

**НТУУ «КПІ»**

Кафедра приладів и систем орієнтації і навігації

**РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ  
БЕСПЛАТФОРМЕННОЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГА-  
ЦИОННОЙ СИСТЕМЫ**

по материалам

**Кивокурцев А.Л. Повышение эксплуатационной надежности интегрированного комплекса бортового оборудования на основе реконфигурации структуры его вычислительной системы. / дисс. к.т.н. – М.: Московский государственный технический университет гражданской авиации, 2014. – С. 195**

**Розробник: магістрант Аксьоненко П.М.**

**Київ – КПІ – 2014**

## Оглавление

<b>1. РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ БЕСПЛАТФОРМЕННОЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ.....</b>	<b>3</b>
1.1. АНАЛИЗ СУЩЕСТВУЮЩИХ ИНС И ПЕРСПЕКТИВЫ ИХ РАЗВИТИЯ.....	3
1.2 СИСТЕМЫ КООРДИНАТ И ПРИНЦИПЫ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ В БИНС.....	5
1.3. ВЫБОР КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ОРИЕНТАЦИИ БИНС.....	11
1.3.1 Анализ классических параметров определения ориентации.....	11
1.3.2 Определение углового положения с помощью обобщенного вектора ориентации и его модификаций.....	13
1.3.2.1 Обобщенный вектор ориентации.....	13
1.3.2.2 Вектор ориентации Эйлера.....	21
1.3.2.3 Параметры ориентации Родрига-Гамильтона.....	23
1.4 СИНТЕЗ СЕМЕЙСТВА АЛГОРИТМОВ ОРИЕНТАЦИИ БИНС.....	26
1.4.1 Особенности выходных сигналов современных гироскопических датчиков.....	26
1.4.2 Синтез приближенных алгоритмов ориентации.....	28
1.4.3 Синтез циклических алгоритмов ориентации с использованием промежуточных параметров.....	31
1.4.3.1 Общая организация вычислительных циклов.....	31
1.4.3.2 Синтез циклических разгонных алгоритмов.....	34
1.4.3.3 Синтез циклических безразгонных алгоритмов.....	41
1.4.4 Синтез циклического безразгонного четырехшагового алгоритма повышенной точности.....	44
1.4.5 Разделение алгоритмов ориентации на классы по точности и экономичности.....	46
1.5. СИНТЕЗ НАВИГАЦИОННОГО АЛГОРИТМА БИНС ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ.....	48
1.5.1 Особенности выходных сигналов современных акселерометров.....	49
1.5.2. Алгоритм определения местоположения ВС в прямоугольной системе координат.....	51
Выводы по главе 1.....	55
<b>2. ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗРАБОТАННЫХ АЛГОРИТМОВ ОРИЕНТАЦИИ БЕСПЛАТФОРМЕННОЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ.....</b>	<b>56</b>
2.1 ОБЩАЯ СТРУКТУРА СИСТЕМЫ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ АЛГОРИТМОВ ОРИЕНТАЦИИ БИНС.....	56
2.2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМЫ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ.....	59
2.3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАЗРАБОТАННЫХ АЛГОРИТМОВ ОРИЕНТАЦИИ БИНС.....	65
Выводы по главе 2.....	70
<b>ЛИТЕРАТУРА.....</b>	<b>71</b>

# 1. РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ БЕСПЛАТФОРМЕННОЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

## 1.1. Анализ существующих ИНС и перспективы их развития

Инерциальные навигационные системы (ИНС) являются универсальным источником навигационной информации, необходимой для обеспечения любых движущихся объектов. Именно этот факт обусловил их широкое развитие со второй половины XX столетия. Так на разработку инерциальных навигационных систем (ИНС) в США последние 20 лет расходовалось до 150 млн.\$ в год. Примерное соотношение расходов на разработку ИНС подвижных объектов представлено на рисунке 1.1[46].

