i = \begin{bmatrix} \theta_{x,i} \\ \theta_{y,i} \\ \theta_{z,i} \end{bmatrix}; \quad \Theta_{i-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_{z,i-1} & \theta_{y,i-1} \\ \theta_{z,i-1} & 0 & -\theta_{x,i-1} \\ -\theta_{y,i-1} & \theta_{x,i-1} & 0 \end{bmatrix},$$

где θ_x , θ_y , θ_z - показания интегрирующих гироскопов, если гироскопы имеют ортогональные оси чувствительности, или результаты приведения показаний к

ортогональным осям, если оси чувствительности датчиков не ортогональны. Ошибка численного метода пропорциональна величине $(\omega h)^4$.

Могут применяться и другие методы различных порядков и различной шаговости (см.п.4.5).

Вектор ориентации и вектор конечного поворота часто более удобны для анализа вращения твердого тела, чем например, матрица направляющих косинусов или параметры Родрига-Гамильтона. После их вычисления переходят к матрице направляющих косинусов или параметрам Родрига-Гамильтона (кватерниону).

Вычисление кватерниона $\Lambda = [\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]^T$ через вектор ориентации $\vec{\phi} = [\phi_x \ \phi_y \ \phi_z]^T$ (2.19) достаточно просто, хотя и требует вычисления тригонометрических функций:

$$\lambda_0 = c_{\phi/2}; \quad \lambda_1 = \frac{\phi_x}{\phi} \cdot s_{\phi/2}; \quad \lambda_2 = \frac{\phi_y}{\phi} \cdot s_{\phi/2}; \quad \lambda_3 = \frac{\phi_z}{\phi} \cdot s_{\phi/2}, \quad (2.24)$$

где для краткости обозначено $c_{\phi/2} = \cos \frac{\phi}{2}$, $s_{\phi/2} = \sin \frac{\phi}{2}$, $\phi = \sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}$.

Вычисление матрицы направляющих косинусов может быть выполнено по выражению (2.16) после вычисления элементов кватерниона (2.24) или непосредственно через компоненты вектора ориентации (2.19)

$$C^{ib} = \begin{bmatrix} \phi_x^2 + c_\phi(1 - \phi_x^2) & \phi_x\phi_y(1 - c_\phi) + \phi_z s_\phi & \phi_x\phi_z(1 - c_\phi) - \phi_y s_\phi \\ \phi_x\phi_y(1 - c_\phi) - \phi_z s_\phi & \phi_y^2 + c_\phi(1 - \phi_y^2) & \phi_y\phi_z(1 - c_\phi) + \phi_x s_\phi \\ \phi_x\phi_z(1 - c_\phi) + \phi_y s_\phi & \phi_y\phi_z(1 - c_\phi) - \phi_x s_\phi & \phi_z^2 + c_\phi(1 - \phi_z^2) \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

где обозначено $c_\phi = \cos \phi$, $s_\phi = \sin \phi$.

Матрицу (2.25) можно записать компактно, используя формулу Родригеса:

$$C^{ib} = P + (I - P)\cos \phi + Q\sin \phi, \quad (2.26)$$

$$\text{где } P = \vec{\phi} \cdot \vec{\phi}^T = \begin{bmatrix} \phi_x^2 & \phi_x\phi_y & \phi_x\phi_z \\ \phi_x\phi_y & \phi_y^2 & \phi_y\phi_z \\ \phi_x\phi_z & \phi_y\phi_z & \phi_z^2 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_z & \phi_y \\ \phi_z & 0 & -\phi_x \\ -\phi_y & \phi_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Однако, в отличие от параметров Родрига-Гамильтона, уравнения с вектором ориентации (2.22) являются в общем случае нелинейными и решение этих уравнений вырождается при $\phi = 2\pi k$, ($k = 0, 1, \dots$). Это затруднение исчезает при использовании рекуррентной процедуры.

Когда найдены компоненты вектора Эйлера $\phi_{i,x}, \phi_{i,y}, \phi_{i,z}$, на i -м интервале интегрирования, вычисляется матрица направляющих косинусов ΔC_i , описывающая поворот от исходной системы к связанной. Для этого используется соотношение (с учетом малого угла ϕ) [13]

$$\Delta C = e^{\Phi} = I + \Phi + \frac{1}{2}\Phi^2 + \frac{1}{6}\Phi^3 + \dots = I + \Phi \frac{1}{\phi} \sin \phi + \Phi^2 \frac{1}{\phi^2} (1 - \cos \phi), \quad (2.27)$$

где I – единичная матрица размера 3×3 , Φ – матрица из (2.22).

Матрицу направляющих косинусов C_i определяют путем перемножения

$$C_i = C_{i-1} \Delta C_i. \quad (2.28)$$

Если входной информацией является абсолютная угловая скорость, измеряемая датчиками угловой скорости (вектор $\vec{\omega}$ и соответствующая ему матрица Ω), то вектор Эйлера покажет поворот относительно исходного инерциального базиса \mathbf{i} , а определяемая матрица направляющих косинусов может быть обозначена $C \equiv C^{ib}$.

Аналогичная рекуррентная процедура может быть использована при вычислении кватерниона ориентации

$$\Lambda_i = \Lambda_{i-1} \circ \Delta \Lambda_i, \quad (2.29)$$

где приращение кватерниона на шаге интегрирования $\Delta \Lambda_i$ определяют по приращению вектора ориентации по (2.24).

Если необходимо определять поворот связанного базиса \mathbf{b} относительно вращающегося географического сопровождающего базиса \mathbf{g} , то тогда вместо указанных в (2.22) вектора и матрицы используют вектор относительной угловой скорости

$$\vec{\omega}^o = \vec{\omega} - (C^{gb})^T \vec{\omega}_g, \quad \vec{\omega}_g = [\omega_\xi \quad \omega_\eta \quad \omega_\zeta]^T,$$

и соответствующую ему матрицу

$$\Omega^o = \Omega - (C^{gb})^T \Omega_g^{ig}, \quad \text{где } \Omega_g^{ig} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_\zeta & \omega_\eta \\ \omega_\zeta & 0 & -\omega_\xi \\ -\omega_\eta & \omega_\xi & 0 \end{bmatrix}.$$

Вычисления по формулам (2.22), (2.23) в этом случае дают матрицу направляющих косинусов C^{gb} .

3. Представления скорости и ускорения объекта

Представление скорости

Как уже упоминалось, абсолютной называют скорость в инерциальной системе координат. Относительной называют скорость в системе координат, перемещающейся относительно абсолютной системы. Это перемещение может быть как поступательным, так и вращательным. Представлен вектор скорости может быть в проекциях на оси разных систем координат.

В алгоритмах ИНС чаще всего рассматривают в качестве относительной скорости во вращающемся сопровождающем трехграннике $O\xi\eta\zeta$ ($OENH$), обозначаемом иногда буквой \mathbf{g} :

$v_\xi \equiv v_E$ - восточная составляющая;

$v_\eta \equiv v_N$ - северная составляющая;

$v_\zeta \equiv v_H$ - вертикальная составляющая.

Для получения абсолютной линейной скорости к относительной скорости добавляют переносную линейную скорость

$$\vec{V} = \vec{v} + \vec{v}^{nep}. \quad (3.1)$$

В рассматриваемом примере переносной является скорость из-за вращения Земли. Эта скорость имеет только восточную составляющую $v_{\xi 3} = ru \cos \varphi$, $r = R + h$ (для геоцентрической системы координат, R - радиус Земли, h - высота). Таким образом, составляющие абсолютной линейной скорости в проекциях на оси географического трехгранника

$$V_\xi = v_\xi + ru \cos \varphi, \quad V_\eta \equiv v_\eta, \quad V_\zeta \equiv v_\zeta.$$

Вертикальная составляющая скорости соответствует скорости изменения высоты (или глубины) $V_\zeta = \dot{h}$.

В векторной форме относительную скорость записывают в виде

$$\vec{v}_g = [v_E, v_N, \dot{h}]^T.$$

Вектор переносной линейной скорости представим в виде $\vec{v}_3 = [ru \cos \varphi, 0, 0]^T$. Абсолютную линейную скорость можно получить как производную радиуса-вектора в инерциальной системе координат

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}.$$

В инерциальной системе координат i радиус-вектор представляют в виде $\vec{r}_i = [X, Y, Z]^T$, в сопровождающем базисе $\vec{r}_g = [0, 0, r]^T$.

Если радиус-вектор представлен в сопровождающем базисе, абсолютную скорость записывают в виде

$$\vec{V}_g = \frac{d\vec{r}_g}{dt} + (\vec{u}_g + \vec{\omega}_g^o) \times \vec{r}_g. \quad (3.2)$$

Здесь $\frac{d\vec{r}_g}{dt}$ - производная радиуса-вектора в сопровождающем базисе (локальная производная), $\vec{u}_g = [0, u \cos \varphi, u \sin \varphi]^T$ - вектор угловой скорости вращения Земли, $\vec{\omega}_g^o = [-\frac{v_N}{r}, \frac{v_E}{r}, \frac{v_E}{r} \operatorname{tg} \varphi]^T$ - вектор угловой скорости сопровождающего базиса из-за перемещения относительно Земли. Сумма

$$\vec{\omega}_g = \vec{u}_g + \vec{\omega}_g^o$$

обозначает абсолютную угловую скорость сопровождающего базиса, представленную в проекциях на оси сопровождающего базиса g .

Представление ускорения

При записи абсолютного ускорения в подвижной системе координат абсолютное ускорение \vec{W} есть сумма относительного ускорения \vec{v} , переносного ускорения \vec{W}^{nep} и кориолисового ускорения \vec{W}^{kop} :

$$\vec{W} = \vec{v} + \vec{W}^{nep} + \vec{W}^{kop}.$$

Составляющие ускорения

$\vec{W}^{nep} = \vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{r})$ - центробежное ускорение из-за вращения Земли;

$\vec{W}^{kop} = 2\vec{u} \times \vec{v}$ - кориолисово ускорение.

Рассмотрим абсолютное ускорение объекта, перемещающегося на поверхности Земли или около нее, т.е. в сопровождающем базисе.

$$\vec{W}_g \equiv \frac{d\vec{V}_g}{dt} \equiv \frac{d^2\vec{r}_g}{dt^2} \equiv \ddot{\vec{r}}_g.$$

Далее индекс g для упрощения записи употреблять не будем, молчаливо подразумевая его наличие.

Дифференцируя (3.2), получим

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\tilde{d}\vec{r}}{dt} \right) + \frac{d}{dt} (\vec{u} + \vec{\omega}^o) \times \vec{r} + (\vec{u} + \vec{\omega}^o) \times \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (3.3)$$

Учтем, что $\vec{u} = Const$ ($\vec{u} \times \vec{u} = 0$) и подставим в последнее слагаемое выражение (3.2):

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\tilde{d}\vec{r}}{dt} \right) + \frac{d}{dt} \vec{\omega}^o \times \vec{r} + (\vec{u} + \vec{\omega}^o) \times \left[\frac{\tilde{d}\vec{r}}{dt} + (\vec{u} + \vec{\omega}^o) \times \vec{r} \right]. \quad (3.4)$$

Учтем, что $\frac{\tilde{d}\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{h}}$, $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{r}}{dt} + (\vec{u} + \vec{\omega}^o) \times \vec{r} = \frac{\tilde{d}\vec{r}}{dt} + \vec{u} \times \vec{r} + \vec{\omega}^o \times \vec{r}$. (3.5)

Тогда

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\tilde{d}\vec{r}}{dt} \right) = \frac{\tilde{d}^2\vec{r}}{dt^2} + (\vec{u} + \vec{\omega}^o) \times \dot{\vec{h}} = \ddot{\vec{h}} + (\vec{u} + \vec{\omega}^o) \times \dot{\vec{h}}, \text{ так как } \frac{\tilde{d}\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{h}}.$$

Преобразуем далее (3.3):

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\tilde{d}\vec{r}}{dt} \right) + \frac{d}{dt} (\vec{u} + \vec{\omega}^o) \times \vec{r} + (\vec{u} + \vec{\omega}^o) \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \\ &= \ddot{\vec{h}} + (\vec{u} + \vec{\omega}^o) \times \dot{\vec{h}} + \frac{d}{dt} \vec{u} \times \vec{r} + \frac{d}{dt} \vec{\omega}^o \times \vec{r} + \vec{u} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega}^o \times \frac{d\vec{r}}{dt}. \end{aligned}$$

Учтем, что $\frac{d}{dt} \vec{u} = 0$ и подставим (3.5):

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= \ddot{\vec{h}} + (\vec{u} + \vec{\omega}^o) \times \dot{\vec{h}} + \frac{d}{dt} \vec{\omega}^o \times \vec{r} + \vec{u} \times \left(\frac{\tilde{d}\vec{r}}{dt} + \vec{u} \times \vec{r} + \vec{\omega}^o \times \vec{r} \right) + \vec{\omega}^o \times \left(\frac{\tilde{d}\vec{r}}{dt} + \vec{u} \times \vec{r} + \vec{\omega}^o \times \vec{r} \right) = \\ &= \ddot{\vec{h}} + (\vec{u} + \vec{\omega}^o) \times \dot{\vec{h}} + \frac{d}{dt} \vec{\omega}^o \times \vec{r} + \vec{u} \times \dot{\vec{h}} + \vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{r}) + \vec{u} \times (\vec{\omega}^o \times \vec{r}) + \vec{\omega}^o \times \dot{\vec{h}} + \vec{\omega}^o \times (\vec{u} \times \vec{r}) + \vec{\omega}^o \times (\vec{\omega}^o \times \vec{r}) = \\ &= \ddot{\vec{h}} + 2(\vec{u} + \vec{\omega}^o) \times \dot{\vec{h}} + \vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{r}) + \vec{\omega}^o \times (\vec{\omega}^o \times \vec{r}) + \vec{u} \times (\vec{\omega}^o \times \vec{r}) + \vec{\omega}^o \times (\vec{u} \times \vec{r}) + \frac{d}{dt} \vec{\omega}^o \times \vec{r}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Преобразуем последнее слагаемое, учитывая, что $\vec{\omega}^o \times \vec{\omega}^o = 0$:

$$\frac{d}{dt} \vec{\omega}^o \times \vec{r} = \left(\frac{\tilde{d}}{dt} \vec{\omega}^o + (\vec{u} + \vec{\omega}^o) \times \vec{\omega}^o \right) \times \vec{r} = \left(\frac{\tilde{d}}{dt} \vec{\omega}^o + \vec{u} \times \vec{\omega}^o \right) \times \vec{r} = \frac{\tilde{d}}{dt} \vec{\omega}^o \times \vec{r} + (\vec{u} \times \vec{\omega}^o) \times \vec{r}.$$

Учтем также такое преобразование:

$$\begin{aligned}
& (\vec{u} \times \vec{\omega}^o) \times \vec{r} + \vec{\omega}^o \times (\vec{u} \times \vec{r}) = -\vec{r} \times (\vec{u} \times \vec{\omega}^o) + \vec{\omega}^o \times (\vec{u} \times \vec{r}) = \\
& = -\vec{u}(\vec{r} \cdot \vec{\omega}^o) + \vec{\omega}^o(\vec{r} \cdot \vec{u}) + \vec{u}(\vec{\omega}^o \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{\omega}^o \cdot \vec{u}) = \\
& = \vec{\omega}^o(\vec{r} \cdot \vec{u}) - \vec{r}(\vec{\omega}^o \cdot \vec{u}) = \vec{\omega}^o(\vec{u} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{u} \cdot \vec{\omega}^o) = \vec{u} \times (\vec{\omega}^o \times \vec{r}).
\end{aligned}$$

В итоге из (3.6), учитывая, что

$\vec{u} + \vec{\omega}^o = \vec{\omega}$ - абсолютная угловая скорость базиса \mathbf{g} ,

$\vec{\omega}^o \times \vec{r} = \vec{v}_2$ - горизонтальная составляющая относительной линейной скорости,

$\frac{d}{dt} \vec{\omega}^o = \vec{\varepsilon}$ - тангенциальное ускорение,

получим формулу абсолютной линейной скорости в проекциях на оси сопровождающего базиса \mathbf{g} ($O\xi\eta\zeta$)

$$\boxed{\vec{W}_g = \ddot{h} + 2\vec{\omega} \times \dot{h} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{u} \times \vec{v}_2 + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}} \quad (3.7)$$

Рассмотрим содержание слагаемого $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$:

$$\frac{d}{dt} \vec{\omega}^o = \vec{\varepsilon} = \left[-\frac{\dot{v}_N}{r}, \frac{\dot{v}_E}{r}, \left(\frac{v_E}{r} \operatorname{tg} \varphi \right)' \right]^T \quad (\text{штрих означает производную}).$$

$$\vec{\varepsilon} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{\xi}_0 & \vec{\eta}_0 & \vec{\zeta}_0 \\ -\frac{\dot{v}_N}{r} & \frac{\dot{v}_E}{r} & \left(\frac{v_E}{r} \operatorname{tg} \varphi \right)' \\ 0 & 0 & \kappa \end{vmatrix} = \vec{\xi}_0 \dot{v}_E + \vec{\eta}_0 \dot{v}_N = \dot{\vec{v}}_2$$

- горизонтальная составляющая относительного ускорения.

В (3.7)

$2\vec{\omega} \times \dot{h}$ - кориолисово ускорение, вызванное изменением высоты в сопровождающем базисе;

$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ - центробежное ускорение;

$2\vec{u} \times \vec{v}_2$ - кориолисово ускорение, возникающее при горизонтальном движении.

Уравнение (3.7) может быть преобразовано к следующему виду

$$\boxed{\vec{W}_g = \frac{d}{dt} \vec{v} + (2\vec{u} + \vec{\omega}^o) \times \vec{v} + \vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{r})} \quad (3.8)$$

или

$$\boxed{\vec{W}_g = \frac{d}{dt} \vec{v} + (\vec{u} + \vec{\omega}) \times \vec{v} + \vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{r})} \quad (3.9)$$

Такие формулы приведены, например, в [1].

Эти формулы можно также получить другим путем. Представим формулу абсолютной скорости (3.2) в виде

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{u} \times \vec{r} + \vec{\omega}^o \times \vec{r}. \quad (3.10)$$

В соответствии с ранее введенными обозначениями, (3.10) можно записать в виде

$$\vec{V} = \dot{\vec{h}} + \vec{u} \times \vec{r} + \vec{v}_2 = \vec{v} + \vec{u} \times \vec{r}. \quad (3.11)$$

Таким образом, вектор абсолютной линейной скорости в сопровождающем базисе \mathbf{g} равен сумме относительной линейной скорости \vec{v} в этом базисе (относительно Земли) и переносной линейной скорости $\vec{v}^{nep} = \vec{u} \times \vec{r}$ из-за вращения Земли.

Возьмем производную от (3.11)

$$\vec{W} = \frac{d}{dt} \vec{v} + \frac{d}{dt} (\vec{u} \times \vec{r}) = \frac{d}{dt} \vec{v} + (\vec{u} + \vec{\omega}^o) \times \vec{v} + \frac{d}{dt} \vec{u} \times \vec{r} + \vec{u} \times \frac{d}{dt} \vec{r}.$$

Учтем, что $\frac{d}{dt} \vec{u} = 0$ и $\frac{d}{dt} \vec{r} = \vec{v} + \vec{u} \times \vec{r}$. Тогда

$$\vec{W} = \dot{\vec{v}} + (\vec{u} + \vec{\omega}^o) \times \vec{v} + \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{u} \times \vec{r}).$$

Отсюда получим формулу, соответствующую (3.8)

$$\boxed{\vec{W} = \dot{\vec{v}} + (2\vec{u} + \vec{\omega}^o) \times \vec{v} + \vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{r}).}$$

Учитывая выражение для ускорения силы тяжести $\vec{g} = \vec{g}' - \vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{r})$, можно записать выражение кажущегося ускорения

$$\boxed{\vec{a}_g = \dot{\vec{v}} + (2\vec{u} + \vec{\omega}^o) \times \vec{v} - \vec{g}}. \quad (3.13)$$

Такая формула приведена, например, в [6].

Второе слагаемое иногда представляют через определитель

$$\begin{aligned} (2\vec{u} + \vec{\omega}^o) \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{\xi}_0 & \vec{\eta}_0 & \vec{\zeta}_0 \\ 2u_\xi + \omega_\xi^o & 2u_\eta + \omega_\eta^o & 2u_\zeta + \omega_\zeta^o \\ v_\xi & v_\eta & v_\zeta \end{vmatrix} = \\ &= \vec{\xi}_0 \left[(2u_\eta + \omega_\eta^o) v_\zeta - (2u_\zeta + \omega_\zeta^o) v_\eta \right] + \\ &+ \vec{\eta}_0 \left[(2u_\zeta + \omega_\zeta^o) v_\xi - (2u_\xi + \omega_\xi^o) v_\zeta \right] + \\ &+ \vec{\zeta}_0 \left[(2u_\xi + \omega_\xi^o) v_\eta - (2u_\eta + \omega_\eta^o) v_\xi \right]. \end{aligned}$$

Здесь $\vec{\xi}_0, \vec{\eta}_0, \vec{\zeta}_0$ - орты сопровождающего базиса.

Иногда используют векторно-матричную форму записи

$$\frac{d\vec{v}_g}{dt} + (\Omega_g^{ig} + \Omega_g^{ie})\vec{v}_g = C^{gb}\vec{a}_b + \vec{g}_g, \quad \vec{v}_g(t_0) = \vec{v}_{g,0}; \quad (3.14)$$

$$\text{где } (\Omega_g^{ig} + \Omega_g^{ie}) = \begin{bmatrix} 0 & -\left(\frac{v_E}{R_E} \operatorname{tg} \varphi + 2u \sin \varphi\right) & \frac{v_E}{R_E} + 2u \cos \varphi \\ \frac{v_E}{R_E} \operatorname{tg} \varphi + 2u \sin \varphi & 0 & \frac{v_N}{R_N} \\ -\frac{v_E}{R_E} - 2u \cos \varphi & -\frac{v_N}{R_N} & 0 \end{bmatrix};$$

\vec{g}_g - вектор силы тяжести в точке нахождения объекта, \vec{a}_b - вектор кажущегося ускорения в связанном базисе.

Отметим, что

$$\Omega_g^{ig} = \begin{bmatrix} 0 & -\left(\frac{v_E}{R_E} \operatorname{tg} \varphi + u \sin \varphi\right) & \frac{v_E}{R_E} + u \cos \varphi \\ \frac{v_E}{R_E} \operatorname{tg} \varphi + u \sin \varphi & 0 & \frac{v_N}{R_N} \\ -\frac{v_E}{R_E} - u \cos \varphi & -\frac{v_N}{R_N} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Omega_g^{ie} = \begin{bmatrix} 0 & -u \sin \varphi & u \cos \varphi \\ u \sin \varphi & 0 & 0 \\ -u \cos \varphi & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Абсолютное ускорение можно также получить путем дифференцирования вектора абсолютной скорости, записанного во вращающейся системе координат [3]

$$\vec{W}_{\xi\eta\zeta} = \dot{\vec{V}} + \vec{\omega} \times \vec{V}.$$

В проекциях

$$\begin{aligned} W_\xi &= \dot{V}_\xi + \omega_\eta V_\zeta - \omega_\zeta V_\eta, \\ W_\eta &= \dot{V}_\eta + \omega_\zeta V_\xi - \omega_\xi V_\zeta, \\ W_\zeta &= \dot{V}_\zeta + \omega_\xi V_\eta - \omega_\eta V_\xi. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Здесь, учитывая радиусы кривизны земного эллипсоида,

$$\omega_{\xi} = -\frac{v_N}{R_2 + h} = -\frac{V_N}{R_2 + h}, \quad \omega_{\eta} = u \cos \varphi + \frac{v_E}{R_1 + h} = \frac{V_E}{R_1 + h},$$

$$\omega_{\zeta} = u \sin \varphi + \frac{v_E}{R_1 + h} \operatorname{tg} \varphi = \frac{V_E}{R_1 + h} \operatorname{tg} \varphi.$$

Учитывая, что $V_{\xi} \equiv V_E = v_E + R_1 u \cos \varphi$, получим

$$\dot{V}_{\xi} = \dot{v}_E - \frac{R_1}{R_2} v_N u \sin \varphi \approx \dot{v}_E - v_N u \sin \varphi. \text{ Учтем также, что } \dot{V}_{\eta} \equiv \dot{v}_N, \quad \dot{V}_{\zeta} \equiv \dot{v}_{\zeta} \equiv \dot{h}.$$

После подстановки формул в (3.13) и преобразований получим

$$W_{\xi} = \dot{v}_E - (u \sin \varphi + \omega_{\zeta}) v_N + \left(2u \cos \varphi + \frac{v_E}{R_1 + h}\right) v_{\zeta};$$

$$W_{\eta} = \dot{v}_N + (u \sin \varphi + \omega_{\zeta}) v_E + u^2 (R_1 + h) \sin \varphi \cos \varphi + \frac{v_N \cdot v_{\zeta}}{R_1 + h}; \quad (3.16)$$

$$W_{\zeta} = \dot{v}_{\zeta} - \frac{v_N^2}{R_2 + h} - \frac{v_E^2}{R_1 + h} - 2uv_E \cos \varphi - u^2 (R_1 + h) \cos^2 \varphi.$$

4. Алгоритмы БИНС

Как видно из ранее изложенного, алгоритмы функционирования БИНС могут отличаться видом системы координат, принятой за основную, видом уравнений ориентации, используемой формой записи ускорений, избранным методом численного интегрирования и др. БИНС могут отличаться используемыми гироскопическими измерителями. Поэтому алгоритмы БИНС весьма разнообразны. Рассмотрим некоторые примеры.

4.1. Алгоритм БИНС в инерциальной системе координат

Данный алгоритм реализует метод счисления пути, в первую очередь, в инерциальной системе координат.

В блоке чувствительных элементов акселерометры и гироскопы могут быть в минимальном количестве (3 одноосных акселерометра, 3 датчика угловой скорости), а могут иметь избыточную сложную структуру (см. п. 4.6), механизмы автокомпенсации помех. Алгоритмы предварительной обработки сигналов могут содержать элементы автокомпенсации помех или корректировки измерений по результатам калибровки параметров модели сигналов (см. гл.10). Для получения сигналов в проекциях на оси связанной системы координат проводится преобразование сигналов чувствительных элементов, их диагностика, в результате которых определяют вектор проекций кажущихся ускорений \vec{a}_b и вектор проекций угловой скорости объекта $\vec{\omega}_b$.

Поскольку основной принята инерциальная система координат, необходимо использовать матрицу направляющих косинусов между осями связанной \mathbf{b} и инерциальной \mathbf{i} систем координат C^{ib} . Для получения C^{ib} используют уравнение Пуассона

$$\dot{C}^{ib} = C^{ib} \Omega_b^{ib}, \quad (4.1)$$

где Ω_b^{ib} - матрица проекций абсолютной угловой скорости, измеряемых ДУС:

$$\Omega_b^{ib} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{zc} & \omega_{yc} \\ \omega_{zc} & 0 & -\omega_{xc} \\ -\omega_{yc} & \omega_{xc} & 0 \end{bmatrix}.$$

Для решения уравнения необходима матрица начальных значений направляющих косинусов C_0^{ib} , которую находят при начальной выставке БИНС.

С помощью полученной матрицы преобразуют проекции ускорений из связанного базиса в инерциальный:

$$\vec{a}_i = C^{ib} \vec{a}_b.$$

Затем, интегрируя абсолютное ускорение

$$\vec{V}_i = \vec{a}_i + \vec{g}'_i \quad (4.2)$$

в инерциальной системе координат с учетом начального значения абсолютной скорости \vec{V}_{i0} , получают абсолютную скорость \vec{V}_i .

Интегрируя инерциальную скорость \vec{V}_i , с учетом начального радиуса-вектора \vec{r}_{i0} , получим радиус-вектор \vec{r}_i .

Для использования формулы (4.2), соответствующей основному уравнению акселерометра (1.14), рассчитывают вектор гравитационного ускорения $\vec{g}'_i(\vec{r}_i)$. Для приближенного расчета могут быть использованы формулы (1.12).

Более точные выражения

$$g'_X = -\frac{g'X}{r} \left(1 - 3\mu \frac{Z^2}{r^2}\right); \quad g'_Y = -\frac{g'Y}{r} \left(1 - 3\mu \frac{Z^2}{r^2}\right); \quad g'_Z = -\frac{g'Z}{r} \left(1 + 3\mu \frac{(X^2 + Y^2)}{r^2}\right); \quad (4.2a)$$

$$g' = \frac{g_{\exists,0} a^2}{r^2} \left(1 - \beta \frac{Z^2}{r^2}\right); \quad \beta = 1.437 \cdot 10^{-3}, \quad 3\mu = 3.27 \cdot 10^{-3}, \quad g_{\exists,0} = 9.81438 \text{ м/с}^2.$$

Здесь величина радиуса-вектора \vec{r}_i , определяющего положение объекта, связана с его проекциями соотношением $r^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$.

От инерциальных декартовых координат можно перейти к сферическим (см. рис.4.1): широте φ , абсолютной долготе Λ и относительной долготе λ

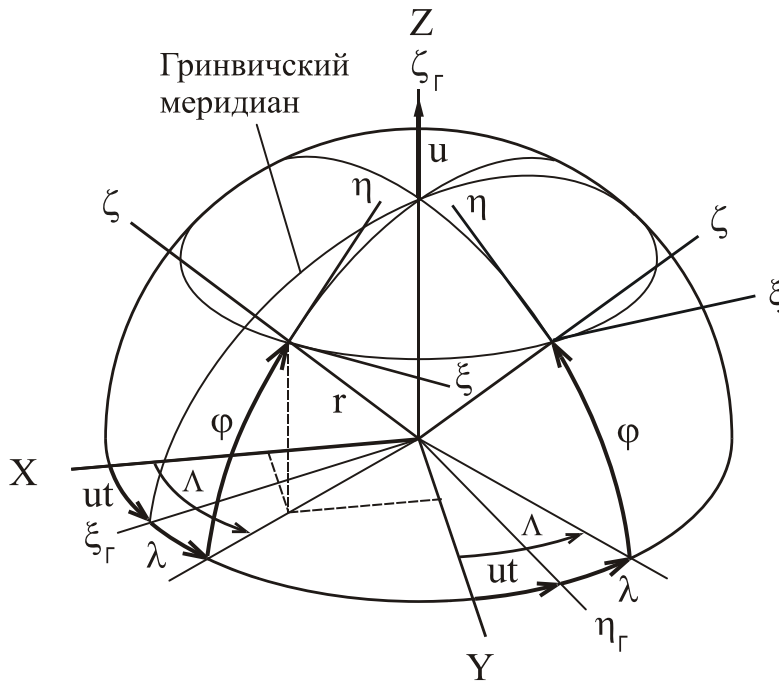


Рис.4.1. Системы координат

$$\phi = \arctg \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, \quad \Lambda = \arctg \frac{Y}{X}, \quad \lambda = \Lambda - ut.$$

Для определения параметров относительного движения (относительной скорости, углов курса, крена и тангажа) необходимо найти матрицу направляющих косинусов для преобразования инерциальных координат в относительные C^{gi} . Это можно сделать, пользуясь рис. 4.1.

C^{gi}	X	Y	Z
ξ	$-\sin \Lambda$	$\cos \Lambda$	0
η	$\cos \Lambda \sin \varphi$	$\sin \Lambda \sin \varphi$	$\cos \varphi$
ζ	$\cos \Lambda \cos \varphi$	$\sin \Lambda \cos \varphi$	$\sin \varphi$

Для определения углов курса, крена и тангажа найдем матрицу направляющих косинусов C^{gb} :

$$C^{gb} = C^{gi} C^{ib},$$

а затем, глядя на вид матрицы (2.4), сами углы

$$\psi = \arctg \left(\frac{c_{12}^{gb}}{c_{22}^{gb}} \right), \quad \gamma = -\arctg \left(\frac{c_{31}^{gb}}{c_{33}^{gb}} \right), \quad \vartheta = \arctg \left(\frac{c_{32}^{gb}}{\sqrt{1 - (c_{32}^{gb})^2}} \right).$$

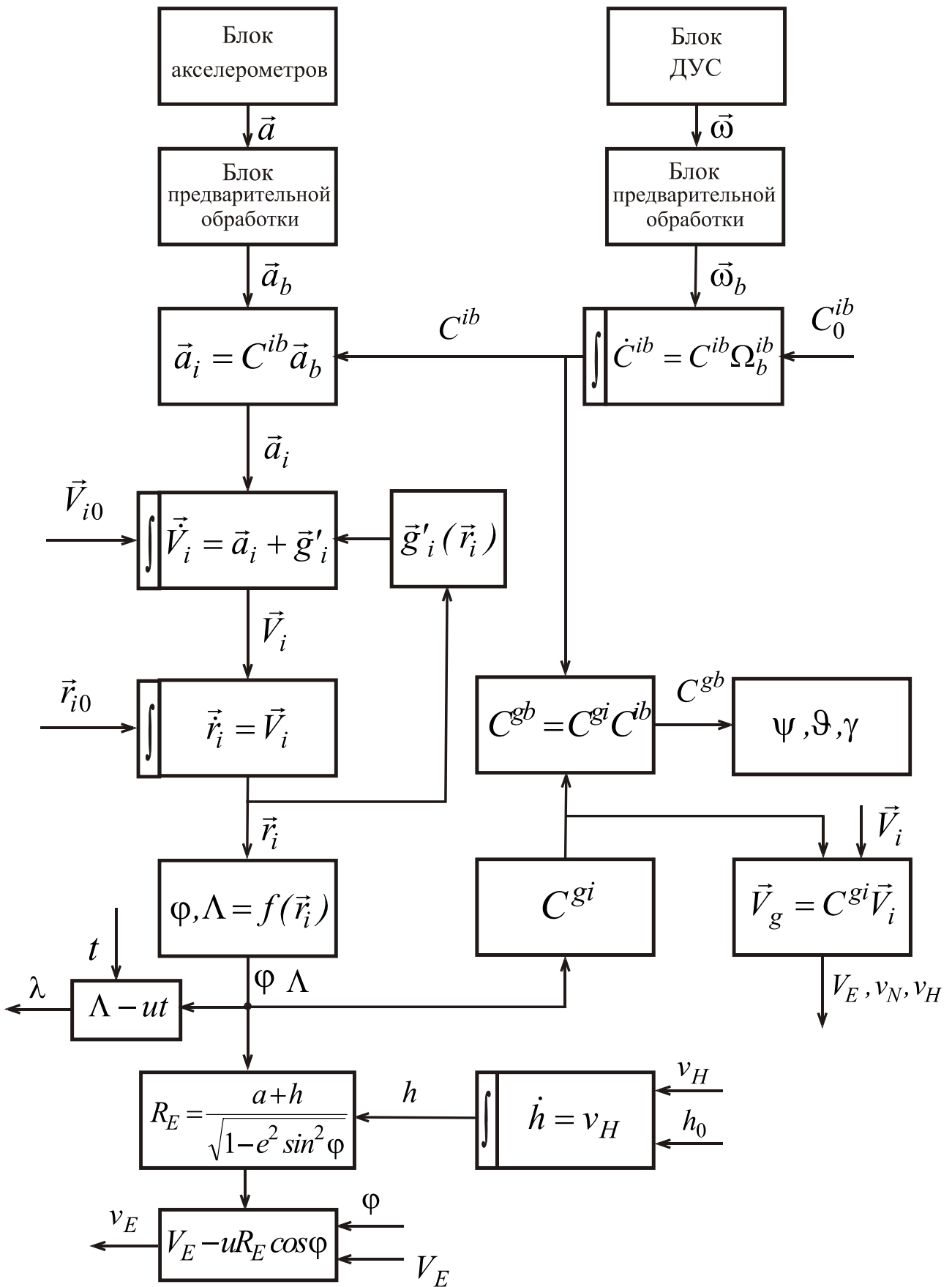


Рис.4.1. Структурная схема алгоритма БИНС в инерциальной системе координат

Составляющие абсолютной линейной скорости в проекциях на оси сопровождающего базиса находят перепроектированием по формуле

$$\vec{V}_g = C^{gi} \vec{V}_i.$$

$$V_\xi = -V_X \sin \Lambda + V_Y \cos \Lambda,$$

В скалярном виде $V_\eta = V_X \cos \Lambda \sin \varphi + V_Y \sin \Lambda \sin \varphi + V_Z \cos \varphi,$

$$V_\zeta = V_X \cos \Lambda \cos \varphi + V_Y \sin \Lambda \cos \varphi + V_Z \sin \varphi.$$

От абсолютных скоростей можно перейти к относительным

$$v_E = V_\xi - uR_E \cos \varphi, \quad v_N \equiv V_\eta, \quad v_H \equiv V_\zeta.$$

При решении уравнения Пуассона, как показано в п.2.2, достаточно решать 6 дифференциальных уравнений, а еще три направляющих косинуса находить из соотношений типа (2.9). В итоге, реализация этого алгоритма требует решения 13 дифференциальных уравнений.

4.2. Алгоритм в географическом сопровождающем базисе с обобщенным уравнением Пуассона

Поскольку основной принята система координат \mathbf{g} , необходимо использовать матрицу направляющих косинусов C^{gb} между осями связанного \mathbf{b} и сопровождающего базиса \mathbf{g} . Для получения C^{gb} используют уравнение Пуассона, которое называют обобщенным уравнением [5], поскольку в нем учтено переносное движение

$$\dot{C}^{gb} = C^{gb} \Omega_b^{ib} - \Omega_g^{ig} C^{gb}. \quad (4.3)$$

Матрицы угловых скоростей представлены в (2.11).

Для решения уравнения необходима матрица начальных значений направляющих косинусов C_0^{gb} , которую находят при начальной выставке БИНС.

С помощью полученной матрицы преобразуют проекции ускорений из связанного базиса в сопровождающий:

$$\vec{a}_g = C^{gb} \vec{a}_b. \quad (4.4)$$

Относительное ускорение находят путем интегрирования уравнения

$$\dot{\vec{v}}_g = \vec{a}_g - (\vec{u}_g + \vec{\omega}_g) \times \vec{v}_g + \vec{g}_g. \quad (4.5)$$

Составляющие угловых скоростей находят в соответствии с (1.3), (1.4).

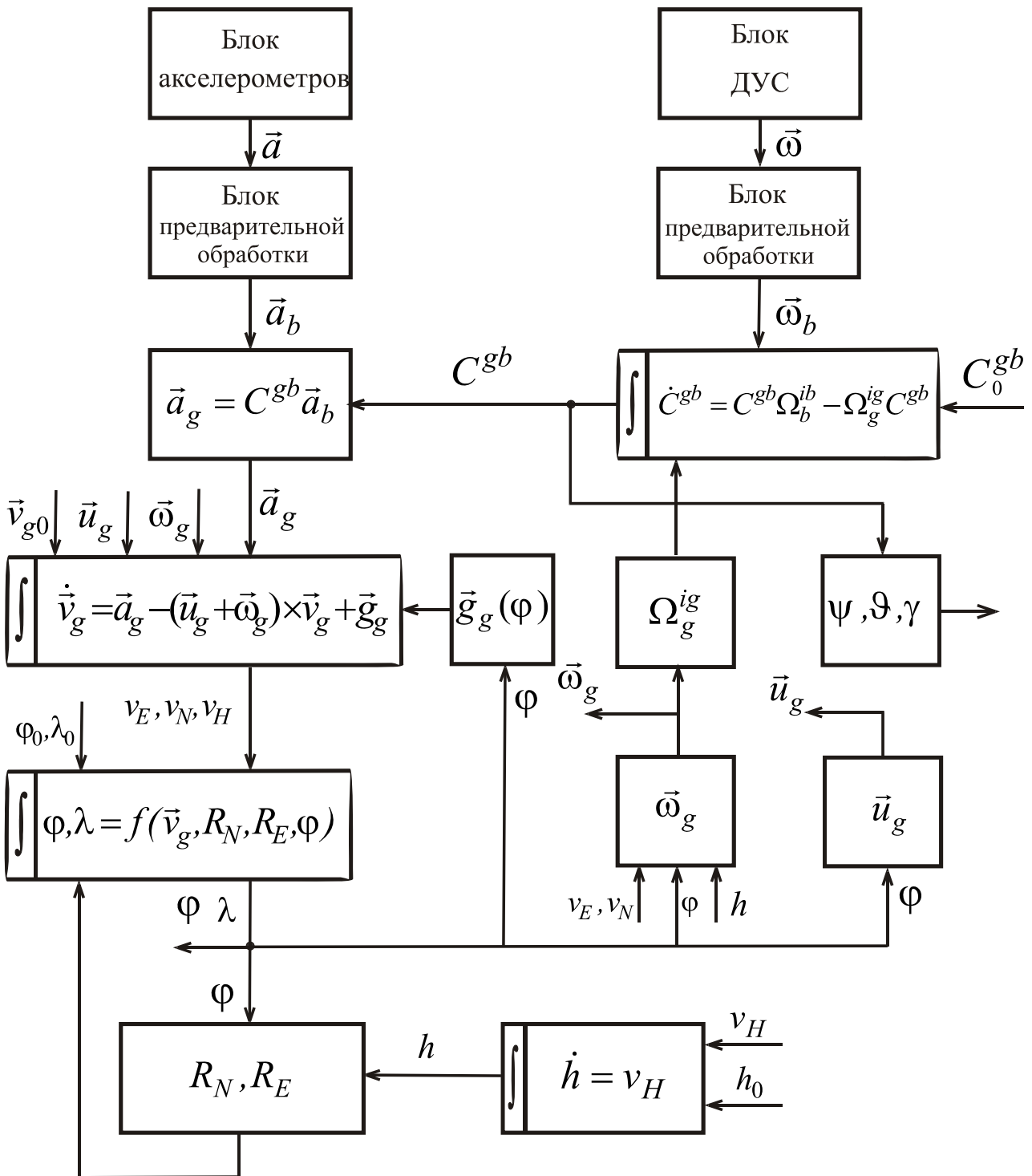


Рис.4.2. Структурная схема алгоритма БИНС в географическом сопровождающем базисе

Вектор гравитационного ускорения $\vec{g}'_g = [0, g_\varphi, g_r]^T$, где составляющие g_φ, g_r определяют из (1.8), (1.9). Для интегрирования уравнений необходимо ввести начальное значение \vec{v}_{g0} .

Широту и долготу определяют путем интегрирования уравнений

$$\dot{\varphi} = \frac{v_N}{R_N}, \quad \dot{\lambda} = \frac{v_E}{R_E \cos \varphi}. \quad (4.5)$$

Радиусы кривизны эллипсоида вычисляют по формулам (1.1), (1.2). При интегрировании вводят начальные значения широты и долготы φ_0, λ_0 .

Углы курса, крена и тангажа находят, как и прежде, из выражений

$$\psi = \arctg\left(\frac{c_{12}^{gb}}{c_{22}^{gb}}\right), \quad \gamma = -\arctg\left(\frac{c_{31}^{gb}}{c_{33}^{gb}}\right), \quad \vartheta = \arctg\left(\frac{c_{32}^{gb}}{\sqrt{1 - (c_{32}^{gb})^2}}\right).$$

При решении уравнения Пуассона, как показано в п.2.2, достаточно решать 6 дифференциальных уравнений, а еще три направляющих косинуса находить из соотношений типа (2.9). В итоге, реализация этого алгоритма требует решения 12 дифференциальных уравнений.

4.3. Алгоритм с уравнением Родрига-Гамильтона

Отличительной особенностью этого алгоритма является применение вместо кинематического обобщенного уравнения Пуассона уравнения в параметрах Родрига-Гамильтона (параметрах кватерниона) вида (2.18)

$$\dot{\bar{\Lambda}}^{gb} = \frac{1}{2} \Omega \cdot \bar{\Lambda}^{gb}.$$

В нем матрица угловых скоростей имеет вид

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -(\omega_x - \omega_\xi) & -(\omega_y - \omega_\eta) & -(\omega_z - \omega_\zeta) \\ \omega_x - \omega_\xi & 0 & \omega_z + \omega_\zeta & -(\omega_y + \omega_\eta) \\ \omega_y - \omega_\eta & -(\omega_z + \omega_\zeta) & 0 & \omega_x + \omega_\xi \\ \omega_z - \omega_\zeta & \omega_y + \omega_\eta & -(\omega_x + \omega_\xi) & 0 \end{bmatrix}.$$

В результате решения этого дифференциального уравнения находят параметры Родрига-Гамильтона $\bar{\Lambda}^{gb} = [\lambda_0 \ \lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3]^T$.

Получив параметры Родрига-Гамильтона, находят направляющие косинусы C^{gb} в соответствии с формулами (2.17).

В остальном алгоритм аналогичен предыдущему. Отметим, что использование кинематических уравнений в параметрах Родрига-Гамильтона позволяет

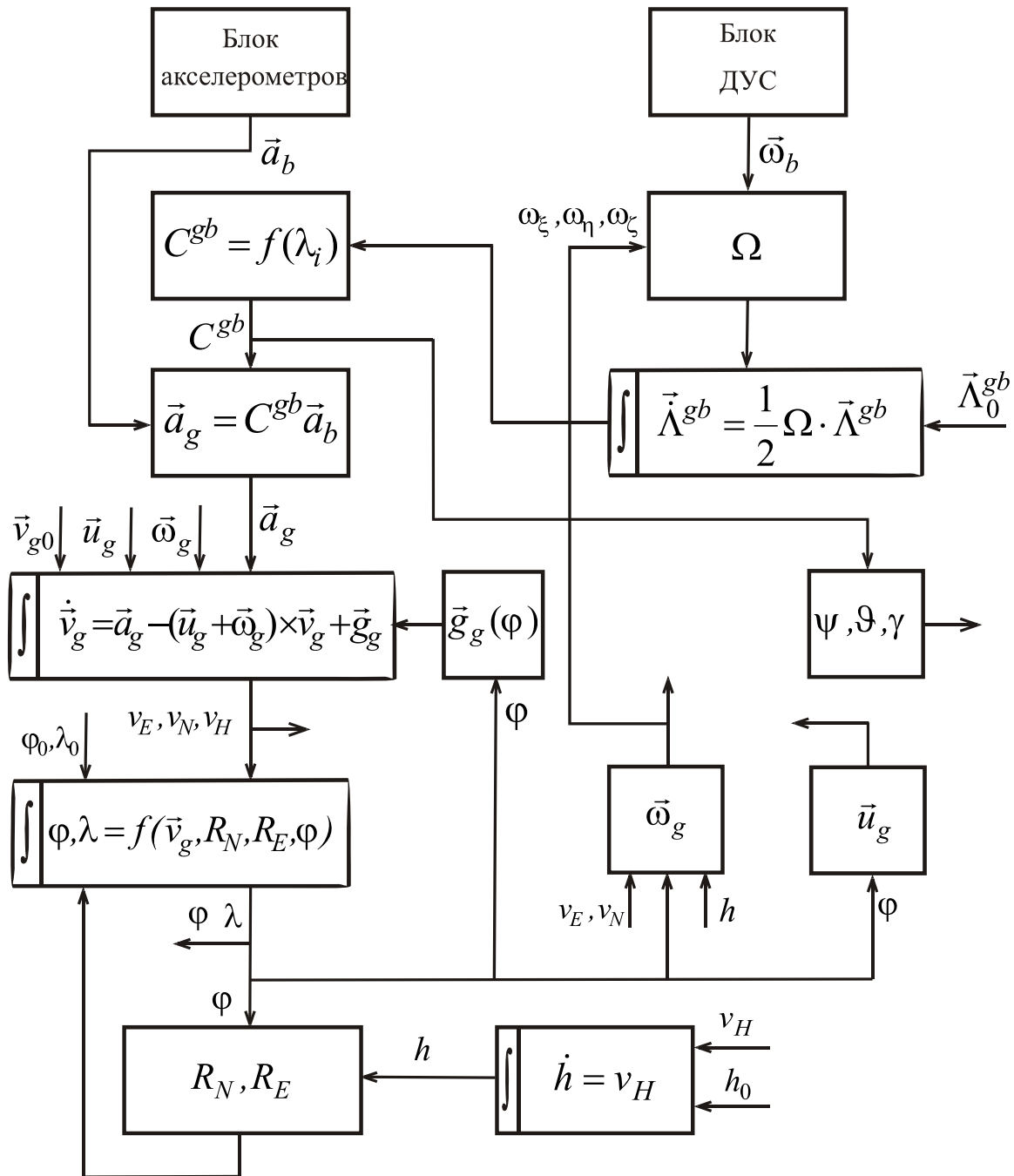


Рис.4.3. Структурная схема алгоритма с интегрированием уравнения в параметрах Родрига-Гамильтона в географическом сопровождающем базисе

уменьшить число дифференциальных уравнений, используемых в алгоритме, до 10. Приведем эти уравнения в скалярной форме:

$$\begin{cases} 2\dot{\lambda}_0 = -(\omega_{xc} - \omega_\xi)\lambda_1 - (\omega_{yc} - \omega_\eta)\lambda_2 - (\omega_{zc} - \omega_\zeta)\lambda_3, \\ 2\dot{\lambda}_1 = (\omega_{xc} - \omega_\xi)\lambda_0 + (\omega_{zc} + \omega_\zeta)\lambda_2 - (\omega_{yc} - \omega_\eta)\lambda_3, \\ 2\dot{\lambda}_2 = (\omega_{yc} - \omega_\eta)\lambda_0 - (\omega_{zc} + \omega_\zeta)\lambda_1 + (\omega_{xc} - \omega_\xi)\lambda_3, \\ 2\dot{\lambda}_3 = (\omega_{zc} - \omega_\zeta)\lambda_0 + (\omega_{yc} + \omega_\eta)\lambda_1 - (\omega_{xc} - \omega_\xi)\lambda_2 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} \dot{v}_E = a_\xi + (u \sin \varphi + \omega_\zeta) v_N - (2u \cos \varphi + \frac{v_E}{R_1 + h}) v_\zeta, \\ \dot{v}_N = a_\eta - (u \sin \varphi + \omega_\zeta) v_E - \frac{v_N \cdot v_\zeta}{R_1 + h}, \\ \dot{v}_\zeta = a_\zeta + \frac{v_N^2}{R_2 + h} + \frac{v_E^2}{R_1 + h} + 2uv_E \cos \varphi + g; \\ \dot{\phi} = \frac{v_N}{R_N}, \quad \dot{\lambda} = \frac{v_E}{R_E \cos \varphi}, \quad \dot{h} = v_\zeta. \end{cases}$$

4.4. Алгоритм с вектором ориентации

В данном алгоритме БИНС для определения ориентации вычисляется вектор ориентации $\vec{\phi} = [\phi_x \quad \phi_y \quad \phi_z]^T$ (см. п.2.4). Для этого интегрируются уравнения (2.22)

$$\frac{d\vec{\phi}}{dt} = \vec{\omega} - \frac{1}{2} \Omega \vec{\phi} + \frac{1}{\phi^2} \left(1 - \frac{\phi}{2} \operatorname{ctg} \frac{\phi}{2} \right) \Phi^2 \vec{\omega},$$

где $\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$; $\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$; $\Phi = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_z & \phi_y \\ \phi_z & 0 & -\phi_x \\ -\phi_y & \phi_x & 0 \end{bmatrix}$, или исполь-

зуются упрощенные уравнения (2.23), справедливые для достаточно малого шага интегрирования:

$$\frac{d\vec{\phi}}{dt} = \vec{\omega} - \frac{1}{2} \Omega \vec{\phi}.$$

Необходимую для последующих вычислений матрицу направляющих косинусов можно определить по точным формулам (2.25) или (2.26), или используя приведенную ниже численную процедуру.

