

Міністерство освіти і науки України  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут»

## **ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА-1. ОПР МАТЕРІАЛІВ**

### **Методичні вказівки**

до виконання практичних занять  
для студентів напрямку підготовки  
6.051003 – приладобудування

Київ  
НТУУ «КПІ»  
2015

Прикладна механіка-1. Опір матеріалів: Метод. вказівки до виконання практичних занять для студентів напрямку підготовки 6.051003 – приладобудування / Уклад.: С.О. Цибульник. – К.: НТУУ «КПІ», 2015. – 33 с.

*Рекомендовано Вченою радою ПБФ НТУУ «КПІ»*

*(Протокол № \_\_ від \_\_. \_\_. 2015 р.)*

Навчальне видання  
**ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА-1. ОПІР МАТЕРІАЛІВ**

**Методичні вказівки**

до виконання практичних занять  
для студентів напрямку підготовки  
6.051003 – приладобудування

Укладачі

*Цибульник Сергій Олексійович*

Відповідальний  
редактор

Півторак Д.О., канд. техн. наук

Рецензент

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
1 РОЗТЯГ ТА СТИСК.....	5
2 ЗСУВ.....	14
3 КРУЧЕННЯ.....	18
4 ЗГИН.....	27
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	33

## ВСТУП

Методичні вказівки складені відповідно до чинної робочої навчальної програми дисципліни «Прикладна механіка-1» для студентів приладобудівного факультету, які навчаються за програмою освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавра за напрямком 6.051003 – приладобудування (спеціальність прилади і системи орієнтації та навігації).

Мета даного навчального видання – допомогти студентам в надбанні необхідних практичних навичок проведення проектувальних і перевірних розрахунків стрижневих конструкцій на міцність і жорсткість.

Виконання практичних завдань, пов'язаних з визначенням та побудовою епюр поздовжніх та поперечних сил, поздовжніх та дотичних напружень, крутного та згинаючого моменту сприятиме закріпленню, поглибленню та узагальненню теоретичних основ курсу, а також сприятиме розвитку навичок самостійної творчої роботи студентів у процесі їх навчання, зокрема при виконанні контрольних робіт з дисципліни «Прикладна механіка-1».

Методичні вказівки містять стислі теоретичні відомості, необхідні для виконання конкретних практичних завдань, приклади їх визначення за наведеними методиками, завдання для самостійної роботи студентів.

## 1. РОЗТЯГ ТА СТИСК

Розтяг (стиск) – деформація, при якій в поперечному перерізі бруса виникає тільки поздовжнє розтягуюче або стискаюче зусилля. Розтягуючі зусилля прийнято вважати позитивними, стискаючі – негативними. Розтяг (стиск) викликається зовнішніми силами, що діють уздовж поздовжньої осі стержня. До деформації розтягу (стиску) схильні троси підйомних машин, опори мостів, будинків, елементи зчіпних устроїв вагонів і локомотивів і т.п.

Розглянемо стрижень довжиною  $l$ , що розтягується двома силами  $F$  (рис. 1, *a*). Для визначення внутрішнього зусилля скористаємося методом перерізів та мислено розсічемо стрижень поперечним перерізом із координатою  $z$  ( $0 \leq z \leq l$ ). Відкинемо праву частину стрижня, а дію відкинутої замінимо внутрішнім нормальним зусиллям  $N$  (інші силові чинники в перерізі не діють, тому що проекції зовнішніх сил на осі  $x$  і  $y$  рівні нулю). З умови рівноваги лівої частини (суми сил на вісь  $z$ ) (рис. 1, *b*)

$$\sum F_z = -F + N = 0$$

знаходимо нормальне зусилля

$$N = F.$$

По закону Ньютона в перерізі правої частини стрижня діє таке ж внутрішнє зусилля  $N$ , але спрямоване протилежно. Неважко переконатися, що права частина стрижня також урівноважена. Як наслідок з формули  $N = F$  нормальна сила в перерізі не залежить від координати перерізу  $z$ , у всіх перерізах стрижня діє те саме внутрішнє зусилля  $N$ .

Графік зміни поздовжніх зусиль по довжині стрижня називається епюрою поздовжніх зусиль (рис. 1, *в*). Для її побудови від базової лінії, проведеної паралельно поздовжній осі стрижня, перпендикулярно відкла-

даємо ординати, що діють у перерізах стрижня поздовжніх зусиль. Штрихування епюри виконується прямими лініями, перпендикулярними базовій лінії. У загальному випадку (коли на стрижень діє довільне число сил різноманітних напрямків) формула  $N = F$  перетвориться до виду

$$N = \sum F_{zi},$$

де  $\sum F_{zi}$  – алгебраїчна сума проекцій зовнішніх сил на поздовжню вісь стрижня, що прикладені по один бік від перерізу.

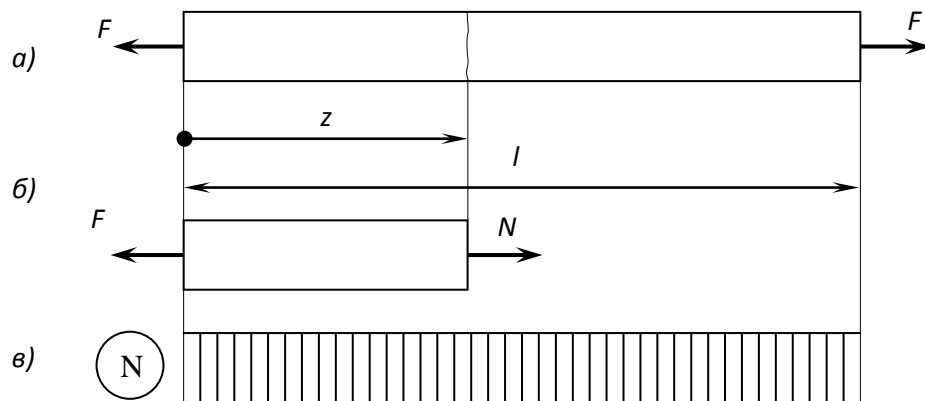


Рисунок 1 – Поздовжні зусилля у стрижні

Поздовжнє зусилля в довільному перерізі стрижня дорівнює алгебраїчній сумі проекцій зовнішніх сил на поздовжню вісь, прикладених по одну сторону від перерізу. Зовнішні сили, що розтягують, (спрямовані від перерізу) беруться зі знаком “+”, зовнішні стискаючі сили (спрямовані до перерізу) – із знаком “-”.

### **Приклад 1.**

Для заданого бруса побудувати епюри: а) поздовжньої сили  $N$ , б) нормальних напружень в поперечному перерізі  $\sigma$ , в) переміщення вільного кінця бруса  $\lambda$ . Схема навантаження зображена на рис. 2.

**Розв'язання:**

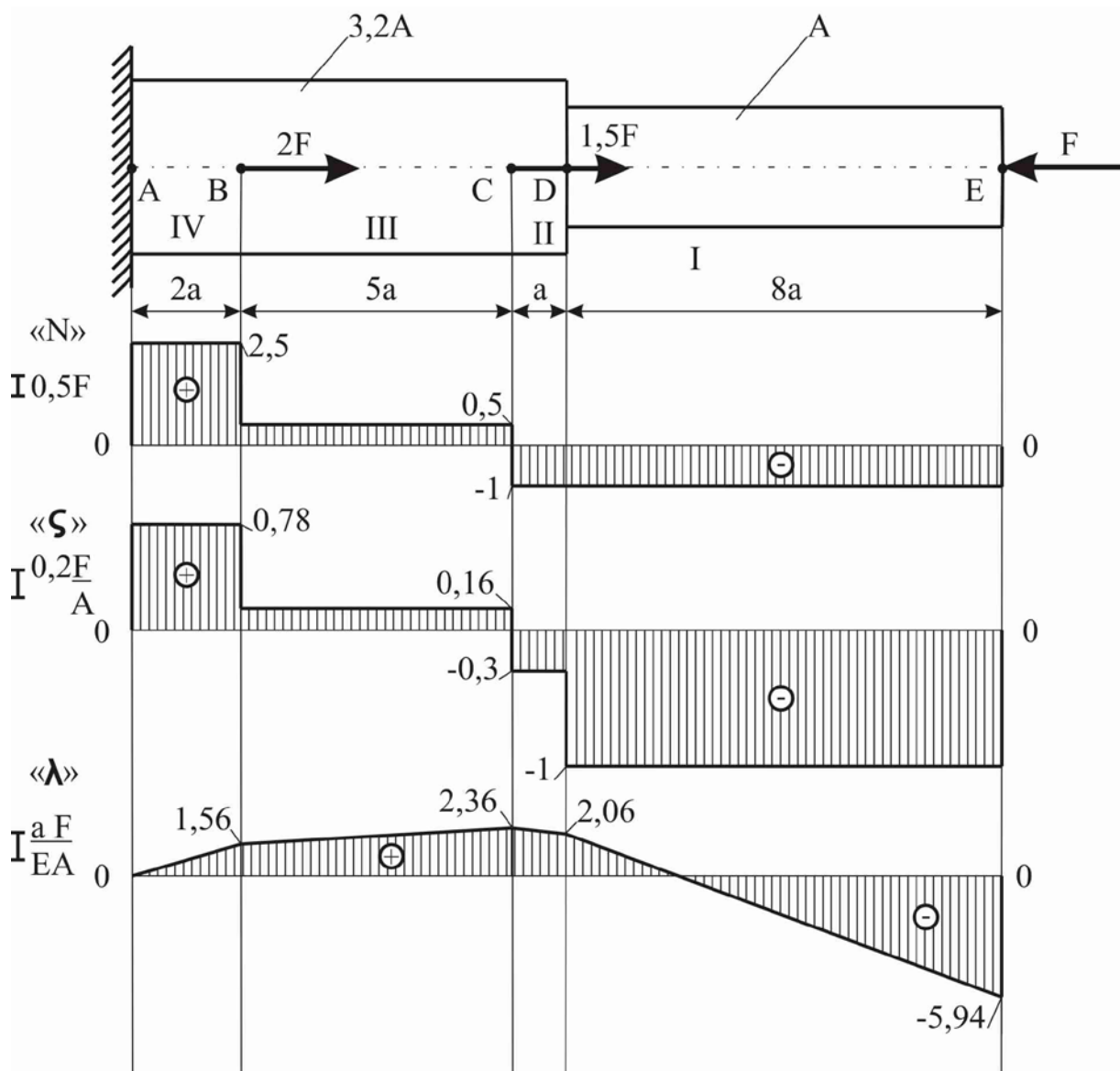


Рис. 2 – Схема навантаження

Для побудови епюр скористаємося методом перерізів. Розділимо брус на чотири зони (I-IV), межами яких є точки прикладення зовнішніх сил або точки зміни площі поперечного перерізу. Визначимо поздовжні зусилля на кожній ділянці:

$$N_I = -F; \quad N_{II} = -F; \quad N_{III} = 0,5F; \quad N_{IV} = 2,5F.$$

Поздовжнє зусилля не залежить від координати перерізу, тому у всіх перерізах діє одне і теж внутрішнє зусилля (на кожній своє). По характерним точкам будуємо епюру поздовжніх сил «N». Аналізуючи епюру поздовжніх сил, визначаємо, що III і IV ділянки працюють на розтяг, а I та II ділянки працюють на стиск.

Для кожної ділянки визначаємо величину нормального напруження:

$$\sigma_i = \frac{N_i}{A_i}; \quad \sigma_I = \frac{N_I}{A_I} = -\frac{F}{A}; \quad \sigma_{II} = \frac{N_{II}}{A_{II}} = \frac{-F}{3,2A} = -0,3\frac{F}{A};$$

$$\sigma_{III} = \frac{N_{III}}{A_{III}} = \frac{0,5F}{3,2A} = 0,16\frac{F}{A}; \quad \sigma_{IV} = \frac{N_{IV}}{A_{IV}} = \frac{2,5F}{3,2A} = 0,78\frac{F}{A}.$$

По характерним точкам будуємо епюру нормальних напружень « $\sigma$ ». Аналізуючи епюру нормальних напружень, визначаємо, що небезпечною ділянкою для бруса буде ділянка I, на якій нормальні напруження (за модулем) мають максимальне значення.

Для кожної ділянки визначаємо абсолютне подовження або укорочення та визначаємо загальне абсолютне подовження бруса, прийнявши  $\lambda_A = 0$ , оскільки в точці закріплення деформації бруса не буде:

$$\lambda = \frac{N_i \cdot a_i}{E \cdot A_i}; \quad \lambda_B = \lambda_{AB} + \lambda_A = \frac{N_{IV} \cdot a_{IV}}{E \cdot A_{IV}} + 0 = \frac{2,5F \cdot 2a}{E \cdot 3,2A} = 1,56\frac{F \cdot a}{E \cdot A};$$

$$\lambda_C = \lambda_{BC} + \lambda_B = \frac{N_{III} \cdot a_{III}}{E \cdot A_{III}} + 1,56\frac{F \cdot a}{E \cdot A} = \frac{0,5F \cdot 5a}{E \cdot 3,2A} + 1,56\frac{F \cdot a}{E \cdot A} = 0,8\frac{F \cdot a}{E \cdot A} + 1,56\frac{F \cdot a}{E \cdot A} =$$

$$= 2,36\frac{F \cdot a}{E \cdot A};$$

$$\lambda_D = \lambda_{CD} + \lambda_C = \frac{N_{II} \cdot a_{II}}{E \cdot A_{II}} + 2,36\frac{F \cdot a}{E \cdot A} = \frac{-F \cdot a}{E \cdot 3,2A} + 2,36\frac{F \cdot a}{E \cdot A} = -0,3\frac{F \cdot a}{E \cdot A} + 2,36\frac{F \cdot a}{E \cdot A} =$$

$$= 2,06\frac{F \cdot a}{E \cdot A};$$

$$\lambda_E = \lambda_{DE} + \lambda_D = \frac{N_I \cdot a_I}{E \cdot A_I} + 2,06\frac{F \cdot 8a}{E \cdot A} = -8\frac{F \cdot a}{E \cdot A} + 2,06\frac{F \cdot a}{E \cdot A} = -5,94\frac{F \cdot a}{E \cdot A}.$$



Отже, довжина бруса зменшиться на  $-5,94 \frac{F \cdot a}{E \cdot A}$  одиниць. По харак-

терним точкам будуюмо епюру укорочення бруса « $\lambda$ ».

### Приклад 2.

Для заданого бруса побудувати епюри: а) поздовжньої сили  $N$ , б) нормальних напружень в поперечному перерізі  $\sigma$ , в) переміщення вільного кінця бруса  $\lambda$ . Схема навантаження зображена на рис. 3.

### **Розв'язання:**

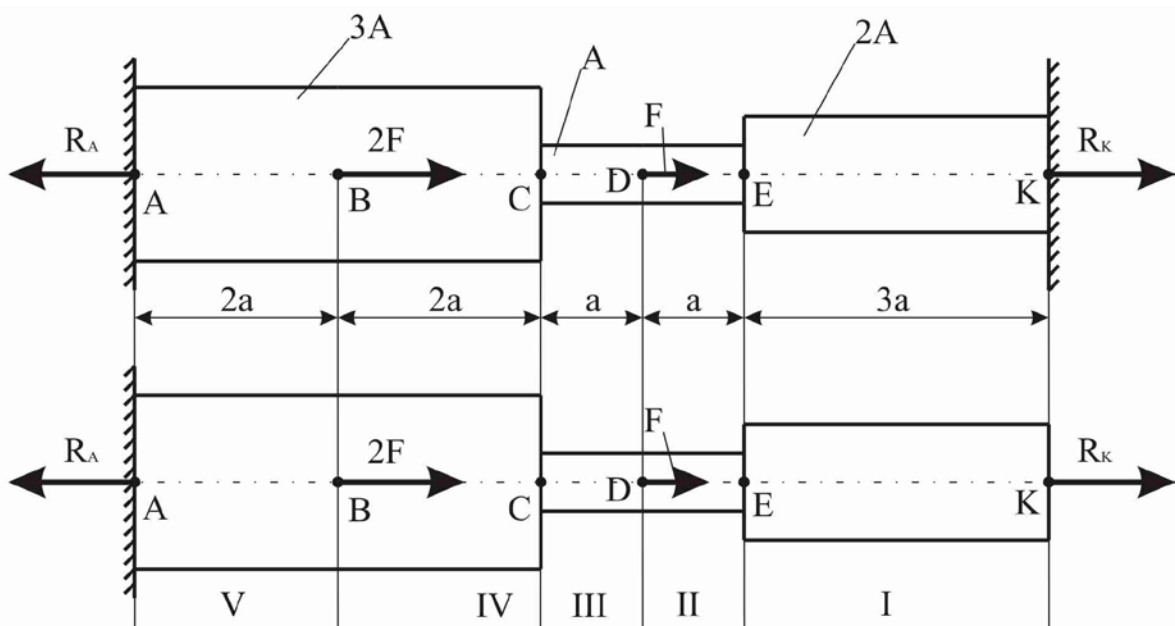


Рис. 3 – Схема навантаження

На відміну від попередньої задачі в даному прикладі закріплені обидва кінця бруса. Такий тип бруса називається статично невизначеним. Для побудови епюр скористаємося методом перерізів. Розділимо брус на п'ять зон (I-V), межами яких є точки прикладення зовнішніх сил або точки зміни площі поперечного перерізу. Визначимо поздовжні зусилля на кожній ділянці:

$$N_I = N_{II} = R_K; \quad N_{III} = N_{IV} = N_{II} + F; \quad N_V = R_A = N_{IV} + 2F.$$

Як видно, значення поздовжніх зусиль невідомі, оскільки в одному рівнянні статики

$$\sum F = 0 \Rightarrow R_K + F + 2F - R_A = 0$$

присутні дві невідомі реакції опори. Для того, щоб позбутися невизначеності відкинемо одну з опор, наприклад, праву та замінимо її відповідною реакцією (рис. 3), що зводить завдання до рішення статично визначеної задачі. Для кожної ділянки визначаємо абсолютне подовження або укорочення та визначаємо загальне абсолютне подовження бруса, вважаючи, що  $\lambda_A = \lambda_K = 0$ , оскільки в точках закріплення деформації бруса не буде:

$$\lambda = \frac{N_i \cdot a_i}{E \cdot A_i};$$

$$\lambda_B = \lambda_{AB} + \lambda_A = \frac{N_V \cdot a_V}{E \cdot A_V} + 0 = \frac{(R_K + 3F) \cdot 2a}{E \cdot 3A} = \frac{2a \cdot R_K + 6a \cdot F}{E \cdot 3A};$$