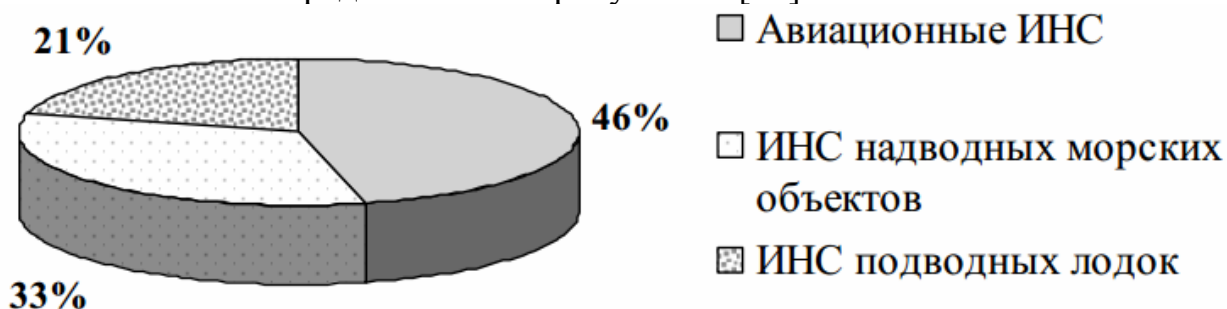


Рисунок 1.1 — Соотношение расходов на разработку ИНС подвижных объектов

Совершенствование навигационных систем во всем мире идет по пути развития спутниковых радионавигационных систем и интеграции их с автономными средствами навигации, т.е. с инерциальными навигационными системами.

В области инерциальной навигации важным достижением можно считать появление бесплатформенных ИНС (БИНС). За последнее десятилетие в авиационном приборостроении БИНС значительно потеснили ИНС в традиционном платформенном исполнении. К преимуществам бесплатформенных систем следует отнести, в первую очередь, более высокую надежность. Например, наработка на отказ платформенных ИНС составляет около 1500 ч, а для БИНС достигает 10000 ч. Кроме того при серийном производстве стоимость БИНС ниже, аналогичных по точности платформенных систем. Так же БИНС более устойчивы к вибрационным и ударным воздействиям в связи с отсутствием в конструкции системы такого чувствительного к механическим воздействиям узла, как гиросtabilизированная платформа. Для бесплатформенных систем значительно проще и дешевле организовать резервирование и встроенный контроль [46, 47, 48, 49].

Развитие бесплатформенных ИНС идет по двум основным направлениям: совершенствование датчиков и поиск новых конструктивных и алгоритмических решений при построении БИНС [46, 47, 48, 49].

В настоящее время в составе БИНС появились прецизионные маятниковые микромеханические акселерометры типа А-15, выполненные по технологии МЭМС (технология микроэлектроники, микромеханики, планарная, кремниевая, в том числе сервисная электроника на одном чипе по гиб-

ридно-пленочной или тонкопленочной технологии в виде отдельных конструктивных узлов). Данный датчик имеет чувствительный элемент, выполненный из монокристаллического кремния или кварца. Необычная конструкция и нетрадиционная технология изготовления этих приборов, интегральный характер выходной информации обусловили их высокие точностные характеристики. Так погрешности датчиков составляют порядка  $10^{-5}g \dots 10^{-6}g$  (для сравнения: погрешности акселерометров предыдущего поколения — порядка  $10^{-3}g$ ) Для космических летательных аппаратов прогнозируется применение атомных акселерометров (с погрешностью не  $10^{-9}g$ ) [48, 50, 51, 57].

В последнее время необычайно бурными темпами стали разрабатываться и внедряться гироскопические приборы нового поколения, основанные на эффекте Саньяка (ГЭС). Из них в авиационном приборостроении используются лазерные гироскопы (случайный дрейф порядка  $10^{-2}$  град/ч), волоконно-оптические гироскопы ( $10^{-2} \dots 10^{-3}$  град/ч), твердотельные волновые гироскопы (в перспективе ожидается  $10^{-2} \dots 10^{-3}$  град/ч). Для космических применений прогнозируется применение атомных гироскопов (случайный дрейф порядка  $10^{-6}$  град/ч).