Когда найдены компоненты вектора Эйлера $\phi_{i,x}, \phi_{i,y}, \phi_{i,z}$, на интервале интегрирования вычисляется матрица направляющих косинусов ΔC_i , описывающая поворот от исходной системы к связанной на этом интервале. Для этого используется соотношение (с учетом малого угла ϕ) [13]

$$\Delta C = e^\Phi = I + \Phi + \frac{1}{2} \Phi^2 + \frac{1}{6} \Phi^3 + \dots = I + \Phi \frac{1}{\phi} \sin \phi + \Phi^2 \frac{1}{\phi^2} (1 - \cos \phi), \quad (4.6)$$

где I – единичная матрица размера 3×3 .

Матрицу направляющих косинусов для i -го момента C_i определяют путем перемножения

$$C_i = C_{i-1} \Delta C_i. \quad (4.7)$$

Если входной информацией является абсолютная угловая скорость, измеряемая датчиками угловой скорости (вектор $\vec{\omega}$ и соответствующая ему матрица Ω), то вектор Эйлера покажет поворот относительно исходного инерциального базиса i , а определяемая матрица направляющих косинусов может быть обозначена $C \equiv C^{ib}$.

После определения матрицы направляющих косинусов C^{gb} дальнейшая логика алгоритма БИНС полностью аналогична описанному в п.4.2.

Запишем последовательно уравнения алгоритма БИНС с вектором ориентации:

$$\vec{\omega}^o = \vec{\omega} - (C^{gb})^T \vec{\omega}_g;$$

$$\begin{cases} \dot{\phi}_x = \omega_x^o - (-\omega_z^o \phi_y + \omega_y^o \phi_z) / 2; \\ \dot{\phi}_y = \omega_y^o - (\omega_z^o \phi_x - \omega_x^o \phi_z) / 2; \\ \dot{\phi}_z = \omega_z^o - (-\omega_y^o \phi_x + \omega_x^o \phi_y) / 2; \end{cases}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_z & \phi_y \\ \phi_z & 0 & -\phi_x \\ -\phi_y & \phi_x & 0 \end{bmatrix};$$

$$\Delta C_i^{gb} = I + \Phi \frac{1}{\phi} \sin \phi + \Phi^2 \frac{1}{\phi^2} (1 - \cos \phi);$$

$$C_i^{gb} = C_{i-1}^{gb} \cdot \Delta C_i^{gb};$$

$$\vec{a}_g = [a_\xi \quad a_\eta \quad a_\zeta]^T = C^{gb} \vec{a}_b;$$

$$\begin{cases} \dot{v}_E = a_\xi + (u \sin \varphi + \omega_\zeta) v_N - (2u \cos \varphi + \frac{v_E}{R_1 + h}) v_\zeta, \\ \dot{v}_N = a_\eta - (u \sin \varphi + \omega_\zeta) v_E - \frac{v_N \cdot v_\zeta}{R_1 + h}, \\ \dot{v}_\zeta = a_\zeta + \frac{v_N^2}{R_2 + h} + \frac{v_E^2}{R_1 + h} + 2uv_E \cos \varphi + g; \end{cases}$$

$$\dot{\phi} = \frac{v_N}{R_N}, \quad \dot{\lambda} = \frac{v_E}{R_E \cos \phi}, \quad \dot{h} = v_\zeta.$$

Отметим, что использование вектора ориентации, так же, как и кинематических уравнений в параметрах Родрига-Гамильтона, позволяет уменьшить число дифференциальных уравнений, используемых в алгоритме, до 8 – по сравнению с 12 при использовании уравнений Пуассона (см. п.4.2).

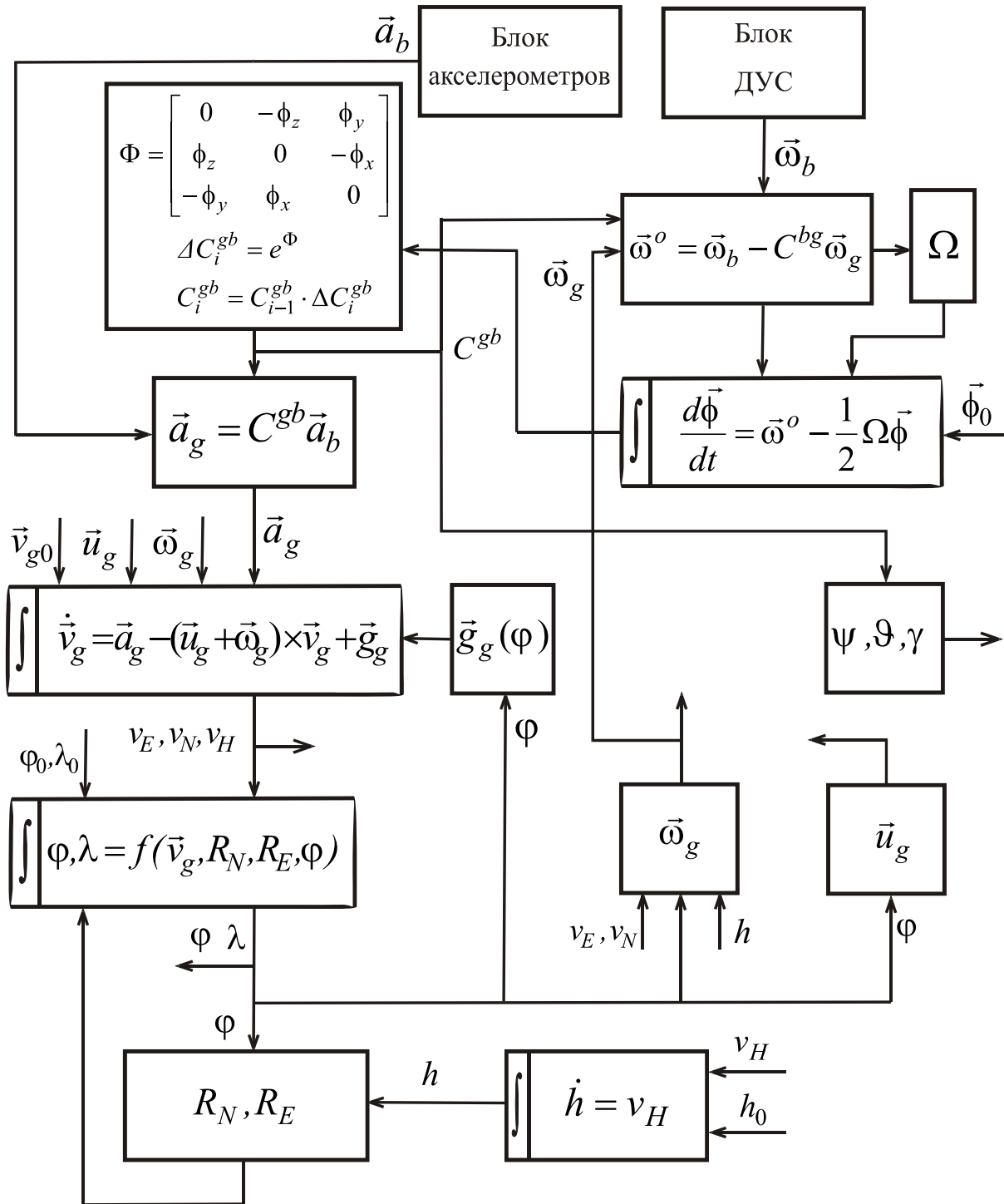


Рис.4.4. Структурная схема алгоритма с интегрированием вектора ориентации в географическом сопровождающем базисе

4.5. Методы и алгоритмы вычислений

Для реализации алгоритмов БИНС используют бортовые цифровые вычислительные машины (БЦВМ). Как известно, в БЦВМ информация о параметрах непрерывного процесса движения (угловой скорости, ускорении и др.) должна подаваться в дискретные моменты времени. Для интегрирования дифференциальных уравнений в БЦВМ используют различные численные методы. При этом разнообразное движение объекта, на котором установлена БИНС, может вносить особенности в результаты интегрирования. Можно сказать, что разработка численных алгоритмов – отдельное направление в проектировании БИНС. Оно отражено в многочисленной учебной и научной литературе. Для примера отметим [8,9,13,14,16]. В настоящем параграфе мы лишь отметим вопросы, которые необходимо рассматривать при проектировании системы.

Дискретизация сигнала измерителей

Выбор периода квантования или частоты обработки данных диктуется, как правило, возможностью восстановления с требуемой точностью по дискретной последовательности значений измеряемого непрерывного сигнала. Естественно, чем меньше шаг дискретизации $\Delta t \equiv h$, тем ближе дискретная последовательность соответствует непрерывному процессу. Однако уменьшение Δt ограничивается техническими возможностями аппаратуры, БЦВМ. Поэтому, для реализации в различных фрагментах алгоритма используют различные Δt .

Наименьший Δt_u (такт) первичной информации желательно иметь при съеме первичной информации, поскольку до ввода в основной алгоритм сигнал может предварительно обрабатываться, например, сглаживаться. В соответствии с теоремой Котельникова, частота дискретизации $f_u = 1/\Delta t_u$ должна, как минимум вдвое превышать максимальную частоту изменения f_{\max} входного сигнала. В настоящее время технические возможности позволяют реализовать $f_u < 3$ кГц [13]. Зачастую выходной сигнал с датчиков угловой скорости и акселерометров получают в виде интеграла от измеряемой величины. Это интегрирование выполняется, если на выходе измерителя стоит преобразователь напряжения или тока в частоту (ПНЧ). Количество импульсов сигнала на такте отсчета соответствует приращению измеряемой величины. Приращение угла поворота объекта $\theta_{i,k+1}$ на шаге $k+1$ относительно соответствующей оси и приращение "кажущейся" линейной скорости будут соответственно

$$\Delta \omega_{i,k+1} \equiv \theta_{i,k+1} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \omega_{i,k} dt; \quad \Delta v_{i,k+1} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{v}_{i,k} dt; \quad i = x, y, z.$$

При использовании ПНЧ интегрирование производится простейшим методом прямоугольников.

Если для оцифровки сигналов измерителя используется аналого-цифровой преобразователь (АЦП), для получения приращений могут быть использованы более сложные методы интегрирования, например, метод парабол (формула Симпсона)

$$\theta_{k+1} = \int_{t_k}^{t_{k+2}} \omega_k dt = \frac{\Delta t_u}{3} (\omega_{k-1} + 4\omega_k + \omega_{2k+1});$$

Большую величину должна иметь частота решения так называемой «быстрой» задачи. Такой задачей является решение уравнений ориентации. Для многих объектов в настоящее время частота решения «быстрой» задачи составляет 100...300 Гц, следовательно, шаг дискретизации составляет 0,01...0,003 с.

Наименьшую величину имеет частота решения "медленных" задач. Это может быть задача навигации. Обычно она не превышает 10 Гц, т.е. шаг дискретизации имеет порядок $\Delta t_m > 0,1$ с.

Для конкретной системы все эти такты выбирают, исходя из условий работы и требований технического задания к системе.

На разработку и оптимизацию алгоритмов существенные ограничения накладывает вид выходной информации датчиков: квантование информации по уровню может привести к ошибке, существенно превышающей как остальные ошибки обработки информации, так и инструментальные погрешности измерительных приборов.

Интегрирование дифференциальных уравнений

При интегрировании можно использовать различные методы. В первую очередь, это **одношаговые методы**. Они позволяют определить следующую точку интегральной кривой по информации только об одной предыдущей точке. Одношаговые методы называют методами Рунге-Кутты.

Ниже приведем таблицу, представляющую суть этих методов (табл.4.1.).

Обобщенная формула получения последующего значения переменной y_{k+1} на шаге $k+1$ по известному значению ее y_k на предыдущем шаге k для методов Рунге-Кутты имеет вид

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot F(t_k, y_k, h). \quad (4.8)$$

Зависимость $F(t_k, y_k, h)$ может иметь сложный вид. Именно ее видом отличаются модификации методов Рунге-Кутты (см. табл. 4.1). В таблице $Z(t_k, y_k) \equiv y'_k$ - производная, соответствующая скорости изменения интегрируемой функции. Порядок метода говорит о его точности, определяемой членами порядка h^p , где степень p и есть порядок метода [8].

Таблица 4.1. Методы Рунге-Кутты

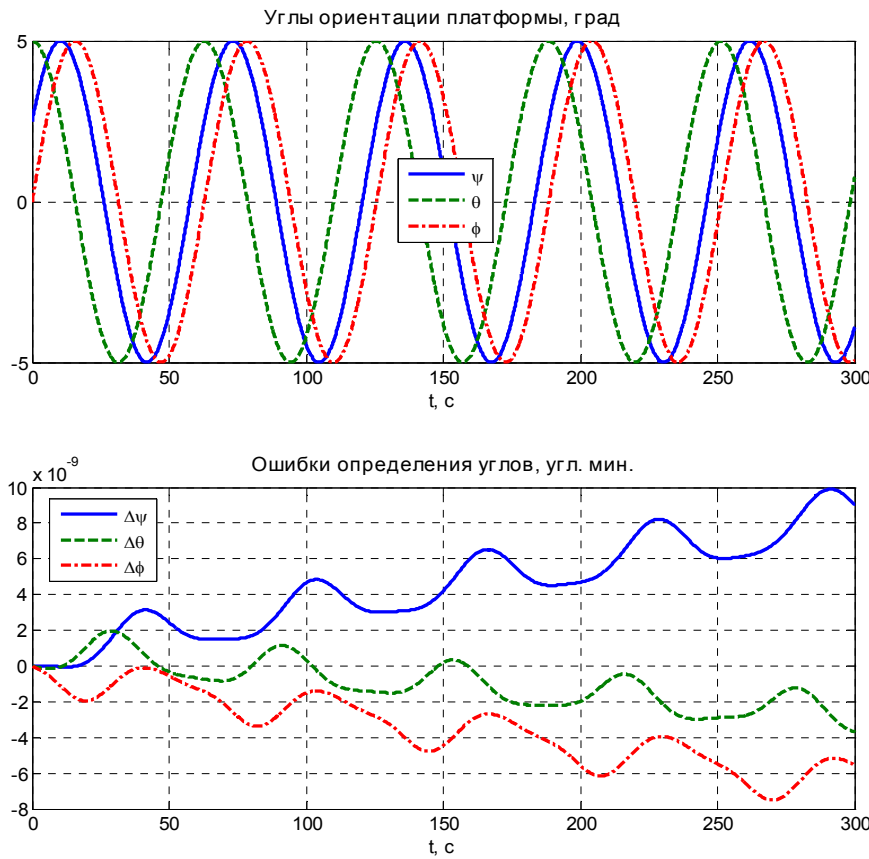
Порядок метода	Формула метода	Вспомогательные величины	Название метода
1	$F=k_1$	$k_1=Z(t_k; y_k)$	Эйлера
2	$F=(k_1+k_2)/2$	$k_1=Z(t_k; y_k);$ $k_2=Z(t_k+h; y_k+hk_1)$	модифицированный Эйлера
2	$F=Z(t_k+h/2; y_k+hk_1/2)$	$k_1=Z(t_k; y_k)$	
3	$F=(k_1+4k_2+k_3)/6$	$k_1=Z(t_k; y_k);$ $k_2=Z(t_k+h/2; y_k+hk_1/2);$ $k_3=Z(t_k+h; y_k+h(2k_2-k_1))$	Хойне
3	$F=(k_1+3k_3)/4$	$k_1=Z(t_k; y_k);$ $k_2=Z(t_k+h/3; y_k+hk_1/3);$ $k_3=Z(t_k+2h/3; y_k+2hk_2/3)$	
4	$F=(k_1+2k_2+2k_3+k_4)/6$	$k_1=Z(t_k; y_k);$ $k_2=Z(t_k+h/2; y_k+hk_1/2);$ $k_3=Z(t_k+h/2; y_k+hk_2/2);$ $k_4=Z(t_k+h; y_k+hk_3)$	Рунге-Кутта
4	$F=(k_1+3k_2+3k_3+k_4)/8$	$k_1=Z(t_k; y_k);$ $k_2=Z(t_k+h/3; y_k+hk_1/3);$ $k_3=Z(t_k+2h/3; y_k+h(k_2-k_1/3));$ $k_4=Z(t_k+h; y_k+h(k_1-k_2+k_3))$	

Достаточно эффективны **многошаговые методы**. Многошаговые методы называют еще методами прогноза-коррекции. Это обусловлено тем, что расчеты по этим методам построены на применении двух последовательных этапов. На первом на основе информации о предыдущих точках прогнозируется значение искомой переменной состояния в следующей точке. На втором осуществляется уточнение ("корректировка") найденного значения по специальной неявной формуле [8]. В таблице 4.2 для примера приведены формулы методов второго и третьего порядка. Существуют и методы четвертого порядка.

Таблица 4.2. Формулы методов прогноза-коррекции

Порядок метода	Формула прогноза	Формула коррекции
2	$y_{k+1} = y_{k-1} + 2h \cdot Z(t_k, y_k)$	$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [Z(t_{k+1}, y_{k+1}^*) + Z(t_k, y_k)]$
3	$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{12} [23 \cdot Z(t_k, y_k) - 16 \cdot Z(t_{k-1}, y_{k-1}) + 5 \cdot Z(t_{k-2}, y_{k-2})]$	$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{12} [5 \cdot Z(t_{k+1}, y_{k+1}^*) - 8 \cdot Z(t_k, y_k) - Z(t_{k-1}, y_{k-1})]$

(y_{k+1}^* получают при прогнозе на первых шагах)



Канал ориентации

Уравнения Пуассона

Угловое движение по закону:

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \psi_0 + \psi'_0 t + \psi_m \sin(\omega_\psi t + \varepsilon_\psi) \\ \theta(t) &= \theta_0 + \theta'_0 t + \theta_m \sin(\omega_\theta t + \varepsilon_\theta) \\ \phi(t) &= \phi_0 + \phi'_0 t + \phi_m \sin(\omega_\phi t + \varepsilon_\phi) \end{aligned}$$

Параметры углового движения :

$$\psi_0 = 0^0; \theta_0 = 0^0; \phi_0 = 0^0;$$

$$\psi'_0 = 0^0/c; \theta'_0 = 0^0/c; \phi'_0 = 0^0/c;$$

$$\psi_m = 5^0; \theta_m = 5^0; \phi_m = 5^0;$$

$$\omega_\psi = 0.1 c^{-1}; \omega_\theta = 0.1 c^{-1}; \omega_\phi = 0.1 c^{-1};$$

$$\varepsilon_\psi = 30^0; \varepsilon_\theta = 90^0; \varepsilon_\phi = 0^0;$$

Ошибки ДУС (град/час);

$$\Delta\omega_x = 0; \Delta\omega_y = 0; \Delta\omega_z = 0;$$

$$\text{intomx} = 0; \text{intomy} = 0; \text{intomz} = 0;$$

Ошибки акселерометров (m/c^2):

$$\Delta a_x = 0; \Delta a_y = 0; \Delta a_z = 0;$$

$$\text{intax} = 0; \text{intay} = 0; \text{intaz} = 0;$$

Ошибки начальной выставки:

$$\delta\psi_0 = 0^0; \delta\theta_0 = 0^0; \delta\phi_0 = 0^0;$$

Порядок метода интегрирования:

ode4 (Runge-Kutta)

Шаг интегрирования [c], hi = 0.1

Программа BINS-upr;15:32: 07-Jan-2011

Выполнил: Васильковский И. В.

Рис.4.5. Ошибки численного интегрирования

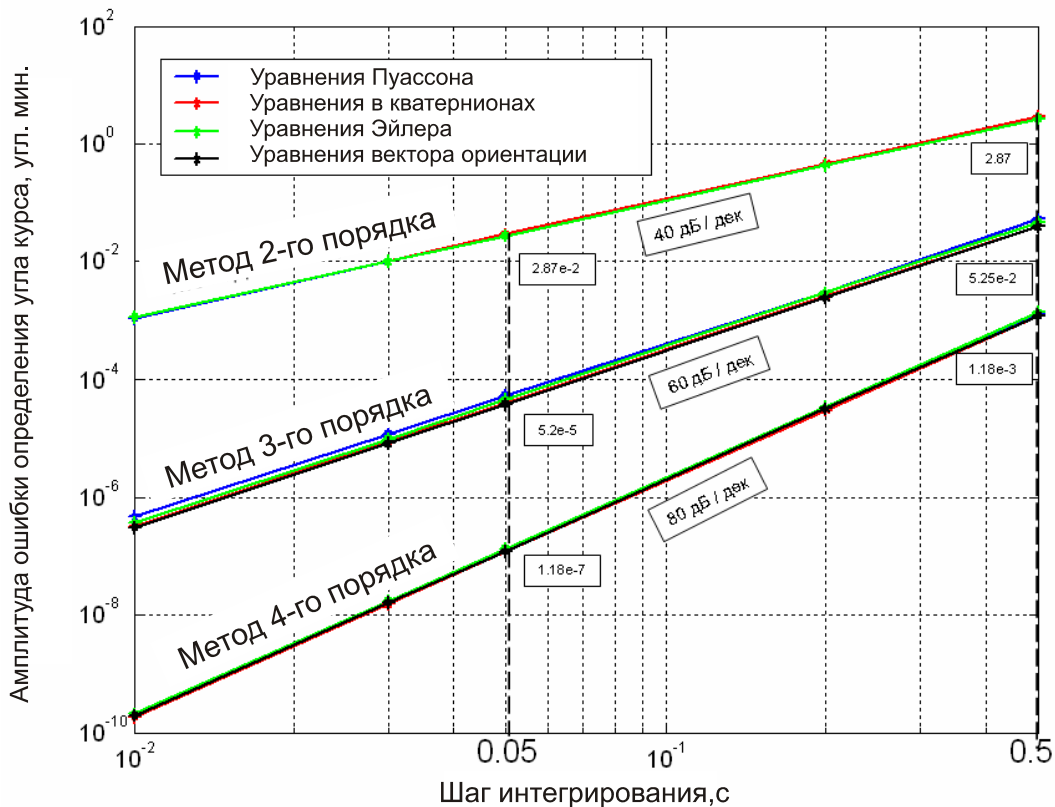


Рис.4.6. Зависимость ошибки определения угла курса от шага и метода интегрирования

Погрешности численного интегрирования уравнений зависят от используемых уравнений ориентации, от выбранного метода интегрирования, от шага интегрирования. На рис.4.5 приведены графики изменения погрешности интегрирования для 4 типов кинематических уравнений в зависимости от шага (такта) интегрирования [17]. Очевидно, что с уменьшением шага погрешности уменьшаются. Но уменьшение шага ограничено возможностями аппаратуры (возможностями аналого-цифрового преобразователя, возможностями БЦВМ и др.).

Меньшие погрешности имеют место для уравнений в кватернионах и вектора ориентации. Из рис.4.6 можно увидеть, что повышение порядка метода интегрирования дает повышение точности. Оценка времени вычислений при моделировании показывает (рис.4.7), что наибольшее время требуется для решения уравнений с вектором ориентации, наименьшее – для уравнений Эйлера и Пуассона. Следовательно, последние позволяют использовать наименьший шаг интегрирования. Однако по совокупности оценок, представляется, что наибольший интерес для реализации представляют уравнения в кватернионах или в параметрах вектора ориентации. Очевидно, что окончательное решение можно принимать после моделирования для конкретных условий, конкретной задачи.

Существуют тестовые движения, при которых оцениваются различные алгоритмы численного интегрирования. Это могут быть конические движения или другие движения. Наиболее явно "конические" ошибки проявляются тогда, когда имеют место гармонические угловые колебания объекта по двум взаимно перпендикулярным осям с одной и той же частотой и с фазой, сдвинутой на $\pi/2$. В этом случае верхняя граница частотного диапазона измерения должна

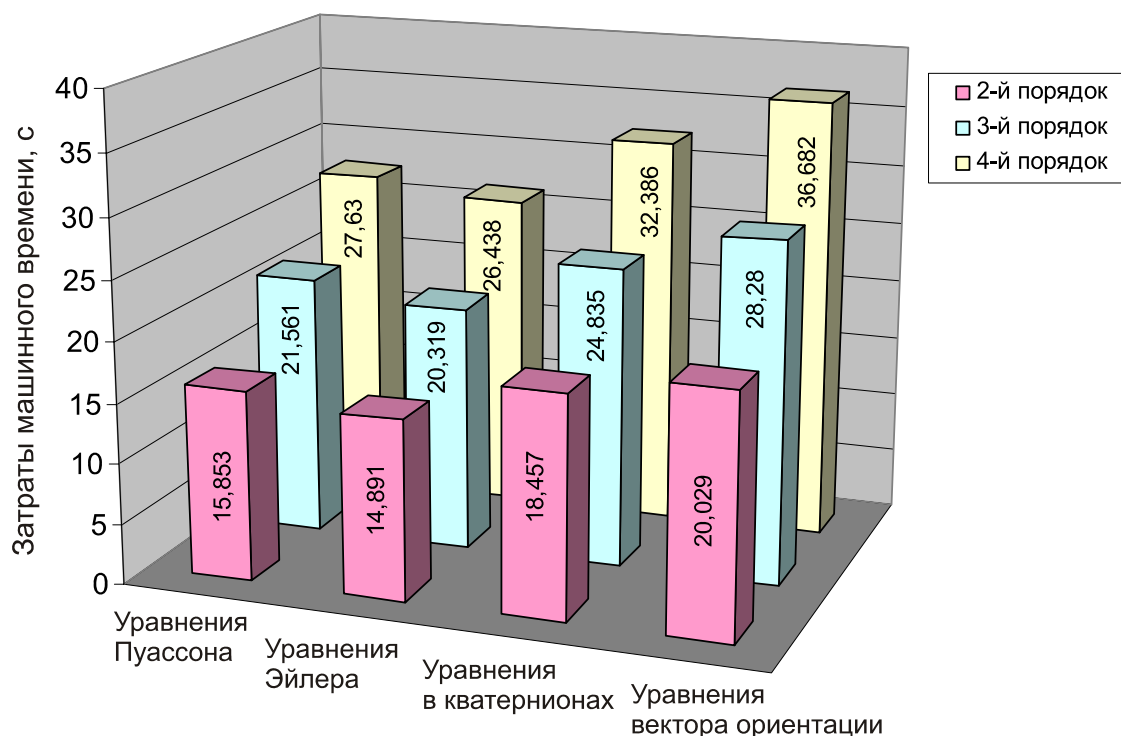


Рис.4.7. Диаграмма затрат времени

быть значительно выше (в 5-10 раз), чем частота колебаний [22].

Для уравнений ориентации разработаны специальные алгоритмы численного решения уравнений, использующее до 4-х шагов обновления информации и имеющие 6-й порядок точности [9]. Пример алгоритмов вычислений в БИНС можно найти в [13].

4.6. Избыточность измерений

Обычно измерительный блок содержит 3 одноосных акселерометра и 3 датчика угловой скорости. Некоторые измерители устроены так, что они имеют 2 измерительных оси, расположенные взаимноперпендикулярно. Это могут быть двухосные акселерометры или динамически настраиваемые гироскопы, твердотельные волновые гироскопы. В этом случае возникает вопрос, как с пользой использовать возникающую избыточность информации. А иногда специально с целью повышения точности и надежности системы ее строят избыточной, например, ставят вместо трех 6 и более измерителей.

Система, содержащая более 3 измерительных осей с произвольным, но известным расположением, называется **функционально-избыточной**.

Избыточность характеризуется разностью l между n установленных измерителей и числом m минимально необходимых в неизбыточном базисе: $l = m - n$. Число неизбыточных базисов соответствует количеству сочетаний

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \quad (4.9)$$

Например, из 6 измерителей можно сформировать 20 неизбыточных трехмерных базисов:

$$C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot (6-3) \cdot 2} = 20.$$

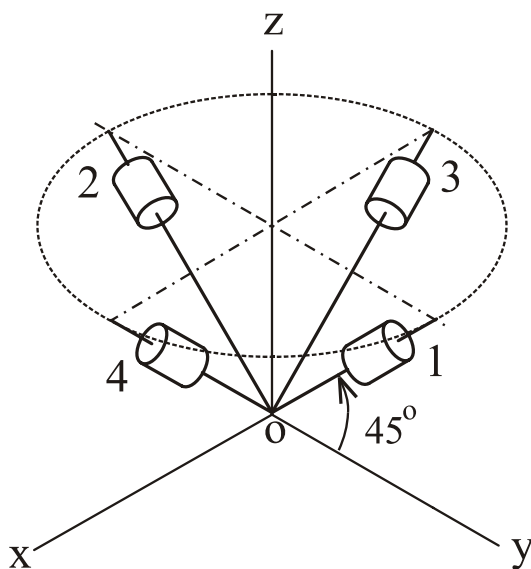


Рис.4.8. Измерительный «избыточный» блок

Рассмотрим простейший пример с минимальной избыточностью, когда имеются 4 измерительных оси.

На рис. 4.8 покажем расположение 2-х измерителей с взаимноперпендикулярными осями. Оси измерителей подняты на угол 45 градусов над плоскостью Oxy . Если в качестве измерителей приняты акселерометры, то выходной сигнал каждого из акселерометров можно записать в виде

$$a_i = a_x \cos(x_i) + a_y \cos(y_i) + a_z \cos(z_i), \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

где a_i - выходной сигнал (кажущееся ускорение) i -го акселерометра, a_x, a_y, a_z - проекции

вектора кажущегося ускорения на оси объекта $Oxyz$. При указанном расположении осей чувствительности акселерометров с углом наклона 45°

$$\begin{aligned} a_1 &= a_y \cos 45^\circ + a_z \cos 45^\circ, \\ a_2 &= -a_y \cos 45^\circ + a_z \cos 45^\circ, \\ a_3 &= -a_x \cos 45^\circ + a_z \cos 45^\circ, \\ a_4 &= a_x \cos 45^\circ + a_z \cos 45^\circ. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Если обозначить $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z]^T$ - измеряемый вектор кажущегося ускорения, $\vec{s} = [a_1, a_2, a_3, a_4]^T$ - вектор выходных сигналов, то соотношение между ними можно записать в виде

$$\vec{s} = \mathbf{R} \vec{a} + \vec{e} \quad (4.11)$$

4×1 $4 \times 3 \times 3 \times 1$ 4×1

где \mathbf{R} - матрица направляющих косинусов положения измерительных осей (ее иногда называют юстировочной [12]), \vec{e} - вектор ошибок измерений. Матрица \mathbf{R} из (4.10) получит вид

$$\mathbf{R} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вектор кажущегося ускорения объекта можно получить методом наименьших квадратов

$$\hat{\vec{a}} = (\mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R}^T \vec{s}.$$

Очевидно, что точность определения $\hat{\vec{a}}$ при этом повышается за счет сглаживания погрешностей \vec{e} .

При наличии избыточности можно также **контролировать отказ** какого-либо измерителя.

Поскольку из (4.10) следует

$$a_1 + a_2 = \sqrt{2}a_z, \quad a_3 + a_4 = \sqrt{2}a_z,$$

различие сумм (с заданным допуском) говорит о наличии отказа одного из акселерометров. При определении отказавшего измерителя можно исключить его из работы и перейти к работе с тремя исправными измерителями¹.

¹ Методика определения отказов изложена в [21, 23]

Из системы с 4-мя измерителями можно получить, в соответствии с (4.9), 4 трехмерных измерительных базиса:

$$\begin{aligned}\bar{s}_1 &= [a_1, a_2, a_3]^T, \\ \bar{s}_2 &= [a_2, a_3, a_4]^T, \\ \bar{s}_3 &= [a_1, a_3, a_4]^T, \\ \bar{s}_4 &= [a_1, a_2, a_4]^T.\end{aligned}$$

Матрицы направляющих косинусов в этом случае получают вид

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{R}_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{R}_3 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{R}_4 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Оценки вектора кажущегося ускорения можно записать в 4 вариантах:

$$\begin{aligned}\bar{a}_1 &= (\mathbf{R}_1^T \mathbf{R}_1)^{-1} \mathbf{R}_1^T [a_1, a_2, a_3]^T, \\ \bar{a}_2 &= (\mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_2)^{-1} \mathbf{R}_2^T [a_2, a_3, a_4]^T, \\ \bar{a}_3 &= (\mathbf{R}_3^T \mathbf{R}_3)^{-1} \mathbf{R}_3^T [a_1, a_3, a_4]^T, \\ \bar{a}_4 &= (\mathbf{R}_4^T \mathbf{R}_4)^{-1} \mathbf{R}_4^T [a_1, a_2, a_4]^T.\end{aligned}\tag{4.12}$$

Структура избыточного блока может быть разнообразной. Блоки могут отличаться количеством измерителей, их расположением относительно осей связанного базиса. Как показано в [23], предпочтительной является конфигурация, когда измерители расположены так, что их оси чувствительности образуют конус с углом при вершине $\alpha = \arccos a(1/\sqrt{3}) = 54,7^\circ$ (рис. 4.9). В этом случае углы между измерительной осью и осями связанного базиса одинаковы, откуда следует соотношение

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

которое и приводит к указанной формуле. Таким образом, 3 измерителя на таком конусе образуют декартову систему координат.

Но на конфигурацию влияет не только количество измерителей и угол при вершине конуса α , а также поворот системы относительно связанного ба-

зиса вокруг оси конуса на угол β (рис. 4.9). В [23] показано, что наименьшие случайные погрешности при равноточных измерителях имеют блоки при $n=4$ с $\beta = 45^\circ$, при $n=5$ с $\beta = 27^\circ$, при $n=6$ с $\beta = 15^\circ$.

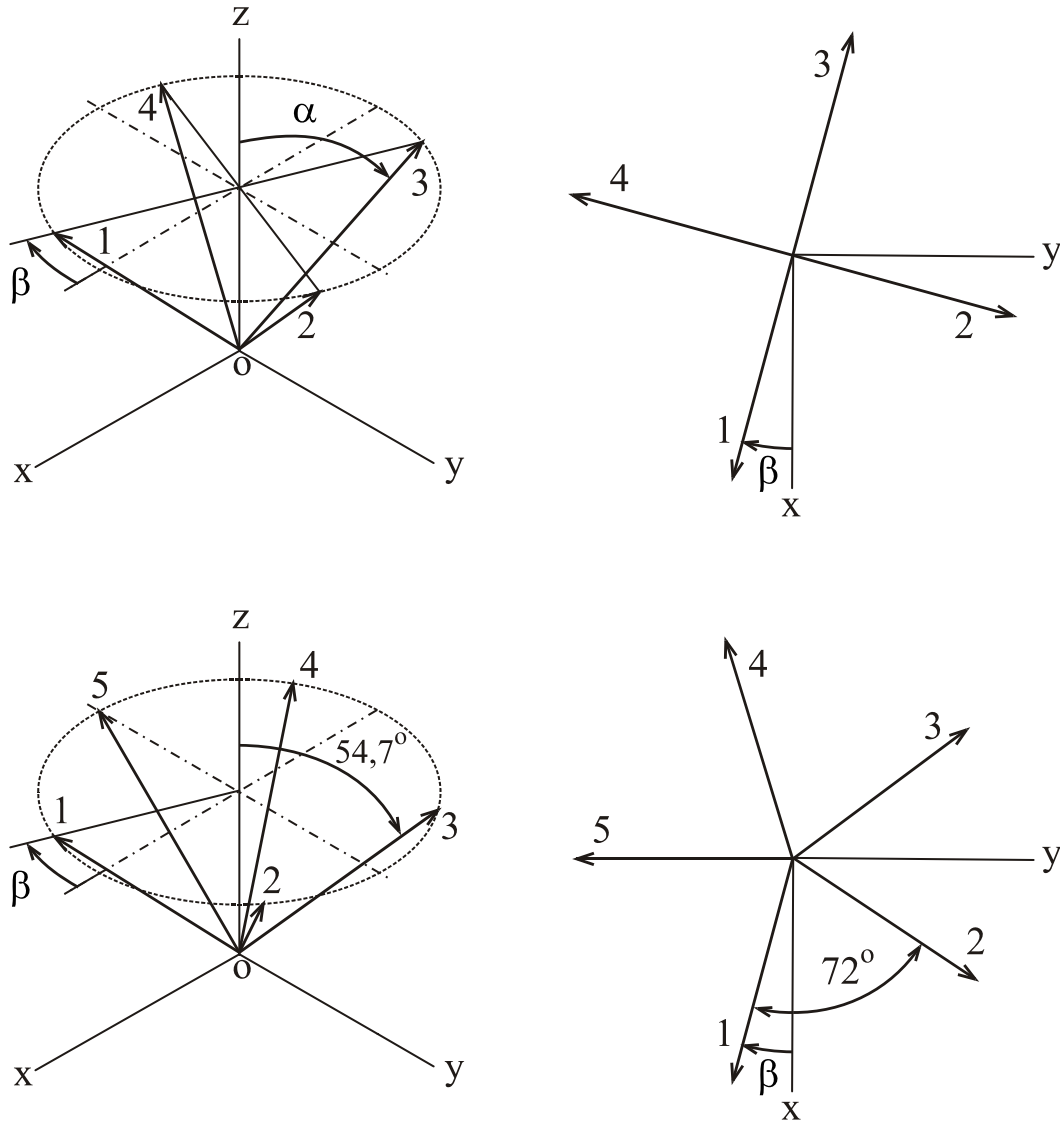


Рис.4.9. Разновидности "избыточных" блоков

Для блока с $n=5$ юстировочная матрица имеет вид

$$R = \begin{bmatrix} \cos \beta \sin \alpha & \sin \beta \sin \alpha & \cos \alpha \\ \cos(\beta + 72^\circ) \sin \alpha & \sin(\beta + 72^\circ) \sin \alpha & \cos \alpha \\ \cos(\beta + 144^\circ) \sin \alpha & \sin(\beta + 144^\circ) \sin \alpha & \cos \alpha \\ \cos(\beta + 216^\circ) \sin \alpha & \sin(\beta + 216^\circ) \sin \alpha & \cos \alpha \\ \cos(\beta + 288^\circ) \sin \alpha & \sin(\beta + 288^\circ) \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Блоки с 5 измерителями и более позволяют не только выявить наличие отказа, но и определить, какой измеритель отказал. При $n=5$ выявление отказавшего измерителя производится путем сравнения информации от 10 (в соответствии с (4.9)) избыточных базисов.

5. Уравнения идеальной и реальной работы

Алгоритм работы БИНС описывают системой уравнений, которые называют уравнениями идеальной работы. В этих уравнениях отсутствуют какие-либо факторы, учитывающие отклонения работы БИНС от идеальной. Как показано в главе 4, существует достаточно много алгоритмов БИНС. Каждому из них соответствуют свои уравнения идеальной работы. Рассмотрим примеры таких уравнений.

5.1. Уравнения идеальной работы БИНС в инерциальной системе координат

Эти уравнения можно заимствовать из гл.4. Уравнение ориентации Пуассона для определения матрицы направляющих косинусов в матричном виде можем записать из (2.12)

$$\dot{C}^{ib} = C^{ib} \Omega_b^{ib}. \quad (5.1)$$

Для организации вычислений могут быть использованы эти уравнения в скалярной форме:

$$\begin{cases} \dot{c}_{11} = \omega_{zc} c_{21} - \omega_{yc} c_{31}, \\ \dot{c}_{21} = \omega_{xc} c_{31} - \omega_{zc} c_{11}, \\ \dot{c}_{31} = \omega_{yc} c_{11} - \omega_{xc} c_{21}; \end{cases} \begin{cases} \dot{c}_{12} = \omega_{zc} c_{22} - \omega_{yc} c_{32}, \\ \dot{c}_{22} = \omega_{xc} c_{32} - \omega_{zc} c_{12}, \\ \dot{c}_{32} = \omega_{yc} c_{12} - \omega_{xc} c_{22}; \end{cases} \begin{cases} \dot{c}_{13} = \omega_{zc} c_{23} - \omega_{yc} c_{33}, \\ \dot{c}_{23} = \omega_{xc} c_{33} - \omega_{zc} c_{13}, \\ \dot{c}_{33} = \omega_{yc} c_{13} - \omega_{xc} c_{23}. \end{cases}$$

Очевидно, что для выполнения вычислений необходимо знать начальные значения направляющих косинусов.

Полученные значения c_{ij} используют для преобразования кажущихся ускорений, измеренных акселерометрами в связанной с объектом системе координат \mathbf{b} , в проекции ускорений в инерциальной системе координат \mathbf{i} :

$$\vec{a}_i = C^{ib} \vec{a}_b.$$

В скалярной форме

$$\begin{aligned} a_X &= c_{11} a_{xc} + c_{12} a_{yc} + c_{13} a_{zc}, \\ a_Y &= c_{21} a_{xc} + c_{22} a_{yc} + c_{23} a_{zc}, \\ a_Z &= c_{31} a_{xc} + c_{32} a_{yc} + c_{33} a_{zc}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Для получения составляющих абсолютного ускорения необходимо в соответствии с основным уравнением акселерометра учесть гравитационное ускорение,

которое можно рассчитать по формулам (4.2a)

$$g'_{X'} = -\frac{g'X}{r} \left(1 - 3\mu \frac{Z^2}{r^2}\right); \quad g'_{Y'} = -\frac{g'Y}{r} \left(1 - 3\mu \frac{Z^2}{r^2}\right); \quad g'_{Z'} = -\frac{g'Z}{r} \left(1 + 3\mu \frac{(X^2 + Y^2)}{r^2}\right). \quad (5.3)$$

В результате $\vec{V}_i = \vec{a}_i + \vec{g}'_i$, а в скалярной форме

$$\dot{V}_X = a_X + g'_{X'}, \quad \dot{V}_Y = a_Y + g'_{Y'}, \quad \dot{V}_Z = a_Z + g'_{Z'}.$$

Интегрирование абсолютных ускорений дает инерциальные координаты:

$$X = \int_0^t \dot{V}_X dt + V_{X0}, \quad Y = \int_0^t \dot{V}_Y dt + V_{Y0}, \quad Z = \int_0^t \dot{V}_Z dt + V_{Z0}.$$

Таким образом, задача навигации в инерциальной системе координат решена.

Перейдем к определению параметров в географическом базисе.

От инерциальных координат перейдем к географическим

$$\varphi = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, \quad \Lambda = \arctg \frac{Y}{X}, \quad \lambda = \Lambda - ut.$$

Для получения относительной скорости, а также углов курса, крена и тангажа составим матрицу

C^{gi}	X	Y	Z
ξ	$-\sin \Lambda$	$\cos \Lambda$	0
η	$\cos \Lambda \sin \varphi$	$\sin \Lambda \sin \varphi$	$\cos \varphi$
ζ	$\cos \Lambda \cos \varphi$	$\sin \Lambda \cos \varphi$	$\sin \varphi$

Затем выполним преобразование

$$C^{gb} = C^{gi} C^{ib}.$$

В результате получим значения элементов матрицы

C^{gb}	x_c	y_c	z_c
ξ	$c_{11} = \cos \gamma \cos \psi +$ $+ \sin \gamma \sin \psi \sin \mathcal{G};$	$c_{12} = \cos \mathcal{G} \sin \psi$	$c_{13} = \cos \psi \sin \gamma -$ $-\sin \psi \cos \gamma \sin \mathcal{G};$
η	$c_{21} = -\cos \gamma \sin \psi +$ $+ \sin \gamma \cos \psi \sin \mathcal{G};$	$c_{22} = \cos \mathcal{G} \cos \psi;$	$c_{23} = -\sin \psi \sin \gamma -$ $-\cos \gamma \cos \psi \sin \mathcal{G};$
ζ	$c_{31} = -\cos \mathcal{G} \sin \gamma;$	$c_{32} = \sin \mathcal{G};$	$c_{33} = \cos \mathcal{G} \cos \gamma.$

(5.4)

Используя элементы этой матрицы, получим углы ориентации объекта

$$\psi = \arctg\left(\frac{c_{12}^{gb}}{c_{22}^{gb}}\right), \quad \gamma = -\arctg\left(\frac{c_{31}^{gb}}{c_{33}^{gb}}\right), \quad \vartheta = \arctg\left(\frac{c_{32}^{gb}}{\sqrt{1 - (c_{32}^{gb})^2}}\right),$$

и составляющие абсолютной линейной скорости ($\vec{V}_g = C^{gi}\vec{V}_i$):

$$\begin{aligned} V_\xi &= -V_X \sin \Lambda + V_Y \cos \Lambda, \\ V_\eta &= V_X \cos \Lambda \sin \varphi + V_Y \sin \Lambda \sin \varphi + V_Z \cos \varphi, \\ V_\zeta &= V_X \cos \Lambda \cos \varphi + V_Y \sin \Lambda \cos \varphi + V_Z \sin \varphi. \end{aligned}$$

Составляющие относительной скорости

$$v_E = V_\xi - uR_E \cos \varphi, \quad v_N \equiv V_\eta, \quad v_H \equiv V_\eta.$$

5.2. Уравнения реальной работы БИНС в инерциальной системе координат

Уравнения реальной работы учитывают те факторы, которые изменяют идеальную работу. Вид уравнений, естественно, зависит от того, насколько детально учитывают эти факторы (возмущения).

Для примера рассмотрим уравнения решения задачи навигации в инерциальной системе координат. Возмущающими факторами пусть будут эквивалентный уход гироскопов $\Delta\omega$, эквивалентная ошибка акселерометров Δa и погрешности начальной выставки в виде ошибок начальных значений направляющих косинусов Δc_{ij0} .