$$\begin{aligned} \lambda_C = \lambda_{BC} + \lambda_B &= \frac{N_{IV} \cdot a_{IV}}{E \cdot A_{IV}} + \frac{2a \cdot R_K + 6a \cdot F}{E \cdot 3A} = \frac{(R_K + F) \cdot 2a}{E \cdot 3A} + \frac{2a \cdot R_K + 6a \cdot F}{E \cdot 3A} = \\ &= \frac{2a \cdot R_K + 2a \cdot F + 2a \cdot R_K + 6a \cdot F}{E \cdot 3A} = \frac{4a \cdot R_K + 8a \cdot F}{E \cdot 3A}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_D = \lambda_{CD} + \lambda_C &= \frac{N_{III} \cdot a_{III}}{E \cdot A_{III}} + \frac{4a \cdot R_K + 8a \cdot F}{E \cdot 3A} = \frac{(R_K + F) \cdot a}{E \cdot A} + \frac{4a \cdot R_K + 8a \cdot F}{E \cdot 3A} = \\ &= \frac{3a \cdot R_K + 3a \cdot F + 4a \cdot R_K + 8a \cdot F}{E \cdot 3A} = \frac{7a \cdot R_K + 11a \cdot F}{E \cdot 3A}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_E = \lambda_{DE} + \lambda_D &= \frac{N_{II} \cdot a_{II}}{E \cdot A_{II}} + \frac{7a \cdot R_K + 11a \cdot F}{E \cdot 3A} = \frac{R_K \cdot a}{E \cdot A} + \frac{7a \cdot R_K + 11a \cdot F}{E \cdot 3A} = \\ &= \frac{3a \cdot R_K + 7a \cdot R_K + 11a \cdot F}{E \cdot 3A} = \frac{10a \cdot R_K + 11a \cdot F}{E \cdot 3A}; \end{aligned}$$

$$\lambda_K = \lambda_{EK} + \lambda_E = \frac{N_I \cdot a_I}{E \cdot A_I} + \frac{10a \cdot R_K + 11a \cdot F}{E \cdot 3A} = \frac{R_K \cdot 3a}{E \cdot 2A} + \frac{10a \cdot R_K + 11a \cdot F}{E \cdot 3A} =$$

$$= \frac{9a \cdot R_K + 20a \cdot R_K + 22a \cdot F}{E \cdot 3A} = \frac{29a \cdot R_K + 22a \cdot F}{E \cdot 3A} = 0 \Rightarrow 29a \cdot R_K + 22a \cdot F = 0 \Rightarrow$$

$$(29R_K + 22F) \cdot a = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ або } 29R_K + 22F = 0 \Rightarrow R_K = -\frac{22F}{29} \approx -0,76F.$$

Таким чином одна з реакцій опор визначена. Знак «мінус» свідчить про те, що напрямок цієї реакції вибраний неправильно і в дійсності він буде протилежним. Отже, використаємо рівняння сил для визначення другої реакції опори:

$$\sum F = 0 \Rightarrow R_K + F + 2F - R_A = 0 \Rightarrow R_A = R_K + 3F = -0,76F + 3F = 2,24F.$$

Знайшовши невідомі реакції опор, визначимо поздовжні зусилля на кожній ділянці:

$$N_I = N_{II} = -0,76F; \quad N_{III} = N_{IV} = 0,24F; \quad N_V = R_A = 2,24F.$$

По характерним точкам будемо епюру поздовжніх сил «N» (рис. 4). Аналізуючи епюру поздовжніх сил, визначаємо, що III-V ділянки працюють на розтяг, а I та II ділянки працюють на стиск.

По характерним точкам будемо епюру нормальних напружень « $\sigma$ » (рис. 4). Аналізуючи епюру нормальних напружень, визначаємо, що небезпечною ділянкою для бруса будуть ділянки V та II, на яких нормальні напруження (за модулем) приблизно однакові та мають максимальне значення.

$$\sigma_i = \frac{N_i}{A_i};$$

$$\sigma_I = \frac{N_I}{A_I} = \frac{-0,76F}{2A} = -0,38 \frac{F}{A}; \quad \sigma_{II} = \frac{N_{II}}{A_{II}} = \frac{-0,76F}{A} = -0,76 \frac{F}{A};$$

$$\sigma_{III} = \frac{N_{III}}{A_{III}} = \frac{0,24F}{A} = 0,24 \frac{F}{A}; \quad \sigma_{IV} = \frac{N_{IV}}{A_{IV}} = \frac{0,24F}{3A} = 0,08 \frac{F}{A};$$

$$\sigma_V = \frac{N_V}{A_V} = \frac{2,24F}{3A} \approx 0,75 \frac{F}{A}.$$

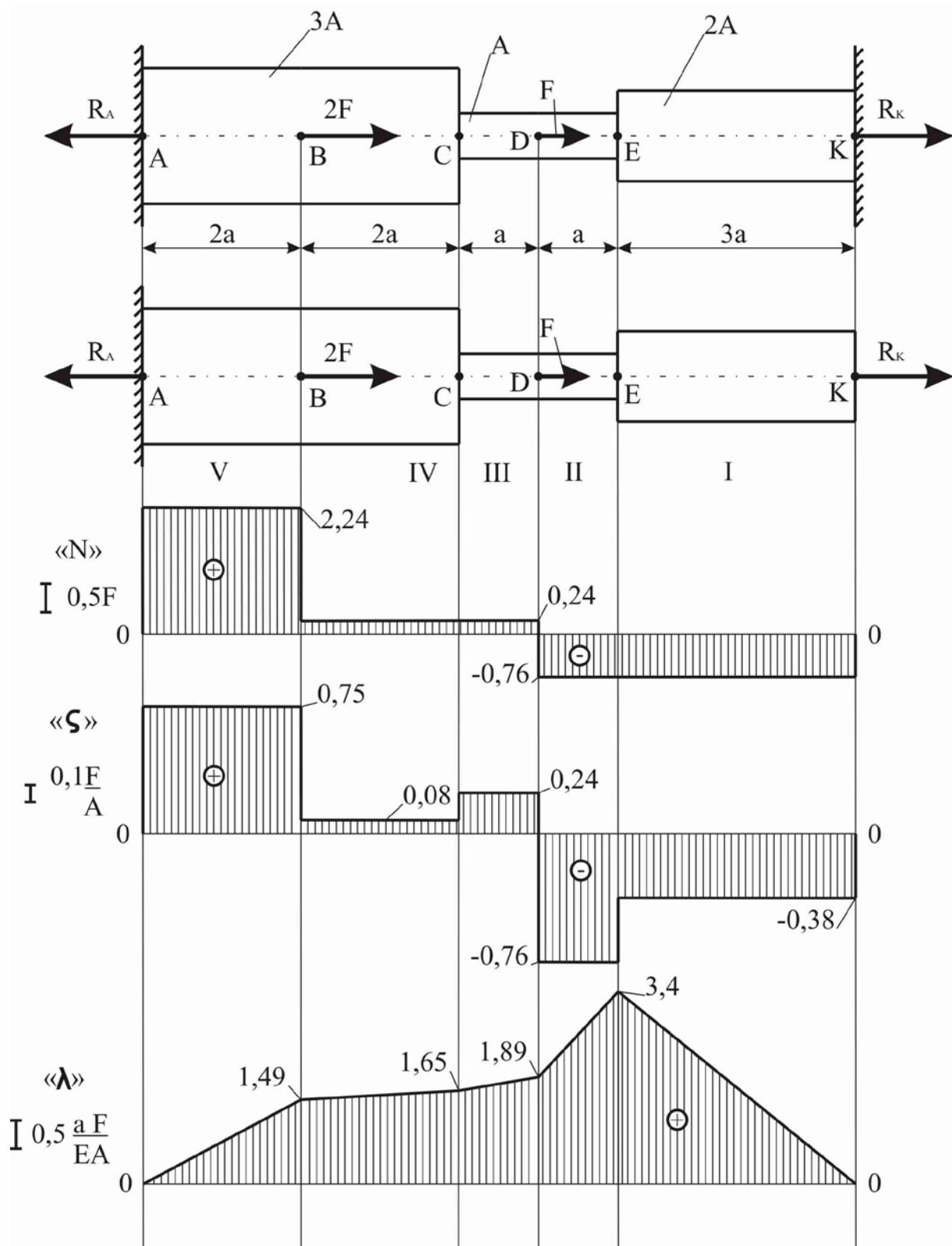


Рис. 4 – Схема навантаження

**Завдання для самостійної роботи.**

Для заданого бруса побудувати епюри: а) поздовжньої сили  $N$ , б) нормальних напружень в поперечному перерізі  $\sigma$ , в) переміщення вільного кінця бруса  $\lambda$ . Схеми навантаження зображені на рис. 5.