В настоящее время в лабораториях ведущих мировых исследовательских центров (например, Стэнфордский университет, группа Марка Касевича) отрабатывается третье поколение ГЭС – гироскопы на волнах материи (волнах де Бройля) частиц, атомов и конденсатах Бозе-Эйнштейна, а также на квантовых свойствах сверхтекучих жидкостей, в которых лазерная и микромеханическая техника используется как вспомогательная составляющая. Чувствительность ГЭС на медленных (по сравнению со скоростью света) волнах де Бройля превосходит чувствительность лазерных гироскопов (ЛГ) и волоконно-оптических гироскопов (ВОГ) на световых волнах на 9-11 порядков ( $10^{-9} \dots 10^{-11}$ ) – отношение энергии атома (с различными атомными весами) к энергии фотона (с различными частотами). Всё это позволяет существенно превзойти уровень точности, доступный для ЛГ, ВОГ примерно на 4 порядка ( $10^4$ ) с учетом шумов. Все эти гироскопы являются атомными интерферометрами [48, 50, 52, 53, 56].

Разработки атомных интерферометров послужили толчком к разработке БИНС нового поколения для космических летательных аппаратов. Они способны обеспечить точность автономной инерциальной навигации спутников на уровне единиц метров, так оценка горизонтальной составляющей ошибки определения местоположения спутника составляет 5 м/ч (СКО). Атомные гироскопы открывают необозримые возможности и для авиационных БИНС в плане повышения точностных характеристик, по прогнозу некоторых ученых точность автономной БИНС на ядерных гироскопах может стать соизмеримой с точностью СРНС гражданского назначения с открытым кодом доступа [50, 53]. В связи с этим становится актуальной проблема разработки высокоточных многошаговых алгоритмов ориентации, так как погрешность перспективных датчиков становится соизмеримой или меньше методической погрешности алгоритмов.

## 1.2 Системы координат и принципы обработки информации в БИНС

БИНС представляют собой ИНС без гиросtabilизированной платформы. Датчики БИНС – гироскопы и акселерометры, имеющие по три оси чувствительности, жестко связаны с корпусом самолета. В вычислителе БИНС решаются задачи ориентации (определение углового положения ЛА) и навигации (определение местоположения и скорости ЛА).

Алгоритмы обработки информации в БИНС предназначены для определения углового положения осей ЛА относительно инерциального пространства или некоторой опорной системы координат, связанной с Землей.

На рисунке 1.2 представлены системы координат, используемые в современных БИНС.

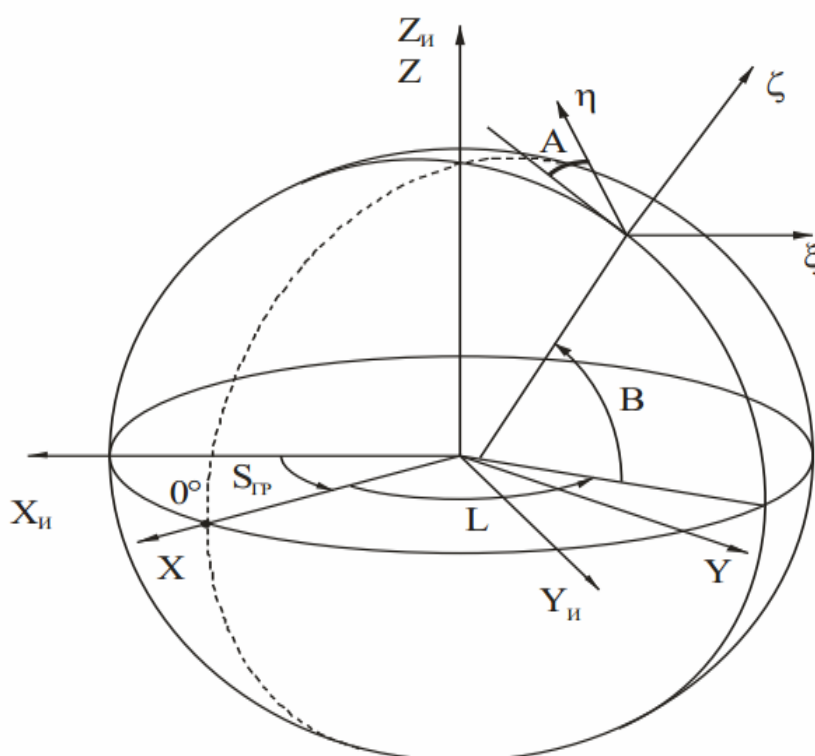


Рис. 1.2 — Системы координат, используемые в БИНС

Рассмотрим системы координат, используемые в БИНС при решении задачи по определению углового положения ЛА.