Реальные значения параметров будем обозначать знаком \sim . Тогда реальное уравнение Пуассона

$$\tilde{C}^{ib} = \tilde{C}^{ib} \tilde{\Omega}_b^{ib}. \quad (5.5)$$

Скалярные реальные уравнения Пуассона получают вид

$$\begin{cases} \dot{\tilde{c}}_{11} = \tilde{\omega}_{zc} \tilde{c}_{21} - \tilde{\omega}_{yc} \tilde{c}_{31} \\ \dot{\tilde{c}}_{21} = \tilde{\omega}_{xc} \tilde{c}_{31} - \tilde{\omega}_{zc} \tilde{c}_{11} \\ \dot{\tilde{c}}_{31} = \tilde{\omega}_{yc} \tilde{c}_{11} - \tilde{\omega}_{xc} \tilde{c}_{21} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\tilde{c}}_{12} = \tilde{\omega}_{zc} \tilde{c}_{22} - \tilde{\omega}_{yc} \tilde{c}_{32} \\ \dot{\tilde{c}}_{22} = \tilde{\omega}_{xc} \tilde{c}_{32} - \tilde{\omega}_{zc} \tilde{c}_{12} \\ \dot{\tilde{c}}_{32} = \tilde{\omega}_{yc} \tilde{c}_{12} - \tilde{\omega}_{xc} \tilde{c}_{22} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\tilde{c}}_{13} = \tilde{\omega}_{zc} \tilde{c}_{23} - \tilde{\omega}_{yc} \tilde{c}_{33} \\ \dot{\tilde{c}}_{23} = \tilde{\omega}_{xc} \tilde{c}_{33} - \tilde{\omega}_{zc} \tilde{c}_{13} \\ \dot{\tilde{c}}_{33} = \tilde{\omega}_{yc} \tilde{c}_{13} - \tilde{\omega}_{xc} \tilde{c}_{23} \end{cases}$$

или в развернутой форме

$$\begin{cases} \tilde{c}_{11} = \dot{c}_{11} + \Delta\dot{c}_{11} = (\omega_{zc} + \Delta\omega_{zc})(c_{21} + \Delta c_{21}) - (\omega_{yc} + \Delta\omega_{yc})(c_{31} + \Delta c_{31}), \\ \tilde{c}_{21} = \dot{c}_{21} + \Delta\dot{c}_{21} = (\omega_{xc} + \Delta\omega_{xc})(c_{31} + \Delta c_{31}) - (\omega_{zc} + \Delta\omega_{zc})(c_{11} + \Delta c_{11}), \\ \tilde{c}_{31} = \dot{c}_{31} + \Delta\dot{c}_{31} = (\omega_{yc} + \Delta\omega_{yc})(c_{11} + \Delta c_{11}) - (\omega_{xc} + \Delta\omega_{xc})(c_{21} + \Delta c_{21}); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{c}_{12} = \dot{c}_{12} + \Delta\dot{c}_{12} = (\omega_{zc} + \Delta\omega_{zc})(c_{22} + \Delta c_{22}) - (\omega_{yc} + \Delta\omega_{yc})(c_{32} + \Delta c_{32}), \\ \tilde{c}_{22} = \dot{c}_{22} + \Delta\dot{c}_{22} = (\omega_{xc} + \Delta\omega_{xc})(c_{32} + \Delta c_{32}) - (\omega_{zc} + \Delta\omega_{zc})(c_{12} + \Delta c_{12}), \\ \tilde{c}_{32} = \dot{c}_{32} + \Delta\dot{c}_{32} = (\omega_{yc} + \Delta\omega_{yc})(c_{12} + \Delta c_{12}) - (\omega_{xc} + \Delta\omega_{xc})(c_{22} + \Delta c_{22}); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{c}_{13} = \dot{c}_{13} + \Delta\dot{c}_{13} = (\omega_{zc} + \Delta\omega_{zc})(c_{23} + \Delta c_{23}) - (\omega_{yc} + \Delta\omega_{yc})(c_{33} + \Delta c_{33}), \\ \tilde{c}_{23} = \dot{c}_{23} + \Delta\dot{c}_{23} = (\omega_{xc} + \Delta\omega_{xc})(c_{33} + \Delta c_{33}) - (\omega_{zc} + \Delta\omega_{zc})(c_{13} + \Delta c_{13}), \\ \tilde{c}_{33} = \dot{c}_{33} + \Delta\dot{c}_{33} = (\omega_{yc} + \Delta\omega_{yc})(c_{13} + \Delta c_{13}) - (\omega_{xc} + \Delta\omega_{xc})(c_{23} + \Delta c_{23}). \end{cases}$$

При решении таких уравнений начальными значениями будут

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{110} &= c_{110} + \Delta c_{110}, & \tilde{c}_{210} &= c_{210} + \Delta c_{210}, & \tilde{c}_{310} &= c_{310} + \Delta c_{310}, \\ \tilde{c}_{120} &= c_{120} + \Delta c_{120}, & \tilde{c}_{220} &= c_{220} + \Delta c_{220}, & \tilde{c}_{320} &= c_{320} + \Delta c_{320}, \\ \tilde{c}_{130} &= c_{130} + \Delta c_{130}, & \tilde{c}_{230} &= c_{230} + \Delta c_{230}, & \tilde{c}_{330} &= c_{330} + \Delta c_{330}. \end{aligned}$$

Преобразование кажущихся ускорений представим в виде

$$\tilde{a}_i = \tilde{C}^{ib} \tilde{a}_b.$$

Это уравнение, как и уравнение Пуассона, легко записать в скалярной форме, используя (5.2).

Далее запишем (5.3) для реальной работы, предполагая, что постоянные g' и μ вычисляются без погрешностей

$$\tilde{g}'_X = -\frac{g'X}{\tilde{r}} \left(1 - 3\mu \frac{\tilde{Z}^2}{\tilde{r}^2} \right); \quad \tilde{g}'_Y = -\frac{g'Y}{\tilde{r}} \left(1 - 3\mu \frac{\tilde{Z}^2}{\tilde{r}^2} \right); \quad \tilde{g}'_Z = -\frac{g'Z}{\tilde{r}} \left(1 + 3\mu \frac{(\tilde{X}^2 + \tilde{Y}^2)}{\tilde{r}^2} \right).$$

Затем получим реальные значения составляющих абсолютной линейной скорости

$$\tilde{V}_i = \tilde{a}_i + \tilde{g}'_i.$$

Реальные значения инерциальных координат получим из формул

$$\tilde{X} = \int_0^t \tilde{V}_X dt + \tilde{V}_{X0}, \quad \tilde{Y} = \int_0^t \tilde{V}_Y dt + \tilde{V}_{Y0}, \quad \tilde{Z} = \int_0^t \tilde{V}_Z dt + \tilde{V}_{Z0}.$$

На этом можно, не переходя к определению реальных географических координат, остановиться. Детализация реальных уравнений зависит от того, какие возмущающие факторы или условия работы мы хотим учитывать.

5.3. Уравнения идеальной работы БИНС в географической системе координат

Приведем еще раз уравнения, описывающие работу БИНС с использованием обобщенного уравнения Пуассона:

$$\dot{C}^{gb} = C^{gb} \Omega_b^{ib} - \Omega_g^{ig} C^{gb}. \quad (5.6)$$

В скалярном виде они записаны в (2.12а).

Преобразование кажущихся ускорений из связанного в сопровождающий базис соответствует выражению

$$\vec{a}_g = C^{gb} \vec{a}_b. \quad (5.7)$$

Это уравнение легко представить как 3 скалярных уравнения:

Относительную скорость получим путем интегрирования уравнения

$$\vec{v}_g = \vec{a}_g - (\vec{u}_g + \vec{\omega}_g) \times \vec{v}_g + \vec{g}_g.$$

Или из скалярных составляющих

$$\begin{cases} \dot{v}_E = a_\xi + (u \sin \varphi + \omega_\zeta) v_N - (u \cos \varphi + \omega_\eta) v_\zeta, \\ \dot{v}_N = a_\eta - (u \sin \varphi + \omega_\zeta) v_E + \omega_\xi v_\zeta, \\ \dot{v}_\zeta = a_\zeta - \omega_\xi v_N + (u \cos \varphi + \omega_\eta) v_E + g. \end{cases} \quad (5.8)$$

Широту и долготу получим из уравнений

$$\dot{\varphi} = \frac{v_N}{R_N}, \quad \dot{\lambda} = \frac{v_E}{R_E \cos \varphi},$$

где радиусы кривизны эллипсоида R_N и R_E вычисляются по формулам (1.1), (1.2)

$$R_N = \frac{R_E(1-e^2)}{1-e^2 \sin^2 \varphi}, \quad R_E = \frac{a+h}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Углы курса, крена и тангажа находят по формулам

$$\psi = \arctg\left(\frac{c_{12}^{gb}}{c_{22}^{gb}}\right), \quad \gamma = -\arctg\left(\frac{c_{31}^{gb}}{c_{33}^{gb}}\right), \quad \vartheta = \arctg\left(\frac{c_{32}^{gb}}{\sqrt{1-(c_{32}^{gb})^2}}\right).$$

5.4. Уравнения реальной работы БИНС в географической системе координат

По аналогии с ранее приведенным примером, уравнения реальной работы легко записать в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{C}^{gb} &= \tilde{C}^{gb} \tilde{\Omega}_b^{ib} - \tilde{\Omega}_g^{ig} \tilde{C}^{gb}, \\ \tilde{a}_g &= \tilde{C}^{gb} \tilde{a}_b. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Реальное кажущееся ускорение в связанном базисе \tilde{a}_b отличается от идеального вследствие ошибки акселерометров $\Delta \tilde{a}$:

$$\tilde{a}_b = \bar{a}_b + \Delta \tilde{a}.$$

$$\tilde{v}_g = \tilde{a}_g - (\tilde{u}_g + \tilde{\omega}_g) \times \tilde{v}_g + \tilde{g}_g$$

$$\tilde{\varphi} = \frac{\tilde{v}_N}{\tilde{R}_N}, \quad \tilde{\lambda} = \frac{\tilde{v}_E}{\tilde{R}_E \cos \tilde{\varphi}},$$

$$\tilde{R}_N = \frac{\tilde{R}_E(1-e^2)}{1-e^2 \sin^2 \tilde{\varphi}}, \quad \tilde{R}_E = \frac{a+\tilde{h}}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \tilde{\varphi}}}.$$

Опуская верхние индексы направляющих косинусов, реальные значения углов курса, крена и тангажа будут

$$\tilde{\psi} = \arctg\left(\frac{\tilde{c}_{12}}{\tilde{c}_{22}}\right), \quad \tilde{\gamma} = -\arctg\left(\frac{\tilde{c}_{31}}{\tilde{c}_{33}}\right), \quad \tilde{\vartheta} = \arctg\left(\frac{\tilde{c}_{32}}{\sqrt{1-(\tilde{c}_{32})^2}}\right).$$

6. Уравнения ошибок БИНС

Важнейшей характеристикой измерительной системы является ее точность (или ошибки). Исследования точности системы и решение других задач можно произвести с помощью уравнений ошибок.

Уравнения ошибок можно получить путем вычитания из уравнений реальной работы уравнений идеальной работы.

Рассмотрим это на примере уравнений (5.5), (5.1):

$$\Delta \dot{C}^{ib} = \tilde{C}^{ib} - \dot{C}^{ib} = \tilde{C}^{ib} \tilde{\Omega}_b^{ib} - C^{ib} \Omega_b^{ib}. \quad (6.1)$$

Выражения для приборных (реальных) значений

$$\tilde{C}^{ib} = \dot{C}^{ib} + \Delta \dot{C}^{ib}, \quad \tilde{\Omega}_b^{ib} = \Omega_b^{ib} + \Delta \Omega_b^{ib}$$

подставим в уравнение (6.1)

$$\Delta \dot{C}^{ib} = (C^{ib} + \Delta C^{ib}) (\Omega_b^{ib} + \Delta \Omega_b^{ib}) - C^{ib} \Omega_b^{ib}.$$

После выполнения преобразований получим выражение

$$\Delta \dot{C}^{ib} = \Delta C^{ib} \Omega_b^{ib} + C^{ib} \Delta \Omega_b^{ib} + \Delta C^{ib} \Delta \Omega_b^{ib}.$$

Поскольку обычно погрешности являются малыми величинами по сравнению с номинальными идеальными величинами, их произведением (третье слагаемое) можно пренебречь. Тогда дифференциальное выражение для ошибок вычисления направляющих косинусов получит вид

$$\Delta \dot{C}^{ib} \approx \Delta C^{ib} \Omega_b^{ib} + C^{ib} \Delta \Omega_b^{ib}. \quad (6.2)$$

Это выражение можно получить также путем варьирования уравнения идеальной работы $\dot{C}^{ib} = C^{ib} \Omega_b^{ib}$.

Аналогично, при использовании обобщенного уравнения Пуассона

$$\dot{C}^{gb} = C^{gb} \Omega_b^{ib} - \Omega_g^{ig} C^{gb}$$

получим

$$\Delta \dot{C}^{gb} \approx \frac{\partial(\dot{C}^{gb})}{\partial C^{gb}} \Delta C^{gb} + \frac{\partial(\dot{C}^{gb})}{\partial \Omega_b^{ib}} \Delta \Omega_b^{ib} + \frac{\partial(\dot{C}^{gb})}{\partial \Omega_g^{ig}} \Delta \Omega_g^{ig} = (\Omega_b^{ib} - \Omega_g^{ig}) \Delta C^{gb} + C^{gb} (\Delta \Omega_b^{ib} - \Delta \Omega_g^{ig}).$$

Ошибки кажущихся ускорений в географическом сопровождающем базисе получим из выражения (5.7)

$$\Delta \vec{a}_g \approx C^{gb} \Delta \vec{a}_b + \Delta C^{gb} \vec{a}_b.$$

Ошибки определения направляющих косинусов можно связать с ошибками определения углового положения связанного базиса следующим образом.

Приборное (вычисленное) значение можно записать

$$\tilde{C}^{gb} = BC^{gb} \text{ или } \tilde{C}^{gb} = (I + \Psi')C^{gb} = C^{gb} + \Delta C^{gb},$$

где I - единичная матрица, Ψ' - матрица углов ошибок,

$$B = I + \Psi', \quad \Delta C^{gb} = \Psi' C^{gb}.$$

На рис.6.1. показано положение действительного $Ox_c y_c z_c$ и вычисленного базиса $O\tilde{x}_c \tilde{y}_c \tilde{z}_c$, повернутого относительно действительного на углы δ, β, α .

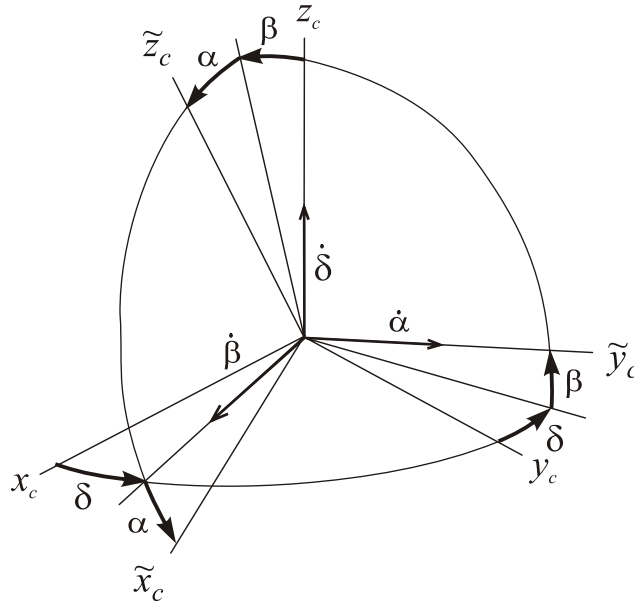


Рис.6.1. Действительный и вычисленный связанные базисы

В предположении малости углов ошибок матрицы B и Ψ' имеют вид

B	x_c	y_c	z_c		Ψ'	x_c	y_c	z_c
\tilde{x}_c	1	δ	$-\alpha$		\tilde{x}_c	0	δ	$-\alpha$
\tilde{y}_c	$-\delta$	1	β		\tilde{y}_c	$-\delta$	0	β
\tilde{z}_c	α	$-\beta$	1		\tilde{z}_c	α	$-\beta$	0

Или можно записать

$$\tilde{C}^{gb} = (I - \Psi)C^{gb}, \quad (6.3)$$

где $\Psi = -\Psi'$. Из (6.3)

$$\Psi = I - \tilde{C}^{gb}(C^{gb})^T. \quad (6.4)$$

Продифференцируем (6.4)

$$\dot{\Psi} = -\dot{\tilde{C}}^{gb}(C^{gb})^T - \tilde{C}^{gb}(\dot{C}^{gb})^T.$$

Подставляя выражения для \tilde{C}^{gb} и \dot{C}^{gb} из (5.9), (5.6), с учетом матричных операций $((A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$, $\Omega^T = -\Omega$)

$$\begin{aligned} \dot{\Psi} &= -(\tilde{C}^{gb}\tilde{\Omega}_b^{ib} - \tilde{\Omega}_g^{ig}\tilde{C}^{gb})(C^{gb})^T - \tilde{C}^{gb}(C^{gb}\Omega_b^{ib} - \Omega_g^{ig}C^{gb})^T = \\ &= -\tilde{C}^{gb}\tilde{\Omega}_b^{ib}(C^{gb})^T + \tilde{\Omega}_g^{ig}\tilde{C}^{gb}(C^{gb})^T + \tilde{C}^{gb}\Omega_b^{ib}(C^{gb})^T - \tilde{C}^{gb}(C^{gb})^T\Omega_g^{ig} = \\ &= -\tilde{C}^{gb}(\tilde{\Omega}_b^{ib} - \Omega_b^{ib})(C^{gb})^T + \tilde{\Omega}_g^{ig}\tilde{C}^{gb}(C^{gb})^T - \tilde{C}^{gb}(C^{gb})^T\Omega_g^{ig}. \end{aligned}$$

Подставим вместо \tilde{C}^{gb} выражение (6.3), с учетом $C \cdot C^T = 1$,

$$\begin{aligned} \dot{\Psi} &= -(I - \Psi)C^{gb}(\tilde{\Omega}_b^{ib} - \Omega_b^{ib})(C^{gb})^T + \tilde{\Omega}_g^{ig}(I - \Psi)C^{gb}(C^{gb})^T - (I - \Psi)C^{gb}(C^{gb})^T\Omega_g^{ig} = \\ &= -(I - \Psi)C^{gb}(\tilde{\Omega}_b^{ib} - \Omega_b^{ib})(C^{gb})^T + \tilde{\Omega}_g^{ig}(I - \Psi) - (I - \Psi)\Omega_g^{ig}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Учтем, что $\Delta\Omega_b^{ib} = \tilde{\Omega}_b^{ib} - \Omega_b^{ib}$, $\Delta\Omega_g^{ig} = \tilde{\Omega}_g^{ig} - \Omega_g^{ig}$.

После подстановки, пренебрегая произведением малых $\Psi C^{gb}\Delta\Omega_b^{ib}(C^{gb})^T$ и др.,

$$\dot{\Psi} \approx \Psi\Omega_g^{ig} - \Omega_g^{ig}\Psi + \Delta\Omega_g^{ig} - C^{gb}\Delta\Omega_b^{ib}(C^{gb})^T. \quad (6.6)$$

Выражение (6.6) представим в векторной форме:

$$\dot{\vec{\phi}} \approx -(\vec{\omega}_g^{ig} \times) \vec{\phi} + \Delta\vec{\omega}_g^{ig} - C^{gb}\Delta\vec{\omega}_b^{ib}. \quad (6.7)$$

Здесь вектор углов ошибок $\vec{\phi} = [\beta \ \alpha \ \delta]^T$, матричная форма представления вектора

$$\bar{\phi} \times = \begin{bmatrix} 0 & -\delta & \alpha \\ \delta & 0 & -\beta \\ -\alpha & \beta & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\phi} \times \equiv \Psi,$$

$\bar{\omega}_g^{ig} \times \equiv \Omega_g^{ig}$ - матрица угловых скоростей сопровождающего базиса,

$\Delta \bar{\omega}_g^{ig} \times \equiv \Delta \Omega_g^{ig}$ - матрица ошибок вычисления угловых скоростей сопровождающего базиса,

$\Delta \bar{\omega}_b^{ib} \times \equiv \Delta \Omega_b^{ib}$ - матрица ошибок измерения угловых скоростей, соответствующая ошибкам датчиков угловой скорости.

Этим матрицам соответствуют векторы

$$\Delta \bar{\omega}_g^{ig} = [\Delta \omega_\xi \quad \Delta \omega_\eta \quad \Delta \omega_\zeta]^T, \quad \Delta \bar{\omega}_b^{ib} = [\Delta \omega_{xc} \quad \Delta \omega_{yc} \quad \Delta \omega_{zc}]^T.$$

В эквивалентности выражений (6.6) и (6.7) можно убедиться, проделав соответствующие преобразования.

В развернутом виде (6.7) запишем, как

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \\ \delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \omega_\xi \\ \Delta \omega_\eta \\ \Delta \omega_\zeta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \omega_{xc} \\ \Delta \omega_{yc} \\ \Delta \omega_{zc} \end{bmatrix}.$$

Тогда в скалярном виде

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= -\omega_\eta \delta + \omega_\zeta \alpha + \Delta \omega_\xi - c_{11} \Delta \omega_{xc} - c_{12} \Delta \omega_{yc} - c_{13} \Delta \omega_{zc}, \\ \dot{\alpha} &= -\omega_\zeta \beta + \omega_\xi \delta + \Delta \omega_\eta - c_{21} \Delta \omega_{xc} - c_{22} \Delta \omega_{yc} - c_{23} \Delta \omega_{zc}, \\ \dot{\delta} &= -\omega_\xi \alpha + \omega_\eta \beta + \Delta \omega_\zeta - c_{31} \Delta \omega_{xc} - c_{32} \Delta \omega_{yc} - c_{33} \Delta \omega_{zc}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Напомним, что в этих уравнениях $\Delta \omega_\xi$, $\Delta \omega_\eta$, $\Delta \omega_\zeta$ - ошибки вычисления угловой скорости сопровождающего базиса. Исходя из выражений угловых скоростей сопровождающего базиса (1.3), ошибки их вычисления имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta \omega_\xi &= -\Delta v_N / R_N + v_N R_N^{-2} \Delta R_N, \\ \Delta \omega_\eta &= \Delta v_E / R_E - u \sin \varphi \cdot \Delta \varphi, \\ \Delta \omega_\zeta &= \Delta v_E \operatorname{tg} \varphi / R_E + \left(v_E / (R_E \cos^2 \varphi) + u \cos \varphi \right) \Delta \varphi - \left(v_E \operatorname{tg} \varphi / R_E^2 \right) \Delta R_E. \end{aligned}$$

Ошибки вычисления относительной линейной скорости найдем, используя дифференциальные уравнения вычисления \bar{v}_g , например, в виде

$$\dot{\tilde{v}}_g = C^{gb} \tilde{a}_b - (2\tilde{u}_g + \tilde{\omega}_g^o) \times \tilde{v}_g + \tilde{g}.$$

Приборное значение

$$\dot{\tilde{v}}_g = \tilde{C}^{gb} \tilde{a}_b - (2\tilde{u}_g + \tilde{\omega}_g^o) \times \tilde{v}_g + \tilde{g}.$$

Вычитая,

$$\Delta \dot{\tilde{v}} = \dot{\tilde{v}}_g - \dot{\tilde{v}}_g = \tilde{C}^{gb} \tilde{a}_b - C^{gb} \tilde{a}_b - (2\tilde{u}_g + \tilde{\omega}_g^o) \times \tilde{v}_g + (2\tilde{u}_g + \tilde{\omega}_g^o) \times \tilde{v}_g + \tilde{g} - \tilde{g}.$$

Учтем, что

$$\tilde{C}^{gb} = (I - \Psi)C^{gb}, \quad \Delta \tilde{a}_b = \tilde{a}_b - \tilde{a}_b.$$

Предположим, что погрешности компенсации переносных и кориолисовых ускорений пренебрежимо малы, а также пренебрежимо малы ошибки вычисления \tilde{g} .

После подстановок, пренебрегая произведениями малых

$$\Delta \dot{\tilde{v}} = -\Psi C^{gb} \tilde{a}_b + C^{gb} \Delta \tilde{a}_b.$$

Учтем, что

$$C^{gb} \tilde{a}_b = \tilde{a}_g. \quad \text{В результате}$$

$$\Delta \dot{\tilde{v}} = -\Psi \tilde{a}_g + C^{gb} \Delta \tilde{a}_b.$$

В развернутом виде, принимая, что $\tilde{a}_g = [a_E, a_N, a_H]^T$ - вектор кажущихся ускорений,

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{v}_E \\ \Delta \dot{v}_N \\ \Delta \dot{v}_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \delta & -\alpha \\ -\delta & 0 & \beta \\ \alpha & -\beta & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_E \\ a_N \\ a_H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta a_{xc} \\ \Delta a_{yc} \\ \Delta a_{zc} \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

В скалярном виде

$$\begin{aligned} \Delta \dot{v}_E &= \delta \cdot a_N - \alpha \cdot a_H + c_{11} \Delta a_{xc} + c_{12} \Delta a_{yc} + c_{13} \Delta a_{zc}, \\ \Delta \dot{v}_N &= -\delta \cdot a_E + \beta \cdot a_H + c_{21} \Delta a_{xc} + c_{22} \Delta a_{yc} + c_{23} \Delta a_{zc}, \\ \Delta \dot{v}_H &= \alpha \cdot a_E - \beta \cdot a_N + c_{31} \Delta a_{xc} + c_{32} \Delta a_{yc} + c_{33} \Delta a_{zc}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Ошибки координат

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\phi} &= -\Delta \omega_\xi, \\ \Delta \dot{\lambda} &= \frac{1}{R_E \cos \varphi} (\Delta v_E + v_E \operatorname{tg} \varphi \Delta \phi - \frac{v_E}{R_E} \Delta R_E). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Ошибки ΔR_E , ΔR_N можно найти путем варьирования выражений (1.1), (1.2).

$$\Delta R_E = \frac{(a+h)e^2 \sin 2\varphi}{1-e^2 \sin^2 \varphi} \Delta\varphi, \quad \Delta R_N = \Delta R_E (1-e^2).$$

Можно отметить, что уравнения ошибок данной БИНС отличаются от уравнений ошибок платформенной ИНС тем, что в уравнениях (6.8) сумма последних 3-х слагаемых в каждом уравнении (сумма проекций уходов ДУС) эквивалентна уходу платформы по ее оси. Аналогично, в уравнениях (6.10) сумма последних 3-х слагаемых в каждом уравнении (сумма проекций ошибок акселерометров) эквивалентна ошибке измерения ускорения по оси платформы.

В заключение приведем пример ошибок БИНС (рис. 6.2), полученный моделированием по уравнениям (6.8), (6.10), (6.11) при ошибках начального горизонтирования 0,01 град., азимутальной выставки 0,1 град., эквивалентном уходе датчиков угловой скорости 0,1 град./час, эквивалентной ошибке акселерометров 10^{-4} м/с²

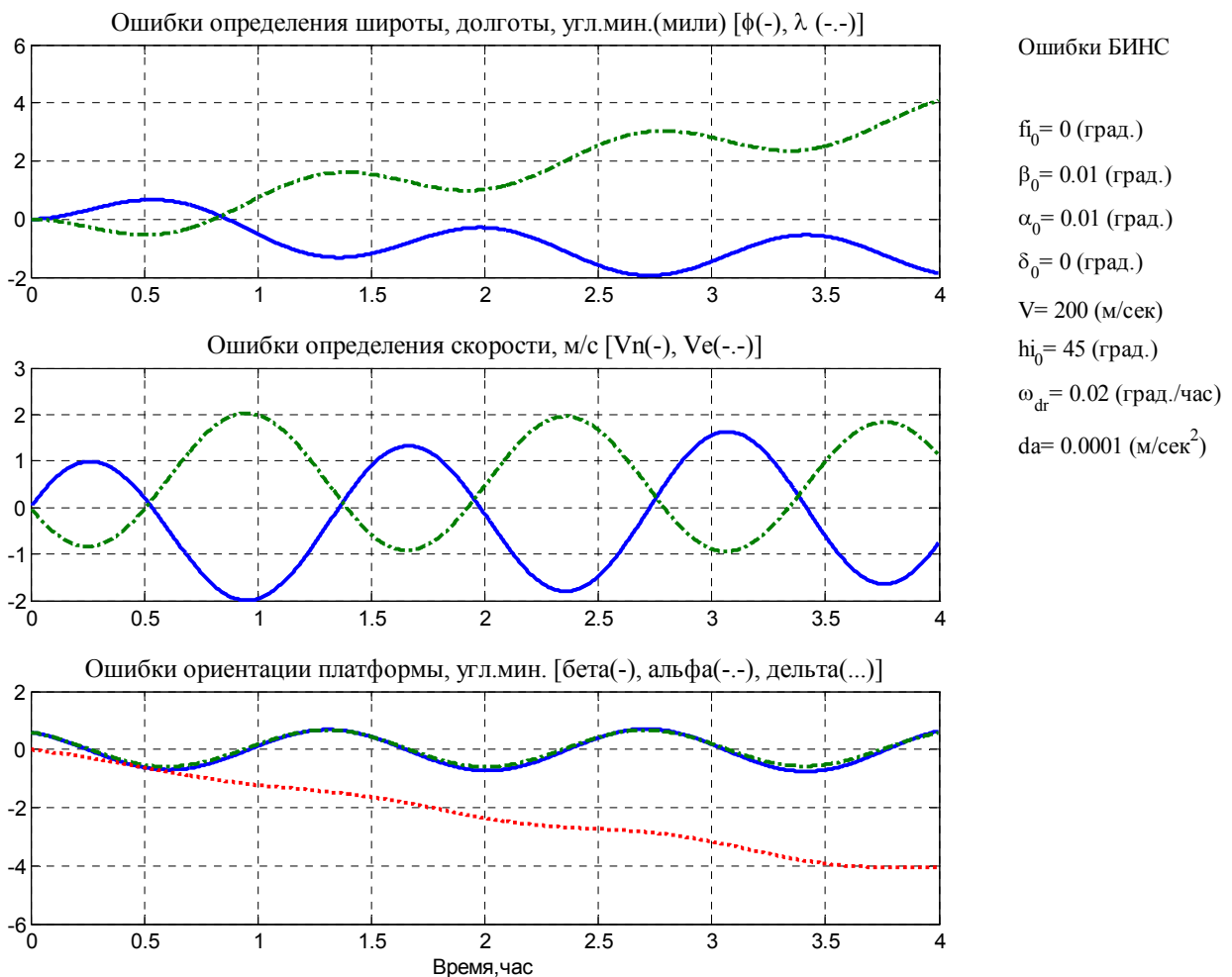


Рис.6.2. Пример ошибок БИНС

7. Начальная выставка БИНС

Алгоритмы работы БИНС описываются системой дифференциальных уравнений, и для их решения необходимо задать начальные условия, которые и определяются в процессе начальной выставки.

Суть алгоритма БИНС, так же как и платформенной ИНС, состоит в интегрировании ускорений (дважды) для определения текущих значений линейной скорости и координат объекта. Для интегрирования уравнений необходимо задать начальные условия – 3 проекции начальной линейной скорости и 3 координаты. БИНС не может автономно определить эти начальные параметры, для этого нужна внешняя информация. Во многих случаях БИНС включают при неподвижном относительно Земли объекте. В этом случае проекции линейной скорости, например, в осях географического сопровождающего трехгранника равны нулю. А вот координаты места объекта должны быть введены извне, например, от приемника СНС.

Для определения ориентации также необходимо задать начальные углы. Это начальные условия для дифференциальных уравнений Эйлера. Для уравнений Пуассона необходимо задать начальную матрицу направляющих косинусов. Для уравнений в кватернионах необходимо, соответственно, задать начальный кватернион ориентации.

В отличие от начальной линейной скорости и координат, начальные углы ориентации могут быть определены автономно самой БИНС, хотя возможно получить эти углы и извне.

В этой главе рассмотрим начальную выставку БИНС на неподвижном основании. Вопросы выставки БИНС при движении объекта будут рассмотрены в п.10.4

В бесплатформенных инерциальных навигационных системах начальная выставка, в основном, производится аналитически. По информации, поступающей от чувствительных элементов БИНС, определяются начальные значения параметров – углов Эйлера-Крылова, направляющих косинусов, других параметров. Такая выставка является автономной так как не требует привлечения внешней информации.

Рассмотрим выставку БИНС с датчиками угловой скорости.

На рис.7.1 показаны $O\xi\eta\zeta$ - географический сопровождающий трёхгранник, $Oxyz$ - трёхгранник, связанный с блоком чувствительных элементов БИНС (далее просто БИНС).

Матрица направляющих косинусов между осями $O\xi\eta\zeta$ и $Oxyz$ соответствует таблице 7.1.

Чувствительными элементами яв-

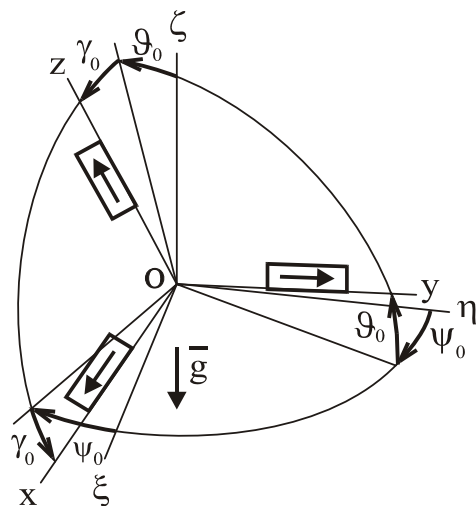


Рис. 7.1. Начальное положение БИНС

ляются акселерометры и, например, датчики угловой скорости (ДУС), измеряющие абсолютную угловую скорость. Это могут быть поплавковые ДУС, ДУС на динамически настраиваемых гироскопах, лазерные гироскопы, волоконно - оптические гироскопы, твердотельные волновые гироскопы.

Таблица 7.1. Направляющие косинусы

C^{gb}	x	y	z
ξ	$c_{11} = \cos \gamma_0 \cos \psi_0 + \sin \gamma_0 \sin \psi_0 \sin \vartheta_0;$	$c_{12} = \cos \vartheta_0 \sin \psi_0$	$c_{13} = \cos \psi_0 \sin \gamma_0 - \sin \psi_0 \cos \gamma_0 \sin \vartheta_0;$
η	$c_{21} = -\cos \gamma_0 \sin \psi_0 + \sin \gamma_0 \cos \psi_0 \sin \vartheta_0;$	$c_{22} = \cos \vartheta_0 \cos \psi_0;$	$c_{23} = -\sin \psi_0 \sin \gamma_0 - \cos \gamma_0 \cos \psi_0 \sin \vartheta_0;$
ζ	$c_{31} = -\cos \vartheta_0 \sin \gamma_0;$	$c_{32} = \sin \vartheta_0;$	$c_{33} = \cos \vartheta_0 \cos \gamma_0.$

Акселерометры измеряют проекции вектора ускорения силы тяжести g

$$\begin{aligned} g_x &= g \cos \vartheta_0 \sin \gamma_0 = -g c_{31}; \\ g_y &= -g \sin \vartheta_0 = -g c_{32}; \\ g_z &= -g \cos \gamma_0 \cos \vartheta_0 = -g c_{33}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

На неподвижном относительно Земли основании проекции угловой скорости вращения сопровождающего трёхгранника $O\xi\eta\zeta$ имеют вид

$$\omega_\xi = 0, \quad \omega_\eta = u \cos \varphi, \quad \omega_\zeta = u \sin \varphi,$$

где $u = 7,29 \cdot 10^{-5}$ 1/с - угловая скорость вращения Земли, φ - широта.

Датчики угловой скорости измеряют абсолютные угловые скорости

$$\begin{aligned} \omega_x &= \omega_\eta c_{21} + \omega_\zeta c_{31}; \\ \omega_y &= \omega_\eta c_{22} + \omega_\zeta c_{32}; \\ \omega_z &= \omega_\eta c_{23} + \omega_\zeta c_{33}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Отметим, что

$$\omega_y = \omega_\eta \cos \vartheta_0 \cos \psi_0 + \omega_\zeta \sin \vartheta_0. \quad (7.3)$$

Для того, чтобы обеспечить начальными условиями алгоритм функционирования БИНС, необходима информация об угловом положении объекта (углы $\psi_0, \gamma_0, \theta_0$) и информация о направляющих косинусах между осями $Oxyz$ и $O\xi\eta\zeta$ (табл. 2.1).

Из выражений (7.1) следует, что

$$\begin{aligned} \vartheta_0 &= \arcsin(-g_y/g) \text{ или } \vartheta_0 = -\arctg(-g_y \cdot \sin \gamma_0 / g_x) \text{ или } \vartheta_0 = \arctg\left(\frac{c_{32}}{\sqrt{1-c_{32}^2}}\right); \\ \gamma_0 &= -\arctg(g_x/g_z), \quad g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2}; \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$c_{31} = -g_x/g, \quad c_{32} = -g_y/g, \quad c_{33} = -g_z/g.$$

Тогда из (7.3)

$$\psi_0 = \arccos((\omega_y - \omega_\zeta \sin \vartheta_0) / \omega_\eta \cos \vartheta_0). \quad (7.5)$$

Однако это определение неоднозначно.

Получив c_{31} , c_{32} , c_{33} из (7.2), можно найти

$$c_{21} = (\omega_x - \omega_\zeta c_{31}) / \omega_\eta, \quad c_{22} = (\omega_y - \omega_\zeta c_{32}) / \omega_\eta, \quad c_{23} = (\omega_z - \omega_\zeta c_{33}) / \omega_\eta. \quad (7.6)$$

Получив шесть направляющих косинусов, остальные три можно найти из соотношений:

$$\begin{aligned} c_{11} &= c_{22} c_{33} - c_{23} c_{32}, \\ c_{12} &= c_{23} c_{31} - c_{21} c_{33}, \\ c_{13} &= c_{21} c_{32} - c_{22} c_{31}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Если известны все направляющие косинусы, то начальное значение курса можно найти из соотношения

$$\psi_0 = \arctg(c_{12} / c_{22}). \quad (7.8)$$

Использование выражения (7.8) позволяет устранить неоднозначность определения ψ_0 для разных квадрантов, которая существует в выражении (7.5). Структурная схема алгоритма начальной выставки приведена на рис.7.2.

Если алгоритм ориентации построен на использовании параметров Родрига - Гамильтона, то для его функционирования необходимо получить начальные значения этих параметров. Их можно получить из формул:

$$\begin{aligned} \lambda_{00} &= \cos \frac{\psi_0}{2} \cos \frac{\vartheta_0}{2} \cos \frac{\gamma_0}{2} + \sin \frac{\psi_0}{2} \sin \frac{\vartheta_0}{2} \sin \frac{\gamma_0}{2}, \\ \lambda_{10} &= \cos \frac{\psi_0}{2} \sin \frac{\vartheta_0}{2} \cos \frac{\gamma_0}{2} + \sin \frac{\psi_0}{2} \cos \frac{\vartheta_0}{2} \sin \frac{\gamma_0}{2}, \\ \lambda_{20} &= \cos \frac{\psi_0}{2} \cos \frac{\vartheta_0}{2} \sin \frac{\gamma_0}{2} - \sin \frac{\psi_0}{2} \sin \frac{\vartheta_0}{2} \cos \frac{\gamma_0}{2}, \\ \lambda_{30} &= \sin \frac{\psi_0}{2} \cos \frac{\vartheta_0}{2} \cos \frac{\gamma_0}{2} - \cos \frac{\psi_0}{2} \sin \frac{\vartheta_0}{2} \sin \frac{\gamma_0}{2}. \end{aligned}$$

Каким же требованиям должны удовлетворять ЧЭ для того, чтобы обеспечить начальную вставку с приемлемой точностью?

Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо оценить зависимость величины погрешностей выставки от величины погрешностей ЧЭ. Оценим эту зависимость при определении начального положения в азимуте ψ_0 . Для этого будем варьировать соответствующее выражение.

$$\text{Пусть } \psi_0 = \arctg(c_{12} / c_{22}) = F_1(c_{12}, c_{22}),$$

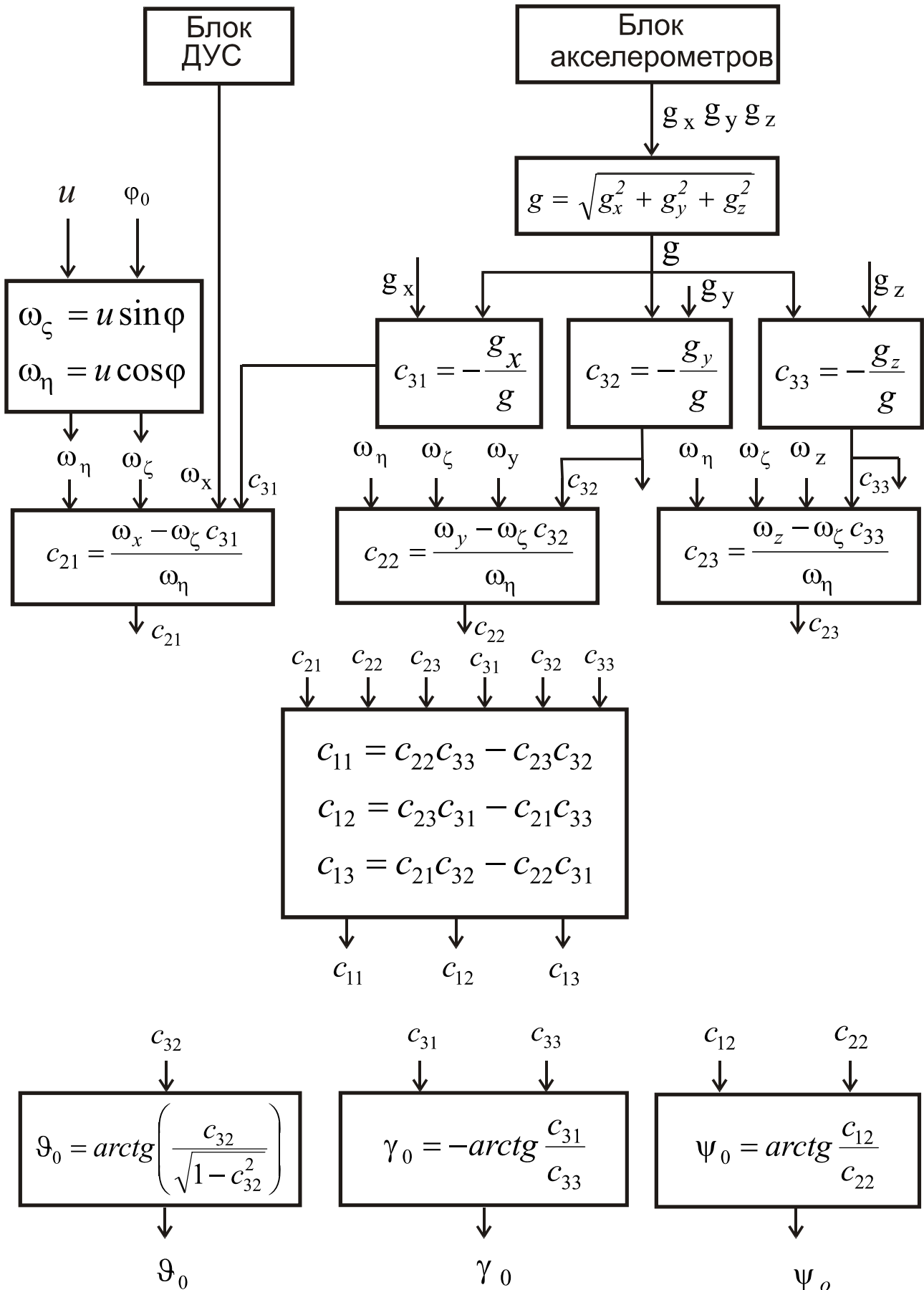


Рис.7.2. Структурная схема алгоритма начальной выставки

$$\begin{aligned}\Delta\psi_0 &= \frac{\delta F_1}{\delta c_{12}} \Delta c_{12} + \frac{\delta F_1}{\delta c_{22}} \Delta c_{22} = \\ &= \frac{1/c_{22}}{1+(c_{12}/c_{22})^2} \Delta c_{12} + \frac{1/c_{22}}{1+(c_{12}/c_{22})^2} \left(\frac{-c_{12}}{c_{22}}\right) \Delta c_{22}.\end{aligned}$$

Из (7.7) выпишем, что $c_{12} = c_{23}c_{31} - c_{21}c_{33} = F_2(c_{23}, c_{31}, c_{21}, c_{33})$;

$$\begin{aligned}\Delta c_{12} &= \frac{\delta F_2}{\delta c_{23}} \Delta c_{23} + \frac{\delta F_2}{\delta c_{31}} \Delta c_{31} + \frac{\delta F_2}{\delta c_{21}} \Delta c_{21} + \frac{\delta F_2}{\delta c_{33}} \Delta c_{33} = \\ &= c_{31} \Delta c_{23} + c_{23} \Delta c_{31} - c_{33} \Delta c_{21} - c_{21} \Delta c_{33}.\end{aligned}$$

Из (7.6) $c_{22} = (\omega_y - \omega_\xi c_{32}) / \omega_\eta = F_3(\omega_y, \varphi, c_{32})$.

$$\begin{aligned}\Delta c_{22} &= \frac{\delta F_3}{\delta \omega_y} \Delta \omega_y + \frac{\delta F_3}{\delta \varphi} \Delta \varphi + \frac{\delta F_3}{\delta c_{32}} \Delta c_{32} = \\ &= \frac{1}{\omega_\eta} \Delta \omega_y - \frac{1}{\omega_\eta} c_{32} \Delta \omega_\xi - \frac{1}{\omega_\eta} \omega_\xi \Delta c_{32} - \frac{\omega_y - \omega_\xi c_{32}}{\omega_\eta^2} \Delta \omega_\eta.\end{aligned}$$

Опуская далее промежуточные выражения, запишем

$$\begin{aligned}\Delta \omega_\eta &= u \cos \varphi \Delta \varphi, & \Delta \omega_\eta &= -u \sin \varphi \Delta \varphi; \\ \Delta c_{32} &= -\frac{1}{g} \Delta g_y, & \Delta c_{33} &= -\frac{1}{g} \Delta g_z, & \Delta c_{31} &= -\frac{1}{g} \Delta g_x; \\ \Delta c_{23} &= \frac{1}{\omega_\eta} \Delta \omega_z - \frac{1}{\omega_\eta} c_{33} \Delta \omega_\xi - \frac{\omega_\xi}{\omega_\eta} \Delta c_{33} - \frac{1}{\omega_\eta^2} (\omega_z - \omega_\xi c_{33}) \Delta \omega_\eta; \\ \Delta c_{21} &= \frac{1}{\omega_\eta} \Delta \omega_x - \frac{1}{\omega_\eta} c_{31} \Delta \omega_\xi - \frac{\omega_\xi}{\omega_\eta} \Delta c_{31} - \frac{1}{\omega_\eta^2} (\omega_x - \omega_\xi c_{31}) \Delta \omega_\eta\end{aligned}$$

Теперь, подставляя погрешности акселерометров Δg_x , Δg_y , Δg_z , погрешности угловой скорости (ДУС) $\Delta \omega_x$, $\Delta \omega_y$, $\Delta \omega_z$, погрешность ввода широты $\Delta \varphi$, можно получить погрешность измерения начального курса $\Delta \psi_0$.

Оценим в качестве примера погрешность $\Delta \psi_0$ в частном случае.

Пусть начальное положение объекта таково, что углы $\Delta \gamma_0$ и $\Delta \vartheta_0$ равны нулю, имеется начальный курс $\psi_0 \neq 0$.

Тогда из таблицы 7.1 запишем

$$\begin{aligned} c_{11} &= \cos \psi_0, & c_{12} &= \sin \psi_0, & c_{13} &= 0; \\ c_{21} &= -\sin \psi_0, & c_{22} &= \cos \psi_0, & c_{23} &= 0; \\ c_{31} &= 0, & c_{32} &= 0, & c_{33} &= 1 \end{aligned}$$

Рассмотрим влияние погрешностей ДУС, т.е. положим, что $\Delta g_i = 0$, $\Delta \varphi = 0$, $\Delta \omega_i \neq 0$, $i = x, y, z$.

Тогда $\Delta c_{31} = 0$; $\Delta c_{32} = 0$; $\Delta c_{33} = 0$; $\Delta \omega_\zeta = 0$, $\Delta \omega_\eta = 0$;

$$\begin{aligned} \Delta c_{21} &= \Delta \omega_x / \omega_\eta, \quad \Delta c_{22} = \Delta \omega_y / \omega_\eta, \\ \Delta c_{23} &= \Delta \omega_z / \omega_\eta, \quad \Delta c_{12} = -\Delta \omega_x c_{33} / \omega_\eta. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (7.8), получим

$$\Delta \psi_0 = -(\cos \psi_0 \Delta \omega_x + \sin \psi_0 \Delta \omega_y) / \omega_\eta. \quad (7.10)$$

Отсюда видно, что погрешность гирокомпасирования зависит от начального курса и от широты, т.к. $\omega_\eta = u \cos \varphi$.

Рассмотрим зависимость погрешности гирокомпасирования от погрешностей акселерометров, т.е. положим, что $\Delta g_i \neq 0$, $\Delta \varphi = 0$, $\Delta \omega_i = 0$, $i = x, y, z$. Выражение (7.8) можно записать в виде

$$\Delta \psi_0 = \cos \psi_0 \Delta c_{12} - \sin \psi_0 \Delta c_{22}.$$

Здесь $\Delta c_{12} = -\Delta c_{21} + \sin \psi_0 \Delta c_{33}$;

$$\Delta c_{21} = -\frac{\omega_\zeta}{\omega_\eta} \Delta c_{31} = (tg \varphi / g) \Delta g_x, \quad \Delta c_{33} = -\frac{1}{g} \Delta g_z;$$

$$\Delta c_{12} = -(tg \varphi / g) \Delta g_x - (\sin \psi_0 / g) \Delta g_z, \quad \Delta c_{22} = -\frac{\omega_\zeta}{\omega_\eta} \Delta c_{32} = (tg \varphi / g) \Delta g_y.$$

Тогда получим

$$\Delta \psi_0 = -[tg \varphi (\cos \psi_0 \Delta g_x + \sin \psi_0 \Delta g_y) + \cos \psi_0 \sin \psi_0 \Delta g_z]. \quad (7.11)$$

Из (7.11) видно, что погрешность также зависит от широты, от начального курса. Элементарный анализ показывает, что на кардинальных курсах ($\psi_0 = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$) последнее слагаемое (Δg_z) обращается в нуль, выражение в скобках при $tg \varphi$ имеет минимальное значение.