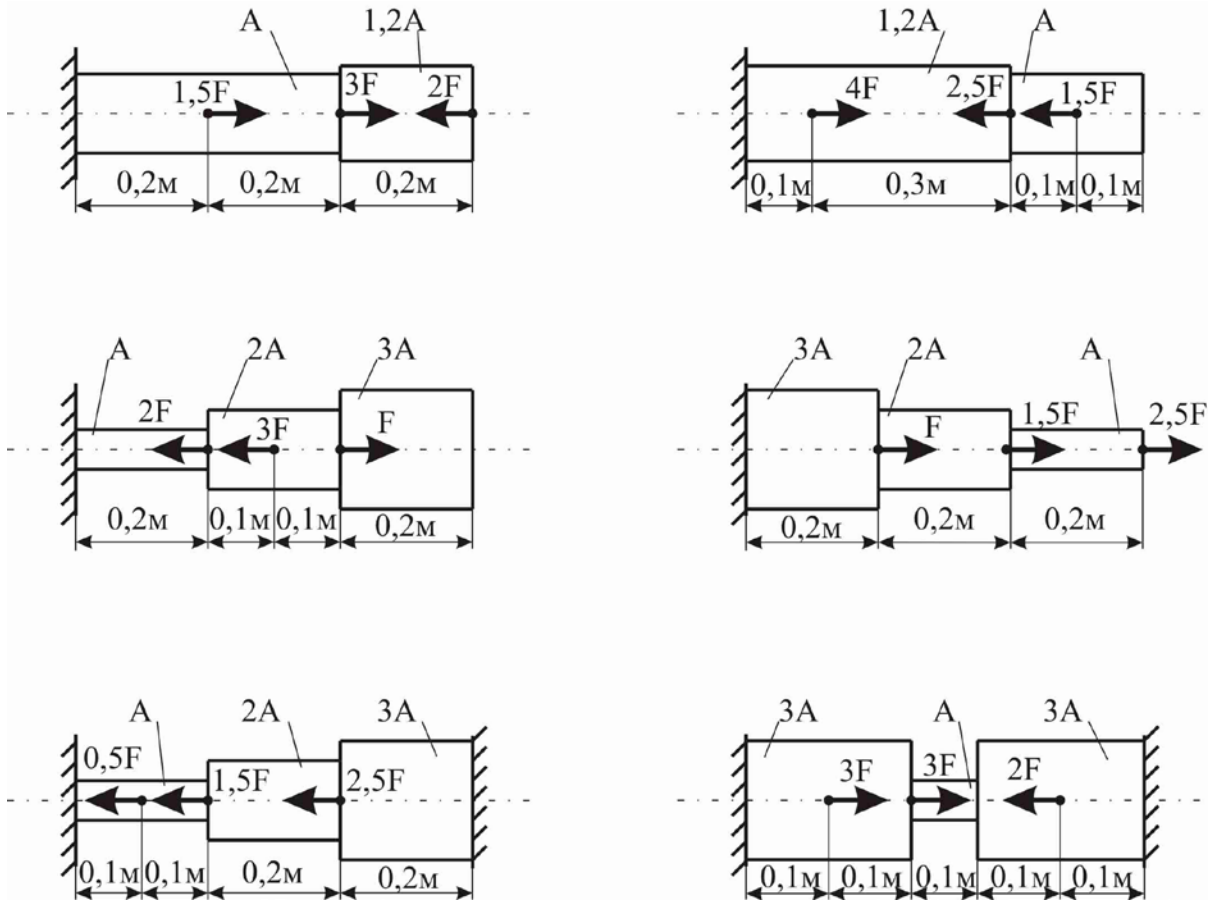


Рис. 5 – Схеми навантаження

## 2. ЗСУВ

Зсув – вид опору стержня коли в його поперечних перерізах виникає тільки поперечне зусилля.

Деформація зсуву в металах називається зрізом, в камені і дереві – сколюванням.

Зсув викликається дією на стержень двох рівних протилежно направлених поперечних зусиль, розташованих на малій відстані одна від одної (рисунок 2.1).

Деформації зсуву зазнають заклепки, болти, встановлені без зазору, шпонки, шви зварних з'єднань, прутки і листи при різанні їх ножицями.

Зсув в чистому вигляді отримати важко, так як він супроводжується другими видами деформацій (як правило згином). Однак в розрахунках зустрічаються випадки навантажень, коли на чотирьох гранях елементарного прямокутного елемента, виділеного коло деякої точки перерізу стержня, діють тільки дотичні напруження. Такий вид деформацій називають чистим зсувом.

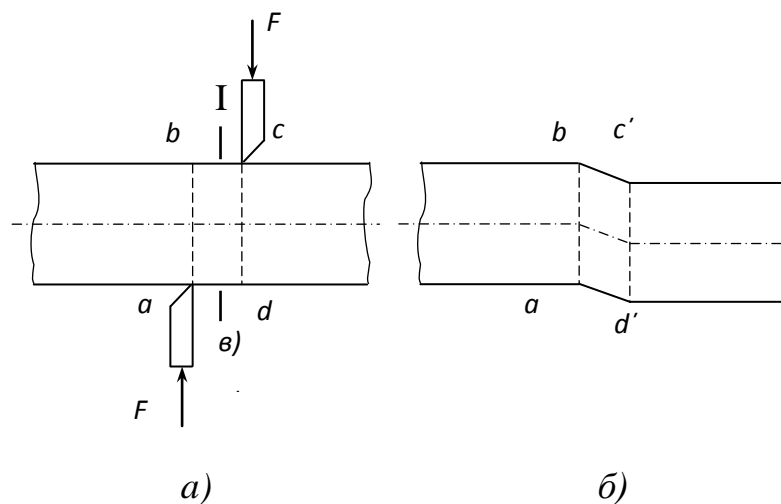


Рис. 2.1 – Деформація зсуву: а – розрахункова схема; б – деформований стан бруса

Прикладом деформації чистого зсуву є скручування тонкостінної труби (рисунок 2.2). При скручуванні її твірні нахилиються через відносний поворот поперечних перерізів стержня, а стінки труби зазнають деформацію зсуву.

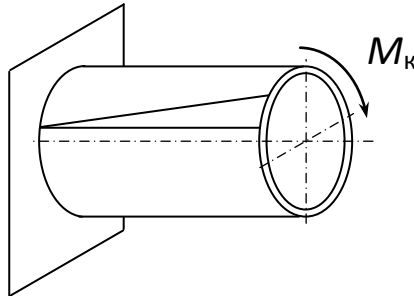


Рис. 2.2 – Чистий зсув при крученні тонкостінної труби

На ділянці бруса між силами  $F$  в довільному перерізі  $I - I'$  (рис. 2.1 а) діє поперечне зусилля  $Q$ , яке визначається за методом перерізів і дорівнює:

$$Q = F. \quad (3.1)$$

Поперечне зусилля  $Q$  являється рівнодіючою елементарних дотичних сил  $\tau dA$ , що діють в поперечному перерізі. Для визначення дотичних напружень по відомому значенню поперечного зусилля необхідно знати закон їх розподілу по перерізу стержня.

Звичайно приймається, що напруження розподіляються рівномірно. Таким чином отримаємо формулу для визначення дотичних напружень:

$$\tau = \frac{Q}{A} = \frac{F}{A}, \quad (3.2)$$

де  $A$  – площа поперечного перерізу стержня.

При зсуві заклепкових з'єднань, болтів, шпонок і других деталей крім дотичних напружень в перерізах через згин виникають нормальні напруження. Однак, якщо нормальні напруження значно менші дотичних, то в наближених розрахунках враховують тільки дотичні напруження і розрахунок проводять як для випадку чистого зсуву.

Умова міцності на зсув:

$$\tau = \frac{Q}{A} \leq [\tau_c], \quad (3.3)$$

де  $[\tau_c]$  – допустиме напруження матеріалів на зсув.

Звичайно допустиме напруження на зсув приймається як доля допустимого напруження на розтяг:

- для пластичних матеріалів  $[\tau_c] = (0.5 \dots 0.6) [\sigma]$ ;
- для крихких матеріалів  $[\tau_c] = (0.7 \dots 1.0) [\sigma]$ .

### Приклад.

Дві полоси товщиною  $\delta = 10$  мм з'єднанні 25 заклепками (рис. 2.3). Діаметр заклепки  $d = 10$  мм. Заклепочне з'єднання досліджують розтягувальною силою  $F = 35$  [кН]. Чи витримає з'єднання дане навантаження?

### **Розв'язання:**

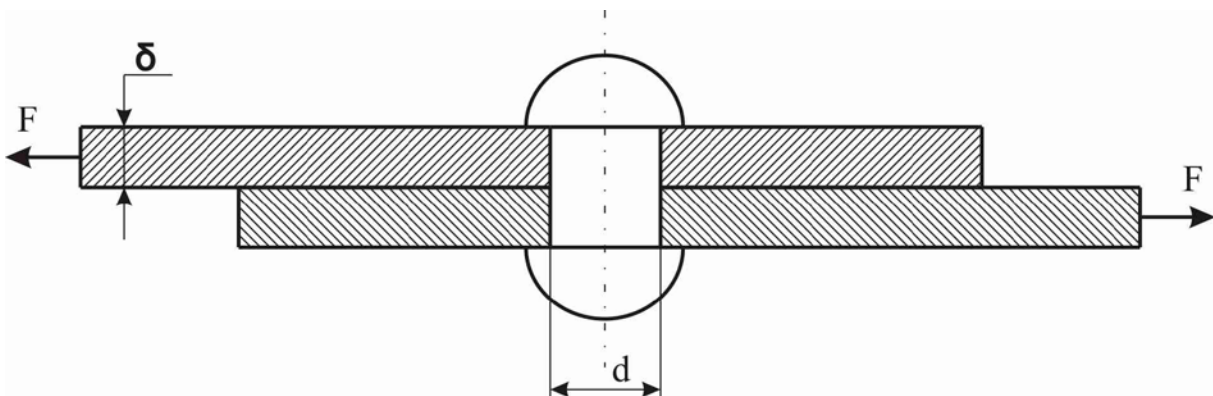


Рис. 2.3 – Заклепочне з'єднання

З'єднання виконане 25 заклепками  $i = 25$ , кожна заклепка зрізується силою  $F/25$ , тобто дотичні напруження при цьому:

$$\tau = \frac{F}{i \cdot A} = \frac{35000}{25 \cdot \frac{\pi \cdot 10^2}{4}} = \frac{35000 \cdot 4}{25 \cdot 100 \cdot \pi} = 17,83 \left( \frac{H}{мм^2} \right) = 17,83 \cdot 10^6 \frac{H}{м^2} = 17,83 МПа.$$

Умови міцності  $\tau = 17,83 МПа < [\tau_{зр}]$  виконуються.



Визначимо напруження зминання:

$$\sigma_{зм} = \frac{F}{i \cdot A_{зм}} = \frac{35000}{25 \cdot 100} = 14 \left( \frac{Н}{мм^2} \right) = 14 МПа,$$

де  $A_{зм} = \delta \cdot d = 10 \cdot 10 = 100 (мм^2)$ .

Умови міцності  $\sigma_{зм} = 14 МПа < [\sigma_{зм}]$  виконуються.

### Завдання для самостійної роботи.

1) Дві полоси товщиною  $\delta = 10$  мм з'єднані заклепками  $d=12$  мм. Розтягувальна сила  $F = 70$  кН. Яка кількість заклепок необхідна в з'єднанні, якщо  $[\tau_{зр}] = 100$  МПа?