Связанная система координат *хуз* (связанная с самолетом), оси которой совпадают с осями БИНС с точностью до ошибок установки акселерометров и гироскопов.

Инерциальная система координат  $X_I Y_I Z_I$ . Ее начало находится в центре Земли. Ось  $X_I$  направлена на точку весны — строго определенную точку на небесной сфере, в которой находится Солнце в момент весеннего равноденствия. Иначе говоря, это одна из точек пересечения плоскости эклиптики и небесного экватора. Ось  $Z_I$  направлена по оси вращения Земли, а ось  $Y_I$  дополняет систему координат до правой тройки.

Прямоугольная гринвичская система координат  $XYZ$  связана с Землей и вращается вместе с ней в инерциальном пространстве. Начало системы координат — в центре Земли. Оси  $X$ ,  $Y$  лежат в плоскости экватора, а ось  $Z$  направлена на северный полюс, т.е. тоже по оси вращения Земли. Причем ось  $X$  лежит в плоскости гринвичского меридиана и направлена в точку на поверхности Земли с нулевой широтой и долготой.

Опорный навигационный трехгранник  $\xi\eta\zeta$  имеет центр в точке местоположения ЛА. Оси  $\xi$ ,  $\eta$  лежат в плоскости горизонта, а  $\zeta$  направлена по вертикали. Если используется модель Земли как эллипсоида вращения, то этой вертикалью является нормаль к поверхности эллипсоида, т.е. геодезическая вертикаль. Ориентация осей  $\xi$ ,  $\eta$  в горизонтальной плоскости зависит от выбранного закона изменения азимута опорного трехгранника.

Угловое положение самолета в инерциальном пространстве описывается с помощью матрицы направляющих косинусов  $U$  следующим образом:

$$(X_{И} \ Y_{И} \ Z_{И})^T = U(x \ y \ z)^T,$$

где  $U$  — матрица перехода от одной системы координат к другой, она определяется в результате решения соответствующей кинематической системы дифференциальных уравнений.

Гринвичская система координат повернута относительно инерциальной на угол  $S_{ГР}$ , называемый звездным гринвичским временем. Он определяется как

$$S_{ГР} = S_{ГР0} + \Omega(t - t_0), \quad (1.1)$$

где  $\Omega$  — угловая скорость вращения Земли,  $t$  — время, прошедшее с некоторого момента  $t_0$ , на который известно (из астрономических ежегодников) звездное гринвичское время  $S_{ГР0}$ .

Кроме того, взаимная ориентация обеих этих систем координат может быть описана матрицей направляющих косинусов:

$$(X \ Y \ Z)^T = M(X_{И} \ Y_{И} \ Z_{И})^T,$$

где

$$M = \begin{pmatrix} \cos S_{ГР} & \sin S_{ГР} & 0 \\ -\sin S_{ГР} & \cos S_{ГР} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Угловое положение трехгранника  $\xi\eta\zeta$  относительно  $XYZ$  может быть представлено в матричном виде:

$$(\xi \ \eta \ \zeta)^T = V(X \ Y \ Z)^T,$$

где  $V$  — матрица направляющих косинусов, она определяется в результате решения соответствующей кинематической системы дифференциальных уравнений.

Из матрицы  $V$  вычисляются три угла Эйлера-Крылова, которыми являются геодезическая долгота  $L$ , геодезическая широта  $B$  и азимут  $A$ .

Наконец, ориентация самолета относительно опорного трехгранника выражается с помощью матрицы  $D$ :

$$\begin{pmatrix} \xi & \eta & \zeta \end{pmatrix}^T = D \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T,$$

где  $D$  – матрица направляющих косинусов, которая вычисляется по матрицам  $U, M, V$ .