Рассмотрим влияние погрешностей ввода широты $\Delta \varphi$. В выражении (7.8) в этом случае $\Delta c_{21} = 0$, $\Delta c_{31} = 0$, $\Delta c_{33} = 0$, $\Delta c_{12} = 0$. Тогда

$\Delta c_{22} = -(\omega_y / \omega_\eta^2) \Delta \omega_\eta$. Но $\omega_y = \omega_\eta \cos \psi_0$, $\Delta \omega_\eta = -\omega_\zeta \Delta \varphi$. После подстановок получим $\Delta c_{22} = -tg \varphi \cos \psi_0 \Delta \varphi$ и

$$\Delta \psi_0 = \sin \psi_0 \cos \psi_0 tg \varphi \Delta \varphi \quad (7.12)$$

На кардинальных курсах погрешность обращается в нуль.

Пример численной оценки погрешностей приведен на рис. 7.3.

Анализ выражений (7.10), (7.11), (7.12) показывает, что погрешности начальной выставки БИНС зависят от широты и имеют минимумы в зависимости от положения объекта в азимуте. Эти выводы подтверждаются при моделировании погрешностей на ЭВМ. Из последнего графика видно, что при реальных погрешностях чувствительных элементов желательно, чтобы начальное положение объекта в азимуте было близко к значениям $\psi_0 = -45^\circ, 135^\circ$. Это соответствует зависимости (7.10) для данного примера, где определяющую роль играет погрешность датчиков угловой скорости.

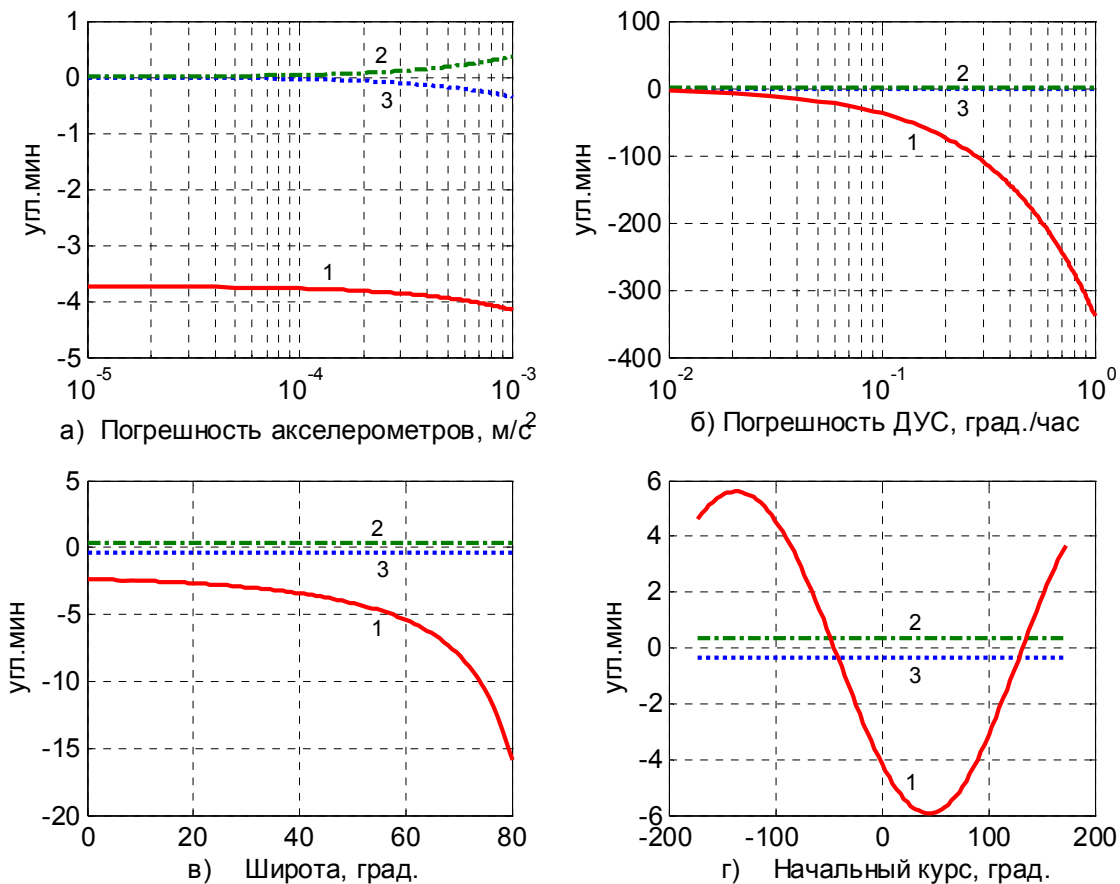


Рис. 7.3. Погрешности начальной выставки $\Delta \psi_0$ - 1, $\Delta \vartheta_0$ - 2, $\Delta \gamma_0$ - 3:

- а) при $\varphi = 50^\circ$, $\Delta \omega_i = 0.01\%$, $\psi_0 = 0^\circ$; б) при $\varphi = 50^\circ$, $\Delta g_i = 1.e-4g$, $\psi_0 = 0^\circ$;
 в) при $\Delta g_i = 1.e-4g$, $\Delta \omega_i = 0.01\%$, $\psi_0 = 0^\circ$; г) при $\Delta g_i = 1.e-4g$, $\Delta \omega_i = 0.01\%$, $\varphi = 50^\circ$.

8. Демпфирование БИНС

Как показывает проведенный анализ, погрешности БИНС, в основном, имеют характер незатухающих колебаний с периодом Шулера. Возникает естественный вопрос, нельзя ли демпфировать эти колебания. В известной литературе рассматривается такая возможность [5,7,15] применительно к платформенным системам. Рассмотрим возможности демпфирования в БИНС.

8.1. Демпфирование с помощью внутренних связей

Рассмотрим северный канал, в котором первые интеграторы охвачены обратной связью (рис.8.1).

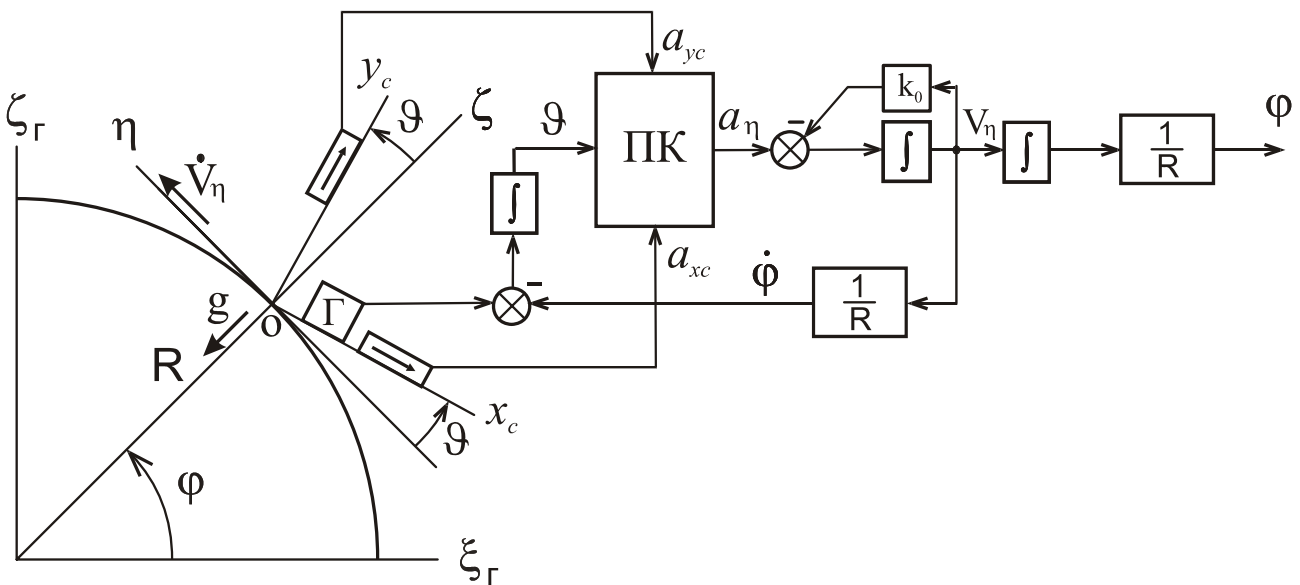


Рис.8.1. Северный канал БИНС с демпфированием

Кажущиеся ускорения, измеряемые акселерометрами, соответствуют формулам

$$\begin{aligned} a_{xc} &= g \sin \vartheta - \dot{V}_\eta \cos \vartheta, \\ a_{yc} &= g \cos \vartheta + \dot{V}_\eta \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Отметим, что в результате преобразования кажущихся ускорений в блоке направляющих косинусов и преобразования координат НК-ПК получим кажущееся ускорения в проекциях на оси сопровождающего базиса

$$a_\eta = \dot{V}_\eta. \quad (8.2)$$

Охват первых интеграторов отрицательной обратной связью

Запишем уравнения идеальной работы, которые будут отличаться от

(1.18) - (1.22) тем, что в них учтен охват первых интеграторов обратной связью с коэффициентом передачи k_0 .

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{G}} &= \omega_z - V_\eta / R, \quad \mathcal{G}_0 = 0; \quad (\mathcal{G} = \int_0^t \dot{\mathcal{G}} dt + \mathcal{G}_0;) \\ a_\eta &= -a_{xc} \cos \mathcal{G} + a_{yc} \sin \mathcal{G}, \\ \dot{V}_\eta &= a_\eta - k_0 V_\eta, \quad V_{\eta 0} = 0; \quad (V_\eta = \int_0^t (\dot{V}_\eta - k_0 V_\eta) dt + V_{\eta 0};) \\ \dot{\varphi} &= \frac{V_\eta}{R}, \quad \varphi_0 = 0; \quad (\varphi = \int_0^t \dot{\varphi} dt + \varphi_0;) \end{aligned} \quad (8.3)$$

Как ранее было показано, ошибка определения угла поворота объекта тождественна ошибке вычисления положения географического базиса:

$$\Delta \mathcal{G} \equiv \beta, \quad \Delta \dot{\mathcal{G}} \equiv \dot{\beta}.$$

Варьируя первое уравнение (8.1)

$$\dot{\beta} = \Delta \omega_z - \frac{\Delta V_\eta}{R}. \quad (8.4)$$

где $\Delta \omega_z$ - ошибка измерителя угловой скорости.

Варьируя второе уравнение (8.3), с учетом уравнений (8.1),

$$\Delta a_\eta = -\Delta a_{xc} \cos \mathcal{G} + \Delta a_{yc} \sin \mathcal{G} + g\beta. \quad (8.5)$$

где Δa_{xc} , Δa_{yc} - ошибки акселерометров.

Варьируя последующие уравнения системы (8.3), запишем

$$\begin{aligned} \Delta \dot{V}_\eta &= \Delta a_\eta - k_0 \Delta V_\eta. \\ \Delta \dot{\varphi} &= \frac{\Delta V_\eta}{R}. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Рассмотрим дифференциальные уравнения (8.4), (8.6).

Продифференцировав (8.4), подставляя (8.5), приняв для простоты, что погрешности акселерометров в (8.5) отсутствуют, запишем

$$\begin{aligned} \ddot{\beta} &= \Delta \dot{\omega}_z - \frac{\Delta \dot{V}_\eta}{R}, \\ \Delta \dot{V}_\eta &= g\beta - k_0 \Delta V_\eta. \end{aligned}$$

Примем, что $\Delta \omega_z = Const$ и подставим второе уравнение в первое

$$\ddot{\beta} = -\frac{1}{R}(g\beta - k_0\Delta V_\eta).$$

Подставим вместо $\frac{\Delta V_\eta}{R}$ соответствующее выражение из (8.4), получим в итоге

$$\ddot{\beta} + \frac{k_0}{R}\dot{\beta} + \frac{g}{R}\beta = \frac{k_0}{R}\Delta\omega_z. \quad (8.7)$$

Как известно, $\frac{g}{R} = \nu^2$ - квадрат частоты Шулера. Наличие обратной отрицательной связи обеспечивает демпфирование шулеровских колебаний ошибки β . Очевидно, что следствием будет демпфирование всех погрешностей. Постоянный уход гироскопа $\Delta\omega_z$ приводит к установившейся ошибке, зависящей от коэффициента передачи обратной связи.

$$\beta_{уст} = \frac{k_0}{g}\Delta\omega_z.$$

Охват первых интеграторов прямой связью

Фрагмент структурной схемы северного канала показан на рис.8.2, где k_n - коэффициент передачи прямой цепи.

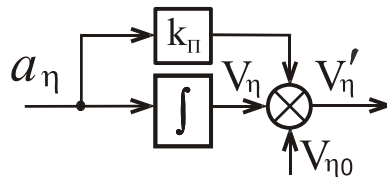


Рис.8.2. Охват первого интегратора прямой связью

Уравнения (8.3) идеальной работы в этом случае приобретут вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{G}} &= \omega_z - V'_\eta / R, \quad \mathcal{G}_0 = 0; \quad (\mathcal{G} = \int_0^t \dot{\mathcal{G}} dt + \mathcal{G}_0;) \\ a_\eta &= -a_{xc} \cos \mathcal{G} + a_{yc} \sin \mathcal{G}, \\ \dot{V}'_\eta &= \dot{V}_\eta + k_n \dot{V}_\eta, \quad V_{\eta 0} = 0; \quad (V'_\eta = \int_0^t \dot{V}_\eta dt + k_n V_\eta); \\ \dot{\varphi} &= \frac{V'_\eta}{R}, \quad \varphi_0 = 0; \quad (\varphi = \int_0^t \dot{\varphi} dt + \varphi_0;) \end{aligned} \quad (8.8)$$

Уравнение ошибки (8.4) преобразуется в

$$\dot{\beta} = \Delta\omega_z - \frac{\Delta V'_\eta}{R}.$$

Вторая производная

$$\ddot{\beta} = \Delta\dot{\omega}_z - \frac{\Delta\dot{V}'_\eta}{R}, \quad (8.9)$$

где $\Delta\dot{V}'_\eta = g\beta + k_n g\dot{\beta}$. После подстановки в (8.9) $\Delta\dot{V}'_\eta$ и преобразований уравнение ошибки

$$\ddot{\beta} + k_n v^2 \dot{\beta} + v^2 \beta = \Delta\dot{\omega}_z \quad (8.10)$$

Вид уравнения (8.10) показывает, что при охвате первого интегратора обратной связью ошибка имеет затухающий характер. Установившаяся ошибка может возникнуть лишь при угловом ускорении ухода, что редко имеет место. Следовательно, эта схема имеет некоторое преимущество перед схемой с отрицательной обратной связью.

8.2. Демпфирование по скорости от внешней системы

Используем для демпфирования данные о скорости внешней системы, имеющей высокую точность измерения (спутниковая навигационная система, доплеровские измерители скорости). Структура северного канала для этого варианта приведена на рис.8.3. Разность приборной скорости \tilde{V}_η и эталонной скорости V_η от внешней системы может быть подана на вход первого интегратора линейного ускорения с коэффициентом k_2 или на выход измерителя угловой скорости с коэффициентом k_1 или одновременно на оба эти корректирующие входа одновременно.

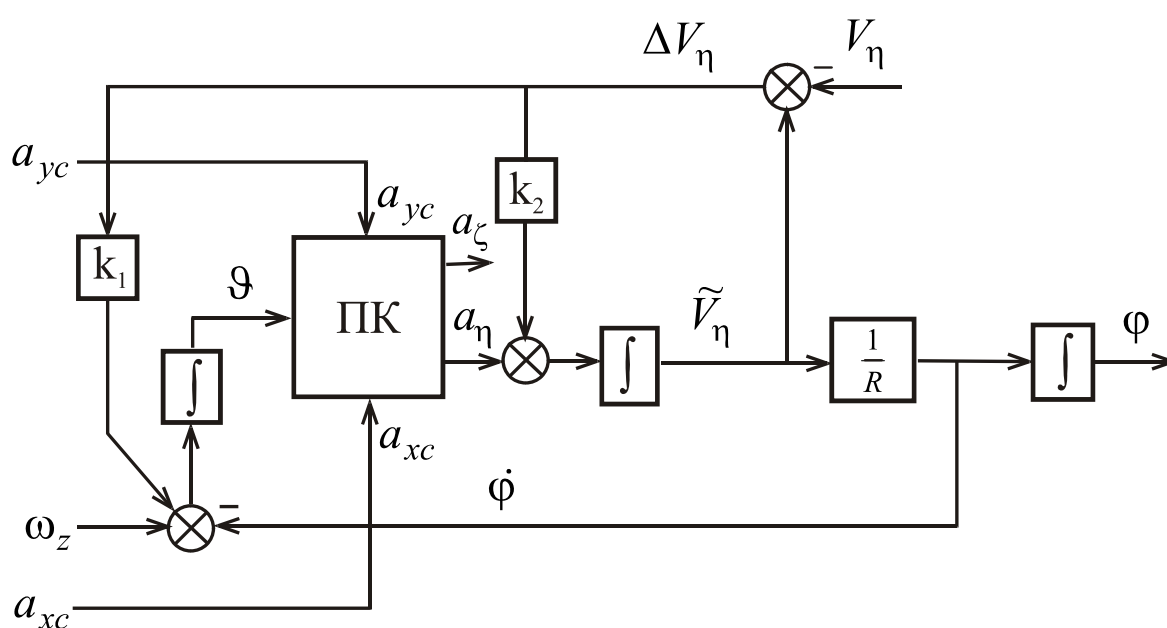


Рис.8.3. Демпфирование по внешней скорости

По аналогии с ранее приведенными системами уравнений (8.3), (8.8), запишем **уравнения идеальной работы** в виде

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathcal{G}} &= \omega_z - V_\eta / R + k_1 \Delta V_\eta, \quad \mathcal{G}_0 \neq 0; \\
 a_\eta &= -a_{xc} \cos \mathcal{G} + a_{yc} \sin \mathcal{G}, \\
 a_\zeta &= a_{xc} \sin \mathcal{G} + a_{yc} \cos \mathcal{G}, \\
 \dot{V}_\eta &= a_\eta + k_2 \Delta V_\eta, \quad V_{\eta 0} = 0; \\
 \dot{\phi} &= \frac{V_\eta}{R}, \quad \phi_0 = 0;
 \end{aligned} \tag{8.11}$$

Уравнения ошибок получим варьированием уравнений идеальной работы с учетом уравнения (8.1):

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathcal{G} &\equiv \beta, \\
 \dot{\beta} &= \Delta \omega_z - \frac{\Delta V_\eta}{R} + k_1 \Delta V_\eta, \\
 \Delta a_\eta &= -\Delta a_{xc} \cos \mathcal{G} + \Delta a_{yc} \sin \mathcal{G} + g\beta, \\
 \Delta a_\zeta &= \Delta a_{xc} \sin \mathcal{G} + \Delta a_{yc} \cos \mathcal{G} - \dot{V}_\eta \beta, \\
 \Delta \dot{V}_\eta &= \Delta a_\eta + k_2 \Delta V_\eta, \\
 \Delta \dot{\phi} &= \frac{\Delta V_\eta}{R}.
 \end{aligned} \tag{8.11}$$

Упрощая рассмотрение, пусть $\Delta \omega_z = 0$, $\Delta a_{xc} = 0$, $\Delta a_{yc} = 0$; $\beta_0 \neq 0$.

Дифференцируя при этих условиях второе уравнение (8.11) и подставляя пятое уравнение (8.11)

$$\ddot{\beta} = (k_1 - \frac{1}{R}) \Delta \dot{V}_\eta = (k_1 - \frac{1}{R}) (\Delta a_\eta + k_2 \Delta V_\eta). \tag{8.12}$$

Учтем, что при $\Delta a_{xc} = 0$, $\Delta a_{yc} = 0$ из (8.11) $\Delta a_\eta = g\beta$.

Рассмотрим случай, когда $k_2 = 0$. Тогда

$$\ddot{\beta} + \left(\frac{g}{R} - k_1 \right) \beta = 0. \tag{8.13}$$

При этом частота собственных незатухающих колебаний отличается от «шулеровской» $\nu^2 = \frac{g}{R}$, так как квадрат частоты - $\omega_0^2 = \frac{g}{R} - k_1$. Таким образом, коррекция на выходе измерителя угловой скорости позволяет увеличивать частоту колебаний ($k_1 < 0$) и в итоге ускорять демпфирование.

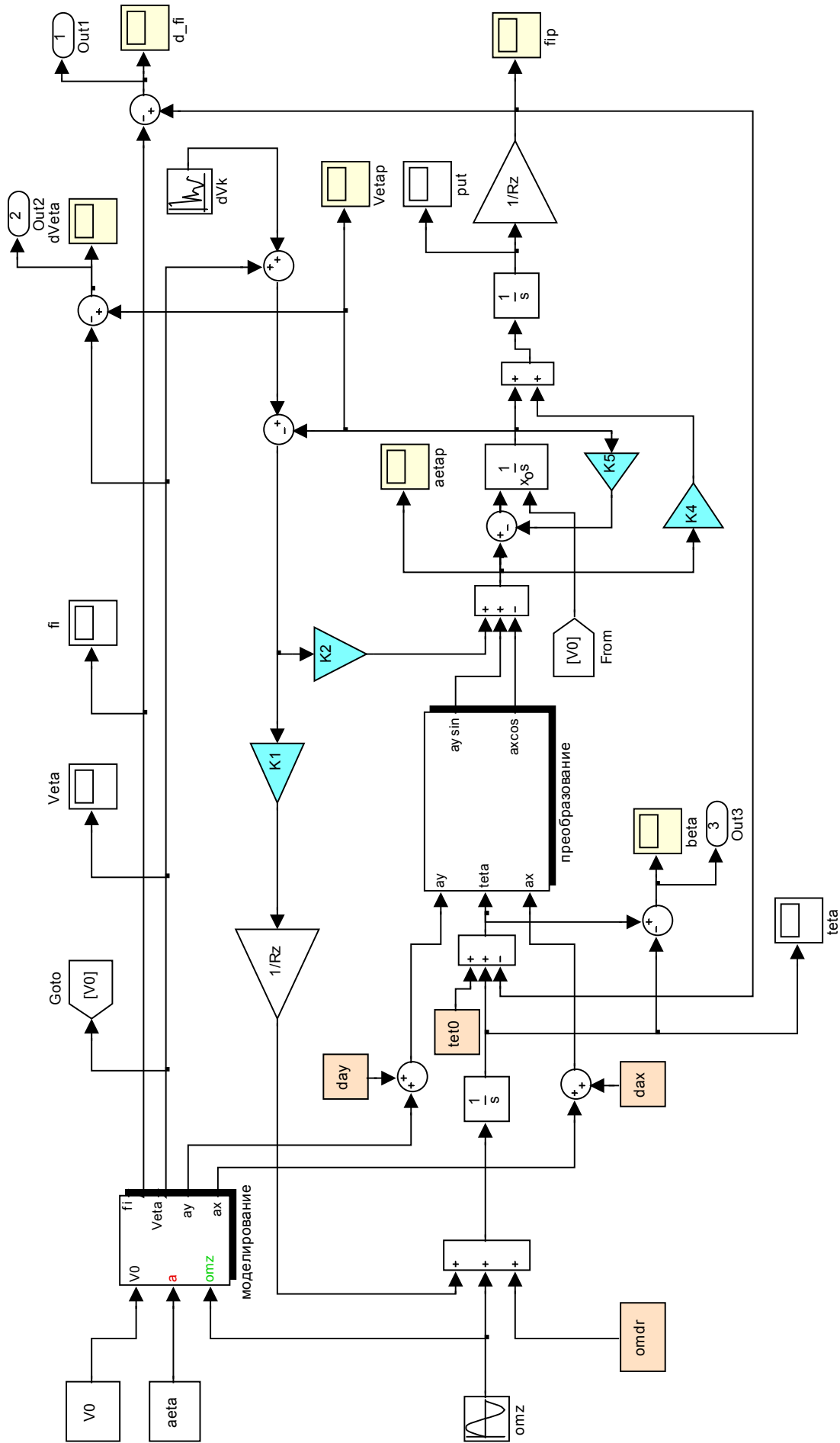


Рис.8.4. Схема моделирования северного канала

Если принять, что $k_1 = 0$, а $k_2 \neq 0$. Тогда, глядя на рис.8.3, запишем следующие выражения:

$$\dot{\beta} = -\frac{\Delta V_{\eta}}{R},$$

$$\Delta V_{\eta} = \int_0^t (g\beta + k_2 \Delta V'_{\eta}) dt,$$

$$\dot{\beta} = -\frac{1}{R} \int_0^t (g\beta + k_2 \Delta V'_{\eta}) dt,$$

$$\ddot{\beta} = -\frac{1}{R} (g\beta + k_2 \Delta V_{\eta}) = -\frac{1}{R} (g\beta - k_2 \dot{\beta} R), \text{ откуда получим}$$

$$\ddot{\beta} + k_2 \dot{\beta} + \nu^2 \beta = 0.$$

Таким образом, корректирующий сигнал на вход первого интегратора ускорения позволяет демпфировать колебания.

Поведение системы при различных сочетаниях корректирующих воздействий можно рассмотреть при моделировании, например, по схеме на рис. 8.4. На рис. 8.5 приведен пример моделирования канала с демпфированием.

Существуют и другие схемы демпфирования [5].

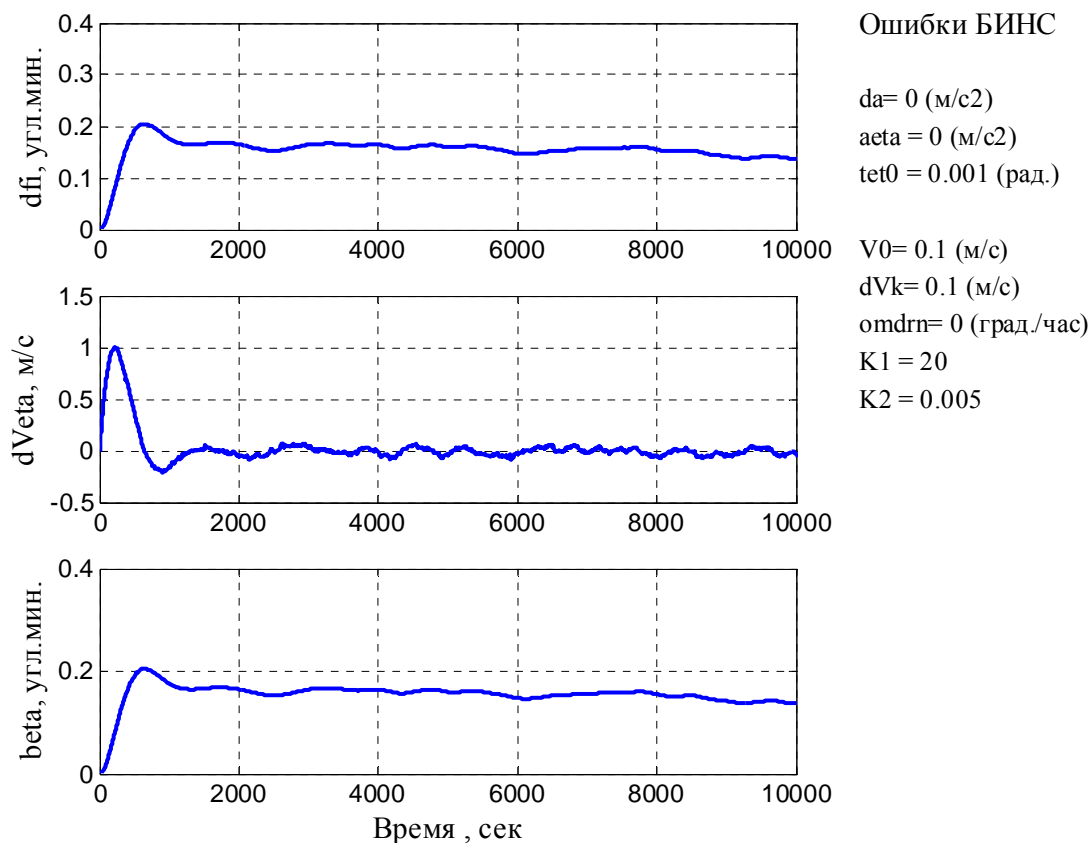


Рис.8.5. Ошибки при демпфировании

9. Коррекция БИНС

Как показывают исследования и опыт эксплуатации, основным недостатком БИНС, как и других инерциальных навигационных систем – нарастание погрешностей со временем. Уменьшение погрешностей за счет совершенствования чувствительных элементов сопряжено с большими трудностями и затратами. Значительный эффект повышения точности достигается при коррекции БИНС от других навигационных систем, обладающих высокими точностными характеристиками. Это могут быть доплеровские измерители скорости или лаги, спутниковые навигационные системы, астронавигационные системы, различные обзорно-сравнительные системы. Комплексные системы, включающие несколько различных систем, называют иногда интегрированными.

Наиболее привлекательным и массовым в настоящее время является интегрирование инерциальной навигационной системы (ИНС) и спутниковой навигационной системы (СНС). Основные особенности ИНС и СНС приведены в таблице 9.1.

Таблица 9.1. Основные свойства и недостатки СНС и ИНС

<i>Тип системы</i>	<i>Основные свойства</i>	<i>Недостатки</i>
СНС	Высокая точность (порядок 1 м в определении координат и 0,1 м/с в определении скорости). Ошибки не имеют тенденции к росту. Высокочастотный характер ошибок.	Низкая скорость обновления информации (1-10 Гц). Отсутствие информации об ориентации (как правило). Подверженность помехам.
ИНС	Высокая скорость выдачи информации (до 100 Гц). Полный набор необходимой информации для управления, включая ориентацию. Полная автономность. Неподверженность внешним помехам. Низкочастотный характер ошибок (шулеровские колебания, суточные колебания, нарастание во времени).	Неограниченный рост ошибок во времени. Необходимость знания модели гравитационного поля. Необходимость начальной выставки при запуске и любом перерыве в работе.

При интегрировании ИНС и СНС могут использоваться различные схемы. Простейшей является разомкнутая схема, базирующаяся на известной в комплексных системах [10] схеме компенсации. Обязательным условием при использовании такой схемы является разный частотный состав помех систем,

используемых в комплексной системе. Этому условию, как видно из табл.9.1, полностью отвечают ИНС и СНС.

9.1. Разомкнутая схема комплексирования со спутниковой навигационной системой

В такой схеме (рис.9.1) чаще всего применяют фильтр Калмана для получения оценок ошибок ИНС. Входным сигналом для фильтра является разность координат и составляющих скорости, вырабатываемых ИНС и СНС. Эта раз-

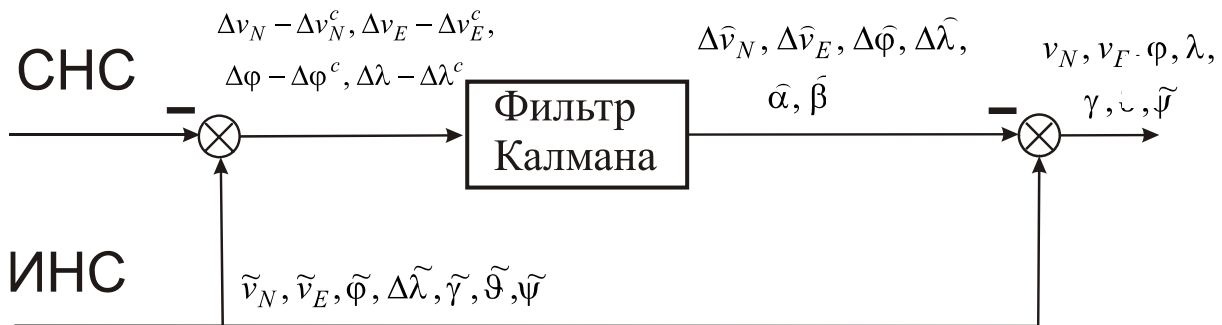


Рис.9.1. Разомкнутая схема комплексирования ИНС и СНС

ность соответствует разности ошибок ИНС $\Delta v_N, \Delta v_E, \Delta \varphi, \Delta \lambda$ и СНС $\Delta v_N^c, \Delta v_E^c, \Delta \varphi^c, \Delta \lambda^c$:

$$\Delta v_N - \Delta v_N^c, \Delta v_E - \Delta v_E^c, \Delta \varphi - \Delta \varphi^c, \Delta \lambda - \Delta \lambda^c.$$

Разность ошибок, проходя через фильтр Калмана, практически очищается от ошибок СНС. Благодаря возможностям фильтра, на выходе получаем не только оценки ошибок координат и скорости, но также оценки ошибок углов ориентации объекта $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$. Ошибка азимутального канала δ не оценивается. Затем из реальных выходных сигналов ИНС вычитаем оценки их ошибок и получаем практически точные значения навигационных параметров, вырабатываемых ИНС. Для улучшения работы азимутального канала необходимо интегрирование с курсовой системой. Зачастую в качестве такой используют магнитную систему.

Недостаток разомкнутой схемы в том, что при пропадании сигнала СНС из-за действия помех, в тоннелях, в тени зданий или деревьев корректирующий сигнал, а с ним и положительный эффект комплексирования, тотчас же исчезает.

Рассмотрим пример моделирования оценки ошибок в разомкнутой схеме интегрирования.

При использовании фильтра Калмана пользуются следующей матричной формой записи линейной модели исследуемой системы

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u} + G\bar{w}, \quad (9.1)$$

где \bar{x} - n -мерный вектор состояния системы; \bar{u} - r -мерный вектор управления; w - k -мерный вектор случайных воздействий; A - матрица состояния размерности $n \times n$; B - матрица управления размерности $n \times r$; G - матрица передачи случайных воздействий размерности $n \times k$.

Как правило, наблюдатель не имеет возможности измерять полный вектор состояния системы \bar{x} . Измеряемая информация (доступная либо необходимая для решения поставленных задач), определяется следующим уравнением:

$$\bar{y} = H\bar{x} + \bar{v}, \quad (9.2)$$

где \bar{y} - m -мерный вектор измерения; \bar{v} - m -мерный вектор помех измерения; H - матрица измерения размерности $m \times n$.

Воздействия w и помехи v будем считать гауссовскими случайными процессами типа белого шума с нулевыми математическими ожиданиями

$$M[w(t)] = 0, \quad M[v(t)] = 0$$

и корреляционными матрицами

$$M[w(t)w^T(\tau)] = Q(t)\delta(t-\tau); \quad M[v(t)v^T(\tau)] = R(t)\delta(t-\tau),$$

где $Q(t)$ - симметрическая неотрицательно-определенная ($k \times k$) матрица интенсивности белого шума $w(t)$; $R(t)$ - симметрическая положительно определенная ($m \times m$) - матрица интенсивности белого шума $v(t)$; $\delta(t)$ - дельта - функция Дирака.

Начальное состояние системы $x(t_0)$ характеризуется известным математическим ожиданием $M[x(t_0)] = \bar{x}_0$ и корреляционной матрицей $M\left\{[x(t_0) - \bar{x}_0][x(t_0) - \bar{x}_0^T]\right\} = P(t_0, t_0)$. Также предполагается, что начальное состояние системы, случайные воздействия и помехи измерений взаимно некоррелированы при всех $t \geq t_0$.

Построение фильтра Калмана сводится к определению матрицы коэффициентов усиления K , которая бы обеспечила оптимальную оценку (в смысле минимума дисперсии ошибки оценивания) вектора состояния.

Дискретный фильтр Калмана

В дискретном фильтре Калмана непрерывной динамической системе (9.1) и измерениям (9.2) соответствуют записанная в разностной форме дискретная система и дискретные измерения

$$\bar{x}_{k+1} = F_k \bar{x}_k + \Psi_k \bar{u}_k + \Gamma_k \bar{w}_k; \quad (9.3)$$

$$\bar{y}_k = H_k \bar{x}_k + \bar{v}_k, \quad (9.4)$$

где подстрочные индексы « k » и « $k+1$ » указывают номер дискретного момента времени t_k и t_{k+1} ; шаг дискретизации $\Delta t = t_{k+1} - t_k$;

$F_k = \exp(A \cdot \Delta t)$ - переходная матрица системы в момент времени t_k , которая может быть представлена приближенно в виде разложения в ряд

$$F_k = I + F_k \Delta t + \frac{1}{2} (F_k \Delta t)^2 + \dots ;$$

$\Gamma_k \cong F_k G_k \Delta t$ - матрица, определяющая влияние вектора входных шумов w_{k-1} в момент времени t_k , в первом приближении $\Gamma_k \approx G_k \Delta t$;

$\Psi_k \cong F_k B_k \Delta t$ - матрица, определяющая влияние вектора управления u_{k-1} в момент времени t_k , в первом приближении $\Psi_k \approx B_k \Delta t$;;

I - единичная матрица;

Матрицы интенсивностей векторных дискретных гауссовских шумов w_k системы и v_k измерений связаны с соответствующими матрицами непрерывной динамической системы соотношениями:

$$Q_k = \frac{Q(t_k)}{\Delta t}, \quad R_k = \frac{R(t_k)}{\Delta t}.$$

Для оценки вектора состояния можно использовать алгоритм линейного дискретного фильтра Калмана :

- зададим начальное значение \hat{x}_{k0} оценки вектора переменной состояния, начальное значение предсказанной (априорной) корреляционной матрицы ошибок \check{P}_{k0} , матрицы интенсивностей шумов Q_k и R_k ;

- получим предсказанное (априорное) значение вектора переменных состояния

$$\check{x}_{k+1} = F_k \hat{x}_k + B u_k ,$$

- рассчитаем значения коэффициентов фильтра

$$K_k = \check{P}_k H_k^T [H_k \check{P}_k H_k^T + R_k]^{-1},$$

- вычислим скорректированные (апостериорное) значение оценки вектора состояния

$$\hat{x}_k = \check{x}_k + K_k [y_k - H_k \check{x}_k],$$

- вычислим скорректированную (апостериорную) корреляционную матрицу

ошибок фильтра

$$\widehat{P}_k = [I - K_k H_k] \check{P}_k ,$$

- рассчитаем значение предсказанной (априорной) корреляционной матрицы ошибок для нового шага вычислений

$$\check{P}_{k+1} = F_k \widehat{P}_k F_k^T + Q_k ,$$

- переходим на новый цикл вычислений.

Для облегчения вычислений можно взять приближенное значение переходной матрицы $F = I + A \Delta t$; \widehat{x}_k - скорректированное (апостериорное) значение оценки вектора состояния, \check{x}_k - предсказанное (априорное) значение оценки вектора состояния, K – матрица коэффициентов усиления Калмана, \widehat{P}_k - скорректированная (апостериорная) корреляционная матрица ошибок фильтра, \check{P}_k - предсказанная (априорная) корреляционная матрица ошибок фильтра, R - матрица интенсивностей шумов наблюдения (измерения) v , Q_k – матрица интенсивностей входных возмущений w . Начальная матрица P_k обычно содержит диагональные элементы, соответствующие начальным дисперсиям ошибок соответствующих переменных состояния.

В качестве модели БИНС возьмем ее уравнения ошибок (6.8), (6.10), (6.11) в виде

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= -\omega_\eta \delta + \omega_\zeta \alpha - \Delta v_N / R_N - c_{11} \Delta \omega_{xc} - c_{12} \Delta \omega_{yc} - c_{13} \Delta \omega_{zc}, \\ \dot{\alpha} &= -\omega_\zeta \beta + \omega_\xi \delta + \Delta v_E / R_E - u \sin \varphi \cdot \Delta \varphi - c_{21} \Delta \omega_{xc} - c_{22} \Delta \omega_{yc} - c_{23} \Delta \omega_{zc}, \\ \dot{\delta} &= -\omega_\xi \alpha + \omega_\eta \beta + \Delta v_E \operatorname{tg} \varphi / R_E + (v_E / (R_E \cos^2 \varphi) + u \cos \varphi) \Delta \varphi - c_{31} \Delta \omega_{zc} - c_{32} \Delta \omega_{xc} - c_{33} \Delta \omega_{yc}. \\ \Delta \dot{v}_E &= \delta \cdot a_N - \alpha \cdot a_H + c_{11} \Delta a_{xc} + c_{12} \Delta a_{yc} + c_{13} \Delta a_{zc}, \\ \Delta \dot{v}_N &= -\delta \cdot a_E + \beta \cdot a_H + c_{21} \Delta a_{xc} + c_{22} \Delta a_{yc} + c_{23} \Delta a_{zc}, \\ \Delta \dot{v}_H &= \alpha \cdot a_E - \beta \cdot a_N + c_{31} \Delta a_{xc} + c_{32} \Delta a_{yc} + c_{33} \Delta a_{zc}. \\ \Delta \dot{\varphi} &= \Delta v_N / R_N, \\ \Delta \dot{\lambda} &\approx \frac{1}{R_E \cos \varphi} (\Delta v_E + v_E \operatorname{tg} \varphi \Delta \varphi). \end{aligned} \tag{9.5}$$

Эти уравнения необходимо представить в векторно-матричной форме (9.1). Вектор переменных состояния будет

$$\bar{x} = [\beta, \alpha, \delta, \Delta v_E, \Delta v_N, \Delta v_H, \Delta \varphi, \Delta \lambda]^T .$$

Матрица состояния

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \omega_\zeta & -\omega_\eta & 0 & -\frac{1}{R_N} & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_\zeta & 0 & \omega_\xi & \frac{1}{R_E} & 0 & 0 & -u \sin \varphi & 0 \\ \omega_\eta & -\omega_\xi & 0 & \frac{\operatorname{tg} \varphi}{R_E} & 0 & 0 & \frac{v_E}{R_E \cos^2 \varphi} + u \cos \varphi & 0 \\ 0 & -a_H & a_N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_H & 0 & -a_E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_N & a_E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_N} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_E \cos \varphi} & 0 & 0 & \frac{v_E \operatorname{tg} \varphi}{R_E \cos \varphi} & 0 \end{bmatrix}.$$

Если ошибки сигналов измерителей имеют постоянную и случайную составляющие

$$\Delta \omega_{ic} = \bar{\omega}_{opi} + \varepsilon_{oi}; \quad \Delta a_{ic} = \Delta \bar{a}_i + \varepsilon_{ai}, \quad i = x, y, z,$$

запишем вектор управления $\vec{u} = [\bar{\omega}_{opx}, \bar{\omega}_{opy}, \bar{\omega}_{opz}, \Delta \bar{a}_x, \Delta \bar{a}_y, \Delta \bar{a}_z]^T$.

Матрица управления B имеет вид

$$B = \begin{bmatrix} -c_{11} & -c_{12} & -c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ -c_{21} & -c_{22} & -c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ -c_{31} & -c_{32} & -c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 0 & 0 & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & 0 & c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Примем, что случайные составляющие являются «белозумными» и могут быть представлены в виде $\varepsilon_{oi} \approx \sigma_{oi} \cdot w$; $\varepsilon_{ai} \approx \sigma_{ai} \cdot w$; $i = x, y, z$, где w – «белый шум» единичной интенсивности, σ_{oi} и σ_{ai} – среднеквадратические ошибки сигналов ДУСов и акселерометров соответственно.

Матрица возмущения G имеет 8 строк, из которых 2 нижних нулевые, ориентируясь на моделирование в пакете MatLab:

$$G = \begin{bmatrix} -c_{11}\sigma_{ax} & -c_{12}\sigma_{ay} & -c_{13}\sigma_{az} & 0 & 0 & 0 \\ -c_{21}\sigma_{ax} & -c_{22}\sigma_{ay} & -c_{23}\sigma_{az} & 0 & 0 & 0 \\ -c_{31}\sigma_{ax} & -c_{32}\sigma_{ay} & -c_{33}\sigma_{az} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{11}\sigma_{ax} & c_{12}\sigma_{ay} & c_{13}\sigma_{az} \\ 0 & 0 & 0 & c_{21}\sigma_{ax} & c_{22}\sigma_{ay} & c_{23}\sigma_{az} \\ 0 & 0 & 0 & c_{31}\sigma_{ax} & c_{32}\sigma_{ay} & c_{33}\sigma_{az} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вектор измерения $y = [\Delta v_E, \Delta v_N, \Delta \varphi, \Delta \lambda]^T$.

Матрица измерения H имеет вид

$$H = [H_1 \quad H_2], \text{ где } H_1 = 0_{(4,3)}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для оценки возможностей интегрированной системы целесообразно проверить ее наблюдаемость.

Матрица наблюдаемости N имеет вид

$$N = \begin{bmatrix} H \\ HA \\ HA^2 \\ \vdots \\ HA^{n-1} \end{bmatrix}, \quad (9.6)$$

где n – порядок системы. Число наблюдаемых переменных равно рангу матрицы N . Ранг матрицы равен наибольшему числу линейно независимых строк (или столбцов) матрицы. В примере $rank(N)$ равен 7, т.е. одна переменная из 8 не наблюдается.

Матрица интенсивностей шумов возмущений принята в виде (фильтр Калмана допускает эмпирические настройки матриц Q, R, P_0)

$$Q = 1e10 \cdot \text{diag}[\sigma_{ax}^2 \quad \sigma_{ay}^2 \quad \sigma_{az}^2 \quad \sigma_{ax}^2 \quad \sigma_{ay}^2 \quad \sigma_{az}^2 \quad 1 \quad 1].$$

Несмотря на то, что в матрице G нижние строки нулевые, интенсивности шума

(элементы 7 и 8) не могут быть нулевыми, иначе можно получить плохую обусловленность матриц фильтра.

Матрица интенсивностей шумов измерений

$$R = \begin{bmatrix} \sigma_{ve}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{vn}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\varphi}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\lambda}^2 \end{bmatrix}.$$

Начальное значение корреляционной матрицы ошибок P соответствует дисперсиям переменных по диагонали или нулям при неопределенности.

Ниже (рис.9.2, 9.3, 9.4) приведены результаты моделирования данной схемы при среднеквадратических ошибках (σ) спутниковой системы в определении координат – 1 м, скорости -0,05 м/с. Возмущающие воздействия – ошибки начального горизонтирования 0,01 град., ошибка гирокомпасирования – 0,1 град., уход гироскопа – 0,1 град./час, ошибка акселерометра 10^{-4} м/с². Из рис. 9.4 видно, что ошибка азимутального канала δ не оценивается. Шум оценивания практически незаметен при оценке ошибок координат, скорости и существенный при оценке ошибок ориентации. При моделировании предполагается, что систематические составляющие помех (вектор u) предварительно определены.