**Відповідь:**  $i=7$ .

2) Визначити необхідну кількість заклепок діаметром 20 мм для з'єднання внахлест двох листів товщиною  $\delta = 8$  мм і  $\delta_1 = 10$  мм (рис. 2.4). Сила  $F$ , що розтягує з'єднання, дорівнює 200 кН. Допустимі напруги: на зріз  $[\tau] = 140$  МПа, на зминання  $[\sigma_{зм}] = 320$  МПа.

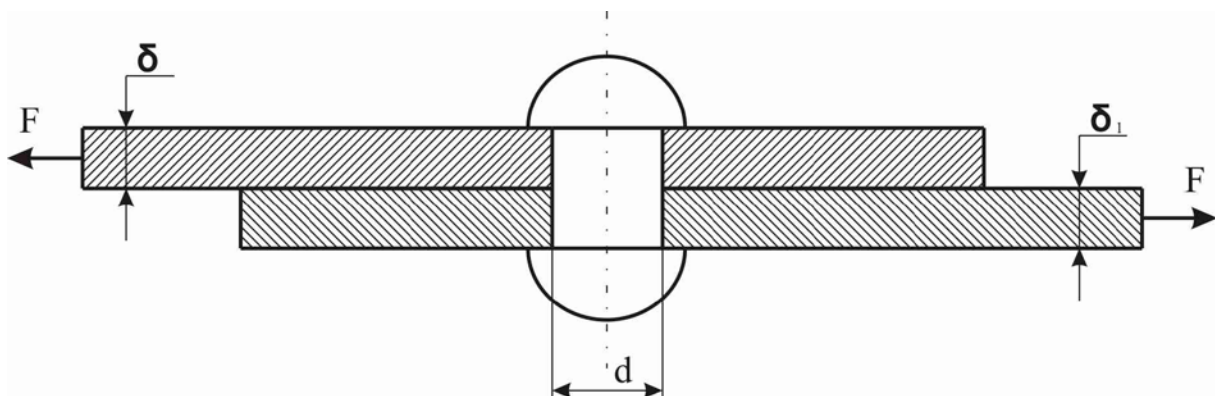


Рис. 2.4 – Заклепочне з'єднання

**Відповідь:**  $i=5$ .

### 3. КРУЧЕННЯ

Деформація кручення має місце при дії на брус врівноваженої системи пар сил, розташованих у площинах, перпендикулярних поздовжній осі бруса, рис. 3.1, а.

Брус, що працює на кручення, називають валом. У поперечних перерізах валу, діє тільки один внутрішній силовий фактор – крутний момент  $M_z$ , рис. 3.1, б.

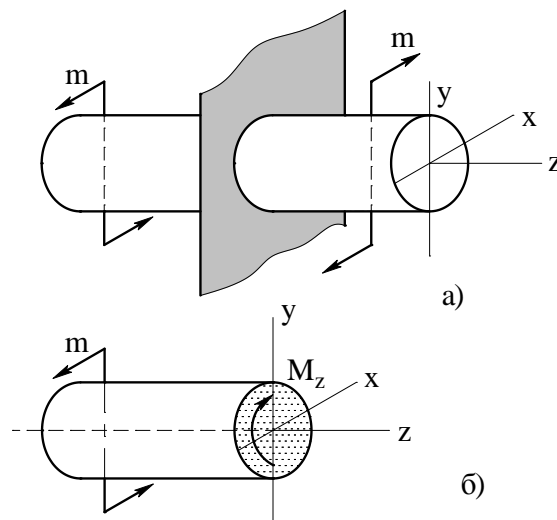


Рис. 3.1 – Вал: а) зовнішні сили; б) внутрішні сили (поперечний переріз)

Розглянемо порядок визначення величини крутного моменту  $M_z$ :

- Вал розбивають на ділянки, межами яких є перерізи, де прикладені крутні моменти або змінюється діаметр.
- В межах кожної ділянки використовують метод перерізів: розрізають вал поперечним перерізом; відкидають одну з частин валу (бажано ту, до якої прикладено більше крутних моментів або моментів, величина яких невідома).
- Користуючись відповідними правилами, визначають величину крутних моментів.

I правило: величина крутного моменту  $M_z$  в довільному перерізі вала чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх крутних моментів, прикладених до решти вала.

$$M_z = \sum m_z^{ocm}.$$

II правило (правило знаків): якщо зовнішній крутний момент представляється спрямованим за годинниковою стрілкою при погляді на поперечний переріз, то його слід взяти зі знаком «мінус», а якщо проти годинникової стрілки, то зі знаком «плюс».

Порядок побудови епюри « $M_z$ ».

- Провести вісь епюри безпосередньо під розрахунковою схемою (рис. 3.2, б).
- В межах кожної ділянки відкласти значення « $M_z$ » у вибраному масштабі: додатні – вгору, від’ємні – вниз (рис. 3.2, б).
- Через кінці отриманих відрізків провести прямі, паралельні осі епюри.

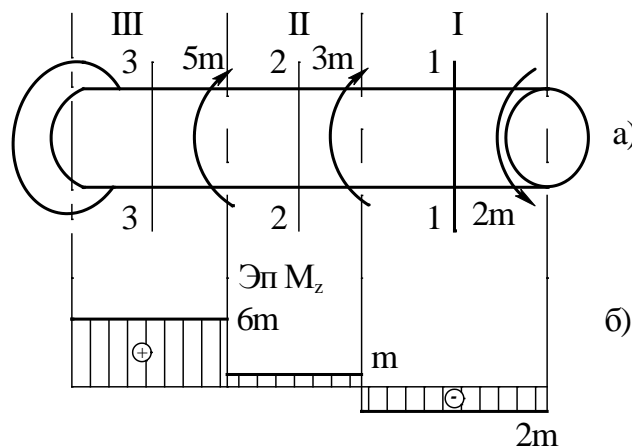


Рис. 3.2 – Побудова епюри крутних моментів

- Штрихувати епюру лініями, перпендикулярними осі епюри (вала), оскільки кожна лінія штрихування має певний фізичний зміст: у вибрано-

му масштабі вона відповідає значенню крутного моменту в даному перерізі (рис. 3.2, б).

Вказати на епюрі значення «Mz» в межах кожної ділянки.

На більшому полі епюри крутних моментів один раз зверху від осі вказати знак «плюс», знизу – знак «мінус».

Зліва біля першої вертикальної допоміжної лінії виконати напис: Еп. «Mz» (кНм) та вказати масштаб епюри.

Крутному моменту відповідають дотичні напруження  $\tau$ , які розподіляються за лінійним законом уздовж діаметру, рис. 3.3. Величина дотичних напружень в будь-якій точці поперечного перерізу може бути визначена за формулою:

$$\tau = \frac{M_z}{I_\rho} \cdot \rho, \quad (1)$$

де  $M_z$  – крутний момент;  $I_\rho$  – полярний момент інерції.

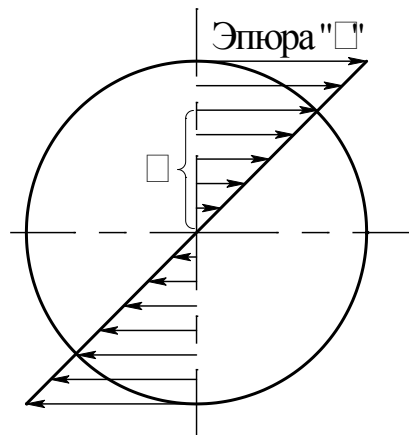


Рис. 3.3 – Епюра дотичних напружень

Для круглого перерізу полярний момент інерції дорівнює:

$$I_\rho = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \approx 0,1d^4, \quad (2)$$

де  $d$  – діаметр круглого перетину;  $\rho$  – відстань від центру кола (полюса) до точки, в якій визначається напруження.

Для кільцевого перерізу (рис. 3.4):

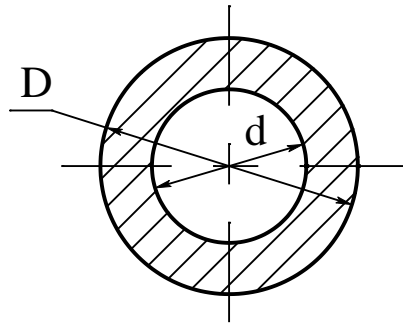


Рис. 3.4 – Вал з кільцевим перерізом

$$I_{\rho} = \frac{\pi \cdot D^4}{32} (1 - c^4) \approx 0,1D^4 (1 - c^4). \quad (3)$$

З формули (1) випливає, що дотичне напруження в центрі перетину дорівнює нулю, а максимальні за величиною напруги діють в точках контуру перетину (так звані «небезпечні точки»), тобто при  $\rho = \frac{d}{2}$ . Величина цих напруг може бути визначена за формулою:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_{\rho}}, \quad (4)$$

де  $W_{\rho}$  – полярний момент опору.

Для круглого перерізу:

$$W_{\rho} = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \approx 0,2 \cdot d^3. \quad (5)$$

Для кільцевого перерізу (рис. 3.4).

$$W_{\rho} = \frac{\pi \cdot D^3}{16} (1 - c^4) \approx 0,2 \cdot D^3 (1 - c^4), \quad (6)$$

де  $D$  – зовнішній діаметр кільця;  $c$  - відношення діаметрів:  $c = \frac{d}{D}$ .

Напрямок дотичного напруження в кожній точці перетину перпендикулярний радіусу (рис. 3.5).

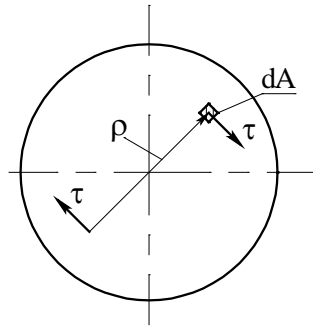


Рис. 3.5 – Напрямок дотичних напружень в довільній точці

Вираз крутного моменту через напруги:

$$M_z = \int_A \rho \cdot \tau \cdot dA, \quad (7)$$

відображає його фізичний зміст: крутний момент – це результуючий момент пар внутрішніх дотичних сил пружності, що діють в поперечному перерізі вала.