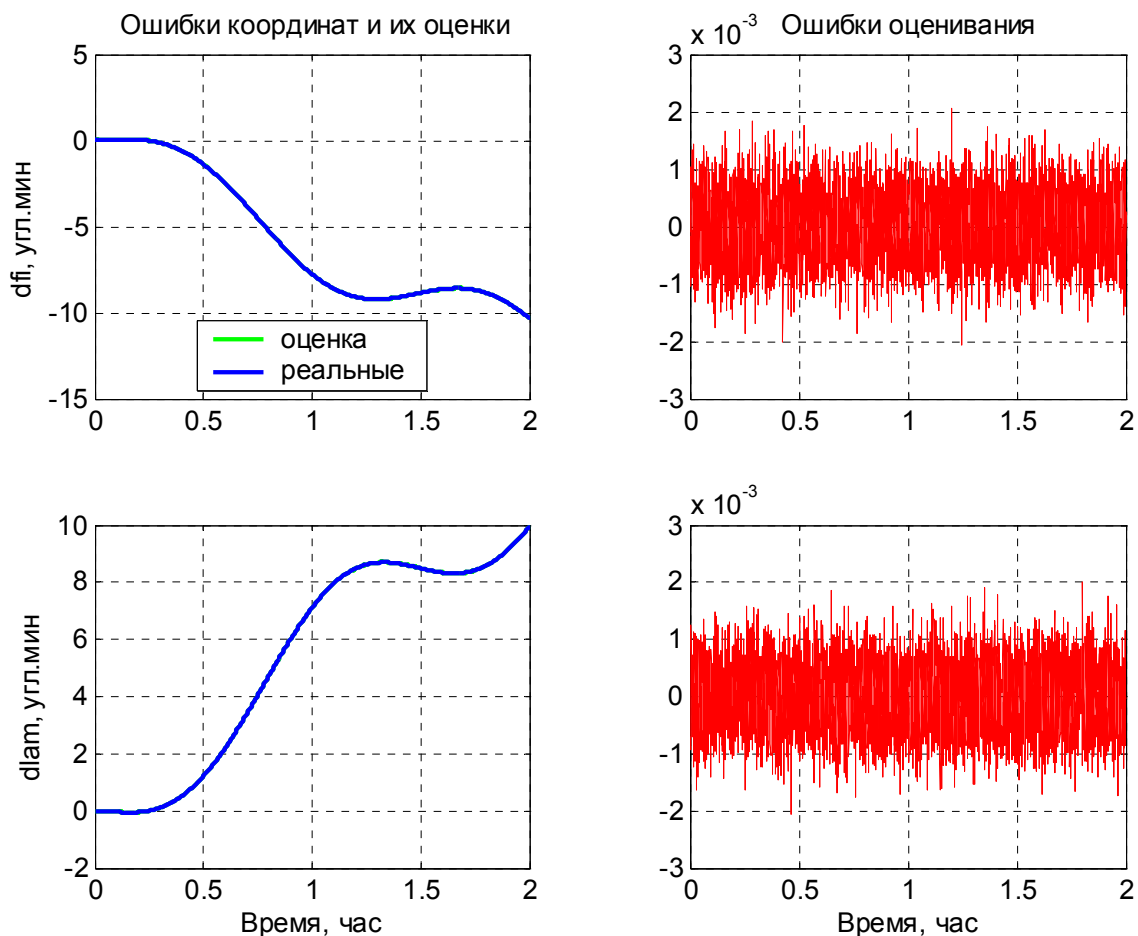


Рис.9.2. Оценивание ошибок координат

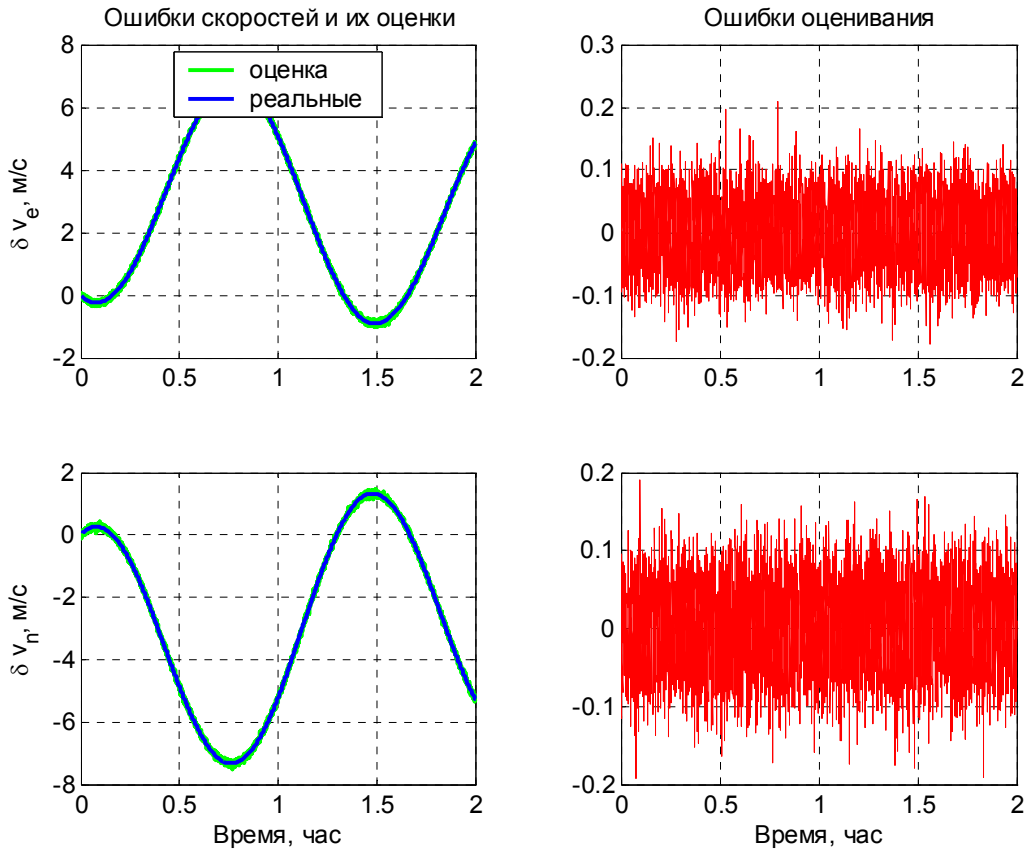


Рис.9.3. Оценивание ошибок скорости

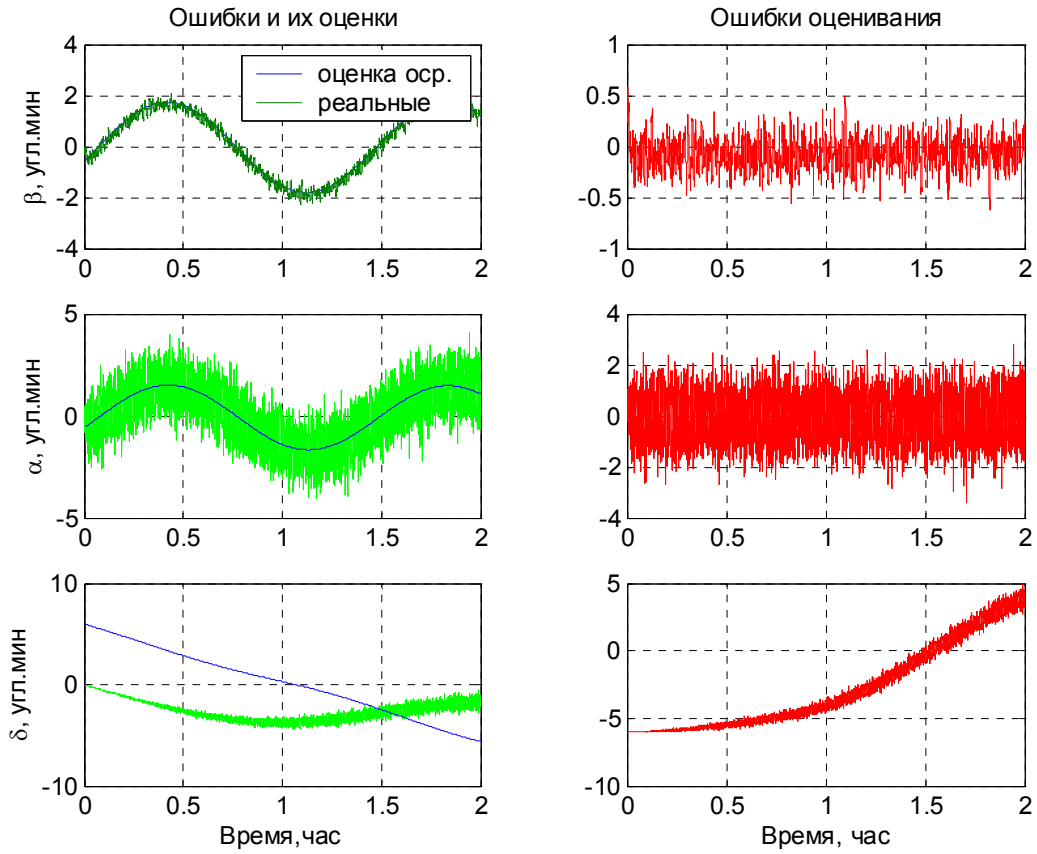


Рис.9.4. Оценивание ошибок углов

Для уменьшения шума измерения можно использовать сглаживание шума путем осреднения на каком-то интервале. На рис. 9.4 показано, что при сглаживании оценки β в окне из 21 точек (скользящее среднее) величина шума ошибки β уменьшается примерно на порядок.

Для сглаживания оценок могут применяться разные алгоритмы [13]. Обычно, при осреднении полагается, что частота поступления первичной информации должна быть на порядок выше, чем частота обновления информации на выходе системы.

При осреднении аналоговых сигналов на некотором интервале T можно воспользоваться теоремой о среднем значении функции $f(t)$:

$$\langle f(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t) dt. \quad (9.7)$$

Таким образом, сглаживание или осреднение может проводиться простым интегрированием показаний измерителей. Для численного интегрирования могут применяться все известные методы.

Так, дискретное выражение для формулы (9.7) в самом простом случае использования метода прямоугольников примет вид суммы:

$$\langle f(k \cdot \Delta t) \rangle_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k \cdot \Delta t), \quad n \cdot \Delta t = T$$

где Δt - шаг дискретизации, n — число шагов на интервале осреднения T .

Часто на практике применяются усредняющие фильтры [12]:

фильтр 1-го порядка $- \frac{1}{T_0 p + 1},$

фильтры 2-го порядка:

с сильным затуханием $- \frac{1}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)},$

с критическим затуханием $- \frac{1}{(T_0 p + 1)^2},$

со слабым затуханием $- \frac{1}{T_0^2 p^2 + 2T_0 \zeta p + 1}.$

Этим динамическим звеньям соответствуют дифференциальные уравнения формирующих фильтров:

для фильтра 1-го порядка: $T_0 \dot{y} + y = x(t);$

для фильтра 2-го порядка: $T_0^2 \ddot{y} + 2\zeta T_0 \dot{y} + y = x(t),$

где $x(t)$ — измеряемая функция; $y(t)$ — сглаженное значение функции $x(t)$.

Если для осреднения воспользоваться не формулами интегрирования (9.7), а усредняющими фильтрами, то задача может быть сведена к численному решению дифференциальных уравнений усредняющих фильтров.

Для наиболее простого метода интегрирования — метода Эйлера, общее выражение которого имеет вид

$$y_{k+1} = y_k + \dot{y}_k \Delta t,$$

соотношения фильтра 1-го порядка примут следующий вид:

$$y_{k+1} = y_k - \frac{\Delta t}{T_0} (y_k - x_k).$$

Этот метод интегрирования дает хорошее приближение при малом шаге дискретизации Δt и малом времени осреднения T .

Для фильтра 2-го порядка дифференциальное уравнение необходимо привести к форме Коши путем замены переменных $y_1 = y$, $y_2 = \dot{y} = \dot{y}$:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= \frac{1}{T_0^2} (-2\zeta T_0 y_2 - y_1 + x), \end{aligned}$$

и к полученной системе уравнений применять известные численные методы интегрирования [8].

Полученные ошибки вычитают из сигналов БИНС, как показано на рис.9.1.

9.2. Замкнутая схема комплексирования со спутниковой навигационной системой

В такой схеме (рис.9.5), в отличие от предыдущей, оценки ошибок используются для формирования корректирующих воздействий в БИНС.

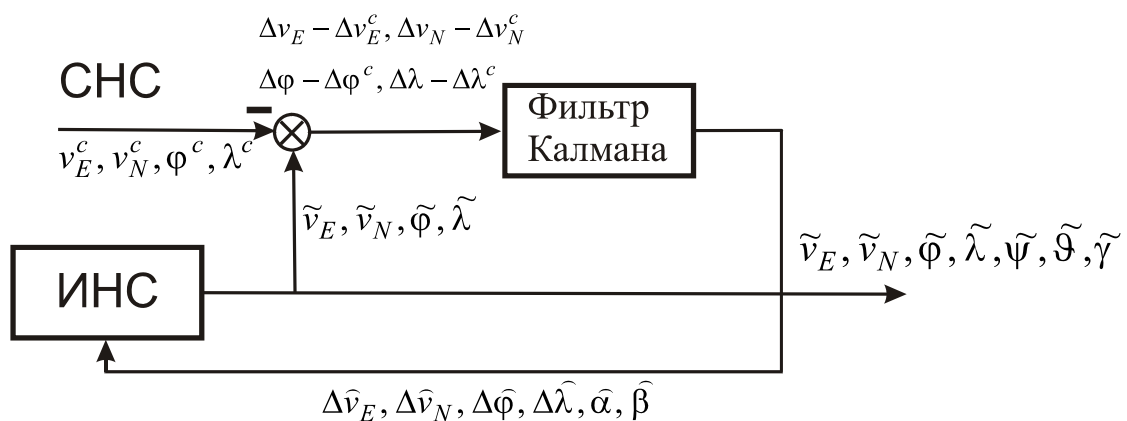


Рис.9.5. Замкнутая схема комплексирования ИНС и СНС

Корректирующие воздействия могут формироваться различным образом. Можно использовать весь комплекс оценок ошибок, можно использовать часть оценок. Чаще всего используют оценки ошибок скорости. Варианты использования

могут быть разные. На рис. 9.6 показано, что, аналогично схеме на рис.8.3, можно ввести корректирующий сигнал с коэффициентом k_2 на вход интеграторов ускорений, можно ввести корректирующий сигнал с коэффициентом k_1 в сигналы датчиков угловой скорости $\vec{\omega}_b$. Можно корректировать сигналы на выходе соответствующих блоков как по всему комплексу выходных параметров (показано на рис. 9.6 как вычитание оценок ошибок), так и по его части. Векторы \vec{b} и \vec{c} содержат оценки ошибок гироскопов и акселерометров, определенные при калибровке (см. гл. 10).

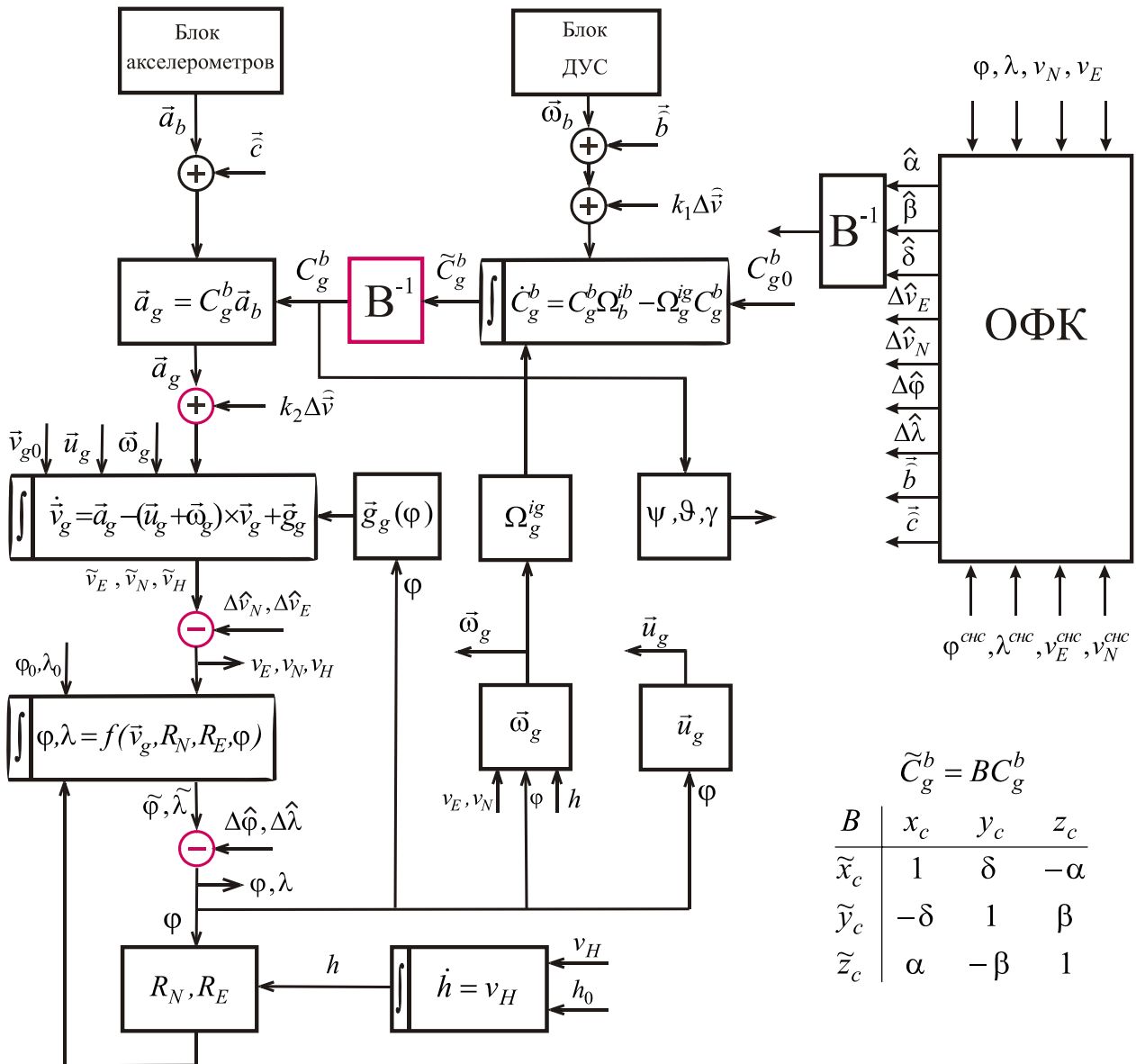


Рис.9.6. Алгоритмы коррекции БИНС

В заключение приведем пример моделирования одной схемы корректируемой системы. На рис. 9.7 показаны ошибки корректируемой БИНС, в которой с помощью фильтра Калмана, используя показания спутниковой системы, используются ранее упомянутые (рис.8.3) корректирующие сигналы с коэффициентами k_1, k_2 и с корректирующим сигналом на входе интеграторов широты и долготы.

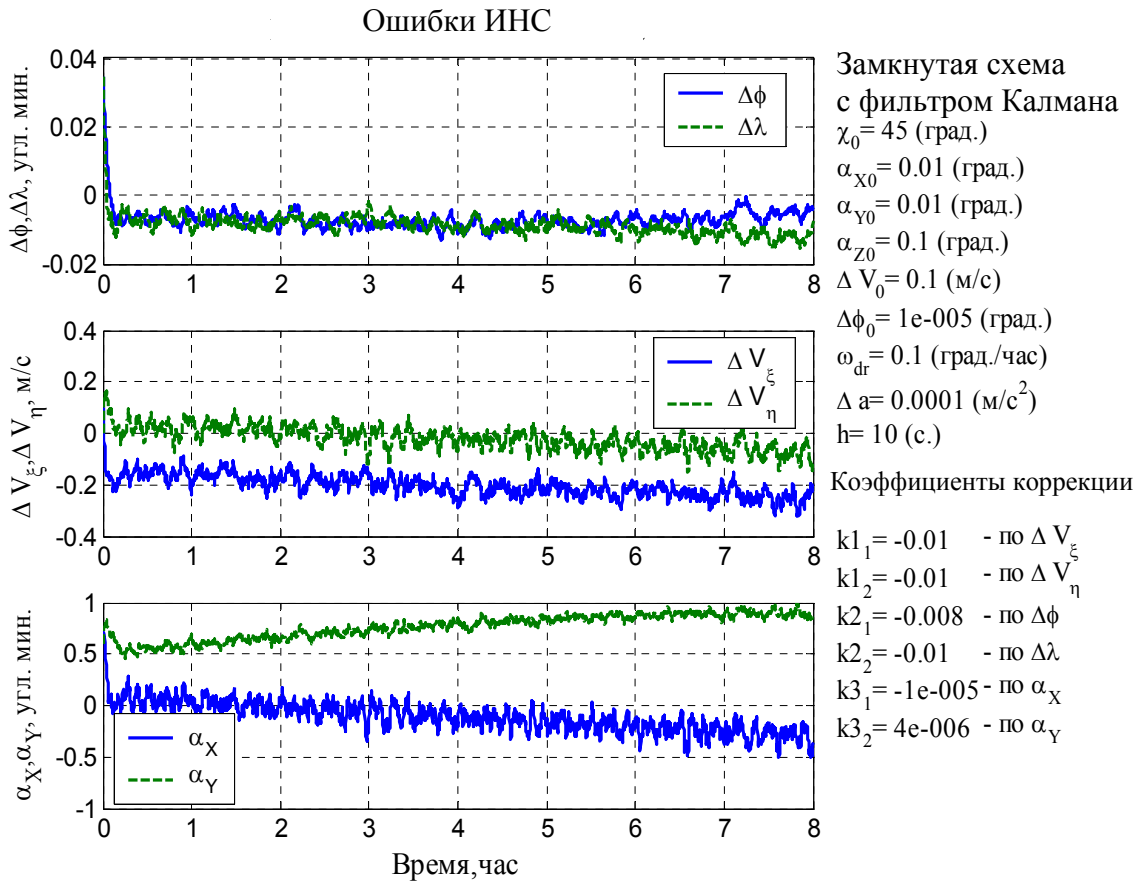


Рис.9.7. Ошибки замкнутой схемы при коррекции по всем оценкам ошибок

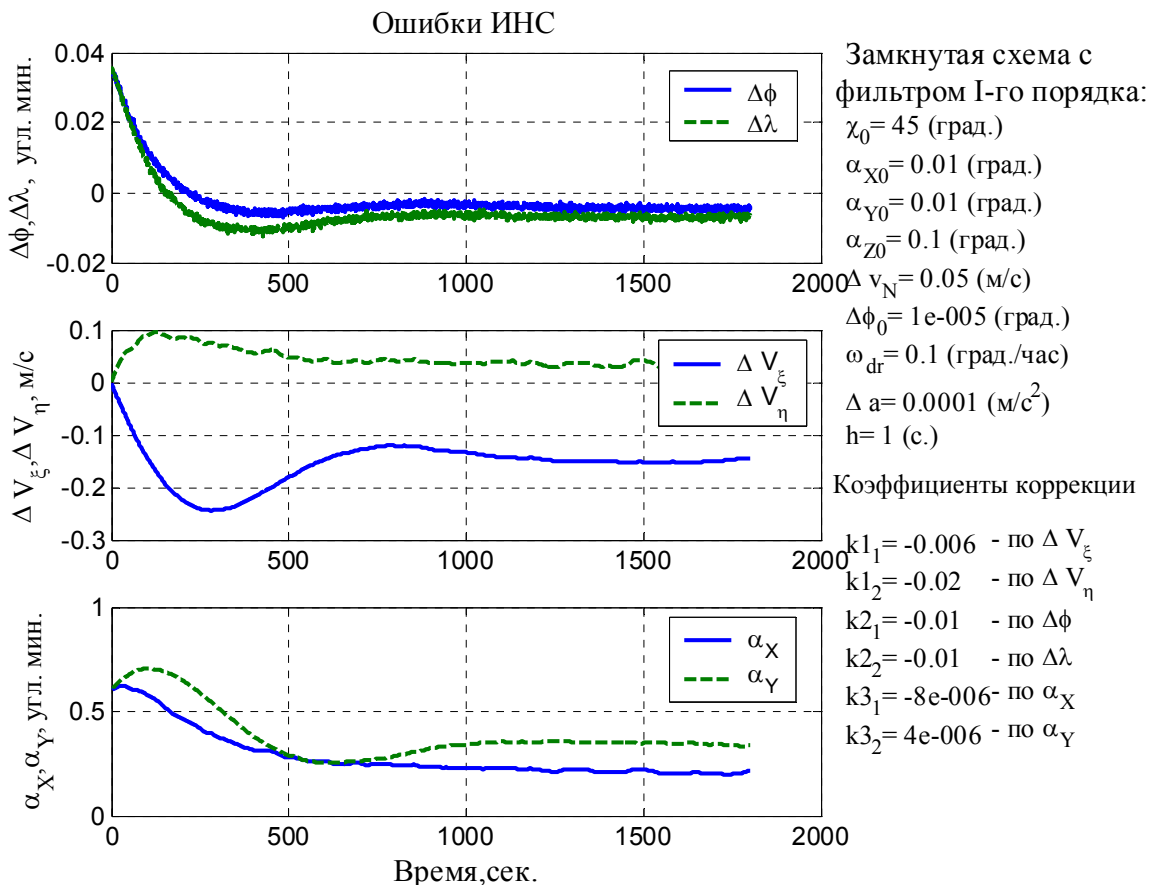


Рис.9.8. Ошибки замкнутой схемы с аperiodическим фильтром

Использование замкнутой схемы дает возможность использовать для оценки погрешностей не фильтр Калмана, а более простые фильтры первого и второго порядка, аналогичные тем, которые используют для сглаживания случайных помех. Такие фильтры позволяют получить оценки ошибок скорости и координат, но не позволяют получить оценки ошибок угловой информации. Но оценки ошибок скорости можно использовать и для коррекции угловой информации. На рис.9.8 приведены ошибки корректируемой БИНС, в которой использован апериодический фильтр с постоянной времени $T=10$ с. Коррекция угловых параметров при этом проводится по оценкам ошибок скорости.

Как показывают результаты моделирования, использование как фильтра Калмана, так и простых фильтров позволяет получить близкие результаты.

При выборе коэффициентов коррекции желательно предварительно оценить пределы выбора исходя из условий устойчивости системы. Это можно сделать, условно разделив восточный, северный и азимутальный каналы.

9.3. Астрокоррекция БИНС в географической системе координат

Пусть на объекте установлены 2 астровизира. Рассмотрим, как можно корректировать информацию БИНС, фиксируя с их помощью положение известных светил.

В режиме начальной выставки необходимо навести астровизеры на выбранные заранее светила. Для этого по данным об экваториальных координатах: прямом восхождении светила α_* и склонении δ_* (из астрономических ежегодников) находят горизонтальные координаты светила: высоту h и азимут A . Горизонтальные координаты вычисляют по известным соотношениям [11]

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta_* + \cos \varphi \cos \delta_* \cos t, \quad t = S_{zp} - \alpha_* + \lambda;$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{-\cos \delta_* \sin t}{\cos \varphi \sin \delta_* - \sin \varphi \cos \delta_* \cos t}.$$

Здесь φ, λ - широта и долгота, S_{zp} - гринвичское звездное время (определяют с помощью астрономических ежегодников).

Для выставки астровизиров в соответствии с рассчитанными углами высоты h и азимутами A в условиях, когда объект может иметь произвольное положение с углами курса ψ , тангажа \mathcal{G} , крена γ необходимо использовать известные зависимости [11].

$$\tilde{q} = \arctg \frac{\sin q \cos \gamma + \sin \gamma (\cos q \sin \mathcal{G} - \operatorname{tgh} \cos \mathcal{G})}{\cos \mathcal{G} \cos q + \operatorname{tgh} \sin \mathcal{G}}; \quad (9.9)$$

$$\tilde{h} = \arcsin(\cos \gamma (\sinh \cos \gamma - \cosh \cos q \sin \mathcal{G}) + \cosh \sin q \sin \gamma).$$

Эти зависимости следуют из рис.9.9. На нем показано положение объекта (связанных осей $x_c y_c z_c$), заданное углами курса ψ , тангажа ϑ , крена γ относительно сопровождающего трехгранника $\xi\eta\zeta$, h – угол истинной высоты светила, q – курсовой угол светила, $q + \psi = A$ – азимут светила, \tilde{h} и \tilde{q} – приборные значения углов.

В рабочем режиме астровизеры удерживают направление на светило, соответствующее истинным углам h и q . Управление визирами производится по зависимостям (9.10).

$$q = \operatorname{arctg} \frac{\sin \vartheta \cos \gamma + \operatorname{tg} \tilde{h} \sin \gamma}{\cos \tilde{q} \cos \vartheta + \sin \vartheta (\sin \tilde{q} \sin \gamma - \operatorname{tg} \tilde{h} \cos \gamma)}; \quad (9.10)$$

$$h = \arcsin(\cos \vartheta (\sin \tilde{h} \cos \gamma - \cos \tilde{h} \sin \tilde{q} \sin \gamma) + \cos \tilde{h} \cos \tilde{q} \sin \vartheta).$$

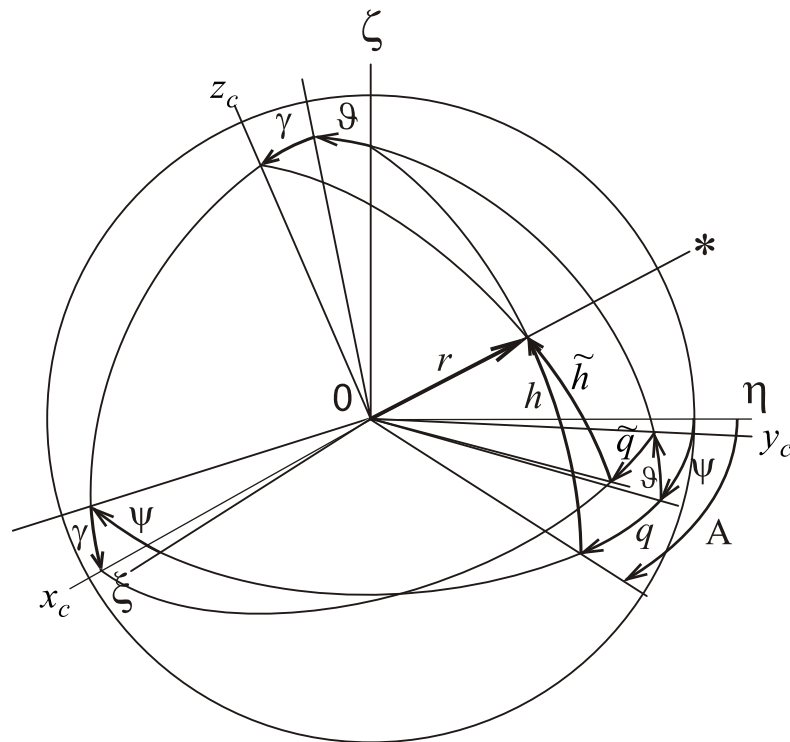


Рис.9.9. Углы положения объекта и светила

БИНС, моделирующая географический сопровождающий трехгранник $\xi\eta\zeta$, выдает информацию об углах ψ, ϑ, γ , как показано ранее, с ошибками δ, β, α (см. рис. 9.10).

Используя (6.8),(6.10),(6.11), уравнения ошибок можно представить в виде

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= -\omega_\eta \delta + \omega_\zeta \alpha + \Delta\omega_\xi - \omega_{\delta\xi}, \\ \dot{\alpha} &= -\omega_\zeta \beta + \omega_\xi \delta + \Delta\omega_\eta - \omega_{\delta\eta}, \\ \dot{\delta} &= -\omega_\xi \alpha + \omega_\eta \beta + \Delta\omega_\zeta - \omega_{\delta\zeta}, \end{aligned} \quad (9.11)$$

$$\Delta\omega_\xi = -\Delta v_N / R,$$

$$\Delta\omega_\eta = \Delta v_E / R - u \sin \varphi \cdot \Delta\varphi,$$

$$\Delta\omega_\zeta = \left(u \cos \varphi + \frac{v_E}{R \cos^2 \varphi}\right) \Delta\varphi + \frac{1}{R} \operatorname{tg} \varphi \cdot \Delta v_E;$$

$$\Delta\dot{v}_E = \delta \cdot a_N - \alpha \cdot a_H + \Delta a_E,$$

$$\Delta\dot{v}_N = -\delta \cdot a_E + \beta \cdot a_H + \Delta a_N,$$

$$\Delta\dot{v}_H = \alpha \cdot a_E - \beta \cdot a_N + \Delta a_H,$$

$$\Delta\dot{\varphi} = -\Delta v_N / R,$$

$$\Delta\dot{\lambda} = \frac{1}{R \cos^2 \varphi} (\Delta v_E \cos \varphi + \Delta\varphi v_E \sin \varphi).$$

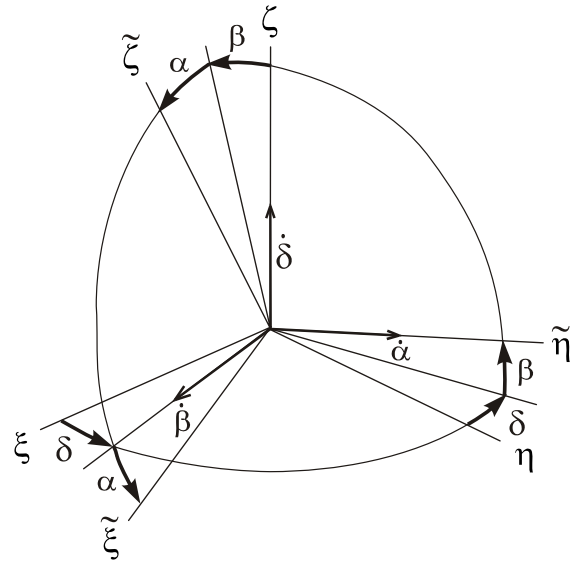


Рис.9.10. Ошибки БИНС

В уравнениях ошибок (9.11) эквивалентные скорости ухода гироскопов, а также эквивалентные ошибки акселерометров в проекциях на оси сопровождающего трехгранника $\xi\eta\zeta$ имеют вид

$$\begin{aligned} \omega_{\delta\xi} &= c_{11}\Delta\omega_{xc} + c_{12}\Delta\omega_{yc} + c_{13}\Delta\omega_{zc}, \\ \omega_{\delta\eta} &= c_{21}\Delta\omega_{yc} + c_{22}\Delta\omega_{xc} + c_{23}\Delta\omega_{zc}, \\ \omega_{\delta\eta} &= c_{31}\Delta\omega_{zc} + c_{32}\Delta\omega_{xc} + c_{33}\Delta\omega_{yc}; \end{aligned} \quad (9.12)$$

$$\begin{aligned} \Delta a_E &= c_{11}\Delta a_{xc} + c_{12}\Delta a_{yc} + c_{13}\Delta a_{zc}, \\ \Delta a_N &= c_{21}\Delta a_{yc} + c_{22}\Delta a_{xc} + c_{23}\Delta a_{zc}, \\ \Delta a_H &= c_{31}\Delta a_{zc} + c_{32}\Delta a_{xc} + c_{33}\Delta a_{yc}; \end{aligned} \quad (9.13)$$

При известных эквивалентных ошибках и направляющих косинусах c_{ij} можно, решая системы уравнений (9.12) и (9.13), найти ошибки каждого измерителя БИНС.

Ошибки моделирования базиса $\xi\eta\zeta$ с помощью БИНС приводят, как показано на рис.9.11, к ошибкам измерения высоты и азимута светила.

По аналогии с (9.9) запишем

$$\tilde{A} = \operatorname{arctg} \frac{\sin(A + \delta) \cos \alpha + \sin \alpha (\cos(A + \delta) \sin \beta - \operatorname{tgh} \cos \beta)}{\cos \beta \cos(A + \delta) + \operatorname{tgh} \sin \beta}; \quad (9.14)$$

$$\tilde{h} = \operatorname{arcsin}(\cos \alpha (\sinh \cos \alpha - \cosh \cos(A + \delta) \sin \beta) + \cosh \sin(A + \delta) \sin \alpha).$$

$$\text{Погрешности измерения } \Delta h = \tilde{h} - h, \quad \Delta A = \tilde{A} - A.$$

Упростим выражения (9.14), разложив их в ряд Тейлора. С учетом малости ошибок БИНС (не более долей градуса), ограничимся только первыми членами ряда

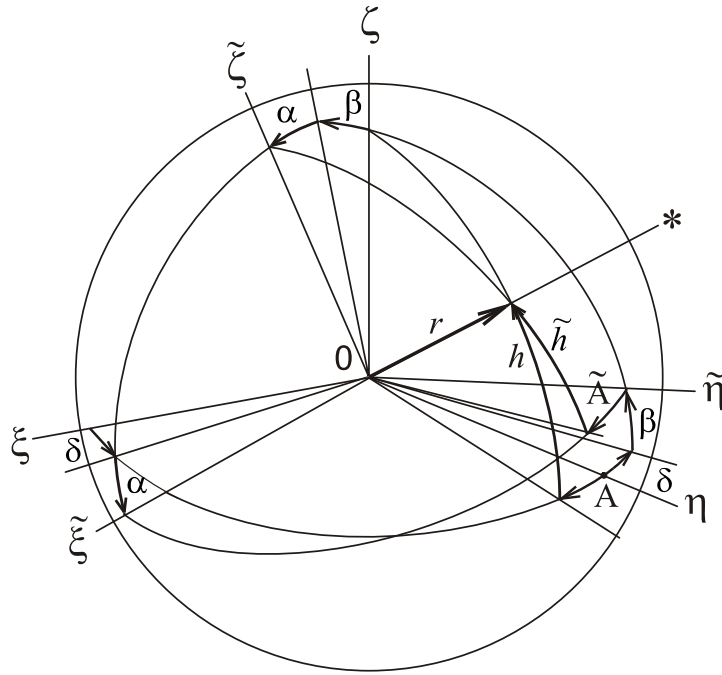


Рис.9.11. Углы направления светила с учетом ошибок БИНС

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= A + \delta - tgh[\beta \sin(A + \delta) + \alpha \cos(A + \delta)], \\ \tilde{h} &= h - \beta \cos(A + \delta) + \alpha \sin(A + \delta). \end{aligned} \quad (9.15)$$

Ошибки измерения азимута и высоты из-за ошибок БИНС будут

$$\begin{aligned} \Delta A &= \delta - tgh[\beta \sin(A + \delta) + \alpha \cos(A + \delta)], \\ \Delta h &= -\beta \cos(A + \delta) + \alpha \sin(A + \delta). \end{aligned}$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} \sin(A + \delta) &= \sin A \cos \delta + \cos A \sin \delta \approx \sin A + \cos A \cdot \delta, \\ \cos(A + \delta) &= \cos A \cos \delta - \sin A \sin \delta \approx \cos A - \sin A \cdot \delta. \end{aligned}$$

Если используем для коррекции 2 светила, получим уравнения измерений

$$\begin{aligned} \Delta A_1 &= \delta - tgh_1[\beta(\sin A_1 + \delta \cos A_1) + \alpha(\cos A_1 - \delta \sin A_1)] \approx \delta - tgh_1[\beta \sin A_1 + \alpha \cos A_1], \\ \Delta h_1 &= -\beta(\cos A_1 - \delta \sin A_1) + \alpha(\sin A_1 + \delta \cos A_1) \approx -\beta \cos A_1 + \alpha \sin A_1. \\ \Delta A_2 &\approx \delta - tgh_1(\beta \sin A_2 + \alpha \cos A_2), \\ \Delta h_2 &\approx -\beta \cos A_2 + \alpha \sin A_2. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Необходимо решить задачу корректирования БИНС по измерениям положения светил. Для этого оценим погрешности БИНС по проведенным измерениям. Используем для этого фильтр Калмана.

Подготовим уравнения ошибок и измерений в известной форме

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \mathbf{A}\bar{x} + \mathbf{B}\bar{u} + \mathbf{G}\bar{w}, \\ \bar{y} &= \mathbf{H}\bar{x} + \bar{v}.\end{aligned}$$

Из уравнений ошибок (9.11) запишем матрицу состояния \mathbf{A} .

Положим при этом, что погрешности приборов имеют систематическую и случайную составляющие

$$\Delta a_i = \mu_i + Q_{i1}w_{i1}, \quad i=E,N,H; \quad \omega_{\partial i} = \varepsilon_i + Q_{i2}w_{i2}, \quad i=\xi,\eta,\zeta. \quad (9.17)$$

К уравнениям ошибок добавим дифференциальные уравнения изменения постоянных составляющих ошибок акселерометров и датчиков угловой скорости.

$$\dot{\mu}_i = 0;$$

$$\dot{\varepsilon}_i = 0;$$

Вектор переменных состояния запишем в виде

$$\bar{x} = (\beta, \alpha, \delta, \Delta v_E, \Delta v_N, \Delta v_H, \Delta \varphi, \Delta \lambda, \varepsilon_\xi, \varepsilon_\eta, \varepsilon_\zeta, \mu_E, \mu_N, \mu_H)^T.$$

Вектор управления \bar{u} и матрица управления \mathbf{B} в данном случае нулевые. Матрица состояния \mathbf{A} будет

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

где

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_\zeta & -\omega_\eta & 0 & -\frac{1}{R} & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_\zeta & 0 & \omega_\xi & \frac{1}{R} & 0 & 0 & -u \sin \varphi & 0 \\ \omega_\eta & -\omega_\xi & 0 & \frac{1}{R} \operatorname{tg} \varphi & 0 & 0 & u \cos \varphi + \frac{v_E}{R \cos^2 \varphi} & 0 \\ 0 & -a_H & a_N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_H & 0 & -a_E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_N & a_E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R \cos \varphi} & 0 & 0 & \frac{v_E \operatorname{tg} \varphi}{R \cos \varphi} & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{12} = 0_{(8,6)}, \quad A_{21} = 0_{(6,8)}, \quad A_{22} = 0_{(6,6)}.$$

Вектор возмущений - $\vec{w} = w_{(6,1)}$ с единичной интенсивностью.

$$\text{Матрица возмущений } G = \begin{bmatrix} g_{11} \\ g_{21} \end{bmatrix},$$

$$g_{11} = \text{diag}(\sigma_{\partial x}, \sigma_{\partial y}, \sigma_{\partial z}, \sigma_{ax}, \sigma_{ay}, \sigma_{az}), \quad g_{21} = \mathbf{0}_{(8,6)}.$$

Вектор измерения $\vec{y} = (\Delta A_1, \Delta A_2, \Delta h_1, \Delta h_2)$. Тогда матрицу измерений запишем в виде

$$H = \begin{bmatrix} -tgh_1 \sin A_1 & -tgh_1 \cos A_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -tgh_2 \sin A_2 & -tgh_2 \cos A_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos A_1 & \sin A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos A_2 & \sin A_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вектор шумов измерений $\vec{v} = C\vec{w}_1$, где

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_{A1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{A2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{h1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{h2} \end{bmatrix},$$

$\vec{w}_1 = w_{(4,1)}$ с единичной интенсивностью.

Матрица интенсивности возмущений принята единичной

$$Q = I_{(14,14)}.$$

Матрица интенсивностей шумов измерения принята $R = C^2$.

Проверка наблюдаемости по известному критерию определения ранга матрицы наблюдаемости N (9.6) показывает, что ранг матрицы равен 6, т.е. наблюдаемыми являются лишь 6 переменных из 14.

Как показывают численные эксперименты (вычеркивание строк и столбцов и проверка наблюдаемости после этого), наблюдаемыми являются переменные $\beta, \alpha, \delta, \Delta v_E, \Delta v_N, \Delta \varphi$.

Добавление еще одного светила не увеличивает наблюдаемости системы. Для улучшения наблюдаемости необходимо использовать дополнительные эталонные системы, например, высотомер или меры, описанные в п.10.4.

Рассмотрим пример коррекции БИНС с использованием 7 переменных: $\beta, \alpha, \delta, \Delta v_E, \Delta v_N, \Delta \varphi, \Delta \lambda$ (критерий наблюдаемости показывает, что наблюдаемы первые 6 переменных).

Матрица A приобретает вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \omega_\zeta & -\omega_\eta & 0 & -\frac{1}{R} & 0 & 0 \\ -\omega_\zeta & 0 & \omega_\xi & \frac{1}{R} & 0 & -u \sin \varphi & 0 \\ \omega_\eta & -\omega_\xi & 0 & \frac{1}{R} \operatorname{tg} \varphi & 0 & A_{36} & 0 \\ 0 & -a_H & a_N & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_H & 0 & -a_E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R \cos \varphi} & 0 & \frac{v_E \operatorname{tg} \varphi}{R \cos \varphi} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{36} = u \cos \varphi + \frac{v_E}{R \cos^2 \varphi}.$$

Матрица H

$$H = \begin{bmatrix} -\operatorname{tgh}_1 \sin A_1 & -\operatorname{tgh}_1 \cos A_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\operatorname{tgh}_2 \sin A_2 & -\operatorname{tgh}_2 \cos A_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos A_1 & \sin A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos A_2 & \sin A_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Начальные координаты светил $A_1 = 10$ град., $h_1 = 20$ град., $A_2 = 80$ град., $h_2 = 70$ град. Учтены известные рекомендации [11] о том, что высота светила не должна превышать 70 град., а разность азимутов должна стремиться к 90 град. Погрешности измерения направления на светила (среднеквадратическая ошибка σ) примем $\Delta A_i = \Delta h_i = 2e^{-5} \text{ рад} (\approx 4'')$.

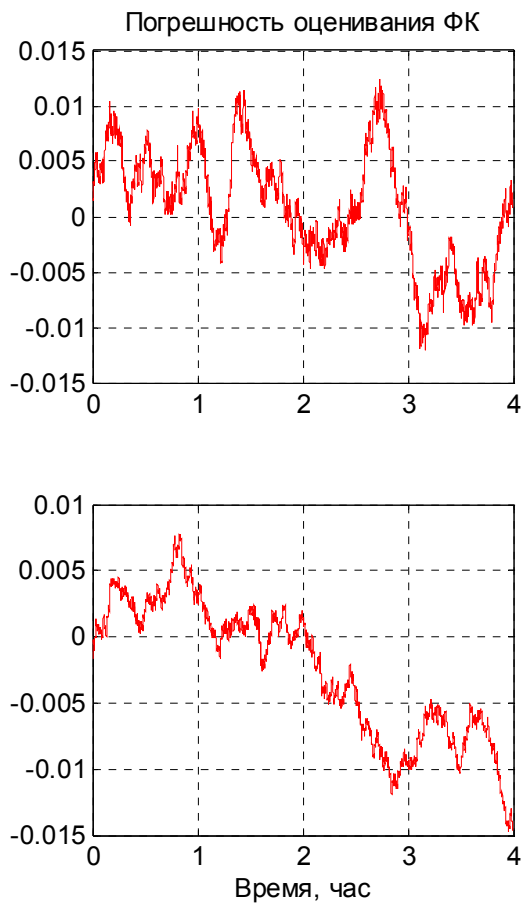
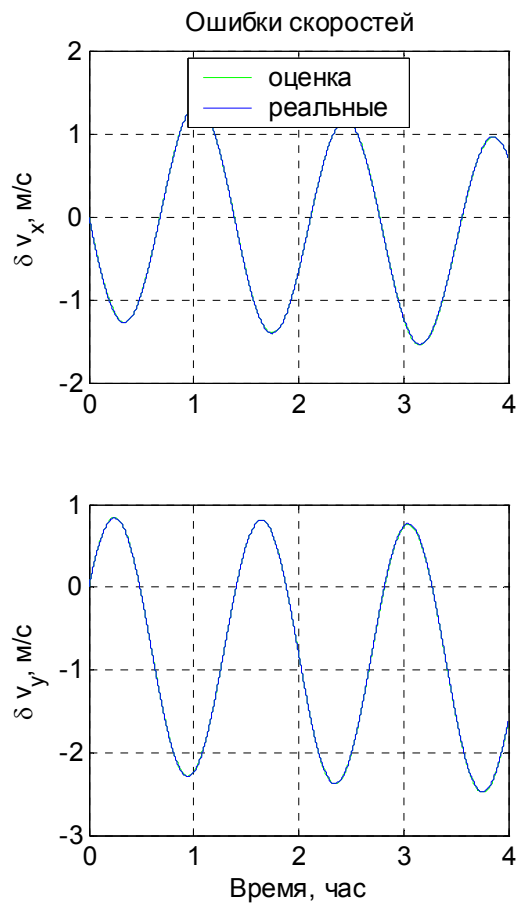
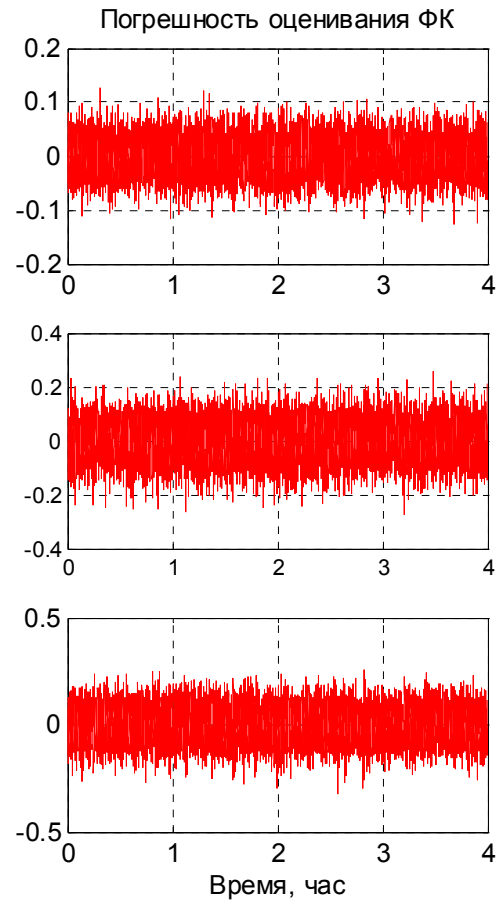
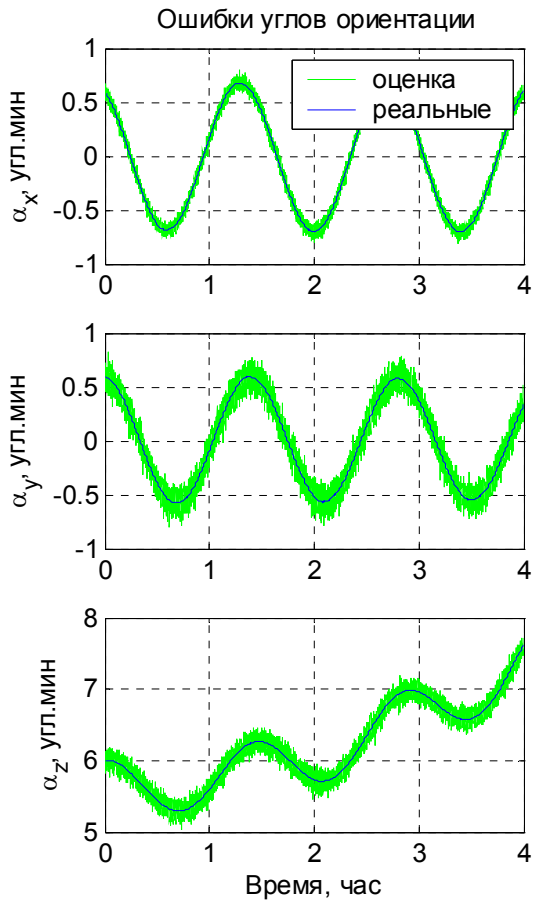
Ошибки начальной выставки БИНС относительно горизонта – 0,01 град. (=0,6 угл. мин.), в азимуте 0,1 град. (=6 угл. мин.).