### Приклад 1.

Визначимо величину крутних моментів в поперечних перерізах вала, представленого на рис. 3.2, а.

- Розбиваємо вал на три ділянки.
- Визначаємо крутний момент в поперечних перерізах ділянок вала:

$$M1z = -2m; \quad M2z = -2m + 3m = m;$$

$$M3z = -2m + 3m + 5m = 6m.$$

- У даному прикладі ми відкидаємо у всіх випадках ліву частину вала, так як до неї прикладений невідомий реактивний момент (реакція опори) (рис. 3.2, а).

Правила контролю правильності побудови епюри « $M_z$ ».

1. У межах кожної ділянки епюра « $M_z$ » зображується прямою, паралельною осі епюри.

2. У перетинах вала, в яких додані зовнішні крутні моменти, на епюрі відбуваються стрибки, величина яких відповідає величині прикладеного крутного моменту.

Наприклад: у перерізі, де прикладений момент  $3m$ , величина стрибка дорівнює  $3m$  ( $2m + m$ ).

### **Приклад 2.**

Для заданого сталевого бруса необхідно: а) побудувати епюру крутних моментів  $M$ , б) визначити з розрахунку на міцність діаметр кожної ділянки бруса при  $[\tau_k]=50\text{Н/мм}^2$  (отримані в розрахунку значення діаметрів перевести в метри та округлити до четвертого знаку після коми), в) побудувати епюру кута закручування  $\varphi$ . Схема навантаження зображена на рис. 3.6,  $a=0,22\text{м}$ ,  $b=0,37\text{м}$ ,  $c=0,22\text{м}$ .

### **Розв'язання:**

Для побудови епюр скористаємося методом перерізів. Визначаємо крутний момент в поперечних перерізах ділянок вала:

$$T_{KI} = -320\text{Нм}; \quad T_{KII} = -740\text{Нм}; \quad T_{KIII} = 80\text{Нм}.$$

З формули максимальних дотичних напружень (4) після математичних перетворень знаходимо вираз для визначення діаметру поперечного перерізу вала:

$$d_i = \sqrt[3]{\frac{|T_{Ki}|}{\tau \cdot 0,2}}; \quad d_I = \sqrt[3]{\frac{|T_{KI}|}{\tau \cdot 0,2}} = \sqrt[3]{\frac{320}{35 \cdot 10^6 \cdot 0,2}} = 0,0357(\text{м});$$

$$d_{II} = \sqrt[3]{\frac{|T_{KII}|}{\tau \cdot 0,2}} = \sqrt[3]{\frac{740}{35 \cdot 10^6 \cdot 0,2}} = 0,0473(\text{м});$$

$$d_{III} = \sqrt[3]{\frac{T_{KIII}}{\tau \cdot 0,2}} = \sqrt[3]{\frac{80}{35 \cdot 10^6 \cdot 0,2}} = 0,0225(\text{м}).$$

У межах кожної ділянки визначимо кут закручення шляхом суми кута на попередній ділянці та прирощення кута в межах ділянки, що розгля-

дається. Знаходимо максимальний кут закручення вала, який є сумою ви-  
значених кутів закручення кожної ділянки:

$$\varphi_i = \frac{T_{Ki} \cdot l_i \cdot 32 \cdot 180}{G \cdot \pi^2 \cdot d^4}; \quad \varphi_A = 0; \quad \varphi_B = \varphi_{AB} + \varphi_A = \frac{T_{KIII} \cdot l_{III} \cdot 32 \cdot 180}{G \cdot \pi^2 \cdot d^4} + \varphi_A =$$

$$= \frac{80 \cdot 0,22 \cdot 32 \cdot 180}{6,2 \cdot 10^{10} \cdot 3,14^2 \cdot 0,0225^4} + 0 = 0,65^\circ;$$

$$\varphi_C = \varphi_{BC} + \varphi_B = \frac{T_{KII} \cdot l_{II} \cdot 32 \cdot 180}{G \cdot \pi^2 \cdot d^4} + 0,65 = \frac{-740 \cdot 0,37 \cdot 32 \cdot 180}{6,2 \cdot 10^{10} \cdot 3,14^2 \cdot 0,0473^4} + 0,65 = 0,13^\circ;$$

$$\varphi_D = \varphi_{CD} + \varphi_C = \frac{T_{KI} \cdot l_I \cdot 32 \cdot 180}{G \cdot \pi^2 \cdot d^4} + 0,13 = \frac{-320 \cdot 0,22 \cdot 32 \cdot 180}{6,2 \cdot 10^{10} \cdot 3,14^2 \cdot 0,0357^4} + 0,13 = -0,28^\circ.$$

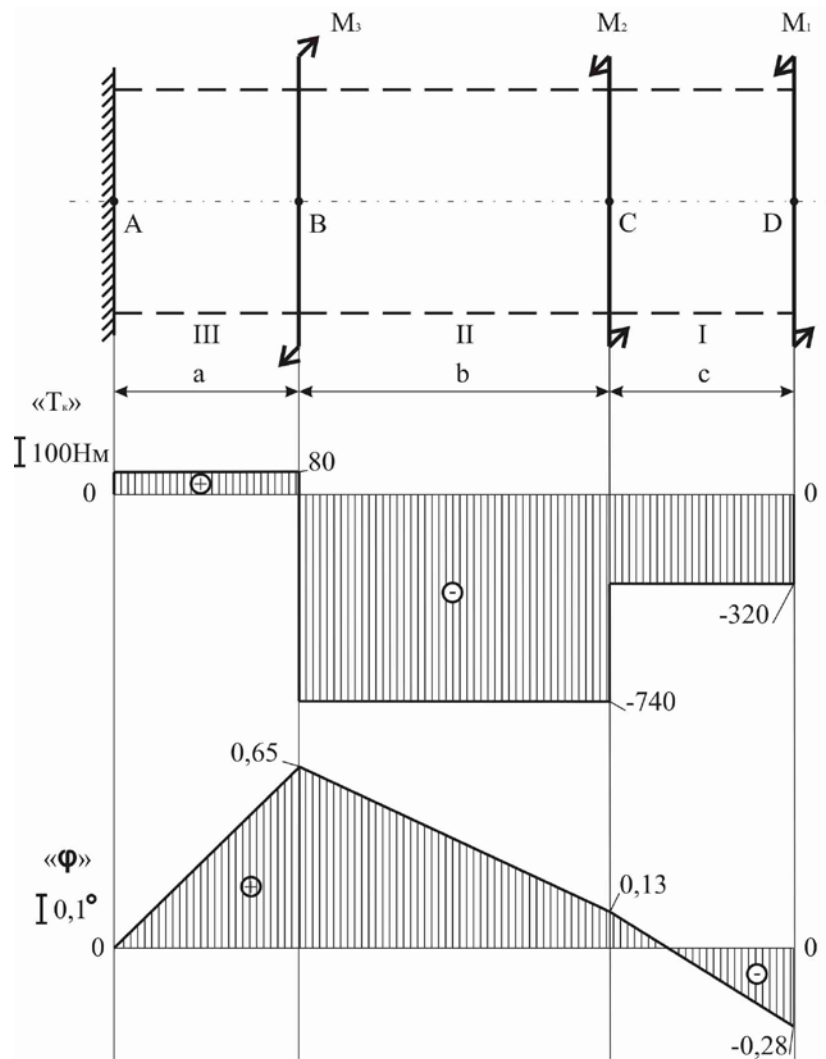


Рис. 3.6 – Схема навантаження



### Завдання для самостійної роботи.

Для заданого сталевого (завдання «1») та «2»), мідного (завдання «3») та «4») та латунного (завдання «5») та «6») бруса необхідно: а) побудувати епюру крутних моментів  $M$ , б) визначити з розрахунку на міцність діаметр кожної ділянки бруса (отримані в розрахунку значення діаметрів перевести в метри та округлити до четвертого знаку після коми), в) побудувати епюру кута закручування  $\varphi$ . Схеми навантаження зображені на рис. 3.6, чисельні дані для розрахунків взяти з табл. 3.1.