Эквивалентные погрешности акселерометров $\sigma_a = 1e^{-5} \text{ м/с}^2$, эквивалентные погрешности гироскопов $\sigma_\omega = 1e^{-2} \text{ град./час}$.

Горизонтальная скорость движения 60 м/с, начальная широта - 30 град.

Шаг интегрирования 1 сек. При моделировании использован метод Рунге-Кутты 4-го порядка. Результаты моделирования в течение 4 часов приведены на рисунках 9.12.

Анализ графиков показывает, что хорошо оцениваются угловые ошибки и компоненты скорости и хуже – широта и долгота. Обратим внимание на то, ошибка определения долготы имеет нарастающий характер (это соответствует



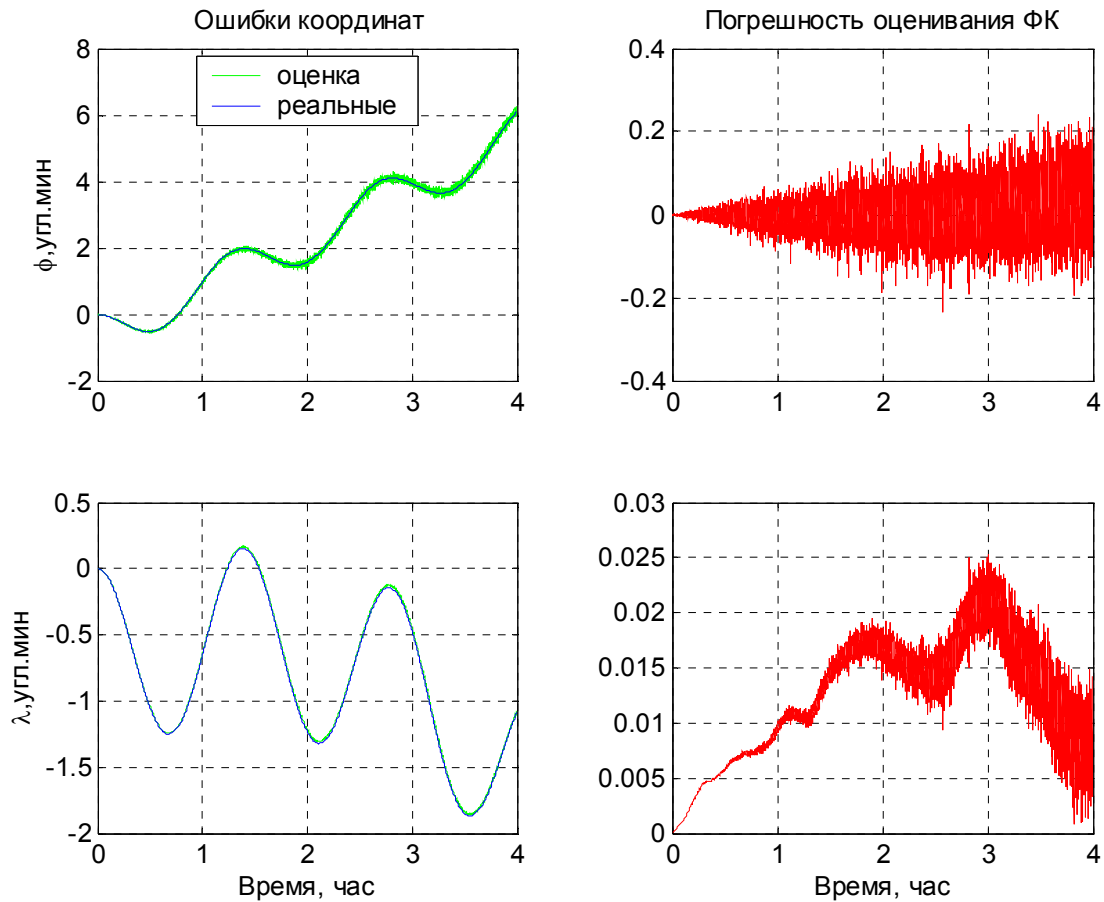


Рис.9.12. Оценивание ошибок БИНС с использованием астровизиров

ненаблюдаемости переменной). Но погрешность оценивания долготы возрастет настолько медленно, что на интервале 4 часов может быть приемлемой.

Если использовать для коррекции еще 2 светила (всего будет 4, аналогично 4 спутникам СНС), то точности оценки возрастают.

Если сравнить оценки систем с астрокоррекцией и спутниковой коррекцией, то видно, что в системе с астрокоррекцией, где в качестве эталона используется «угловая» информация, лучше всего оцениваются углы ошибок, а затем уже скорости и координаты. В системе со спутниковой коррекцией, где используется эталонная информация по скорости и координатам, лучше оцениваются скорости и координаты и хуже – ошибки углов. Очевидно, что наилучшие результаты могут быть достигнуты в интегрированной системе, где одновременно используются в качестве эталонных и спутниковая и астро- системы.

Оцененные ошибки можно использовать для коррекции по разомкнутой схеме (рис. 9.1) или замкнутой схеме (рис. 9.2, 9.3)

10. Калибровка БИНС

Блок чувствительных элементов (БЧЭ) БИНС, или, как его еще называют – инерциально-измерительный модуль (ИИМ) состоит из акселерометров и гироскопов, каждый из которых имеет свои индивидуальные особенности в виде коэффициента передачи (масштабного коэффициента), смещения нуля, перекрестных связей и других параметров. Кроме того, при установке чувствительных элементов в блоке в силу инструментальных погрешностей изготовления возникают несовпадения осей чувствительности элементов с базовыми осями блока.

Для обеспечения высокой точности БИНС необходимо иметь высокоточную информацию от измерителей, что может быть обеспечено только при учете указанных особенностей каждого акселерометра и гироскопа.

Для начала составляется адекватная модель выходных сигналов чувствительных элементов, учитывающая их особенности и погрешности, затем производится определение параметров этой модели. В дальнейшем, при штатной работе БИНС, выходные сигналы акселерометров и гироскопов корректируются с учетом принятой модели, чтобы как можно точнее определять проекции кажущегося ускорения и угловой скорости вдоль базовых осей БИНС.

Определение параметров выходных сигналов измерителей (параметров их математических моделей) с целью последующего их учета называют калибровкой.

10.1. Модели выходных сигналов инерциальных измерителей

С одной стороны, чем полнее модель учитывает особенности измерительных устройств, тем точнее можно определить измеряемые величины. Однако, чрезмерное усложнение модели приводит к увеличению объема вычислений в вычислителе БИНС, и это неоправданно если модель дополняется мало значимыми составляющими, а тем более если они слабо повторяемы.

В общем случае, зависимость выходных сигналов чувствительных элементов от измеряемых величин является нелинейной, и допускает линеаризацию для ограниченного диапазона измеряемых величин. В ИНС используются высокоточные измерители, одним из требований к которым является линейность их характеристик в требуемом диапазоне измерений. Требования к нелинейности здесь обычно на уровне сотых долей процента и меньше. Поэтому в дальнейшем рассмотрим только линейные модели инерциальных измерителей.

10.1.1. Модель выходных сигналов акселерометров

Основываясь на приведенных выше рассуждениях, представим выходные сигналы трех акселерометров БИНС в виде

$$\begin{aligned}
 U_{ax} &= K_x a_{x1} + U_{ax0} + n_{ax}; \\
 U_{ay} &= K_y a_{y2} + U_{ay0} + n_{ay}; \\
 U_{az} &= K_z a_{z3} + U_{az0} + n_{az},
 \end{aligned}
 \tag{10.1}$$

где U_{ax} , U_{ay} , U_{az} – значения выходных сигналов акселерометров в размерности напряжения, тока, кода АЦП, частоты или других величин; a_{x1} , a_{y2} , a_{z3} – значения проекций кажущегося ускорения на оси чувствительности акселерометров Ox_1 , Oy_2 , Oz_3 ; K_x , K_y , K_z – масштабные коэффициенты (коэффициенты передачи) каждого из акселерометров; U_{ax0} , U_{ay0} , U_{az0} – смещения нулей акселерометров; n_{ax} , n_{ay} , n_{az} – шумы измерения.

Модель измерений (10.1) можно записать в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} U_{ax} \\ U_{ay} \\ U_{az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x & 0 & 0 \\ 0 & K_y & 0 \\ 0 & 0 & K_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{x1} \\ a_{y2} \\ a_{z3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{ax0} \\ U_{ay0} \\ U_{az0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{ax} \\ n_{ay} \\ n_{az} \end{bmatrix}
 \tag{10.2}$$

Важно отметить, что модель измерений (10.1) или (10.2) – это модель не самих чувствительных элементов акселерометров, а модель всего измерительного тракта каждого из них, включающего сам чувствительный элемент акселерометра, а также измерительные, усилительные и преобразующие элементы.

На практике, из-за остаточных погрешностей установки акселерометров в ИИМ (БЧЭ) БИНС, направления их осей чувствительности Ox_1 , Oy_2 , Oz_3 не ортогональны, и не совпадают с базовыми осями ИИМ БИНС. Последние привязаны обычно к внешними базовым (или установочным) поверхностям ИИМ.

Обозначим через $Oxyz$ базовую систему координат БИНС. Зададим параметрами углов α_i , β_i положение осей чувствительности Ox_1 , Oy_2 , Oz_3 каждого из акселерометров относительно базовых осей БИНС, как показано на рис.10.1.

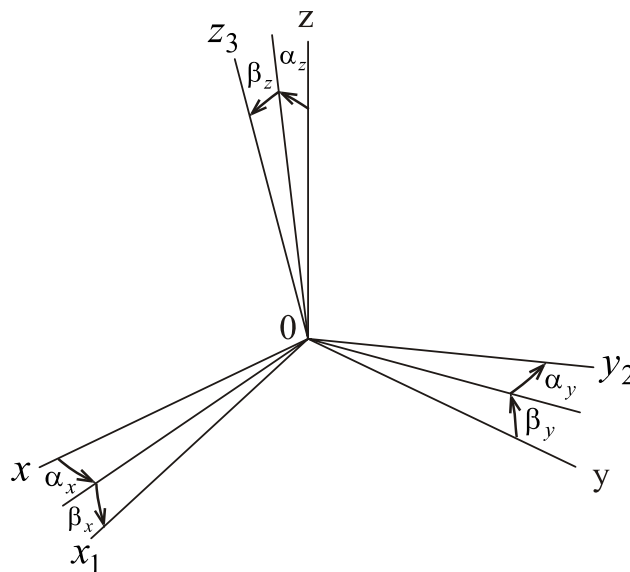


Рис.10.1. Углы перекоса осей чувствительности акселерометров
 Более подробно задание углов перекоса иллюстрирует рис.10.2.

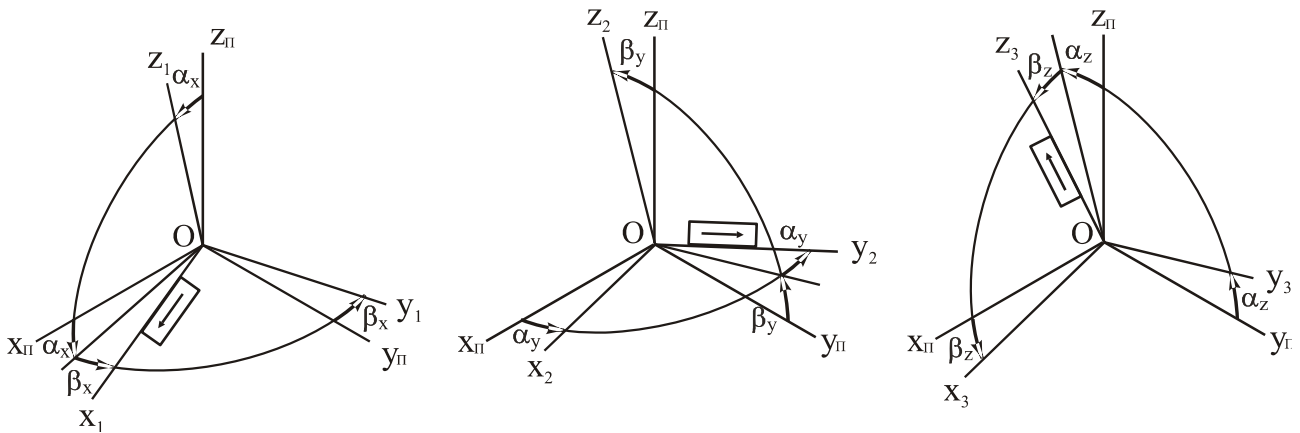


Рис.10.2. Углы поворота осей чувствительности акселерометров относительно базовой системы координат БИНС

Используя рис.10.2, можно определить проекции кажущегося ускорения объекта на осях чувствительности Ox_1 , Oy_2 , Oz_3 акселерометров:

$$\begin{bmatrix} a_{x1} \\ a_{y2} \\ a_{z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_x \cos\beta_x & \sin\beta_x & -\sin\alpha_x \cos\beta_x \\ -\sin\beta_y & \cos\alpha_y \cos\beta_y & \sin\alpha_y \cos\beta_y \\ \sin\beta_z & -\sin\alpha_z \cos\beta_z & \cos\alpha_z \cos\beta_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}. \quad (10.2)$$

Подставляя выражение (10.2) в (10.1), получим окончательную модель сигналов измерений акселерометров:

$$\begin{bmatrix} U_{ax} \\ U_{ay} \\ U_{az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x & 0 & 0 \\ 0 & K_y & 0 \\ 0 & 0 & K_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha_x \cos\beta_x & \sin\beta_x & -\sin\alpha_x \cos\beta_x \\ -\sin\beta_y & \cos\alpha_y \cos\beta_y & \sin\alpha_y \cos\beta_y \\ \sin\beta_z & -\sin\alpha_z \cos\beta_z & \cos\alpha_z \cos\beta_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{ax0} \\ U_{ay0} \\ U_{az0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{ax} \\ n_{ay} \\ n_{az} \end{bmatrix} \quad (10.3)$$

10.1.2. Модель выходных сигналов гироскопов

Рассмотрим наиболее распространенный тип гироскопов, применяемых в БИНС – датчики угловой скорости (ДУС). Как было обосновано выше, рассмотрим линейную модель выходных сигналов ДУС:

$$\begin{aligned} U_{ax} &= R_x \omega_{x1} + U_{ax0} + n_{ax}; \\ U_{ay} &= R_y \omega_{y1} + U_{ay0} + n_{ay}; \\ U_{az} &= R_z \omega_{z1} + U_{az0} + n_{az}, \end{aligned} \quad (10.4)$$

где U_{ax} , U_{ay} , U_{az} – значения выходных сигналов ДУС в размерности напряжения, тока, кода АЦП, частоты или других величин; ω_{x1} , ω_{y2} , ω_{z3} – значения проекций абсолютной угловой скорости на оси чувствительности ДУС Ox_1 , Oy_2 ,

Oz_3 ; R_x, R_y, R_z – масштабные коэффициенты каждого ДУС; $U_{ax0}, U_{ay0}, U_{az0}$ – смещения нулей ДУС; n_{ax}, n_{ay}, n_{az} – шумы измерения.

В БИНС применяют гироскопы, построенные на совершенно различных принципах, соответственно и базовая линейная модель (10.4) может уточняться за счет специфических составляющих. Так, для большинства типов гироскопов характерна существенная чувствительность нуля к линейному ускорению движения. В частности, это все электромеханические гироскопы, в том числе поплавковые, ДНГ, в меньшей степени – волоконно-оптические, твердотельные волновые гироскопы. Для таких гироскопов модель выходных сигналов (10.4) расширяют, добавляя слагаемые, пропорциональные проекциям a_{x1}, a_{y2}, a_{z3} кажущегося ускорения на оси чувствительности гироскопов:

$$\begin{aligned} U_{ax} &= R_x \omega_{x1} + U_{ax0} + b_{11}^* a_{x1} + b_{12}^* a_{y1} + b_{13}^* a_{z1} + n_{ax}; \\ U_{ay} &= R_y \omega_{y1} + U_{ay0} + b_{21}^* a_{x1} + b_{22}^* a_{y1} + b_{23}^* a_{z1} + n_{ay}; \\ U_{az} &= R_z \omega_{z1} + U_{az0} + b_{31}^* a_{x1} + b_{32}^* a_{y1} + b_{33}^* a_{z1} + n_{az}, \end{aligned} \quad (10.5)$$

где $U_{ax0}, U_{ay0}, U_{az0}$ – смещения нулей, не зависящие от ускорений; b_{ij}^* – коэффициенты чувствительности к ускорениям (так называемый «дрейф от g»). Для ряда гироскопов, например, ДНГ в модель (10.5) добавляют слагаемые, пропорциональные произведению ускорений (так называемый «дрейф от g-квадрат»).

Также ряд типов гироскопов имеет, например, заметную чувствительность к напряженности магнитного поля, что также требует соответствующего расширения математической модели.

Запишем модель измерений гироскопов (10.5) в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} U_{ax} \\ U_{ay} \\ U_{az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_x & 0 & 0 \\ 0 & R_y & 0 \\ 0 & 0 & R_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_{x1} \\ \omega_{y1} \\ \omega_{z1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{ax0} \\ U_{ay0} \\ U_{az0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}^* & b_{12}^* & b_{13}^* \\ b_{21}^* & b_{22}^* & b_{23}^* \\ b_{31}^* & b_{32}^* & b_{33}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{x1} \\ a_{y1} \\ a_{z1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{ax} \\ n_{ay} \\ n_{az} \end{bmatrix}. \quad (10.6)$$

Снова подчеркнем, что модель измерений (10.5) или (10.6) – это модель всего измерительного тракта каждого из гироскопов, включающего сам датчик гироскопа, а также измерительные, усилительные и преобразующие элементы.

Для БИНС необходимо определять угловую скорость вращения вокруг базовых осей $Oxyz$ ИИМ (БЧЭ) БИНС, а не вокруг измерительных осей гироскопов Ox_1, Oy_2, Oz_3 , которые к тому же не ортогональны, и не совпадают с базовыми осями ИИМ БИНС ввиду остаточных погрешностей установки гироскопов в ИИМ. Аналогично процедуре, описанной в п.10.1.1 для акселерометров, получим связь выходных сигналов гироскопов U_{ax}, U_{ay}, U_{az} с требуемыми проекциями $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ абсолютной угловой скорости на базовые оси БИНС:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} U_{ax} \\ U_{ay} \\ U_{az} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_x & 0 & 0 \\ 0 & R_y & 0 \\ 0 & 0 & R_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\gamma_x \cos\rho_x & \sin\rho_x & -\sin\gamma_x \cos\rho_x \\ -\sin\rho_y & \cos\gamma_y \cos\rho_y & \sin\gamma_y \cos\rho_y \\ \sin\rho_z & -\sin\gamma_z \cos\rho_z & \cos\gamma_z \cos\rho_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{ax0} \\ U_{ay0} \\ U_{az0} \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} b_{11}^* & b_{12}^* & b_{13}^* \\ b_{21}^* & b_{22}^* & b_{23}^* \\ b_{31}^* & b_{32}^* & b_{33}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\gamma_x \cos\rho_x & \sin\rho_x & -\sin\gamma_x \cos\rho_x \\ -\sin\rho_y & \cos\gamma_y \cos\rho_y & \sin\gamma_y \cos\rho_y \\ \sin\rho_z & -\sin\gamma_z \cos\rho_z & \cos\gamma_z \cos\rho_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{ax} \\ n_{ay} \\ n_{az} \end{bmatrix} \quad (10.7)
\end{aligned}$$

где углы γ_i , ρ_i определяют перекосы измерительных осей гироскопов относительно базовой системы координат $Oxyz$ ИИМ БИНС аналогично углам перекося акселерометров α_i , β_i , показанным на рис.10.2.

10.1.3. Упрощение моделей выходных сигналов инерциальных измерителей

Полученные модели выходных сигналов акселерометров (10.3) и гироскопов (10.7) пригодны для исследований. Для практического применения в алгоритмах БИНС эти модели содержат избыточное число промежуточных вычислений, которые можно выполнить один раз еще на этапе калибровки. Например, нет смысла определять в качестве параметров углы перекося α_i , β_i , γ_i , ρ_i , а затем в вычислителе БИНС делать сложные тригонометрические вычисления. Можно сразу после калибровки вычислить необходимые тригонометрические функции и в качестве параметров модели использовать готовые коэффициенты. Таким образом, использование моделей (10.3) и (10.7) значительно упрощается:

$$\begin{bmatrix} U_{ax} \\ U_{ay} \\ U_{az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x & 0 & 0 \\ 0 & K_y & 0 \\ 0 & 0 & K_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{ax0} \\ U_{ay0} \\ U_{az0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{ax} \\ n_{ay} \\ n_{az} \end{bmatrix}; \quad (10.8)$$

$$\begin{bmatrix} U_{ax} \\ U_{ay} \\ U_{az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_x & 0 & 0 \\ 0 & R_y & 0 \\ 0 & 0 & R_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{ax0} \\ U_{ay0} \\ U_{az0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{ax} \\ n_{ay} \\ n_{az} \end{bmatrix}, \quad (10.9)$$

где следующие матрицы вычисляются заранее (вне вычислителя БИНС):

$$\begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_x \cos \beta_x & \sin \beta_x & -\sin \alpha_x \cos \beta_x \\ -\sin \beta_y & \cos \alpha_y \cos \beta_y & \sin \alpha_y \cos \beta_y \\ \sin \beta_z & -\sin \alpha_z \cos \beta_z & \cos \alpha_z \cos \beta_z \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_x \cos \rho_x & \sin \rho_x & -\sin \gamma_x \cos \rho_x \\ -\sin \rho_y & \cos \gamma_y \cos \rho_y & \sin \gamma_y \cos \rho_y \\ \sin \rho_z & -\sin \gamma_z \cos \rho_z & \cos \gamma_z \cos \rho_z \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}^* & b_{12}^* & b_{13}^* \\ b_{21}^* & b_{22}^* & b_{23}^* \\ b_{31}^* & b_{32}^* & b_{33}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \gamma_x \cos \rho_x & \sin \rho_x & -\sin \gamma_x \cos \rho_x \\ -\sin \rho_y & \cos \gamma_y \cos \rho_y & \sin \gamma_y \cos \rho_y \\ \sin \rho_z & -\sin \gamma_z \cos \rho_z & \cos \gamma_z \cos \rho_z \end{bmatrix}.$$

Следующим шагом на пути уменьшения объема вычислений в БИНС является предварительное перемножение (вне вычислителя БИНС) первых двух матриц в выражениях (10.8) и (10.9). В результате получаем окончательные модели выходных сигналов акселерометров и гироскопов:

$$\begin{bmatrix} U_{ax} \\ U_{ay} \\ U_{az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{ax0} \\ U_{ay0} \\ U_{az0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{ax} \\ n_{ay} \\ n_{az} \end{bmatrix}; \quad (10.10)$$

$$\begin{bmatrix} U_{\omega x} \\ U_{\omega y} \\ U_{\omega z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{\omega x0} \\ U_{\omega y0} \\ U_{\omega z0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{\omega x} \\ n_{\omega y} \\ n_{\omega z} \end{bmatrix}, \quad (10.11)$$

Отметим, что выражения (10.10), (10.11) полностью идентичны исходным моделям (10.3), (10.7), но намного проще для использования в вычислителе БИНС. Более того, идентификация параметров моделей измерителей на этапе калибровки выполняется сразу для моделей в форме (10.10), (10.11) без предварительной оценки углов перекося и масштабных коэффициентов как это требовалось бы при использовании исходных моделей (10.3), (10.7).

10.2. Калибровка инерциального измерительного модуля БИНС в производстве

Как отмечалось выше, задачей калибровки БИНС является определение параметров модели выходных сигналов акселерометров и гироскопов с целью последующего их учета при вычислении действительных значений кажущегося ускорения и абсолютной угловой скорости.

Калибровка акселерометров и гироскопов производится в составе инерциального измерительного модуля, то есть после их установки в ИИМ и полного электрического монтажа штатных измерительных цепей. Это имеет следующие преимущества:

1. Достигается строгая взаимная увязка измерительных осей акселерометров и гироскопов посредством их согласования с одними и теми же базовыми осями ИИМ.
2. Калибруются штатные каналы измерения БИНС целиком, а не отдельные части (чувствительные элементы).

Калибровка ИИМ в производстве выполняется на специальных стендах путем задания тестовых входных воздействий (ускорений и угловых скоростей) и измерения выходных сигналов акселерометров и гироскопов. Методик определения параметров акселерометров и гироскопов разработано много, учитывая к тому же различные виды имеющегося оборудования для калибровки. В частности, при наличии многоосного (как минимум – двухосного) поворотного стенда, позволяющего позиционировать и вращать с высокой точностью ИИМ, весь цикл калибровки не требует перестановок ИИМ и выполняется наиболее быстро. Однако учитывая высокую стоимость прецизионных многоосных поворотных установок (сотни тысяч долларов США), калибровки ИИМ производятся чаще на одноосных поворотных стендах. При этом возникает необходимость перестановки ИИМ на стенде, чтобы задавать тестовые входные воздействия по всем измерительным осям.

Рассмотрим две наиболее известные методики определения параметров – одну на примере калибровки акселерометров (с формированием пар уравнений для нахождения каждого параметра), другую – на примере калибровки гироскопов (с обработкой всей совокупности измерений методом наименьших квадратов).

10.2.1. Калибровка акселерометров

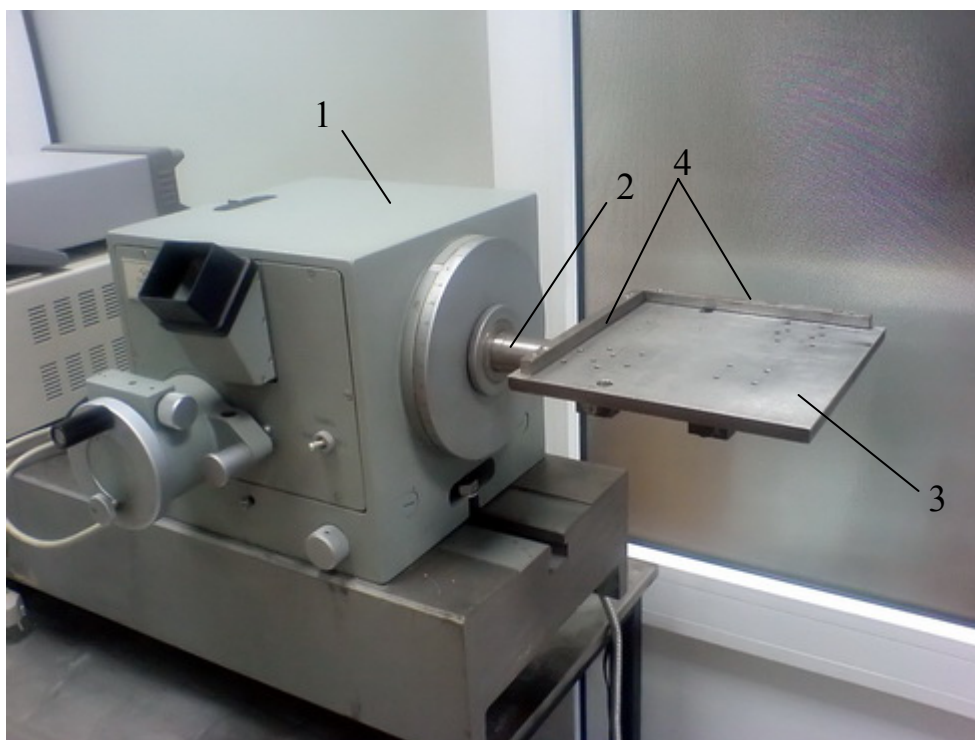
Калибровка акселерометров в диапазоне измерений $\pm 1g$ производится путем задания известных положений ИИМ относительно вектора ускорения силы тяжести \vec{g} . При необходимости калибровки ИИМ в более широком диапазоне ускорений используются специальные центрифуги.

Для высокоточного задания положений ИИМ относительно \vec{g} , наиболее часто используются прецизионные оптические делительные головки (ОДГ), обеспечивающие точность поворота ИИМ на уровне 5 – 10 угловых секунд. Для развязки от внешних вибраций, суточных колебаний зданий и прочих механических воздействий, ОДГ устанавливаются на специальном фундаменте, развязанном относительно здания, в котором находится калибровочный участок.

На рис.10.3 показана оптическая делительная головка ОДГЭ-5 на валу 2 которой закреплена базовая площадка 3 с боковыми базами 4. Плоскость базово-

вой площадки параллельна оси вала, а боковые базы установлены перпендикулярно и параллельно оси вращения вала ОДГ.

ИИМ или другое тестируемое устройство должно иметь как минимум две перпендикулярные базовые поверхности, которые и формируют базовые оси устройства. ИИМ устанавливается одной своей базой на площадку ОДГ и прижимается другой базой к одной из боковых баз площадки. Это обеспечивает параллельность одной из осей ИИМ оси вращения ОДГ.



*Рис.10.3. Оптическая делительная головка ОДГЭ-5
1 – ОДГ; 2 – вал; 3 – базовая площадка; 4 – боковые базы*

Для выполнения калибровки ось вращения ОДГ и базовая площадка выставляются в горизонте также с точностью до 5 – 10 угловых секунд с использованием прецизионных жидкостных уровней. Это позволяет с высокой точностью сориентировать базовые оси ИИМ относительно вектора ускорения силы тяжести \vec{g} .

Для определения параметров модели (10.10) выходных сигналов акселерометров необходимо по каждой из трех осей ИИМ задавать известные ускорения. Это означает, что каждая из трех осей должна изменять свое положение относительно вектора \vec{g} . При повороте ИИМ на ОДГ вокруг одной оси эта ось не меняет своего положения относительно вектора \vec{g} и, следовательно, измеритель с осью чувствительности по этой оси не может быть откалиброван. Поэтому ИИМ переставляют на ОДГ, меняя ось вращения.

Рассмотрим один из самых распространенных вариантов установок и поворотов ИИМ при калибровке на ОДГ, схема которого показана приведена в табл.10.1.

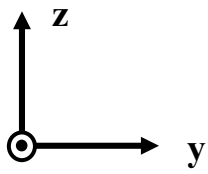
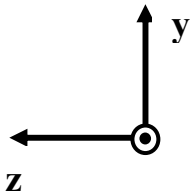
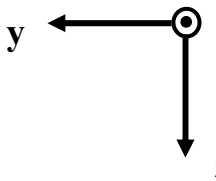
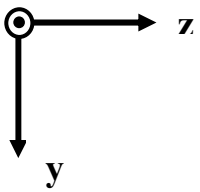
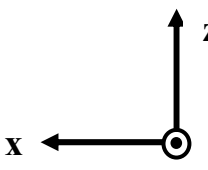
В фиксированных положениях, задаваемых с помощью ОДГ, ИИМ остается неподвижным относительно Земли, поэтому кажущееся ускорение, измеряемое акселерометрами (3.13) $\vec{a} = \dot{\vec{v}} + (2\vec{\omega} + \vec{\omega}^o) \times \vec{v} - \vec{g}$, в данном случае

$$\vec{a} = -\vec{g}, \tag{10.12}$$

Учитывая, что вектор \vec{g} направлен вертикально вниз, значения проекций кажущегося ускорения на оси ИИМ для каждого положения ИИМ также приведены в табл.10.1.

Подставляя значения проекций кажущегося ускорения a_x, a_y, a_z из табл.10.1 в модель выходных сигналов акселерометров (10.10), и перемножая матрицы, получим значения выходных сигналов акселерометров в каждом из положений ИИМ, которые также приведены в табл.10.1. Для существенного уменьшения влияния шумов измерения, сигналы акселерометров осредняются в течении времени измерения (обычно 30...60 с), поэтому в выражениях в табл.10.1 шумы измерений n_{ax}, n_{ay}, n_{az} не учитываются.

Таблица 10.1. Положение осей ИИМ при калибровке на ОДГ и соответствующие значения ускорений и выходов акселерометров

№	Положение осей ИИМ	Проекция ускорения	Выходные сигналы акселерометров
Поворот вокруг оси X			
1		$a_x = 0$ $a_y = 0$ $a_z = g$	$U_{ax1} = k_{13} g + U_{ax0}$ $U_{ay1} = k_{23} g + U_{ay0}$ $U_{az1} = k_{33} g + U_{az0}$
2		$a_x = 0$ $a_y = g$ $a_z = 0$	$U_{ax2} = k_{12} g + U_{ax0}$ $U_{ay2} = k_{22} g + U_{ay0}$ $U_{az2} = k_{32} g + U_{az0}$
3		$a_x = 0$ $a_y = 0$ $a_z = -g$	$U_{ax3} = -k_{13} g + U_{ax0}$ $U_{ay3} = -k_{23} g + U_{ay0}$ $U_{az3} = -k_{33} g + U_{az0}$
4		$a_x = 0$ $a_y = -g$ $a_z = 0$	$U_{ax4} = -k_{12} g + U_{ax0}$ $U_{ay4} = -k_{22} g + U_{ay0}$ $U_{az4} = -k_{32} g + U_{az0}$
Поворот вокруг оси Y			
5		$a_x = 0$ $a_y = 0$ $a_z = g$	$U_{ax5} = k_{13} g + U_{ax0}$ $U_{ay5} = k_{23} g + U_{ay0}$ $U_{az5} = k_{33} g + U_{az0}$

6		$a_x = -g$ $a_y = 0$ $a_z = 0$	$U_{ax6} = -k_{11} g + U_{ax0}$ $U_{ay6} = -k_{21} g + U_{ay0}$ $U_{az6} = -k_{31} g + U_{az0}$
7		$a_x = 0$ $a_y = 0$ $a_z = -g$	$U_{ax7} = -k_{13} g + U_{ax0}$ $U_{ay7} = -k_{23} g + U_{ay0}$ $U_{az7} = -k_{33} g + U_{az0}$
8		$a_x = g$ $a_y = 0$ $a_z = 0$	$U_{ax8} = k_{11} g + U_{ax0}$ $U_{ay8} = k_{21} g + U_{ay0}$ $U_{az8} = k_{31} g + U_{az0}$

Согласно выражениям в последней колонке табл.10.1, определяем иско-
мые параметры модели выходных сигналов акселерометров:

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= (U_{ax8} - U_{ax6}) / 2g; & k_{12} &= (U_{ax2} - U_{ax4}) / 2g; & k_{13} &= (U_{ax1} - U_{ax3} + U_{ax5} - U_{ax7}) / 4g; \\
 k_{21} &= (U_{ay8} - U_{ay6}) / 2g; & k_{22} &= (U_{ay2} - U_{ay4}) / 2g; & k_{23} &= (U_{ay1} - U_{ay3} + U_{ay5} - U_{ay7}) / 4g; \\
 k_{31} &= (U_{az8} - U_{az6}) / 2g; & k_{32} &= (U_{az2} - U_{az4}) / 2g; & k_{33} &= (U_{az1} - U_{az3} + U_{az5} - U_{az7}) / 4g; \\
 U_{ax0} &= \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 U_{axi}; & U_{ay0} &= \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 U_{ayi}; & U_{az0} &= \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 U_{azi}.
 \end{aligned} \tag{10.13}$$

Естественно, для вычисления параметров акселерометров по формулам (10.13) необходимо знать модуль вектора ускорения силы тяжести \vec{g} в месте проведения испытаний.

10.2.2. Калибровка гироскопов

Поскольку, согласно модели (10.11), выходные сигналы гироскопов зависят не только от измеряемых проекций угловой скорости ω_x , ω_y , ω_z , но и от ускорений a_x , a_y , a_z , то для калибровки гироскопов необходимо задавать тестовые значения как угловой скорости, так и ускорений. В результате калибровка гироскопов разбивается на два этапа, в одном из которых задается угловая скорость вращения, а на другом – неподвижный ИИМ устанавливается в различных положениях относительно вектора ускорения силы тяжести \vec{g} – как при калибровке акселерометров, описанной в п.10.2.1.

На первом этапе определяются коэффициенты r_{ij} матрицы масштабных коэффициентов и перекрестных связей в модели (10.11) путем задания ряда значений угловой скорости. Для этого ИИМ устанавливают на специальный поворотный стол, ось вращения которого должна быть выставлена вертикально. Точность задания и стабилизации угловой скорости вращения поворотных сто-

лов для калибровки гироскопов должна быть не хуже чем точность калибруемых гироскопов. Например, показанный на рис.10.4 прецизионный поворотный стол известной фирмы Acutronic обеспечивает стабильность скорости вращения 0,001%.



Рис.10.4. Автоматизированный поворотный стол AC1120-V1.0 фирмы Acutronic

Модель выходных сигналов гироскопов (10.11) представим в следующем виде, не разделяя нули на зависящие и не зависящие от ускорения слагаемые:

$$\begin{bmatrix} U_{ax} \\ U_{ay} \\ U_{az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{ax0}^* \\ U_{ay0}^* \\ U_{az0}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{ax} \\ n_{ay} \\ n_{az} \end{bmatrix}, \quad (10.14)$$

где

$$\begin{bmatrix} U_{ax0}^* \\ U_{ay0}^* \\ U_{az0}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{ax0} \\ U_{ay0} \\ U_{az0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}.$$

При калибровке на поворотном столе задается несколько значений N угловой скорости вращения в требуемом диапазоне измерений гироскопов (ДУС) для более точного построения статической характеристики. Например, для рабочего диапазона ДУС $\pm 300^\circ/\text{с}$ удобно задать $N=7$ значений угловой скорости с шагом $100^\circ/\text{с}$ от $-300^\circ/\text{с}$ до $+300^\circ/\text{с}$. В любом случае должно быть задано $N \geq 2$ угловых скоростей по каждой оси.

При выполнении каждого измерения во время калибровки выходные сигналы гироскопов осредняются для существенного подавления шумов измерений n_{ax} , n_{ay} , n_{az} . Поэтому в дальнейшем в уравнениях измерений эти шумы учитывать не будем. Для i -го измерения согласно (10.14) имеем:

$$\begin{bmatrix} U_{\omega xi} \\ U_{\omega yi} \\ U_{\omega zi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_{xi} \\ \omega_{yi} \\ \omega_{zi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{\omega xi}^* \\ U_{\omega yi}^* \\ U_{\omega zi}^* \end{bmatrix}. \quad (10.15)$$

Для дальнейших вычислений удобно объединить 12 искомых параметров (9 коэффициентов r_{ij} и 3 смещения нуля $U_{\omega xi}^*, U_{\omega yi}^*, U_{\omega zi}^*$) в одну матрицу, преобразовав матричное уравнение (10.15) к виду

$$\begin{bmatrix} U_{\omega xi} \\ U_{\omega yi} \\ U_{\omega zi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & U_{\omega xi}^* \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & U_{\omega yi}^* \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & U_{\omega zi}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_{xi} \\ \omega_{yi} \\ \omega_{zi} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (10.16)$$

При калибровке на поворотном столе задается вращение ИИМ вокруг каждой из трех осей отдельно. Примем, что вначале задается вращение ИИМ вокруг оси X . В этом случае в уравнении (10.16) $\omega_{yi} = 0$, $\omega_{zi} = 0$ и его можно упростить:

$$\begin{bmatrix} U_{\omega xi} \\ U_{\omega yi} \\ U_{\omega zi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & U_{\omega xi}^* \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & U_{\omega yi}^* \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & U_{\omega zi}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_{xi} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & U_{\omega xi}^* \\ r_{21} & U_{\omega yi}^* \\ r_{31} & U_{\omega zi}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_{xi} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (10.17)$$

Всего при калибровке задается N значений угловой скорости ω_{xi} , в результате получим N измерений выходных сигналов гироскопов (10.17). Объединим эти измерения в одно матричное уравнение:

$$\begin{bmatrix} U_{\omega xi1} \dots U_{\omega xiN} \\ U_{\omega yi1} \dots U_{\omega yiN} \\ U_{\omega zi1} \dots U_{\omega ziN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & U_{\omega xi}^* \\ r_{21} & U_{\omega yi}^* \\ r_{31} & U_{\omega zi}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_{xi1} \dots \omega_{xiN} \\ 1 \dots 1 \end{bmatrix}. \quad (10.18)$$

Затем задается вращение ИИМ вокруг оси Y . В этом случае в уравнении (10.16) $\omega_{xi} = 0$, $\omega_{zi} = 0$, и оно упрощается следующим образом:

$$\begin{bmatrix} U_{\omega xi} \\ U_{\omega yi} \\ U_{\omega zi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & U_{\omega xi}^* \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & U_{\omega yi}^* \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & U_{\omega zi}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{yi} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{12} & U_{\omega xi}^* \\ r_{22} & U_{\omega yi}^* \\ r_{32} & U_{\omega zi}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_{yi} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (10.19)$$

Для N заданных значений угловой скорости ω_{yi} получим N уравнений (10.19), которые объединим в одно матричное уравнение:

$$\begin{bmatrix} U_{axN+1} \cdots U_{ax2N} \\ U_{oyN+1} \cdots U_{oy2N} \\ U_{ozN+1} \cdots U_{oz2N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{12} & U_{ax0}^* \\ r_{22} & U_{oy0}^* \\ r_{32} & U_{oz0}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_{y1} \cdots \omega_{yN} \\ 1 \cdots 1 \end{bmatrix}. \quad (10.20)$$

Аналогично, при задании вращения ИИМ вокруг оси Z имеем $\omega_{xi} = 0$, $\omega_h = 0$, и уравнение (10.16) преобразуется к виду:

$$\begin{bmatrix} U_{axi} \\ U_{oyi} \\ U_{oz i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & U_{ax0}^* \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & U_{oy0}^* \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & U_{oz0}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{zi} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{13} & U_{ax0}^* \\ r_{23} & U_{oy0}^* \\ r_{33} & U_{oz0}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_{zi} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (10.21)$$

Объединяя в одно матричное уравнение N уравнений (10.21) для N заданных значений угловой скорости ω_{zi} получим:

$$\begin{bmatrix} U_{ax2N+1} \cdots U_{ax3N} \\ U_{oy2N+1} \cdots U_{oy3N} \\ U_{oz2N+1} \cdots U_{oz3N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{13} & U_{ax0}^* \\ r_{23} & U_{oy0}^* \\ r_{33} & U_{oz0}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_{z1} \cdots \omega_{zN} \\ 1 \cdots 1 \end{bmatrix}. \quad (10.22)$$

Уравнения (10.18), (10.20), (10.22) являются линейными уравнениями вида

$$\mathbf{B} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}, \quad (10.23)$$

где \mathbf{A} и \mathbf{B} – известные матрицы (матрица \mathbf{A} составлена из заданных значений угловой скорости ω_i , матрица \mathbf{B} составлена из измеренных сигналов гироскопов $U_{\alpha i}$); \mathbf{X} – неизвестная матрица, состоящая из 6 неизвестных параметров модели гироскопов (3 коэффициента r_{ij} и 3 смещения нуля $U_{ax0}^*, U_{oy0}^*, U_{oz0}^*$). При этом количество уравнений (размер матрицы \mathbf{B}) $3 \cdot N$ должно быть не меньше числа неизвестных, что выполняется при задании значений $N \geq 2$ угловых скоростей по каждой измерительной оси ИИМ. На практике задают избыточное число угловых скоростей $N > 2$ чтобы получить сглаженное по методу наименьших квадратов (МНК) решение.

Решение матричного уравнения (10.23) по МНК имеет вид

$$\mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^+ = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T)^{-1}, \quad (10.24)$$

где матрица $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T)^{-1}$ называется псевдообратной.

Если транспонировать уравнение (10.23), то получим общеизвестную

форму записи пакетного МНК [5, 6]

$$\widehat{\mathbf{X}}^T = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{V}^T, \quad \text{где } \mathbf{H} = \mathbf{A}^T.$$

Применяя решение (10.24) к уравнениям (10.18), (10.20), (10.22), определяем искомые параметры модели выходных сигналов гироскопов:

$$\begin{bmatrix} r_{11} & U_{ax0}^* \\ r_{21} & U_{ay0}^* \\ r_{31} & U_{az0}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{ax1} \cdots U_{axN} \\ U_{ay1} \cdots U_{ayN} \\ U_{az1} \cdots U_{azN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_{x1} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \omega_{xN} & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} \omega_{x1} \cdots \omega_{xN} \\ 1 \cdots 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_{x1} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \omega_{xN} & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1};$$

$$\begin{bmatrix} r_{12} & U_{ax0}^* \\ r_{22} & U_{ay0}^* \\ r_{32} & U_{az0}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{axN+1} \cdots U_{ax2N} \\ U_{ayN+1} \cdots U_{ay2N} \\ U_{azN+1} \cdots U_{az2N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_{y1} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \omega_{yN} & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} \omega_{y1} \cdots \omega_{yN} \\ 1 \cdots 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_{y1} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \omega_{yN} & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1}; \quad (10.25)$$

$$\begin{bmatrix} r_{13} & U_{ax0}^* \\ r_{23} & U_{ay0}^* \\ r_{33} & U_{az0}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{ax2N+1} \cdots U_{ax3N} \\ U_{ay2N+1} \cdots U_{ay3N} \\ U_{az2N+1} \cdots U_{az3N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_{z1} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \omega_{zN} & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} \omega_{z1} \cdots \omega_{zN} \\ 1 \cdots 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_{z1} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \omega_{zN} & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1}.$$

Отметим, что на практике численные значения задаваемых угловых скоростей вокруг каждой оси $\omega_{x1} \cdots \omega_{xN}$, $\omega_{y1} \cdots \omega_{yN}$, $\omega_{z1} \cdots \omega_{zN}$ выбирают одними и теми же, поэтому псевдообратную матрицу $\mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T)^{-1}$ (три последние матричные произведения в каждом из выражений (10.25)) вычисляют только один раз.

Отметим, что при вычислении искомых параметров по формулам (10.25), смещения нулей гироскопов U_{ax0}^* , U_{ay0}^* , U_{az0}^* вычисляются трижды. На самом деле, несмотря на одно и то же обозначение, это – разные тройки нулей, поскольку они соответствуют трем различным положениям ИИМ относительно вектора ускорения силы тяжести при вращении на поворотном столе вокруг каждой из трех осей. Напомним, нули U_{ax0}^* , U_{ay0}^* , U_{az0}^* содержат зависящие и не зависящие от ускорения слагаемые. Выделение этих слагаемых производится на втором этапе калибровки гироскопов, который выполняется одновременно с калибровкой акселерометров на ОДГ когда ускорения по осям ИИМ задаются в виде проекций вектора ускорения силы тяжести \vec{g} (см. п.10.2.1).

В фиксированных положениях, задаваемых с помощью ОДГ, ИИМ остается неподвижным относительно Земли, поэтому кажущееся ускорение, измеряемое акселерометрами, $\vec{a} = -\vec{g}$ (10.12), а абсолютная угловая скорость равна скорости вращения Земли, $\vec{\omega} = \vec{\Omega}$.

Примем для упрощения, что ось вращения вала ОДГ выставлена на Север. Тогда ИИМ, установленный на площадке ОДГ, вращается относительно инерциального пространства:

– вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\Omega_B = u \sin \varphi$;

– в направлении оси вращения вала ОДГ с угловой скоростью $\Omega_\Gamma = u \cos \varphi$,

где Ω_B и Ω_Γ – вертикальная и горизонтальная проекции угловой скорости вращения Земли, φ – географическая широта. Если ось вращения вала ОДГ занимает некоторое промежуточное положение в азимуте, то горизонтальную составляющую скорости вращения Земли необходимо разложить на две составляющие – параллельную оси вращения вала ОДГ и перпендикулярную составляющую. Если принять, что ось вращения вала ОДГ выставлена на Север, то в положениях ИИМ, указанных в табл.10.1, проекции абсолютной угловой скорости ИИМ на его оси будут иметь значения, указанные в табл.10.2.

Подставляя значения проекций абсолютной угловой скорости ω_x , ω_y , ω_z из табл.10.2 и кажущегося ускорения a_x , a_y , a_z из табл.10.1 в модель выходных сигналов гироскопов (10.11), и перемножая матрицы, получим значения выходных сигналов гироскопов в каждом из положений ИИМ. Соответствующие выражения также приведены в табл.10.2. Для уменьшения влияния шумов измерения, сигналы гироскопов усредняются в течении времени измерения (обычно 30...60 с), поэтому в выражениях в табл.10.1 шумы измерений n_{ax} , n_{ay} , n_{az} не учитываются.