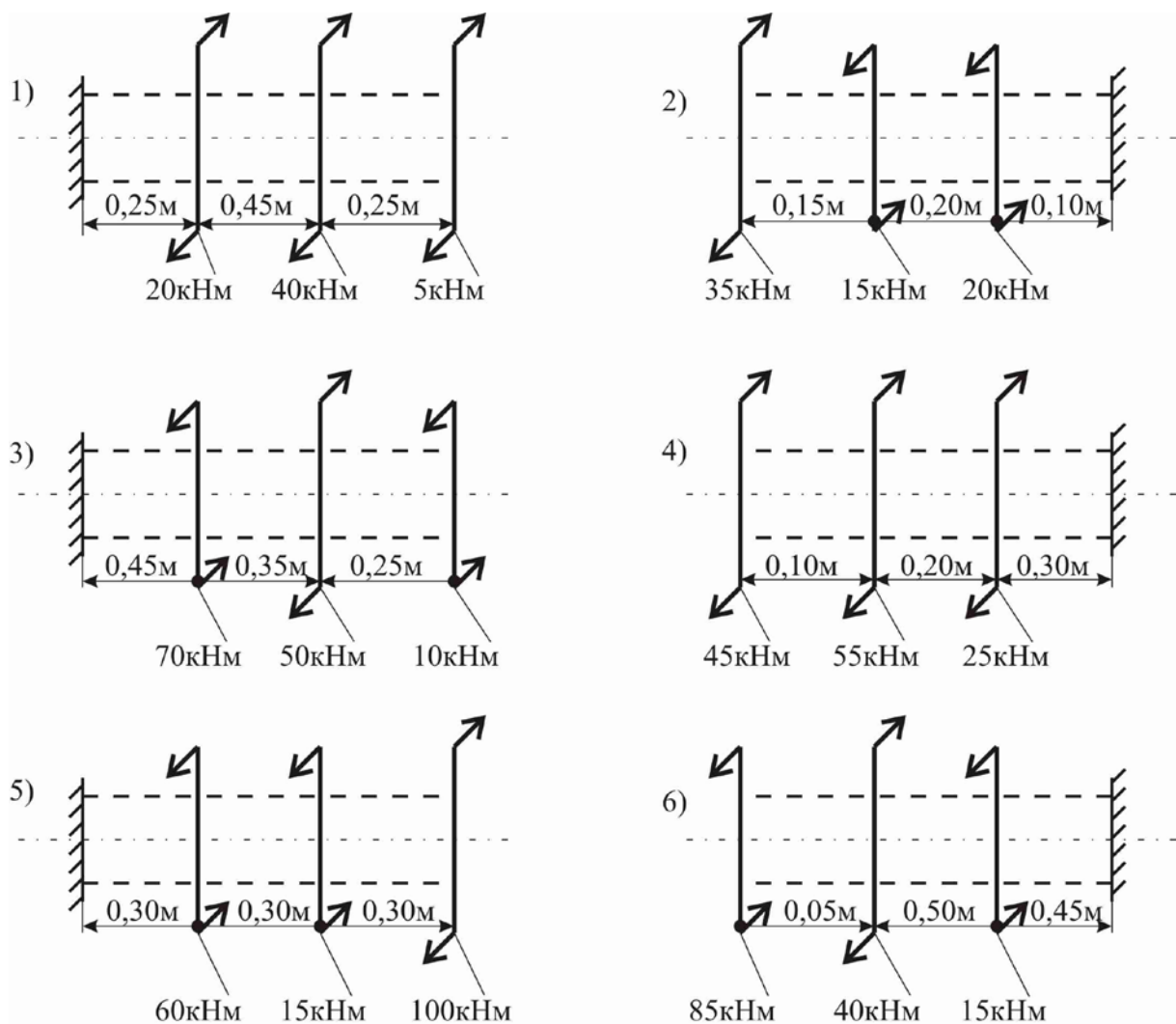


Рис. 3.7 – Схеми навантаження

Таблиця 3.1 – Чисельні дані

Матеріал	$[\tau_k]$ , Н/мм <sup>2</sup>	G, ГПа
Сталь	80	80
Мідь	50	40
Латунь	35	36

## 4. ЗГИН

Згин – це такий вид деформації бруса, при якому в його поперечних перерізах виникають згинаючі моменти. У більшості випадків одночасно зі згинаючими моментами виникають і поперечні сили, такий згин називають поперечним; якщо поперечні сили не виникають, згин називають чистим.

З геометричної точки зору згин характеризується тим, що вісь бруса, прямолінійна до деформації, при згині стає кривою лінією.

Деформація згину виникає при навантаженні бруса силами, що діють в площинах, які проходять через його поздовжню вісь, перпендикулярними до цієї осі, і парами сил, діючими в тих же площинах. У тому випадку, коли всі навантаження і реакції зв'язків діють в одній площині, згин називають плоским.

Обмежимося розглядом брусів, поперечні перерізи яких мають хоча б одну вісь симетрії. Вісь симетрії і перпендикулярна їй центральна вісь являються головними центральними осями перерізу.

Площину, що проходить через поздовжню вісь бруса і одну з головних центральних осей його поперечного перерізу, називають головною площиною бруса.

У випадку, коли силова площина тобто площина дії навантажень, співпадає з однією з головних площин має місце прямий згин бруса. Лінію перетину силової площини з площиною поперечного перерізу бруса називають силовою лінією. Таким чином, при прямому згині силова лінія співпадає з однією з головних центральних осей поперечного перерізу.

При прямому згині деформація відбувається в силевій площині, тобто в цій площині розташовується вісь зігнутого бруса.

Якщо силова площина не співпадає з однією з головних площин бруса, або теж саме, що силова площина не співпадає ні з однією з головних центральних осей його поперечного перерізу, згин називають косим.

У загальному випадку прямого згину в поперечних перерізах бруса виникає два внутрішніх силових фактори: поперечна сила  $Q_y$  та згинаючий момент  $M_x$ .

У тому випадку, коли і поперечна сила  $Q_y$ , і згинаючий момент  $M_x$  не рівні нулю, згин називається поперечним прямим.

При згині брус деформується таким чином, що частина його волокон розтягується, а частина стискається. Волокна розташовані в опуклій частині зігнутого бруса розтягуються, а в вигнутій стискаються. Границями між областями розтягування та стискання є шар волокон, який лиш викривляється, не відчуваючи при цьому ні розтягування, ні стискання – нейтральний шар. Лінія перетину нейтрального шару з площиною поперечного перерізу бруса називається нейтральною віссю або нульовою лінією.

Бруси, що працюють на прямий згин, називають балками.

Основні типи балок:

- двоопорна балка з однією консоллю;
- двоопорна балка без консолей;
- двоопорна балка з двома консолями.

Відстань між опорами балок називають прольотом, а довжину балки, закріплену одним кінцем, іноді називають вильотом. Консоль – частина балки, розташована по один бік від опори.

Розв'язок задач на тему «Деформація згинання» рекомендується виконувати в такій послідовності:

- 1) Скласти розрахункову схему навантаження балки.
- 2) Визначити реакції опор балки (для визначення реакцій рекомендується використовувати два рівняння суми моментів усіх сил відносно кож-

ної опори балки) і обов'язково перевірити правильність визначених реакцій, використовуючи рівняння суми проєкцій усіх сил на вісь перпендикулярно до осі балки.

3) Побудувати епюру поперечних сил  $Q_y$ .

4) Побудувати епюру згинальних моментів  $M_x$  (для побудови епюр доцільно використовувати метод побудови епюр по характерним точкам).

5) По епюрі згинальних моментів визначити «небезпечний» переріз балки і максимальний згинальний момент  $M_x^{\max}$ .

### Приклад.

Для заданого бруса побудувати епюри: а) поперечної сили  $Q$ , б) згинальних моментів  $M$ . Схема навантаження зображена на рис. 4.1,  $F=120\text{кН}$ ,  $l=2\text{м}$ ,  $M=45\text{кНм}$ .

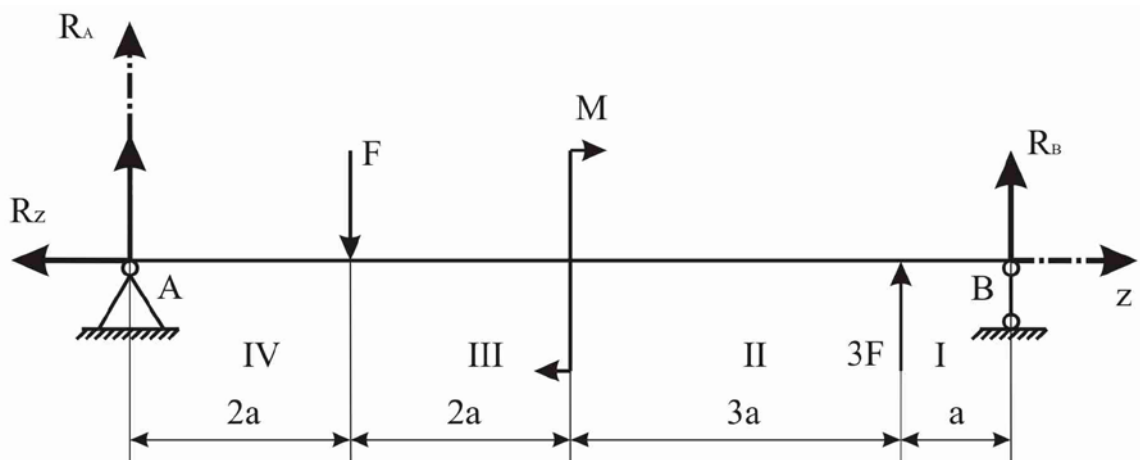


Рис. 4.1 – Схема навантаження

### **Розв'язання:**

Визначимо реакції опор, використовуючи рівняння моментів відносно точок закріплення А та В:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 8a \cdot R_A - 6a \cdot F + M + 3a \cdot F = 0;$$

$$R_A = \frac{6a \cdot F - M - a \cdot 3F}{8a} = \frac{6 \cdot 2 \cdot 120 - 45 - 3 \cdot 2 \cdot 120}{8 \cdot 2} = 42,19(\text{кН}).$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -8a \cdot R_B - 3F \cdot 7a + M + 2a \cdot F = 0;$$

$$R_B = \frac{2a \cdot F + M - 7a \cdot 3F}{8a} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 120 + 45 - 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 120}{8 \cdot 2} = -282,19(\text{кН}).$$

Оскільки шарнірно нерухома опора має також горизонтальну реакцію, для її визначення скористаємося рівнянням сил в проекції на вісь «z»:

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow -R_z = 0 \Rightarrow R_z = 0;$$

Для перевірки правильності визначення реакцій опор доцільно використовувати рівняння сил:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A - F + 3F + R_B = 0;$$

$$42,19 - 120 + 360 - 282,19 = 0.$$

Отже, реакції опор визначені правильно.

Для побудови епюр скористаємося методом перерізів. Прийmemo наступні правила знаків для визначення характерних точок: поперечна сила  $Q$  вважається додатною, якщо вона намагається повернути відсічену частину балки за годинниковою стрілкою; згинаючий момент  $M$  вважається додатним, якщо стиснуті волокна балки знаходяться зверху, а розтягнуті – знизу.