Таблица 10.2. Проекция угловой скорости вращения Земли на оси ИИМ для заданных положений осей ИИМ при калибровке на ОДГ

Положение осей ИИМ	Проекция скорости вращения Земли на оси ИИМ	Выходные сигналы гироскопов
1	$\omega_x = \Omega_\Gamma$ $\omega_y = 0$ $\omega_z = \Omega_B$	$U_{ax1} = r_{11} \Omega_\Gamma + r_{13} \Omega_B + b_{13} g + U_{ax0}$ $U_{ay1} = r_{21} \Omega_\Gamma + r_{23} \Omega_B + b_{23} g + U_{ay0}$ $U_{az1} = r_{31} \Omega_\Gamma + r_{33} \Omega_B + b_{33} g + U_{az0}$
2	$\omega_x = \Omega_\Gamma$ $\omega_y = \Omega_B$ $\omega_z = 0$	$U_{ax2} = r_{11} \Omega_\Gamma + r_{12} \Omega_B + b_{12} g + U_{ax0}$ $U_{ay2} = r_{21} \Omega_\Gamma + r_{22} \Omega_B + b_{22} g + U_{ay0}$ $U_{az2} = r_{31} \Omega_\Gamma + r_{32} \Omega_B + b_{32} g + U_{az0}$
3	$\omega_x = \Omega_\Gamma$ $\omega_y = 0$ $\omega_z = -\Omega_B$	$U_{ax3} = r_{11} \Omega_\Gamma - r_{13} \Omega_B - b_{13} g + U_{ax0}$ $U_{ay3} = r_{21} \Omega_\Gamma - r_{23} \Omega_B - b_{23} g + U_{ay0}$ $U_{az3} = r_{31} \Omega_\Gamma - r_{33} \Omega_B - b_{33} g + U_{az0}$
4	$\omega_x = \Omega_\Gamma$ $\omega_y = -\Omega_B$ $\omega_z = 0$	$U_{ax4} = r_{11} \Omega_\Gamma - r_{12} \Omega_B - b_{12} g + U_{ax0}$ $U_{ay4} = r_{21} \Omega_\Gamma - r_{22} \Omega_B - b_{22} g + U_{ay0}$ $U_{az4} = r_{31} \Omega_\Gamma - r_{32} \Omega_B - b_{32} g + U_{az0}$
5	$\omega_x = 0$ $\omega_y = \Omega_\Gamma$ $\omega_z = \Omega_B$	$U_{ax5} = r_{12} \Omega_\Gamma + r_{13} \Omega_B + b_{13} g + U_{ax0}$ $U_{ay5} = r_{22} \Omega_\Gamma + r_{23} \Omega_B + b_{23} g + U_{ay0}$ $U_{az5} = r_{32} \Omega_\Gamma + r_{33} \Omega_B + b_{33} g + U_{az0}$
6	$\omega_x = -\Omega_B$ $\omega_y = \Omega_\Gamma$ $\omega_z = 0$	$U_{ax6} = -r_{11} \Omega_B + r_{12} \Omega_\Gamma - b_{11} g + U_{ax0}$ $U_{ay6} = -r_{21} \Omega_B + r_{22} \Omega_\Gamma - b_{21} g + U_{ay0}$ $U_{az6} = -r_{31} \Omega_B + r_{32} \Omega_\Gamma - b_{31} g + U_{az0}$

7	$\omega_x = 0$ $\omega_y = \Omega_\Gamma$ $\omega_z = -\Omega_B$	$U_{ax7} = r_{12} \Omega_\Gamma - r_{13} \Omega_B - b_{13} g + U_{ax0}$ $U_{ay7} = r_{22} \Omega_\Gamma - r_{23} \Omega_B - b_{23} g + U_{ay0}$ $U_{az7} = r_{32} \Omega_\Gamma - r_{33} \Omega_B - b_{33} g + U_{az0}$
8	$\omega_x = \Omega_B$ $\omega_y = \Omega_\Gamma$ $\omega_z = 0$	$U_{ax8} = r_{11} \Omega_B + r_{12} \Omega_\Gamma + b_{11} g + U_{ax0}$ $U_{ay8} = r_{21} \Omega_B + r_{22} \Omega_\Gamma + b_{21} g + U_{ay0}$ $U_{az8} = r_{31} \Omega_B + r_{32} \Omega_\Gamma + b_{31} g + U_{az0}$

Согласно выражениям в последней колонке табл.10.2, определяем коэффициенты b_{ij} чувствительности к ускорениям и смещения нулей U_{ax0} , U_{ay0} , U_{az0} гироскопов:

$$\begin{aligned}
 b_{11} &= (U_{ax8} - U_{ax6}) / 2g - r_{11} \Omega_B / g; & b_{12} &= (U_{ax2} - U_{ax4}) / 2g - r_{12} \Omega_B / g; \\
 b_{21} &= (U_{ay8} - U_{ay6}) / 2g - r_{21} \Omega_B / g; & b_{22} &= (U_{ay2} - U_{ay4}) / 2g - r_{22} \Omega_B / g; \\
 b_{31} &= (U_{az8} - U_{az6}) / 2g - r_{31} \Omega_B / g; & b_{32} &= (U_{ay2} - U_{ay4}) / 2g - r_{32} \Omega_B / g; \\
 b_{13} &= (U_{ax1} - U_{ax3} + U_{ax5} - U_{ax7}) / 4g - r_{13} \Omega_B / g; \\
 b_{23} &= (U_{ay1} - U_{ay3} + U_{ay5} - U_{ay7}) / 4g - r_{23} \Omega_B / g; \\
 b_{33} &= (U_{az1} - U_{az3} + U_{az5} - U_{az7}) / 4g - r_{33} \Omega_B / g; & & (10.26) \\
 U_{ax0} &= \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 U_{axi} - (r_{11} + r_{12}) \Omega_\Gamma / 2; & U_{ay0} &= \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 U_{ayi} - (r_{21} + r_{22}) \Omega_\Gamma / 2; \\
 U_{az0} &= \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 U_{azi} - (r_{31} + r_{32}) \Omega_\Gamma / 2.
 \end{aligned}$$

где значения коэффициентов r_{ij} уже определены на первом этапе калибровки гироскопов по формулам (10.25).

После вычисления по формулам (10.25), (10.26) значений всех параметров принятой модели (10.11) выходных сигналов гироскопов, завершается процедура калибровки гироскопов.

Методики калибровки можно строить, задавая повороты вокруг оси, не совпадающей ни с одной из осей чувствительности измерителей трехосного блока.

10.2.3. Температурная калибровка инерциальных измерителей

В БИНС средней и высокой точности все инерциальные измерители (акселерометры и гироскопы) имеют компенсацию температурных погрешностей параметров модели их выходных сигналов. Как минимум, производится температурная калибровка нулей U_{ax0} , U_{ay0} , U_{az0} , U_{ax0} , U_{ay0} , U_{az0} и масштабных коэффициентов k_{11} , k_{22} , k_{33} , r_{11} , r_{22} , r_{33} в моделях (10.10), (10.11) выходных сигналов акселерометров и гироскопов. При этом для измерения текущей температуры используются индивидуальные термодатчики в каждом из инерциальных измерителей. В некоторых прецизионных гироскопах используется несколько тем-

пературных датчиков для учета неравномерности теплового поля внутри гироскопа. Иногда учитывается еще и направление изменения температуры, чтобы компенсировать температурный гистерезис.

Другим способом снижения температурных погрешностей является термостабилизация инерциальных измерителей, то есть поддержание постоянной температуры внутри гироскопов (прежде всего) и акселерометров. Температура может стабилизироваться не в отдельных измерителях, а внутри ИИМ в целом. Термостабилизация позволяет обеспечить высокую стабильность параметров инерциальных измерителей. Часто это более эффективный способ снижения температурных погрешностей по сравнению с их компенсацией. Однако температурная стабилизация имеет ряд недостатков:

- большое энергопотребление;
- увеличение габаритов;
- увеличение времени готовности БИНС;
- снижение ресурса измерителей.

Последний недостаток связан с тем, что при термостабилизации рабочую температуру внутри прибора часто поднимают выше максимальной температуры при эксплуатации - чтобы для поддержания температуры использовать только нагревательные элементы, без охладителей. Для равномерного распределения температуры внутри ИИМ используются также вентиляторы.

В БИНС низкой точности, которые работают лишь в составе комплексированных навигационных систем, компенсация температурных погрешностей датчиков часто не производится, так как температурная калибровка приводит к существенному увеличению себестоимости БИНС (использование специальных стендов с термокамерами) и значительному увеличению времени заводских калибровок и испытаний. Это ведет к уменьшению объема выпуска БИНС за календарный период времени, а также к увеличению себестоимости БИНС. В результате нивелируется одно из основных преимуществ БИНС низкой точности – низкая стоимость. Изменения нулей и масштабных коэффициентов инерциальных измерителей таких БИНС обычно компенсируются в комплексированной системе путем оценивания этих изменений (например, фильтром Калмана – см. п. 9) и их последующим учетом.

Температурные зависимости параметров моделей выходных сигналов акселерометров и гироскопов (10.10), (10.11) носят сложный характер, так как определяются множеством факторов (материалы, конструкция, способы соединения элементов и т.п.). Детальное исследование этих зависимостей необходимо для поиска путей снижения температурной чувствительности параметров, обеспечения стабильности этой чувствительности для возможности ее компенсации. Как уже указывалось, чаще всего производится компенсация температурных изменений нулей и масштабных коэффициентов акселерометров и гироскопов.

При использовании выходных сигналов инерциальных измерителей в приборах и системах, температурные зависимости их параметров обычно аппроксимируют несложными функциями от температуры. Наиболее часто ис-

пользуют линейную, кусочно-линейную и полиномиальную аппроксимации. Рассмотрим несколько примеров.

Линейная аппроксимация температурных зависимостей

При линейной аппроксимации, нулевой сигнал U_0 и масштабный коэффициент k каждого измерителя (акселерометра или гироскопа) представляются в виде:

$$U_0 = U_{0\text{ном}} + \alpha \cdot \Delta T; \quad k = k_{\text{ном}} (1 + \beta \cdot \Delta T); \quad (10.27)$$

$$\Delta T = T - T_{\text{ном}},$$

где $U_{0\text{ном}}$, $k_{\text{ном}}$ – номинальные значения параметров, определенные при номинальной температуре $T_{\text{ном}}$; T – текущая температура, измеренная термодатчиком; α , β – коэффициенты температурной чувствительности нулевого сигнала и масштабного коэффициента.

Чтобы определить температурные коэффициенты α , β , необходимо выполнить описанные в п. 10.2.1 и п. 10.2.2 процедуры калибровки акселерометров и гироскопов при двух значениях температуры – номинальной $T_{\text{ном}}$ и повышенной или пониженной T_2 . Для этого калибровку акселерометров и гироскопов производят в термокамерах. В результате калибровки получают пары значений нулей $U_{0\text{ном}}$, U_{02} и масштабных коэффициентов $k_{\text{ном}}$, k_2 , соответствующие двум значениям температуры $T_{\text{ном}}$ и T_2 . Далее, согласно выражений (10.27) определяют искомые коэффициенты температурной чувствительности:

$$\Delta T = T_2 - T_{\text{ном}}; \quad (10.28)$$

$$\alpha = \frac{U_{02} - U_{0\text{ном}}}{\Delta T}; \quad \beta = \frac{k_2 - k_{\text{ном}}}{k_{\text{ном}} \cdot \Delta T}.$$

Обычно в качестве номинальной температуры выбирают нормальную $T_{\text{ном}} = 20^\circ\text{C}$ или $T_{\text{ном}} = 25^\circ\text{C}$, а в качестве второй температуры T_2 – максимальную или минимальную в соответствии с требованиями к измерителю или БИНС в целом.

И еще одно важное замечание: на практике термодатчики измерителей не калибруют, и используют их «сырые» значения в кодах АЦП (или в размерности напряжения, тока, частоты, других величин являющихся непосредственным выходом термодатчика). Это касается как калибровки, так и решения обратной задачи – компенсации температурных изменений нулей и масштабных коэффициентов в соответствии с формулами (10.27). То есть во всех формулах используются значения $T_{\text{ном}}$, T , ΔT в кодах АЦП, а не в градусах Цельсия или Кельвина.

Кусочно-линейная аппроксимация температурных зависимостей

Если температурный диапазон работы БИНС довольно широкий, то нелинейность температурной зависимости параметров измерителя становится сильно заметной и ее линейная аппроксимация уже не обеспечивает приемлемый уровень компенсации температурных погрешностей.

В этом случае часто оставляют линейную аппроксимацию температурных зависимостей вида (10.27), но с разными значениями коэффициентов температурной чувствительности α , β для температуры меньшей и большей чем номинальная ($T < T_{\text{НОМ}}$ и $T > T_{\text{НОМ}}$):

$$U_0 = U_{0\text{НОМ}} + \alpha \cdot \Delta T; \quad k = k_{\text{НОМ}} (1 + \beta \cdot \Delta T); \quad \Delta T = T - T_{\text{НОМ}}, \quad (10.29)$$

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_1, & \text{при } \Delta T < 0 \\ \alpha_2, & \text{при } \Delta T > 0 \end{cases}; \quad \beta = \begin{cases} \beta_1, & \text{при } \Delta T < 0 \\ \beta_2, & \text{при } \Delta T > 0 \end{cases}$$

Для определения температурных коэффициентов α_1 , β_1 и α_2 , β_2 необходимо выполнить описанные в п.10.2.1 и п.10.2.2 процедуры калибровки акселерометров и гироскопов уже при трех значениях температуры – номинальной $T_{\text{НОМ}}$, минимальной T_2 и максимальной T_3 . В результате калибровки получают тройки значений нулей $U_{0\text{НОМ}}$, U_{02} , U_{03} и масштабных коэффициентов $k_{\text{НОМ}}$, k_2 , k_3 , соответствующие трем значениям температуры $T_{\text{НОМ}}$, T_2 , T_3 при калибровке.

Искомые коэффициенты температурной чувствительности α_1 , α_2 , β_1 , β_2 определяют по формулам, аналогичным (10.28):

$$\begin{aligned} \Delta T_2 &= T_2 - T_{\text{НОМ}}; & \Delta T_3 &= T_3 - T_{\text{НОМ}}; \\ \alpha_1 &= \frac{U_{02} - U_{0\text{НОМ}}}{\Delta T_2}; & \alpha_2 &= \frac{U_{03} - U_{0\text{НОМ}}}{\Delta T_3}; \\ \beta_1 &= \frac{k_2 - k_{\text{НОМ}}}{k_{\text{НОМ}} \cdot \Delta T_2}; & \beta_2 &= \frac{k_3 - k_{\text{НОМ}}}{k_{\text{НОМ}} \cdot \Delta T_3} \end{aligned} \quad (10.30)$$

Иногда весь температурный диапазон работы измерителей разбивают более чем на два участка и также применяют кусочно-линейную аппроксимацию, но уже с большим количеством отрезков линий. Естественно, при этом приходится вводить дополнительные температуры для калибровки измерителей.

На практике в формулах (10.29), (10.30) используются некалиброванные «сырые» значения температурных датчиков $T_{\text{НОМ}}$, T_2 , T_3 в кодах АЦП, а не в градусах Цельсия или Кельвина.

Аппроксимация температурных зависимостей полиномами

Недостатком кусочно-линейной аппроксимации является ее «негладкость», проявляющаяся при существенной нелинейности температурной зависимости. В этом случае в районе номинальной температуры $T_{\text{НОМ}}$, являющейся

общей точкой двух отрезков линий с разным наклоном, появляется явный излом аппроксимирующей линии.

Этого недостатка лишена аппроксимация температурной зависимости полиномом, проходящим через точки температур калибровки. В частности, при использовании трех температур $T_{\text{НОМ}}$, T_2 , T_3 для калибровки, полученные значения нулей $U_{0\text{НОМ}}$, U_{02} , U_{03} и масштабных коэффициентов $k_{\text{НОМ}}$, k_2 , k_3 можно аппроксимировать полиномом второй степени. Этот метод иногда так и называют – трехточечный метод температурной калибровки.

При аппроксимации температурных зависимостей нулевого сигнала U_0 и масштабного коэффициента k полиномом второй степени получаем следующие выражения:

$$U_0 = U_{0\text{НОМ}} + \alpha_1 \cdot \Delta T + \alpha_2 \cdot \Delta T^2; \quad k = k_{\text{НОМ}} (1 + \beta_1 \cdot \Delta T + \beta_2 \cdot \Delta T^2); \quad (10.31)$$

$$\Delta T = T - T_{\text{НОМ}}.$$

Для определения коэффициентов температурной чувствительности нулевого сигнала α_1 , α_2 и масштабного коэффициента β_1 , β_2 необходимо, так же как и при кусочно-линейной аппроксимации, выполнить описанные в п.10.2.1 и п.10.2.2 процедуры калибровки акселерометров и гироскопов при трех значениях температуры – номинальной $T_{\text{НОМ}}$, минимальной T_2 и максимальной T_3 . В результате калибровки определяют значения нулей $U_{0\text{НОМ}}$, U_{02} , U_{03} и масштабных коэффициентов $k_{\text{НОМ}}$, k_2 , k_3 , соответствующие трем значениям температуры $T_{\text{НОМ}}$, T_2 , T_3 при калибровке. Полагая, что эти параметры имеют зависимость от температуры вида (10.31), получаем следующие системы уравнений для нахождения коэффициентов α_1 , α_2 , β_1 , β_2 :

$$\begin{cases} U_{02} = U_{0\text{НОМ}} + \alpha_1 \cdot \Delta T_2 + \alpha_2 \cdot \Delta T_2^2 \\ U_{03} = U_{0\text{НОМ}} + \alpha_1 \cdot \Delta T_3 + \alpha_2 \cdot \Delta T_3^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} k_2 = k_{\text{НОМ}} (1 + \beta_1 \cdot \Delta T_2 + \beta_2 \cdot \Delta T_2^2) \\ k_3 = k_{\text{НОМ}} (1 + \beta_1 \cdot \Delta T_3 + \beta_2 \cdot \Delta T_3^2) \end{cases}, \quad (10.32)$$

где $\Delta T_2 = T_2 - T_{\text{НОМ}}$; $\Delta T_3 = T_3 - T_{\text{НОМ}}$.

Каждое из выражений (10.32) – это система из двух линейных уравнений с двумя неизвестными – α_1 , α_2 в первой системе уравнений и β_1 , β_2 во второй системе. Решения систем этих уравнений имеют вид:

$$\alpha_2 = \left[\frac{U_{02} - U_{0\text{НОМ}}}{\Delta T_2} - \frac{U_{03} - U_{0\text{НОМ}}}{\Delta T_3} \right] / (T_2 - T_3); \quad \alpha_1 = \frac{U_{02} - U_{0\text{НОМ}}}{\Delta T_2} - \alpha_2 \cdot (T_2 - T_3); \quad (10.33)$$

$$\beta_2 = \left[\frac{k_2 - k_{\text{НОМ}}}{\Delta T_2} - \frac{k_3 - k_{\text{НОМ}}}{\Delta T_3} \right] / [k_{\text{НОМ}} (T_2 - T_3)]; \quad \beta_1 = \frac{k_2 - k_{\text{НОМ}}}{k_{\text{НОМ}} \cdot \Delta T_2} - \beta_2 \cdot (T_2 - T_3).$$

Общие рекомендации по выбору аппроксимирующих функций

Теоретически, более сложная функция может точнее описать действительную зависимость параметров измерителя от температуры, и, следовательно, точнее компенсировать эту зависимость. Однако использование сложных аппроксимирующих функций ограничивается следующими недостатками их использования.

1. Как видно из приведенных выше примеров температурной калибровки параметров измерителей, более сложная аппроксимирующая функция требует большего количества температур, на которых необходимо проводить полную калибровку измерителей, что значительно увеличивает время калибровки.

2. Достоверность и повторяемость коэффициентов аппроксимирующей функции снижается при чрезмерном усложнении этой функции. Например, весьма вероятно, что использование полинома пятого порядка очень точно аппроксимировало изменение нулевого сигнала от температуры при данной калибровке, но если провести повторную температурную калибровку, то коэффициенты полинома при старших степенях существенно изменятся, а повторятся лишь первые два-три коэффициента.

3. Усложнение аппроксимирующей функции увеличивает объем вычислений при решении обратной задачи к калибровке – температурной компенсации изменений параметров измерителей во время их штатной работы.

Порядок аппроксимирующей функции выбирают из двух соображений:

- а) исходя из анализа физических процессов в измерителе при изменении температуры;
- б) исходя из результатов экспериментальных исследований, когда, начиная с аппроксимации простейшими функциями (линейной), оценивают точность температурной компенсации, и, если она неудовлетворительная, постепенно усложняют эту функцию с учетом указанных выше трех ограничений.

10.3. Использование результатов калибровки инерциальных измерителей в алгоритме БИНС

После проведения калибровки, описанной в п.10.2, становятся известными значения параметров моделей (10.10), (10.11) выходных сигналов акселерометров и гироскопов. Это позволяет при работе БИНС определять текущие проекции кажущегося ускорения a_x , a_y , a_z и абсолютной угловой скорости объекта ω_x , ω_y , ω_z на базовые оси БИНС, используя выходные сигналы акселерометров U_{ax} , U_{ay} , U_{az} и гироскопов U_{ax0} , U_{ay0} , U_{az0} . Эти сигналы пересчитываются в соответствии с уравнениями (10.10), (10.11):

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} U_{ax} \\ U_{ay} \\ U_{az} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} U_{ax0} \\ U_{ay0} \\ U_{az0} \end{bmatrix} \right); \quad (10.34)$$

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} U_{ax} \\ U_{ay} \\ U_{az} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} U_{ax0} \\ U_{ay0} \\ U_{az0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \right), \quad (10.35)$$

где матрицы

$$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}^{-1}; \quad \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}^{-1} \quad (10.36)$$

вычисляются заранее (сразу после калибровки) и уже в таком виде загружаются в память вычислителя БИНС.

Отметим, что компенсация шумов измерений n_{ax} , n_{ay} , n_{az} , n_{ax} , n_{ay} , n_{az} , входящих в модели (10.10), (10.11) выходных сигналов акселерометров и гироскопов, невозможна ввиду случайного характера этих шумов. Использование фильтров для снижения уровня этих шумов ограничено в БИНС требованиями по полосе пропускания для акселерометров и гироскопов, которые, в свою очередь, определяются динамикой объекта, на котором устанавливается БИНС.

При компенсации температурных изменений нулей и масштабных коэффициентов измерителей, объем вычислений увеличивается.

Во-первых, в моделях (10.10), (10.11) выходных сигналов акселерометров и гироскопов выделяют масштабные коэффициенты, то есть используют модели (10.8), (10.9) выходных сигналов измерителей, где K_x , K_y , K_z – масштабные коэффициенты трех акселерометров, R_x , R_y , R_z – масштабные коэффициенты трех гироскопов:

$$\begin{bmatrix} U_{ax} \\ U_{ay} \\ U_{az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x & 0 & 0 \\ 0 & K_y & 0 \\ 0 & 0 & K_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{ax0} \\ U_{ay0} \\ U_{az0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{ax} \\ n_{ay} \\ n_{az} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} U_{ax} \\ U_{ay} \\ U_{az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_x & 0 & 0 \\ 0 & R_y & 0 \\ 0 & 0 & R_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{ax0} \\ U_{ay0} \\ U_{az0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{ax} \\ n_{ay} \\ n_{az} \end{bmatrix},$$

В соответствии с этими уравнениями, проекции кажущегося ускорения a_x , a_y , a_z и абсолютной угловой скорости объекта ω_x , ω_y , ω_z на базовые оси БИНС определяются по формулам:

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_x(\Delta T) & 0 & 0 \\ 0 & Q_y(\Delta T) & 0 \\ 0 & 0 & Q_z(\Delta T) \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} U_{ax} \\ U_{ay} \\ U_{az} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} U_{ax0}(\Delta T) \\ U_{ay0}(\Delta T) \\ U_{az0}(\Delta T) \end{bmatrix} \right); \quad (10.37)$$

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_x(\Delta T) & 0 & 0 \\ 0 & M_y(\Delta T) & 0 \\ 0 & 0 & M_z(\Delta T) \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} U_{ax} \\ U_{ay} \\ U_{az} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} U_{ax0}(\Delta T) \\ U_{ay0}(\Delta T) \\ U_{az0}(\Delta T) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \right), \quad (10.38)$$

где матрицы

$$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{bmatrix}^{-1}; \quad \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix}^{-1} \quad (10.39)$$

вычисляются заранее (сразу после калибровки) и в таком виде загружаются в память вычислителя БИНС.

Нулевые сигналы $U_{ai0}(\Delta T)$, $U_{aj0}(\Delta T)$ и коэффициенты $Q_i(\Delta T)$ и $M_j(\Delta T)$, обратные к масштабным коэффициентам K_i и R_j , рассчитываются в вычислителе БИНС с учетом текущей температуры T_i , T_j , измеренной в каждом i -м акселерометре и j -м гироскопе:

$$\begin{aligned} \Delta T_i &= T_i - T_{i \text{ ном}}; & \Delta T_j &= T_j - T_{j \text{ ном}}; \\ U_{ai0}(\Delta T) &= U_{ai0 \text{ ном}} + \alpha_i \cdot \Delta T_i; & U_{aj0}(\Delta T) &= U_{aj0 \text{ ном}} + \alpha_j \cdot \Delta T_j; \\ Q_i(\Delta T) &= K_i^{-1} = [K_{i \text{ ном}} (1 + \beta_i \cdot \Delta T_i)]^{-1}; & M_j(\Delta T) &= R_j^{-1} = [R_{j \text{ ном}} (1 + \beta_j \cdot \Delta T_j)]^{-1}. \end{aligned} \quad (10.40)$$

Выражения (10.40) записаны на основании линейной модели температурной зависимости коэффициентов вида (10.27) или (10.29). При более сложной температурной модели, например (10.31), в выражения (10.40) добавляются соответствующие слагаемые.

В памяти вычислителя хранятся номинальные значения нулей акселерометров и гироскопов $U_{ai0 \text{ ном}}$, $U_{aj0 \text{ ном}}$, их масштабных коэффициентов $K_{i \text{ ном}}$, $R_{j \text{ ном}}$, а также номинальные значения температур $T_{i \text{ ном}}$, $T_{j \text{ ном}}$, и коэффициенты температурной чувствительности α_i , α_j , β_i , β_j . Все перечисленные параметры – строго индивидуальные для каждого из акселерометров и гироскопов, определяются при температурной калибровке как было описано в п.10.2.3.

10.4. Калибровка и довыставка БИНС на подвижном основании

Комплексирование БИНС с навигационными системами других типов позволяет не только повысить точность решения навигационной задачи, как было показано в разделе 9, но и выполнить калибровку некоторых параметров измерителей, и закончить выставку БИНС в условиях движения объекта.

Выше была рассмотрена калибровка ИИМ БИНС при его производстве. Такая калибровка позволяет определить параметры моделей выходных сигналов акселерометров и гироскопов (смещения нулей, масштабные коэффициенты и ряд других) на момент изготовления ИИМ. Однако в процессе эксплуатации эти параметры могут заметно изменяться, приводя к существенному увеличению погрешностей БИНС, если не учитывать это изменение. В практике гироскопических систем рассматривают следующие изменения параметров измерителей:

- 1) изменение значений параметров от пуска к пуску, при их стабильности в каждом конкретном пуске;
- 2) изменение параметров (их нестабильность) в пуске во время работы БИНС.

Изменение основных параметров акселерометров и гироскопов от пуска к пуску определяется во время начальной выставки ИНС перед началом штатной работы. С этой целью в платформенных ИНС осуществляется программный разворот платформы в известные положения, осреднение сигналов измерителей в каждом положении и последующее вычисление их параметров по методике, подобной изложенной выше в п.10.2. В бесплатформенных ИНС инерциальные измерители установлены неподвижно в корпусе, и их повернуть можно только вместе с объектом, на котором установлена БИНС, но такая возможность встречается крайне редко. Поэтому определение параметров измерителей, изменяющихся от пуска к пуску, при начальной выставке БИНС очень ограничено.

Для отслеживания изменения параметров измерителей во время работы БИНС применяются специальные алгоритмы, пример которых рассматривается в данном разделе. Естественно, эти алгоритмы позволяют также определить и изменение параметров от пуска к пуску. Такие алгоритмы требуют привлечения дополнительной информации от навигационных систем и датчиков другого типа (спутниковые навигационные системы, астроориентаторы, доплеровские измерители скорости, лаги и др.) и также могут требовать выполнения специальных маневров объекта.

Вопросы начальной выставки БИНС были рассмотрены в п.7. Такая начальная выставка производится на неподвижном основании. Однако есть целый ряд объектов, которые по условиям своей работы не позволяют осуществить начальную выставку на неподвижном основании, например, крылатые ракеты и управляемые авиабомбы на борту самолетов, или пуск БИНС на морских объ-

ектах в условиях качки. Кроме того, полная начальная выставка БИНС является достаточно длительным процессом для объектов, от которых требуется малое время готовности к работе¹.

Указанные проблемы требуют решения задачи начальной выставки (или довыставки) БИНС в условиях движения объекта. Эта задача может быть решена при комплексировании БИНС с навигационными системами других типов, как рассматривается ниже.

10.4.1. Алгоритм калибровки и довыставки БИНС на подвижном основании

В качестве параметров измерителей БИНС, подлежащих калибровке во время работы БИНС, рассмотрим смещения нулей акселерометров U_{ax0} , U_{ay0} , U_{az0} и гироскопов $U_{\omega x0}$, $U_{\omega y0}$, $U_{\omega z0}$. Представим их в виде:

$$U_{ai0} = \overline{U_{ai0}} + \Delta U_{ai0}; \quad U_{\omega i0} = \overline{U_{\omega i0}} + \Delta U_{\omega i0}, \quad i = x, y, z \quad (10.41)$$

где $\overline{U_{ai0}}$, $\overline{U_{\omega i0}}$ – значения нулей, полученные при калибровке в производстве, ΔU_{ai0} , $\Delta U_{\omega i0}$ – их изменение в процессе эксплуатации. Задачей алгоритма калибровки БИНС во время штатной работы на движущемся объекте является отслеживание изменения нулей измерителей ΔU_{ai0} , $\Delta U_{\omega i0}$ с целью их компенсации при вычислении текущих проекций кажущегося ускорения a_x , a_y , a_z (10.34) и абсолютной угловой скорости объекта ω_x , ω_y , ω_z (10.35).

При подстановке выражений (10.41) в формулы (10.34), (10.35) получим аддитивные погрешности измерения проекций ускорения и угловой скорости:

$$\begin{bmatrix} \Delta a_x \\ \Delta a_y \\ \Delta a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta U_{ax0} \\ \Delta U_{ay0} \\ \Delta U_{az0} \end{bmatrix}; \quad (10.42)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \omega_x \\ \Delta \omega_y \\ \Delta \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} \Delta U_{\omega x0} \\ \Delta U_{\omega y0} \\ \Delta U_{\omega z0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta a_x \\ \Delta a_y \\ \Delta a_z \end{bmatrix} \right).$$

Представим погрешности измерения ускорений Δa_i и угловых скоростей $\Delta \omega_i$ ($i = x, y, z$) в виде медленно меняющихся случайных процессов, описываемых дифференциальными уравнениями

$$\frac{d\Delta a_i}{dt} = -\tau_{ai}^{-1} \Delta a_i + \xi_{ai}(t); \quad \frac{d\Delta \omega_i}{dt} = -\tau_{\omega i}^{-1} \Delta \omega_i + \xi_{\omega i}(t). \quad (10.43)$$

¹ Вопросы выставки на подвижном основании освещены в [23]

Такие случайные процессы называют экспоненциально коррелированными, τ_{oi} , τ_{ai} – интервалы корреляции случайных процессов; $\xi_{ai}(t)$, $\xi_{\omega i}(t)$ – порождающие белые шумы.

При формировании погрешностей измерения ускорений и угловых скоростей учтем также шумы измерения акселерометров ε_{oi} и гироскопов $\varepsilon_{\omega i}$:

$$\Delta a_{ic} = \Delta a_i + \varepsilon_{oi}; \quad \Delta \omega_{ic} = \Delta \omega_i + \varepsilon_{\omega i}, \quad (i = x, y, z) \quad (10.44)$$

Возьмем за основу алгоритм комплексирования БИНС и СНС, рассмотренный в п.9.2, и дополним модель ошибок БИНС (9.5) погрешностями измерения ускорений и угловых скоростей (10.43), (10.44):

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= -\omega_\eta \delta + \omega_\zeta \alpha - \Delta v_N / R_N - c_{11} \Delta \omega_{xc} - c_{12} \Delta \omega_{yc} - c_{13} \Delta \omega_{zc}, \\ \dot{\alpha} &= -\omega_\zeta \beta + \omega_\xi \delta + \Delta v_E / R_E - u \sin \varphi \cdot \Delta \varphi - c_{21} \Delta \omega_{xc} - c_{22} \Delta \omega_{yc} - c_{23} \Delta \omega_{zc}, \\ \dot{\delta} &= -\omega_\xi \alpha + \omega_\eta \beta + \Delta v_E \operatorname{tg} \varphi / R_E + (v_E / (R_E \cos^2 \varphi) + u \cos \varphi) \Delta \varphi - c_{31} \Delta \omega_{zc} - c_{32} \Delta \omega_{xc} - c_{33} \Delta \omega_{yc}, \\ \Delta \dot{v}_E &= \delta \cdot a_N - \alpha \cdot a_H + c_{11} \Delta a_{xc} + c_{12} \Delta a_{yc} + c_{13} \Delta a_{zc}, \\ \Delta \dot{v}_N &= -\delta \cdot a_E + \beta \cdot a_H + c_{21} \Delta a_{xc} + c_{22} \Delta a_{yc} + c_{23} \Delta a_{zc}, \\ \Delta \dot{v}_H &= \alpha \cdot a_E - \beta \cdot a_N + c_{31} \Delta a_{xc} + c_{32} \Delta a_{yc} + c_{33} \Delta a_{zc}, \\ \Delta \dot{\varphi} &= \Delta v_N / R_N, \\ \Delta \dot{\lambda} &\approx \frac{1}{R_E \cos \varphi} (\Delta v_E + v_E \operatorname{tg} \varphi \Delta \varphi). \end{aligned} \quad (10.45)$$

$$\Delta \dot{h} = \Delta v_H,$$

$$\Delta a_{ic} = \Delta a_i + \varepsilon_{oi},$$

$$\Delta \omega_{ic} = \Delta \omega_i + \varepsilon_{\omega i},$$

$$\frac{d\Delta a_i}{dt} = -\tau_{ai}^{-1} \Delta a_i + \xi_{ai}(t),$$

$$\frac{d\Delta \omega_i}{dt} = -\tau_{\omega i}^{-1} \Delta \omega_i + \xi_{\omega i}(t), \quad (i = x, y, z).$$

Представим расширенную модель ошибок БИНС (10.45) в матричном виде (9.1)

$$\dot{\bar{x}} = \mathbf{A}\bar{x} + \mathbf{B}\bar{u} + \mathbf{G}\bar{w}. \quad (10.46)$$

Включим в вектор состояния $\bar{x}(t)$ следующие ошибки БИНС и ее измерителей (всего 15 компонент):

$$\bar{x} = [\Delta \varphi \quad \Delta \lambda \quad \Delta h \quad \Delta v_E \quad \Delta v_N \quad \Delta v_H \quad \beta \quad \alpha \quad \delta \quad \Delta a_x \quad \Delta a_y \quad \Delta a_z \quad \Delta \omega_x \quad \Delta \omega_y \quad \Delta \omega_z]^T. \quad (10.47)$$

Вектор случайных входных воздействий $\bar{w}(t)$ сформируем в соответствии с уравнениями ошибок (10.45):

$$\bar{w} = [\varepsilon_{ax} \quad \varepsilon_{ay} \quad \varepsilon_{az} \quad \varepsilon_{\omega x} \quad \varepsilon_{\omega y} \quad \varepsilon_{\omega z} \quad \xi_{ax} \quad \xi_{ay} \quad \xi_{az} \quad \xi_{\omega x} \quad \xi_{\omega y} \quad \xi_{\omega z}]^T. \quad (10.48)$$

Формирование вектора управляющих воздействий \bar{u} для компенсации погрешностей БИНС описано ниже (см. выражение (10.57) для \bar{u} и соответствующее значение матрицы коэффициентов \mathbf{B} (10.58)).

Матрицы коэффициентов \mathbf{A} , \mathbf{G} в матричном уравнении (10.46) при векторах \bar{x} (10.47) и \bar{w} (10.48) соответствуют модели ошибок БИНС (10.45). Ввиду большого размера матриц \mathbf{A} и \mathbf{G} , запишем их в блочном виде (блоки размером 3×3):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & C^{gb} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 & C^{gb} \\ 0 & 0 & 0 & -T_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -T_\omega \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ C^{gb} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C^{gb} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad (10.49)$$

где 0 , I – нулевая и единичная матрицы, а значения остальных блоков равны

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \dot{\lambda} \operatorname{tg} \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & R_N^{-1} & 0 \\ (R_E \cos \varphi)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad A_{23} = \begin{bmatrix} 0 & -a_H & a_N \\ a_H & 0 & -a_E \\ -a_N & a_E & 0 \end{bmatrix}; \\ A_{31} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -u \sin \varphi & 0 & 0 \\ V_E (R \cos^2 \varphi)^{-1} + u \cos \varphi & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad A_{32} = \begin{bmatrix} 0 & -R_N^{-1} & 0 \\ R_E^{-1} & 0 & 0 \\ R_E^{-1} \operatorname{tg} \varphi & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (10.50) \\ A_{33} &= \begin{bmatrix} 0 & \Omega \sin \varphi & -\Omega \cos \varphi \\ -\Omega \sin \varphi & 0 & -V_N R_N^{-1} \\ \Omega \cos \varphi & V_N R_N^{-1} & 0 \end{bmatrix}; \quad T_a = \operatorname{diag}(\tau_{a1}^{-1}, \tau_{a2}^{-1}, \tau_{a3}^{-1}); \\ & \quad T_\omega = \operatorname{diag}(\tau_{\omega 1}^{-1}, \tau_{\omega 2}^{-1}, \tau_{\omega 3}^{-1}); \end{aligned}$$

C^{gb} – матрица направляющих косинусов (6.4) перехода от осей объекта к географическому базису. В выражения (10.50) подставлены выражения для проекций $\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$ абсолютной угловой скорости вращения географического сопровождающего трехгранника, и для сокращения выражений использованы соотношения $\dot{\lambda} = \frac{V_E}{R_E \cos \varphi}$; $\Omega = \dot{\lambda} + u$.

Рассматриваемая задача калибровки инерциальных измерителей во время штатной работы БИНС сводится к оценке погрешностей измерения ускорений Δa_i и угловых скоростей $\Delta \omega_i$ ($i = x, y, z$), которые по сути являются смещениями нулей акселерометров и гироскопов относительно их значений, определенных при заводской калибровке БИНС.

Для оценивания этих смещений нулей, как и остальных ошибок БИНС, включенных в вектор состояния $\bar{x}(t)$ (10.47), используем методику оптимального фильтра Калмана (ОФК), рассмотренную в п.9.1. Вектор измерений $\bar{y}(t)$ для ОФК сформируем из разностей между координатами и скоростями объекта, определенными с помощью БИНС и приемника СНС:

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} \varphi_{\text{бинс}} - \varphi_{\text{снс}} \\ \lambda_{\text{бинс}} - \lambda_{\text{снс}} \\ h_{\text{бинс}} - h_{\text{снс}} \\ v_{E \text{ бинс}} - v_{E \text{ снс}} \\ v_{N \text{ бинс}} - v_{N \text{ снс}} \\ v_{H \text{ бинс}} - v_{H \text{ снс}} \end{bmatrix}. \quad (10.51)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{бинс}} &= \varphi + \Delta\varphi; & v_{N \text{ бинс}} &= v_N + \Delta v_N; \\ \lambda_{\text{бинс}} &= \lambda + \Delta\lambda; & v_{E \text{ бинс}} &= v_E + \Delta v_E; \\ h_{\text{бинс}} &= h + \Delta h; & v_{H \text{ бинс}} &= v_H + \Delta v_H, \end{aligned} \quad (10.52)$$

и приняв погрешности приемника СНС в виде гауссовских белых шумов $v_i(t)$

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{снс}} &= \varphi + v_1(t); & v_{E \text{ снс}} &= v_E + v_4(t); \\ \lambda_{\text{снс}} &= \lambda + v_2(t); & v_{N \text{ снс}} &= v_N + v_5(t); \\ h_{\text{снс}} &= h + v_3(t); & v_{H \text{ снс}} &= v_H + v_6(t), \end{aligned} \quad (10.53)$$

согласно выражения (10.51) получим

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} \Delta\varphi - v_1 \\ \Delta\lambda - v_2 \\ \Delta h - v_3 \\ \Delta v_E - v_4 \\ \Delta v_N - v_5 \\ \Delta v_B - v_6 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \bar{x} + \bar{v}, \quad (10.54)$$

С учетом выражения (10.47) для вектора состояния ошибок \bar{x} , матрица измерения H будет иметь следующий блочный вид:

$$H = [I_{6,6} \mid 0_{6,9}], \quad (10.55)$$

где $I_{6,6}$ – единичная матрица размером 6×6 , $0_{6,9}$ – нулевая матрица размером 6×9 .

В выражении (10.54) \bar{v} – вектор случайных шумов измерений приемника СНС, $\bar{v} = -[v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5 \ v_6]^T$.

По измеренной части $\bar{y}(t)$ вектора состояния $\bar{x}(t)$ и при выполнении условия полной наблюдаемости, ОФК позволяет получить оптимальную оценку $\hat{x}(t)$ всего вектора состояния (10.47), то есть оценку всех ошибок БИНС, включая искомые смещения нулей акселерометров Δa_i и гироскопов $\Delta \omega_i$ ($i = x, y, z$).

Если начальная выставка БИНС была произведена грубо, с большими ошибками в определении начальных координат объекта $\Delta \varphi_0, \Delta \lambda_0, \Delta h_0$, его скорости $\Delta v_{E0}, \Delta v_{N0}, \Delta v_{H0}$, и углов ориентации $\beta_0, \alpha_0, \delta_0$, то благодаря устойчивости ОФК, эти ошибки при их оценивании будут сведены к минимально возможным значениям, что позволяет завершить процесс начальной выставки БИНС уже при движении объекта.

Обычно реализуют замкнутую схему комплексирования БИНС и СНС. В частности, оценки смещений нулей акселерометров Δa_i и гироскопов $\Delta \omega_i$ используются для компенсации этих смещений на выходе акселерометров и гироскопов.

В штатном режиме работы комплексированной системы можно добиться большего снижения ошибок БИНС путем использования известного способа демпфирования колебаний ИНС за счет использования внешней информации о скорости объекта, в данном варианте – от СНС. Для этого на входы первых интеграторов БИНС подаются оцененные с помощью ОФК погрешности БИНС по определению скорости $\Delta \hat{v}_N, \Delta \hat{v}_E, \Delta \hat{v}_H$. В результате вектор линейной скорости движения объекта \hat{V} будет вычисляться в БИНС по модифицированной формуле:

$$\dot{\hat{v}}_g = C^{gb} \bar{a}_b - (2\bar{u}_g + \bar{\omega}_g^o) \times \bar{v}_g + \bar{g} - K_d \Delta \bar{v}, \quad (10.56)$$

где $\Delta \bar{v} = [\Delta \hat{v}_E, \Delta \hat{v}_N, \Delta \hat{v}_H]^T$; $K_d = \text{diag}(k_{d1}, k_{d2}, k_{d3})$ – диагональная матрица, составленная из коэффициентов передачи демпфирующих обратных связей.

В результате применения обратных связей по оценкам смещений нулей акселерометров $\Delta \hat{a}_i$ и гироскопов $\Delta \hat{\omega}_i$, по оценкам ошибок БИНС в определении линейной скорости $\Delta \hat{v}_N, \Delta \hat{v}_E, \Delta \hat{v}_H$, вектор компенсационных входов \bar{u} для БИНС, введенный в уравнение состояния (10.46), будет иметь вид

$$\bar{u} = [\Delta \hat{a}_x \ \Delta \hat{a}_y \ \Delta \hat{a}_z \ \Delta \hat{\omega}_x \ \Delta \hat{\omega}_y \ \Delta \hat{\omega}_z \ \Delta \hat{v}_E \ \Delta \hat{v}_N \ \Delta \hat{v}_H]^m, \quad (10.57)$$

а соответствующая матрица коэффициентов B в уравнении (10.46) будет состоять из блоков размером 3×3 :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -C^{gb} & 0 & -K_d \\ 0 & -C^{gb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.58)$$

10.4.2. Анализ возможности калибровки и довыставки БИНС на подвижном основании

Чтобы с помощью ОФК можно было оценивать все $n = 15$ введенных в вектор состояния $\bar{x}(t)$ (10.47) ошибок БИНС по измеренным ошибкам $\bar{y}(t)$ (10.54), необходимо, чтобы выполнялось условие полной наблюдаемости системы, описываемой уравнениями (10.46), (10.54). В случае постоянных матриц A , H для полной наблюдаемости необходимо и достаточно, чтобы блочная матрица N (9.6) (матрица наблюдаемости второго рода) имела полный ранг, т.е. $rank N = n = 15$. Если это условие не выполняется, то ранг матрицы N равен числу переменных состояния системы $x_i(t)$ (ошибок БИНС) или их независимых линейных комбинаций, которые можно оценить по измерениям (10.54).

Движения объекта с постоянной скоростью без колебаний

При таком движении объекта элементы матрицы состояния A (10.49) постоянны. В результате анализа матрицы наблюдаемости N было установлено, что $rank N = 13$, то есть из 15 ошибок БИНС, включенных в вектор состояния (2.29), наблюдаемыми являются 13. Исключая отдельные строки и столбцы матрицы A (10.49), соответствующие определенным компонентам вектора состояния (10.47), и проверяя после этого ранг матрицы наблюдаемости, было установлено, что не наблюдаются ошибка δ определения угловой ориентации вокруг вертикальной оси и дрейф гироскопа $\Delta\omega_z$ также вокруг вертикальной оси.

Это означает, что при движении объекта с постоянной скоростью без колебаний невозможно провести довыставку БИНС в азимуте и выполнить калибровку вертикального гироскопа (точнее – оценку эквивалентного дрейфа гироскопов в проекции на вертикальную ось).

Ниже приведены результаты моделирования работы комплексированной системы, построенной на основе БИНС низкой точности и приемника СНС, работающего в обычном (не дифференциальном) режиме работы. При моделиро-

вании были использованы численные значения параметров БИНС, СНС, и параметры движения объекта, приведенные в табл.10.1.

Таблица 10.1. Численные значения параметров, принятые при моделировании

Параметр, обозначение в формулах	Значение
Параметры движения объекта	
Начальная широта, φ	45°
Начальная долгота, λ	30°
Высота, h	0 м
Скорость движения объекта, v	10 м/с
Курс, K	45°
Тангаж, θ	0°
Крен, γ	0°
Параметры измерителей БИНС и СНС	
Дисперсии медленно меняющихся случайных составляющих смещений нулей акселерометров, D_{ai}	$(\frac{0,01}{2,5} \text{ м/с}^2)^2$
Интервалы корреляции медленно меняющихся случайных смещений нулей акселерометров, τ_{ai}	10000 с
Интенсивности порождающих белых шумов вышеуказанных смещений ξ_{ai} , $q_{\xi ai} = \frac{2D_{ai}}{\tau_{ai}}$	$3,2 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}^5$
Интенсивности шумов измерения акселерометров ε_{ai} , $q_{\varepsilon ai}$	$(\frac{0,001}{2,5} \text{ м/с}^2)^2 / \text{Гц}$
Дисперсии медленно меняющихся случайных составляющих дрейфов гироскопов, D_{oi}	$(\frac{0,3}{2,5} \text{ }^\circ/\text{час})^2 =$ $(5,8 \cdot 10^{-7} \text{ рад/с})^2$
Интервалы корреляции медленно меняющихся случайных составляющих дрейфов гироскопов, τ_{oi}	2000 с
Интенсивности порождающих белых шумов вышеуказанных дрейфов ξ_{oi} , $q_{\xi oi} = \frac{2D_{oi}}{\tau_{oi}}$	$3,4 \cdot 10^{-16} (\text{рад/с})^2 / \text{с}$
Интенсивности шумов измерения гироскопов ε_{oi} , $q_{\varepsilon oi}$	$(\frac{1}{2,5} \text{ }^\circ/\text{час})^2 / \text{Гц} =$ $(2 \cdot 10^{-6} \text{ рад/с})^2 / \text{Гц}$
Интенсивности погрешностей приемника СНС v_i ($i = 1 \dots 3$) в определении координат объекта при частоте выдачи информации 1 Гц, r_{vi}	100 м ² / Гц
Интенсивности погрешностей приемника СНС v_i ($i = 4 \dots 6$) в определении скорости объекта при частоте выдачи информации 1 Гц, r_{vi}	$(\frac{0,1}{2,5} \text{ м/с})^2 / \text{Гц}$

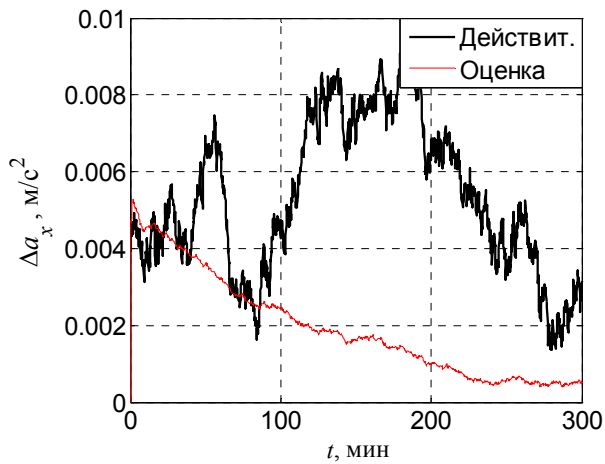


Рис.10.5. Случайное смещение нуля бокового акселерометра и его оценка

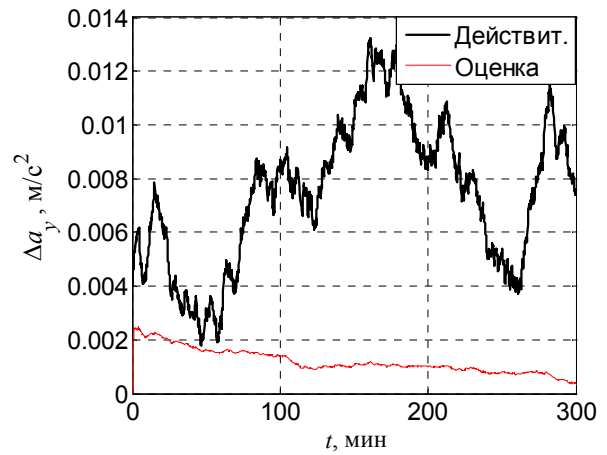


Рис.10.6. Случайное смещение нуля продольного акселерометра и его оценка

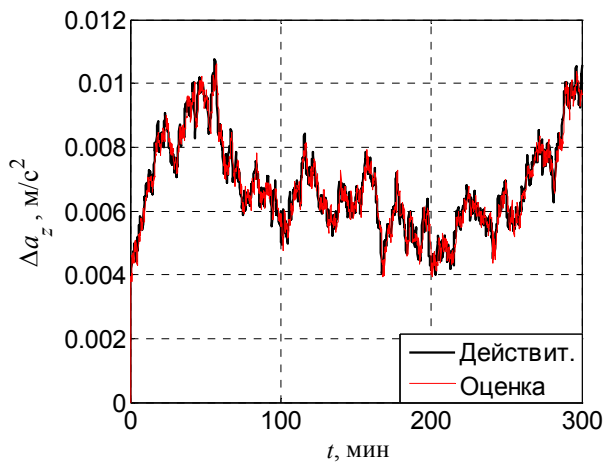


Рис.10.7. Случайное смещение нуля вертикального акселерометра и его оценка

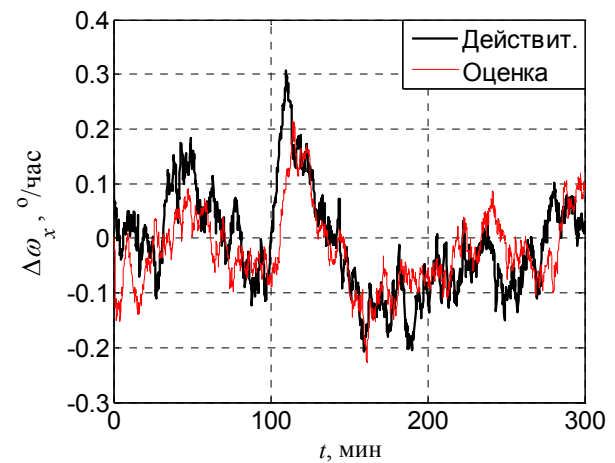


Рис.10.8. Случайное смещение нуля бокового гироскопа и его оценка

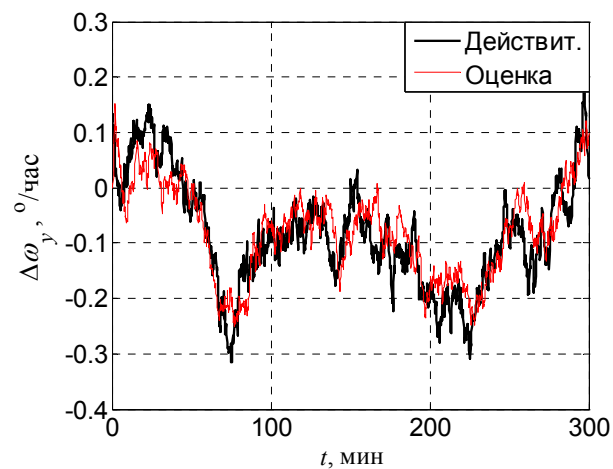


Рис.10.9. Случайное смещение нуля продольного гироскопа и его оценка

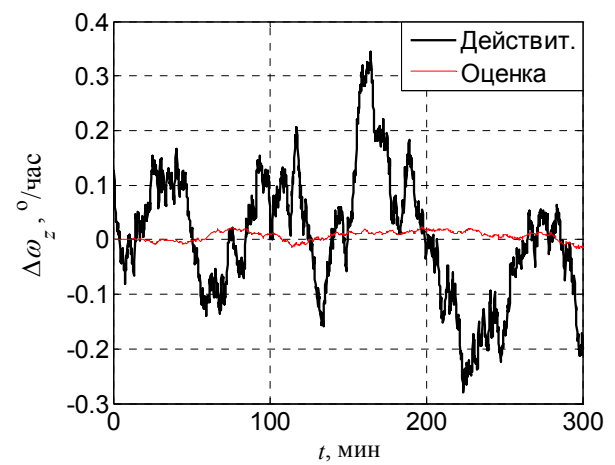


Рис.10.10. Случайное смещение нуля вертикального гироскопа и его оценка

Как видно из графиков рис.10.5, рис.10.6, случайные смещения нулей Δa_x , Δa_y горизонтальных акселерометров оцениваются слабо, в отличие от смещения нуля Δa_z вертикального акселерометра (рис.10.7). Это отличие связано с различными условиями работы горизонтальных и вертикального акселерометров. При рассмотренном в данном пункте стационарном движении объекта его горизонтальные ускорения равны нулю, а вертикальный акселерометр "измеряет" большое ускорение силы тяжести g .

Случайные дрейфы горизонтальных гироскопов БИНС $\Delta \omega_x$, $\Delta \omega_y$, как следует из результатов моделирования, показанных на рис.10.8, рис.10.9, оцениваются хорошо, в отличие от дрейфа $\Delta \omega_z$ гироскопа с вертикальной осью чувствительности (см. рис.10.10), который практически не оценивается. Это следует и из анализа наблюдаемости ошибок БИНС, приведенного выше.

Рассмотрим оценивание ошибок определения углов ориентации в БИНС:

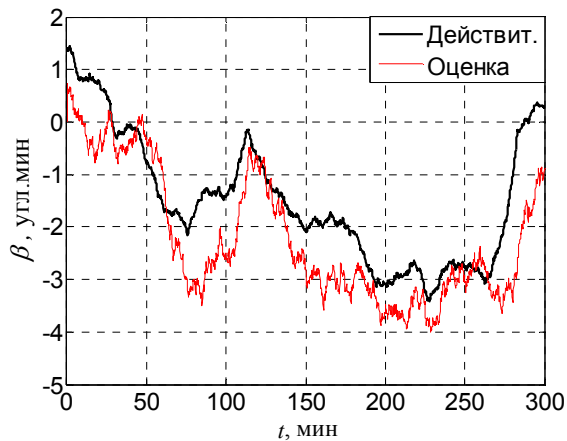


Рис.10.11. Ошибка определения угла наклона объекта относительно вертикали в направлении "Север-Юг" и ее оценка

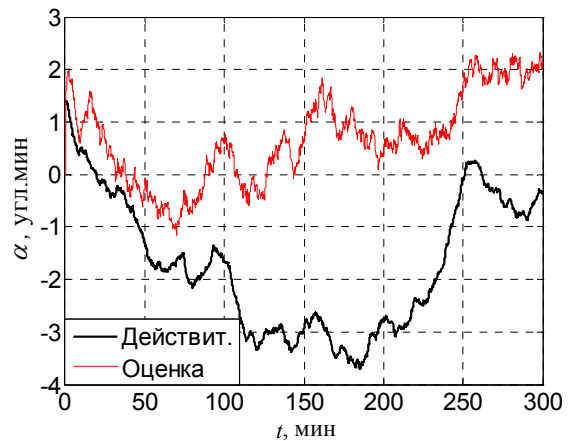


Рис.10.12. Ошибка определения угла наклона объекта относительно вертикали в направлении "Запад-Восток" и ее оценка

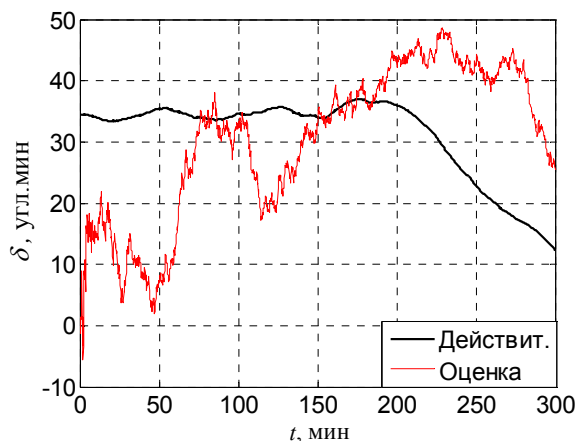


Рис.10.13. Ошибка определения угла курса объекта и ее оценка

Точность оценок ошибок БИНС β , α в определении углов наклона объекта удовлетворительная, как видно из рис.10.11, рис.10.12. Точность оценивания ошибки БИНС δ в определении угла курса (см. рис.10.13) значительно хуже, более того, оценка расходится с действительной ошибкой.

Причина этого следующая. Точность оценивания углов ориентации, внешняя информация о которых в данных СНС отсутствует, ограничена, прежде всего, величиной некомпенсированных случайных дрейфов гироскопов ($\Delta\omega_i - \Delta\hat{\omega}_i$), то есть, в конечном счете, точностью оценок $\Delta\hat{\omega}_i$ этих дрейфов. Как было показано выше при анализе наблюдаемости ошибок БИНС, при стационарном движении объекта дрейф гироскопа $\Delta\omega_z$ вокруг вертикальной оси не наблюдается. Соответственно, и точность оценивания ошибки БИНС в определении угла курса (см. рис.10.13) хуже, чем ошибок в определении углов отклонения объекта относительно плоскости горизонта (см. рис.10.11, рис.10.12).

Приведенные результаты моделирования подтверждают, что при движении объекта с постоянной скоростью без колебаний невозможно провести довыставку БИНС в азимуте и выполнить калибровку вертикального гироскопа (точнее – оценку эквивалентного дрейфа гироскопов в проекции на вертикальную ось).

Напомним, что в данном пункте рассматривается комплексирование БИНС с СНС эти выводы справедливы именно для такого варианта комплексирования. При комплексировании БИНС с угломерными навигационными системами, например, с астроориентатором, оцениваются все три ошибки определения угловой ориентации БИНС β , α , δ (полная довыставка БИНС) и дрейфы всех трех гироскопов $\Delta\omega_x$, $\Delta\omega_y$, $\Delta\omega_z$, однако появляются проблемы с оценкой смещений нулей акселерометров Δa_x , Δa_y , Δa_z .

Улучшение наблюдаемости ошибок БИНС при колебаниях объекта

Маневрирование, колебания объекта, когда изменяются матрица направляющих косинусов C^{gb} , проекции кажущегося ускорения объекта a_i , приводят к изменению элементов матрицы A (10.49), которые зависят от этих величин. В этом случае ранг матрицы наблюдаемости повышается и наблюдаемость ошибок БИНС, включенных в вектор состояния, также улучшается.

Для примера рассмотрим движение объекта с постоянной скоростью при наличии гармонической бортовой качки:

$$\gamma = \gamma_m \sin \omega_k t, \quad (10.59)$$

где γ_m , ω_k – амплитуда и частота качки. Примем для

Ранее было показано, что при стационарном движении объекта ненаблюдаемым является эквивалентный дрейф гироскопов в проекции на вертикальную ось. При качке объекта положение гироскопов БИНС относительно верти-

кали постоянно изменяется, что изменяет и условия наблюдаемости дрейфов каждого из гироскопов. Кроме того, изменяются и проекции ускорений, измеряемые акселерометрами. В результате должны быть наблюдаемы все ошибки БИНС, включенные в вектор состояния \bar{x} (10.47).

При расположении ИИМ БИНС на расстоянии z от центра масс объекта по нормальной оси, будет иметь место периодическое горизонтальное ускорение, которое будет измеряться акселерометрами БИНС. В проекциях на оси географической системы координат получим:

$$\begin{aligned} a_E &= z \ddot{\gamma} \sin K = -z \gamma_m \omega_k^2 \sin K \sin \omega_k t; \\ a_N &= -z \ddot{\gamma} \cos K = z \gamma_m \omega_k^2 \cos K \sin \omega_k t. \end{aligned} \quad (10.60)$$

Зададим для примера

$$\gamma_m = 20^\circ; \quad \omega_k = 0,1 \text{ Гц}; \quad z = 2 \text{ м}. \quad (10.61)$$

На рис.10.14 показан график случайного смещения нуля бокового акселерометра Δa_x , реагирующего на бортовую качку, и его оценка $\hat{\Delta a}_x$, полученная с помощью ОФК.

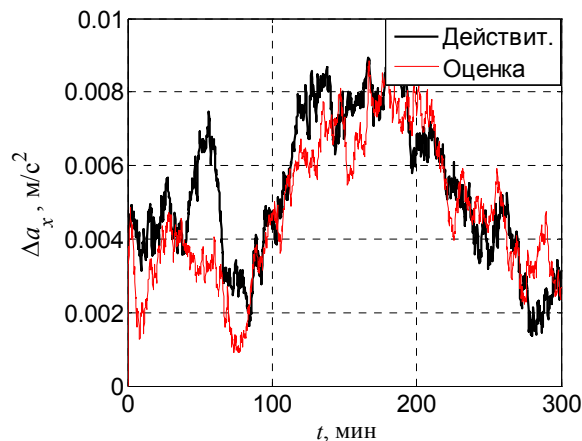


Рис.10.14. Случайное смещение нуля бокового акселерометра и его оценка при бортовой качке объекта

Сравнивая графики на рис.10.14 и рис.10.5, видим существенное улучшение оценки смещение нуля бокового акселерометра при бортовой качке.

Также при бортовой качке становится наблюдаемым случайный дрейф гироскопа $\Delta \omega_z$. Благодаря этому, существенно повысилась точность определения угла курса в комплексированной системе. На рис.10.15 представлены графики ошибки БИНС δ в определении угла курса, и ее оценки с помощью ОФК. Сравнение с аналогичными графиками на рис.10.13 подтверждает, что ошибка определения угла курса стала наблюдаемой и показывает существенное увеличение точности определения угла курса при качке по сравнению со стационарным движением объекта. Это позволяет провести довыставку БИНС в азимуте.

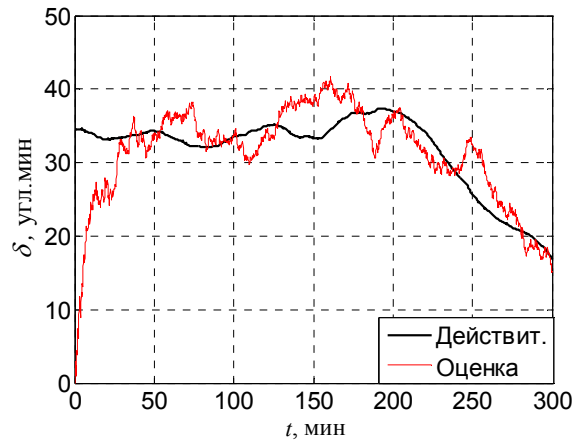


Рис.10.15. Ошибка определения угла курса объекта и ее оценка при бортовой качке объекта

В результате проведенных в данном пункте исследований можно сделать вывод о существенном улучшении возможностей по калибровке акселерометров и гироскопов БИНС и довыставке БИНС при качке объекта по сравнению со стационарным движением объекта.

При необходимости маневры объекта могут быть заданы специально.

11. Моделирование БИНС

Как любая измерительная система, БИНС имеет методические и инструментальные погрешности. Это основные характеристики измерительной системы, которые подлежат определению и анализу.

Методические погрешности могут иметь место из-за приближенности отдельных компонентов (уравнений) алгоритма функционирования или даже неучета отдельных физических факторов (например, отличия земного геоида от эллипсоида, аномальности гравитационного поля Земли и др.), приближенностью методов интегрирования дифференциальных уравнений, приближенного представления отдельных функций, конечной разрядности БЦВМ и округления вычислений.

Инструментальные погрешности являются следствием погрешностей измерителей ориентации и акселерометров, дискретизации измерительной информации, неточности начальной выставки, неточности установки измерителей по отношению к базовым осям объекта.

В пособии рассматриваются системы, в которых измерителями параметров ориентации являются датчики угловой скорости.

В первую очередь, необходимо создать модель движения объекта, которая включает указанные параметры движения. Основные виды движения современного объекта следующие:

- движение с постоянной линейной скоростью относительно Земли,
- движение с ускорением относительно Земли,
- качка и рыскание (трехосная качка) или угловые вибрации,
- орбитальное линейное движение или поступательные вибрации.

Некоторые варианты движения принимают тестовыми, например, коническое движение на качке.

Зададим гармоническую качку в следующем виде:

$$\psi = \psi_m \sin \omega_\psi t, \quad \mathcal{G} = \mathcal{G}_m \sin(\omega_g t + \varepsilon_g), \quad \gamma = \gamma_m \sin(\omega_\gamma t + \varepsilon_\gamma). \quad (11.1)$$

Здесь $\psi_m, \mathcal{G}_m, \gamma_m$ - амплитуды рыскания, тангажа и крена, $\omega_\psi, \omega_g, \omega_\gamma$ - круговые частоты качки, $\varepsilon_g, \varepsilon_\gamma$ - сдвиги по фазе.

Компоненты угловой скорости качки запишем в виде

$$\dot{\psi} = \psi_m \omega_\psi \cos \omega_\psi t, \quad \dot{\mathcal{G}} = \mathcal{G}_m \omega_g \cos(\omega_g t + \varepsilon_g), \quad \dot{\gamma} = \gamma_m \omega_\gamma \cos(\omega_\gamma t + \varepsilon_\gamma). \quad (11.2)$$

Для перехода от параметров качки к угловым скоростям в связанных с объектом осям можно использовать уравнения Эйлера (2.1-2.3), преобразованные к следующему виду

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\mathcal{G}} \cos \gamma + \omega_\xi C_{11}^{bg} + \omega_\eta C_{12}^{bg} + (\omega_\zeta + \dot{\psi}) C_{13}^{bg}, \\ \omega_y &= \dot{\gamma} + \omega_\xi C_{21}^{bg} + \omega_\eta C_{22}^{bg} + (\omega_\zeta + \dot{\psi}) C_{23}^{bg}, \\ \omega_z &= \dot{\mathcal{G}} \sin \gamma + \omega_\xi C_{31}^{bg} + \omega_\eta C_{32}^{bg} + (\omega_\zeta + \dot{\psi}) C_{33}^{bg}, \end{aligned} \quad (11.3)$$

где C_{ij}^{bg} находим из (2.4).

Проекции угловой скорости географического сопровождающего базиса в (11.3) определяют по формулам

$$\omega_\xi = -\frac{v_N}{R_N + h}, \quad \omega_\eta = u \cos \varphi + \frac{v_E}{R_E + h}, \quad \omega_\zeta = u \sin \varphi + \frac{v_E}{R_E + h} \operatorname{tg} \varphi. \quad (11.4)$$

Здесь R_N, R_E - главные радиусы кривизны земного эллипсоида в точке нахождения объекта в соответствии с (1.1), (1.2).

Скорость объекта можно задать постоянной, можно задать переменной, например, учитывая влияние ускорений места установки на качке [20]. Ускорения движения можно задать, например, в соответствии с (3.16)

$$\begin{aligned} W_\xi &= \dot{v}_E - (u \sin \varphi + \omega_\zeta) v_N + \left(2u \cos \varphi + \frac{v_E}{R_E + h}\right) v_\zeta; \\ W_\eta &= \dot{v}_N + (u \sin \varphi + \omega_\zeta) v_E + u^2 (R_E + h) \sin \varphi \cos \varphi + \frac{v_N \cdot v_\zeta}{R_E + h}; \\ W_\zeta &= \dot{v}_\zeta - \frac{v_N^2}{R_N + h} - \frac{v_E^2}{R_E + h} - 2uv_E \cos \varphi - u^2 (R_E + h) \cos^2 \varphi. \end{aligned}$$

Абсолютную скорость объекта получают путем интегрирования абсолютного ускорения

$$V_{\xi} = \int_0^t W_{\xi} dt + V_{\xi 0}, \quad V_{\eta} = \int_0^t W_{\eta} dt + V_{\eta 0}.$$

Относительную скорость получают, вычитая переносную скорость из-за вращения Земли

$$v_E = V_{\xi} - (R_E + h)u \cos \varphi, \quad v_N \equiv V_{\eta}.$$

По данным о скорости вычисляют широту и долготу

$$\varphi = \int_0^t \frac{v_N}{R_N + h} dt + \varphi_0, \quad \lambda = \int_0^t \frac{v_E}{(R_E + h) \cos \varphi} dt + \lambda_0. \quad (11.5)$$

Компоненты модели движения формируют в блоке **Модель движения объекта** (рис.11.1).

Для решения задачи навигации используют основное уравнение инерциальной навигации в виде $\bar{a} = \bar{W} - \bar{g}'$, где \bar{a} - вектор кажущегося ускорения, \bar{W} - вектор абсолютного ускорения, \bar{g}' - вектор гравитационного ускорения (ускорения силы тяготения). При движении в околоземном пространстве на объект всегда действует центробежное ускорение из-за вращения Земли $\bar{W}_{uc} = \bar{u} \times (\bar{u} \times \bar{R})$, которое в совокупности с гравитационным ускорением создает ускорение силы тяжести

$$\bar{g} = \bar{g}' - \bar{u} \times (\bar{u} \times \bar{R}). \quad (11.5)$$

Упрощенная модель ускорения силы тяжести в географическом сопровождающем трехграннике может иметь вид:

$$g_{\xi} = 0; \quad g_{\eta} = 0; \quad g_{\zeta} = -g_0(1 + 5,2884 \cdot 10^{-3} \sin^2 \varphi) \left[1 - \frac{2h}{a}(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi) \right],$$

где h - барометрическая высота объекта.

При более точном учете гравитационного ускорения необходимо использовать формулы (1.14).

Основное уравнение инерциальной навигации может быть представлено в различных формах в зависимости от того, какую из скоростей мы используем, абсолютную \bar{V} или относительную \bar{v} , и от того, в проекциях на какую систему координат мы записываем уравнение.

Основное уравнение инерциальной навигации в географическом базисе \mathbf{g} , записанное для вектора относительной скорости \vec{v} , можно представить из (3.8) или (3.9) в виде

$$\dot{\vec{v}} + (\vec{u} + \vec{\omega}) \times \vec{v} + \vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{r}) = C^{gb} \vec{a}_g + \vec{g}'_g \quad (11.6)$$

(в левой части уравнения индексы g опущены), где вектор относительной скорости в базисе \mathbf{g} имеет вид $\vec{v}_g = [v_E, v_N, v_H]^T$,

вектор скорости вращения Земли $\vec{u}_g = [0, u \cos \varphi, u \sin \varphi]^T$,

вектор абсолютной угловой скорости $\vec{\omega}_g = [\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta]^T$.

В соответствии с уравнением (11.6) формируют кажущееся ускорение \vec{a}_g . Это производится в блоке **АКС**.

Для учета погрешностей приборов можно использовать модели из п. 10.1. В результате на выходе блоков **ДУС** и **АКС** получим модели сигналов датчиков угловой скорости и акселерометров.

Зависимости, которые описывают модель движения объекта и уравнения работы БИНС без ошибок, называют иногда уравнениями "идеальной" работы.

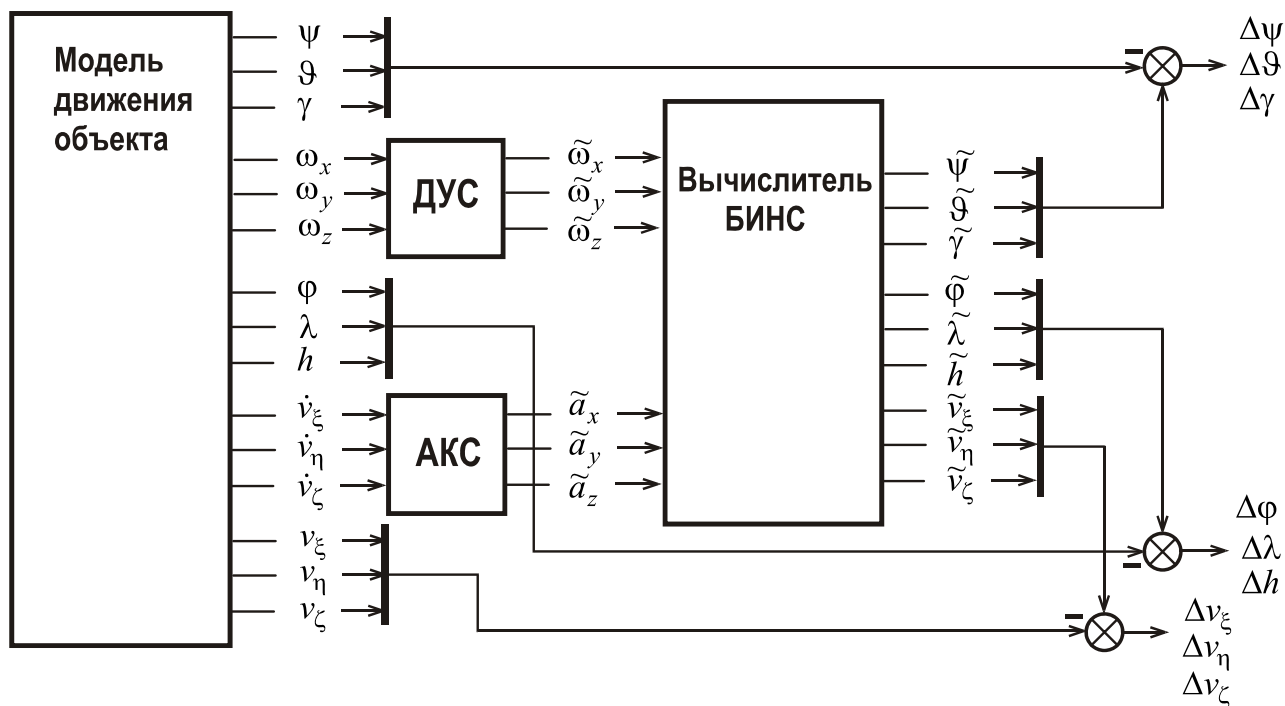


Рис.11.1. Схема моделирования ошибок БИНС

Зависимости, которые учитывают возмущающие факторы (ошибки чувствительных элементов, погрешности численного интегрирования, погрешности начальной выставки и др.) называют уравнениями "реальной" работы.

В вычислителе БИНС моделируются уравнения реальной работы в соответствии с гл. 6. Результатом моделирования будут приборные значения выходных параметров $\tilde{\psi}, \tilde{\theta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\phi}, \tilde{\lambda}, \tilde{h}, \tilde{v}_\xi, \tilde{v}_\eta, \tilde{v}_\zeta$. После вычитания из приборных значений

исходных (заданных) параметров движения, сформированных в блоке **Модель движения объекта**, получают значения погрешностей. В этом случае можно моделировать погрешности численных методов вычисления в отсутствие каких либо возмущающих факторов.

Ошибки системы получают также как разность между решениями уравнений "реальной" работы и "идеальной" работы. Использование решений уравнений "идеальной" работы вместо заданной модели движения позволяет исключить влияние ошибок численного метода интегрирования.

Такую методику моделирования погрешностей БИНС иногда называют "прямым" моделированием.

Моделирование погрешностей возможно также по уравнениям ошибок (см. гл. 7.).

Однако "прямое" моделирование представляется более предпочтительным, поскольку сами уравнения ошибок всегда приближенны. Результат моделирования по уравнениям ошибок можно использовать как тестовый при отладке программы. В то же время более надежными тестами можно считать аналитические результаты в получении ошибок для любых частных случаев, которые поддаются аналитическому исследованию.

В качестве учебного примера моделирования в [25] приведена программа, составленная на языке общеизвестного пакета Матлаб. Можно отметить, что моделирование в m-файлах более универсально, чем моделирование в Simulink.

Литература

1. Бромберг П.В., Теория инерциальных систем навигации. - М.: «Наука», 1979. - 296 с.
2. Одинцов А.А. Теория и расчет гироскопических приборов. – К.: Вища школа, 1985. -392 с.
3. Павловський М.А. Теоретична механіка. – К.: «Техніка», 2002. - 510 с.
4. Под ред. М.Н.Красильщикова, Г.Г.Себрякова – Управление и наведение беспилотных маневренных летательных аппаратов на основе современных информационных технологий – М.: Физматлит, 2005. – 280 с.
5. Кузовков И.Т., Салычев О.С. Инерциальная навигация и оптимальная фильтрация. - М.: Машиностроение, 1982. - 216 с.
6. Titterton D., Weston J., Strapdown Inertial Navigation Technology -2nd Edition, Institution of Electrical Engineers ,UK, 2004. - 558 p.
7. Слив Э.И. Прикладная теория инерциальной навигации. -Л.: Судостроение, 1972. - 128 с.
8. Лазарев Ю.Ф., Моделювання на ЕОМ. - К.: Політехніка, 2007. - 290 с.
9. Панов А.П. Математические основы теории инерциальной ориентации. – К., 1995. – 278 с.

10. Бобнев М.П., Кривицкий Б.Х., Ярлыков М.С.. Комплексные системы радиоавтоматики. – М.: «Советское радио», 1968. – 118 с.
11. Самотокин Б.Б., Мелешко В.В., Степанковский Ю.В. Навигационные приборы и системы. - К.: Вища школа, 1986. - 343 с.
12. Ориентация и навигация подвижных объектов: современные информационные технологии / Под ред. Б.С.Алешина, К.К.Веремеенко, А.И.Черноморского. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 424с.
13. Анучин О.Н., Емельянец Г.И. Интегрированные системы ориентации и навигации морских подвижных объектов. – СПб.: ГНЦ РФ – ЦНИИ «Электроприбор», 2003. – 390с.
14. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных систем. – М.: Наука, 1992. – 280 с.
15. Андреев В.Д. Теория инерциальной навигации. Корректируемые системы.-М.:Наука,1967.-648 с.
16. Лазарев Ю.Ф., Бобровицька Я.Г. Розроблення і моделювання алгоритмів бесплатформеної системи орієнтації. – К.:НТУУ “КПІ”, 2006.–135с.
www.kafpson.kpi.ua
17. Васильківський І.В. Дослідження похибок бесплатформеної інерціальної навігаційної системи. Магістерська дисертація – К.: НТУУ “КПІ”, 2010. – 129 с.
18. Селезнев В.П. Навигационные устройства. – М.: Машиностроение, 1974. - 600с.
19. Инерциальные навигационные системы морских объектов /Под ред. Д.П.Лукьянова. – Л.: Судостроение, 1989. -184 с.
20. Ривкин С.С., Берман З.М., Окон И.М. Определение параметров ориентации объекта бесплатформенной инерциальной системой. - СПб: ГНЦ РФ - ЦНИИ "Электроприбор", 1996. - 226 с.
21. Епифанов А.А. Избыточные системы управления летательными аппаратами. – М.: Машиностроение, 1978. - 144с.
22. Водичева Л.В., Бельский Л.Н., Маслова О.И., Лукин Н.А. Оптимальное проектирование прецизионных малогабаритных БИНС для высокоманевренных подвижных объектов. // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета, №4(20), 2009. – с.186-198
23. Алешкин М.В. Совершенствование схем и алгоритмов предварительной обработки информации избыточных блоков инерциальных датчиков. Кандидатская диссертация. – Саратовский ГТУ, 2009. – 121 с.
24. Мелешко В. В. Инерциальные навигационные системы. Начальная выставка. - К.: «Корнийчук», 1999. – 126 с.
25. Мелешко В.В. Руководство к лабораторной работе "Моделирование БИНС", www.kafpson.kpi.ua
26. Цисарж В.В., Марусик Р.И. Математические методы компьютерной графики. - К.: «Факт», 2004. – 464 с.

Сведения из алгебры кватернионов

Кватернион – 4-х мерное комплексное число $\lambda = \lambda_0 + \vec{i}\lambda_1 + \vec{j}\lambda_2 + \vec{k}\lambda_3$, λ_i – параметры кватерниона (они же параметры Родрига-Гамильтона).

Кватернион описывает поворот тела (связанной с ним системы координат) относительно оси \vec{v} на угол ϕ (рис.п1.)

λ_0 – скалярная часть кватерниона, $\vec{i}\lambda_1 + \vec{j}\lambda_2 + \vec{k}\lambda_3$ – векторная часть, где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты связанной системы координат.

Иногда кватернион представляют как вектор, состоящий из скалярной и векторной части

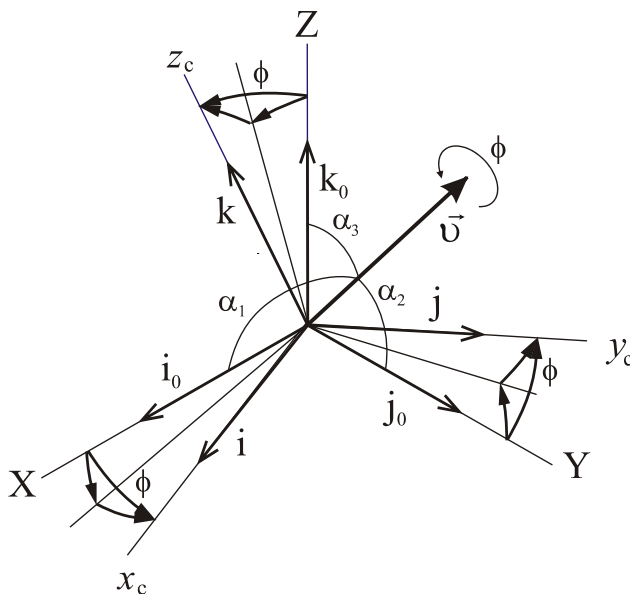
$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \vec{\lambda} \end{bmatrix}, \text{ где } \vec{\lambda} = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3]^T.$$

Принимая, что ось \vec{v} задается единичным вектором \vec{e} , единичный кватернион Λ , описывающий поворот, записывают как

$$\Lambda = \left(\cos \frac{\phi}{2}, \vec{e} \sin \frac{\phi}{2} \right);$$

$$\lambda_0 = \cos \frac{\phi}{2}, \quad \lambda_1 = l \sin \frac{\phi}{2}, \quad \lambda_2 = m \sin \frac{\phi}{2}, \quad \lambda_3 = n \sin \frac{\phi}{2}.$$

Здесь l, m, n – направляющие косинусы углов α_i ($i=1,2,3$) соответственно (рис.п1), определяющих положение оси поворота.



Иногда кватернион записывают в виде $\Lambda = \vec{i}\lambda_1 + \vec{j}\lambda_2 + \vec{k}\lambda_3 + \lambda_4$ или в виде $\Lambda = \lambda_1 + \vec{i}\lambda_2 + \vec{j}\lambda_3 + \vec{k}\lambda_4$. Кватернион записывают также аналогично вектору, например,

$$\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4]^T.$$

Параметры единичного кватерниона связаны очевидным соотношением

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1. \quad (\text{п1.1})$$

Рис.п1. Поворот системы координат так же, как сложение векторов. Так, если

Сложение кватернионов выполняется

$$\mathbf{q}_1 = [w_1 \ x_1 \ y_1 \ z_1]^T, \quad \mathbf{q}_2 = [w_2 \ x_2 \ y_2 \ z_2]^T, \\ \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = [w_1 + w_2 \ x_1 + x_2 \ y_1 + y_2 \ z_1 + z_2]^T.$$

Правила кватернионного сложения:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 &= \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_1; \\ (\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) + \mathbf{q}_3 &= \mathbf{q}_1 + (\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3); \\ \mathbf{q} + \mathbf{0} &= \mathbf{0} + \mathbf{q}; \\ \mathbf{q} + (-\mathbf{q}) &= (-\mathbf{q}) + \mathbf{q} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Если число s - скаляр, то его умножение на кватернион определяется как

$$s\mathbf{q} = \left(sq_0, \overset{\rightarrow}{sq} \right).$$

Перемножение кватернионов соответствует сложению двух последовательных поворотов вокруг соответствующих осей: $r = p \circ q$, причем $p \circ q \neq q \circ p$, т.е. перемножение кватернионов некоммутативно, \circ - знак кватернионного умножения).

Правила перемножения кватернионов

$$\begin{aligned} r_0 &= p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3, \\ r_1 &= p_1q_0 + p_0q_1 - p_3q_2 + p_2q_3, \\ r_2 &= p_2q_0 + p_3q_1 + p_0q_2 - p_1q_3, \\ r_3 &= p_3q_0 - p_2q_1 + p_1q_2 + p_0q_3. \end{aligned} \tag{п.1.1a}$$

Правила кватернионного умножения:

$$\begin{aligned} (\mathbf{q}_1 \circ \mathbf{q}_2) \circ \mathbf{q}_3 &= \mathbf{q}_1 \circ (\mathbf{q}_2 \circ \mathbf{q}_3); \\ \mathbf{1} \circ \mathbf{q} &= \mathbf{q} \circ \mathbf{1} = \mathbf{q}; \\ \mathbf{q} \circ \mathbf{q}^{-1} &= \mathbf{q}^{-1} \circ \mathbf{q} = \mathbf{1} = (1 \ 0 \ 0 \ 0); \\ (\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \circ \mathbf{q}_3 &= \mathbf{q}_1 \circ \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_2 \circ \mathbf{q}_3. \end{aligned}$$

В случае n поворотов, задаваемых кватернионами $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$, формула сложения поворотов имеет вид

$$\Lambda = \Lambda_n \circ \Lambda_{n-1} \circ \dots \circ \Lambda_1. \tag{п1.2}$$

Эта формула справедлива, когда кватернионы составляющих поворотов $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$ заданы своими компонентами в одном и том же базисе. В этом случае компоненты результирующего кватерниона будут в этом же базисе.

Сопряженный кватернион:

$$\mathbf{q}^* = (q_0, \overset{\rightarrow}{-q}) = (q_0, -q_1\mathbf{i}, -q_2\mathbf{j}, -q_3\mathbf{k}) = (q_0 - q_1 - q_2 - q_3).$$

Квадрат кватернионной нормы:

$$\|\mathbf{q}\|^2 = \mathbf{q}\mathbf{q}^* = q_0^2 + \vec{q} \bullet \vec{q} = |\mathbf{q}^2| = \sum_{i=0}^3 q_i^2.$$

Модуль кватерниона

$$\|\mathbf{q}\| = \sqrt{\sum_{i=0}^3 q_i^2}.$$

Обратный кватернион

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{\mathbf{q}^*}{\|\mathbf{q}\|}.$$

и для нормированного кватерниона с нормой $\|\mathbf{q}\| = 1$,

$$\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^*,$$

что значительно проще, чем вычисление обратной матрицы.

Любой скаляр можно представить как кватернион:

$$\mathbf{q} = (\mathbf{s} \ 0 \ 0 \ 0) = (\mathbf{s}, 0).$$

Любой трехмерный вектор можно представить как кватернион:

$$\mathbf{q} = (0 \ q_1 \ q_2 \ q_3) = (0, \vec{q}).$$

Кватернионная матрица $[q]$ или $(q \times)$:

$$[q] = \begin{bmatrix} q_0 & -\vec{q}^T \\ \vec{q} & q_0 I + [\vec{q} \times] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix}.$$

В этом выражении I - единичная матрица, $[\vec{q} \times]$ - вектор \vec{q} в матричной форме, T - знак транспонирования.

Повороту системы \mathbf{b} относительно сопровождающего базиса \mathbf{g} на углы курса ψ , тангажа \mathcal{A} , крена γ соответствует кватернион Λ^{gb} . Этот кватернион может быть получен перемножением кватернионов поворота на углы $\psi, \mathcal{A}, \gamma$.

Учитывая правила перемножения ортов

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{j} &= -\vec{j} \times \vec{i} = \vec{k}, & \vec{i}_1 \times \vec{i}_1 &= 0, & \vec{i}^2 &= -1, \\ \vec{k} \times \vec{i} &= -\vec{i} \times \vec{k} = \vec{j}, & \vec{i}_2 \times \vec{i}_2 &= 0, & \vec{j}^2 &= -1, \\ \vec{j} \times \vec{k} &= -\vec{k} \times \vec{j} = \vec{i}; & \vec{i}_3 \times \vec{i}_3 &= 0; & \vec{k}^2 &= -1, \end{aligned}$$

повороту на угол ψ соответствует кватернион $M = \cos \frac{\psi}{2} - \vec{k} \sin \frac{\psi}{2}$ (вектор угловой скорости $\vec{\psi}$ направлен против орта \vec{k}),

повороту на угол ϑ соответствует кватернион $N = \cos \frac{\vartheta}{2} + \vec{i} \sin \frac{\vartheta}{2}$,

повороту на угол γ соответствует кватернион $P = \cos \frac{\gamma}{2} + \vec{j} \sin \frac{\gamma}{2}$.

Выполнив, в соответствии с (п1.2), перемножение кватернионов $\Lambda^{gb} = P \circ N \circ M$, получим параметры кватерниона $\Lambda^{gb} = \lambda_0 + \vec{i} \lambda_1 + \vec{j} \lambda_2 + \vec{k} \lambda_3$

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}, \\ \lambda_1 &= \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}, \\ \lambda_2 &= \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}, \\ \lambda_3 &= \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}. \end{aligned} \quad (\text{п1.3})$$

Эти соотношения используют для перехода от углов Эйлера-Крылова к параметрам Родрига-Гамильтона.

Матрица направляющих косинусов через параметры кватерниона может быть представлена в следующем виде

C^{gb}	x_c	y_c	z_c	(п1.4)
ξ	$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2$	$2(-\lambda_0 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2)$	$2(\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_0 \lambda_2)$	
η	$2(\lambda_0 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2)$	$\lambda_0^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2$	$2(-\lambda_0 \lambda_1 + \lambda_2 \lambda_3)$	
ζ	$2(\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_2)$	$2(\lambda_0 \lambda_1 + \lambda_2 \lambda_3)$	$\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2$	

Можно, используя (п1.1), записать

$$\begin{aligned} \lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 &= 2\lambda_0^2 + 2\lambda_1^2 - 1, \\ \lambda_0^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 &= 2\lambda_0^2 + 2\lambda_2^2 - 1, \\ \lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2 &= 2\lambda_0^2 + 2\lambda_3^2 - 1. \end{aligned}$$

В соответствии с (2.4) из матрицы (п1.4)

$$\psi = \arctg\left(\frac{c_{12}}{c_{22}}\right), \quad \gamma = -\arctg\left(\frac{c_{31}}{c_{33}}\right), \quad \vartheta = \arcsin(c_{32}) \quad \text{или} \quad \vartheta = \arctg\left(\frac{c_{32}}{\sqrt{1-c_{32}^2}}\right),$$

значит

$$\psi = \arctg\left(\frac{2(-\lambda_0 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2)}{\lambda_0^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2}\right), \quad \gamma = -\arctg\left(\frac{2(\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_2)}{\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2}\right),$$

$$\mathcal{G} = \arcsin(2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)) \quad \text{или} \quad \mathcal{G} = \arctg\left(\frac{2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)}{\sqrt{1 - 4(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)^2}}\right) \quad (\text{п1.5})$$

Параметры кватерниона можно выразить через направляющие косинусы [26]:

$$\lambda_0 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + c_{11} + c_{22} + c_{33}}, \quad \lambda_1 = \pm \frac{1}{4\lambda_0} (c_{32} - c_{23}),$$

$$\lambda_2 = \pm \frac{1}{4\lambda_0} (c_{13} - c_{31}), \quad \lambda_3 = \pm \frac{1}{4\lambda_0} (c_{21} - c_{12}).$$

Дифференциальное уравнение, описывающее изменение параметров Родрига-Гамильтона в зависимости от проекций абсолютной угловой скорости $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ и проекций переносной угловой скорости $\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$, может быть записано, как и обобщенное уравнение Пуассона, в виде [13]

$$\dot{\Lambda}^{gb} = \frac{1}{2} ((\Lambda^{gb} \times) \omega_b - (\omega_g \times) \Lambda^{gb}),$$

где $\omega_b = [0 \quad \omega_{xc} \quad \omega_{yc} \quad \omega_{zc}]^T$ - кватернион, соответствующий вектору угловой скорости $\vec{\omega}_b$, а $\omega_g = [0 \quad \omega_\xi \quad \omega_\eta \quad \omega_\zeta]^T$ - кватернион, соответствующий вектору угловой скорости $\vec{\omega}_g$, $(\Lambda^{gb} \times)$, $(\omega_g \times)$ - кватернионные матрицы.

В векторно-матричной форме это выражение можно записать, как

$$2 \cdot \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_0 \\ \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{xc} \\ \omega_{yc} \\ \omega_{zc} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\omega_\xi & -\omega_\eta & -\omega_\zeta \\ \omega_\xi & 0 & -\omega_\zeta & \omega_\eta \\ \omega_\eta & \omega_\zeta & 0 & -\omega_\xi \\ \omega_\zeta & -\omega_\eta & -\omega_\eta & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix},$$

откуда можно получить

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_0 \\ \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -(\omega_x - \omega_\xi) & -(\omega_y - \omega_\eta) & -(\omega_z - \omega_\zeta) \\ \omega_x - \omega_\xi & 0 & \omega_z + \omega_\zeta & -(\omega_y + \omega_\eta) \\ \omega_y - \omega_\eta & -(\omega_z + \omega_\zeta) & 0 & \omega_x + \omega_\xi \\ \omega_z - \omega_\zeta & \omega_y + \omega_\eta & -(\omega_x + \omega_\xi) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}. \quad (\text{п1.6})$$

Если обозначить матрицу угловых скоростей Ω , то уравнение можно записать в компактной векторно-матричной форме

$$\dot{\Lambda}^{gb} = \frac{1}{2} \Omega \cdot \Lambda^{gb}.$$

Если в уравнении (п1.6) пренебречь проекциями переносной угловой скорости, получим уравнение, описывающее изменение кватерниона в инерциальной системе координат.

Технические характеристики некоторых российских БИНС

Шифр системы Тип гироскопа	Точность определения, СКО				Время выставки		Масса системы, кг	Потребляемая мощность, Вт	Наработка на отказ, час	Фирма
	Координаты, км	Скорость, м/с	Курс, угл. мин	Тангаж, Крен, угл. мин	Режим заданного курса, мин	Режим гироскопа сирования, мин				
БИНС-90 КЛГ	1,85	1,0	6	2-4 2-4	3	5	15	10 000	МИЭА	
БИНС-СП КЛГ	1,25	1,0	6	3 3	1	5	18	6 000	АВИА ПРИБОР	
СБКВ-2 ДНГ	-	0,6	60	15	1	-	8	80 60	РПКБ	
БИНС-ТВГ ТВГ	0,9	0,5	3-5	1-2	0,5	3	10	180 180	РПКБ	
БИНС-Т КЛГ	0,9	0,5	3-5	2-3	0,5	4	9	70 70	РПКБ	

Обозначения: КЛГ – кольцевой лазерный гироскоп, ДНГ – динамически настраиваемый гироскоп, ТВГ – твердотельный волновой гироскоп, МИЭА – Московский институт электромеханики и автоматики, РПКБ – Раменское приборостроительное конструкторское бюро

Технические характеристики некоторых зарубежных БИНС

Шифр системы Тип гироскопа	Точность определения				Время выставки		Масса системы, кг	Потребляемая мощность, Вт	Наработка на отказ, час	Фирма
	Координаты, км	Скорость, м/с	Курс, угл. мин	Тангаж, Крен, угл. мин	Режим заданного курса, мин	Режим гироскопа сирования, мин				
SINS-1000 BOG	1,8	1,0	4	2		10	8	30		Vibtel Industriel
H-423 ЛГ GG-1300	1,5 за 1 час	0,76			0,5	4	ИИБ 8,2 Всего 23	140	3100	Honeywell (USA)
LINS-300 ЛГ	1,8 за 1 час	0,3	4				ИИБ <20 кг	150	2000	British Aerospace (Велико- британия)
Sigma 40 ЛГ	0,25 за 1 час		3 · sec φ (ско)	1 (ско)		6	25	70	20000	SAGEM (Франция)

Обозначения: ЛГ –лазерный гироскоп, BOG –волоконно-оптический гироскоп