Визначимо величину поперечних сил в перерізах балки:

$$Q_I = R_A = 42,19; \quad Q_{II} = R_A - F = 42,19 - 120 = -77,81; \quad Q_{III} = Q_{II} = -77,81;$$

$$Q_{IV} = Q_{III} + 3F = -77,81 + 360 = 282,19.$$

Визначимо величину згинаючих моментів в перерізах балки:

$$M_I = 2a \cdot R_A = 42,19 \cdot 2 \cdot 2 = 168,76;$$

$$M_{II} = 4a \cdot R_A - 2a \cdot F = 42,19 \cdot 4 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 120 = -142,48;$$

$$M_{III} = 7a \cdot R_A - 5a \cdot F + M = 42,19 \cdot 7 \cdot 2 - 5 \cdot 2 \cdot 120 + 45 = -564,34;$$

$$M_{IV} = 8a \cdot R_A - 6a \cdot F + M + 3F \cdot a = 42,19 \cdot 8 \cdot 2 - 6 \cdot 2 \cdot 120 + 45 + 3 \cdot 120 \cdot 2 \approx 0.$$

За відомими правилами побудуємо епюри (рис. 4.2).

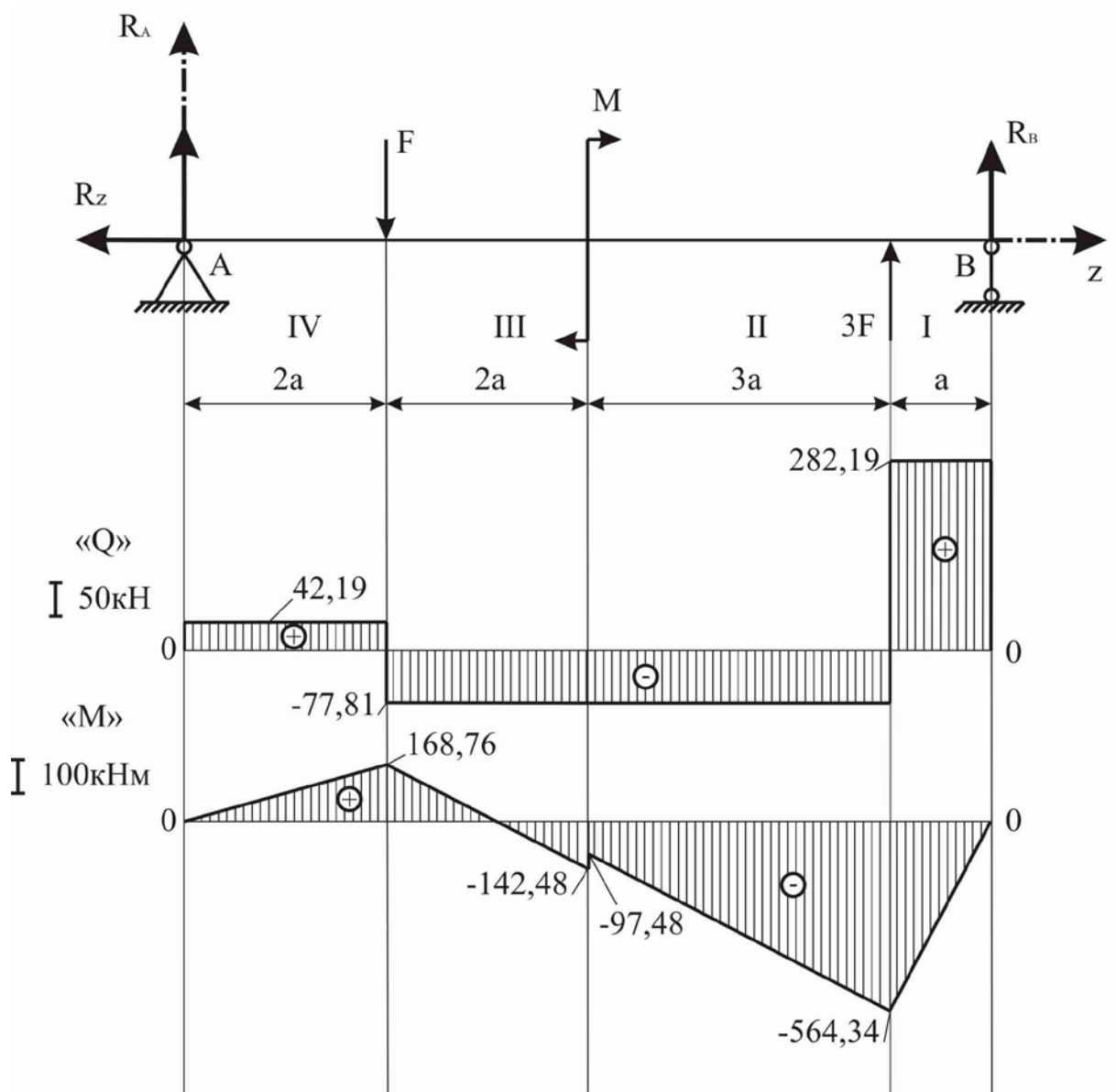


Рисунок 4.2 – Схема навантаження

### Завдання для самостійної роботи.

Для заданої балки побудувати епюри: а) поперечної сили  $Q$ , б) згинальних моментів  $M$ . Схеми навантаження зображені на рис. 4.3.

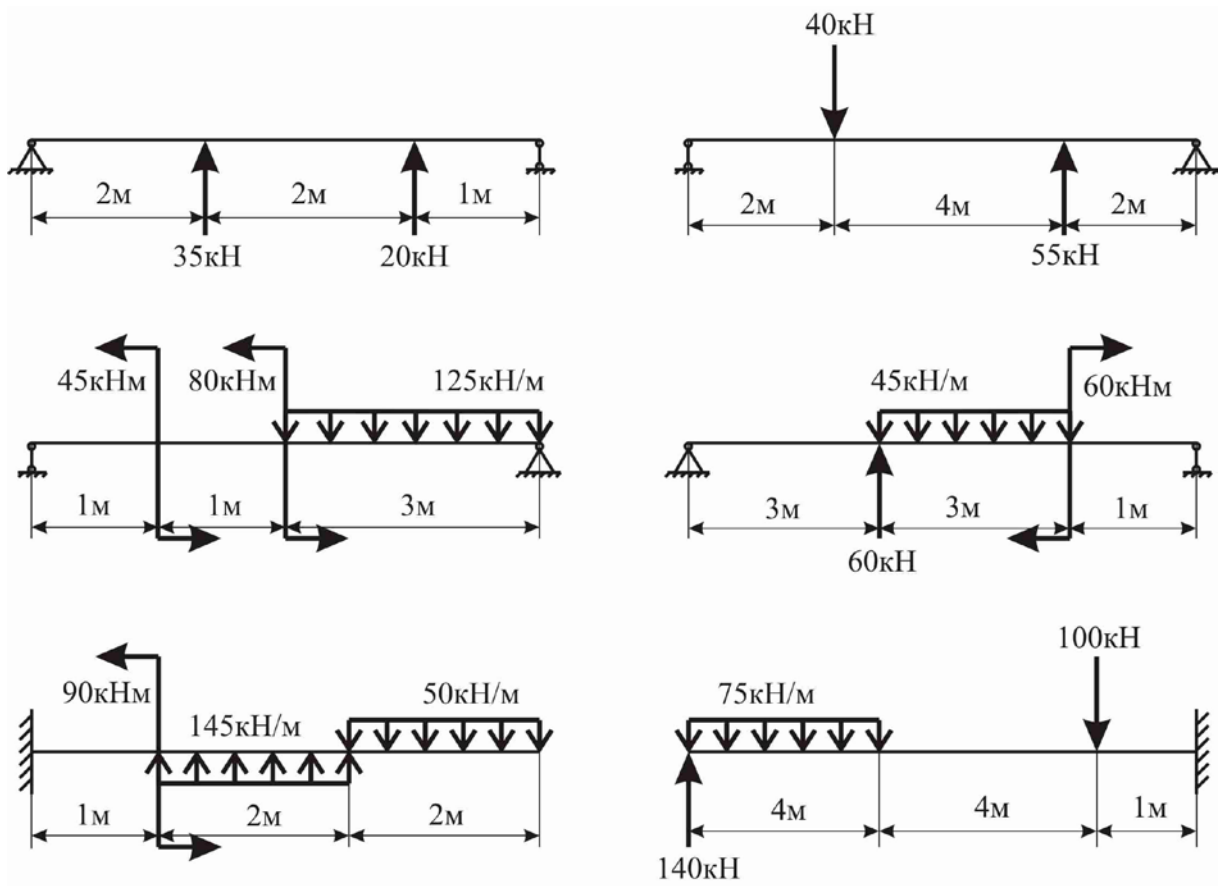


Рис. 4.3 – Схеми навантаження



## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Писаренко Г.С. Опір матеріалів / Г.С. Писаренко, О.Л. Квітка, Е.С. Уманський. – К.: Вища школа, 1993. – 655 с.
2. Пosaцький С.Л. Опір матеріалів / С.Л. Пosaцький. – Львів: Львів. унів., 1973. – 403 с.
3. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: Учебник для ВТУЗов / В.И. Феодосьев. – М.: Наука, 1986. – 512 с.
4. Сборник задач по сопротивлению материалов / под ред. В.К. Качурина. – М.: Наука, 1970. – 432с.
5. Миролубов И.Н. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов. Учебное пособие для техн вузов / И.Н. Миролубов и другие. – М.: Высшая школа, 1985. – 399 с.
6. Мироненко П.С. Методичні вказівки для виконання практичних робіт з курсу «Прикладної механіки» / П.С. Мироненко, П.М. Бондар. – К.: КПІ, 1995.