Зная элементы этой матрицы, можно вычислить гироскопический курс  $\psi_G$ , тангаж  $\vartheta$  и крен  $\gamma$ :

$$\psi_G = \text{Arctg} \frac{d_{11}}{d_{21}}, \quad [0, 2\pi];$$

$$\vartheta = \text{arctg} \frac{d_{31}}{\sqrt{d_{32}^2 + d_{33}^2}};$$

$$\gamma = \text{Arctg} \frac{-d_{33}}{d_{32}}, \quad [-\pi, \pi].$$

На рисунке 1.3 показана связь между описанными выше системами координат.

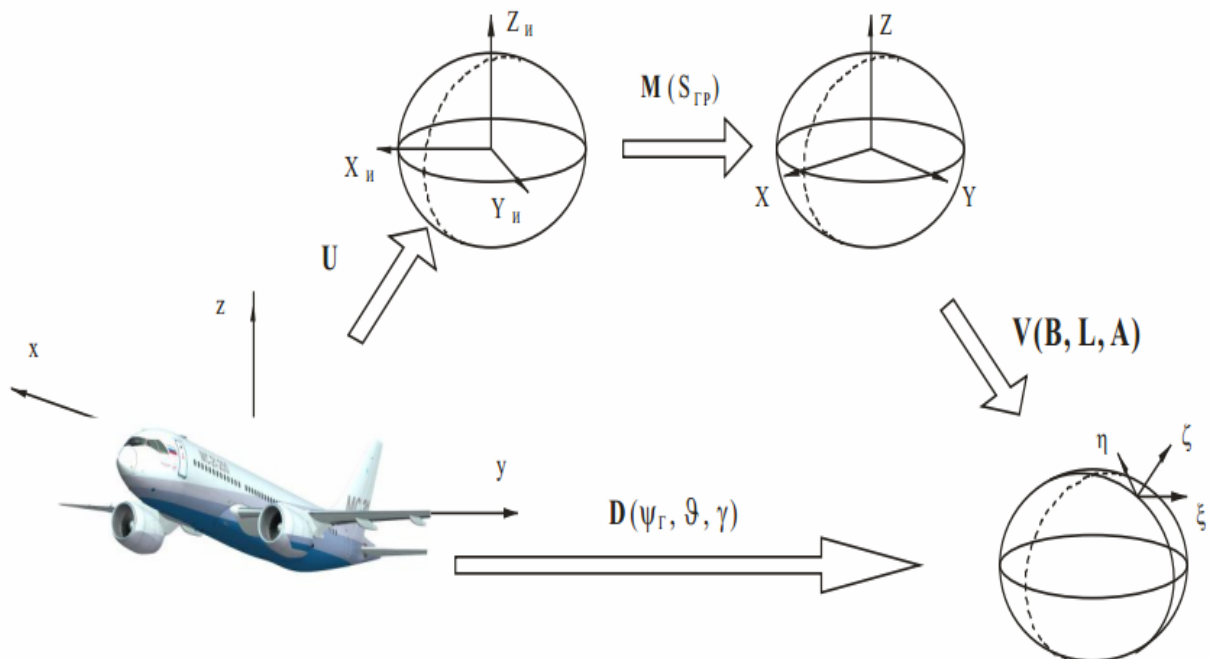


Рис. 1.3 — Связь между системами координат в БИНС

Нетрудно заметить справедливость следующей цепочки равенств:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = VM \begin{pmatrix} X_{II} \\ Y_{II} \\ Z_{II} \end{pmatrix} = VMU \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

откуда следует, что

$$D = VMU. \quad (1.3)$$

Матрицу  $D$  нужно знать по двум причинам. Во-первых, с ее помощью осуществляется преобразование сигналов акселерометров, расположенных по осям самолета, к осям опорного трехгранника. Во-вторых, по элементам этой матрицы определяются пилотажные углы самолета.

Матрицу  $M$  рассчитывают в соответствии с (1.1), (1.2), зная текущее время. Матрица  $V$  вычисляется в навигационном канале. Тогда для определения матрицы  $D$  по (1.3) осталось найти матрицу  $U$ . Эту задачу как раз и решает алгоритм ориентации [10].

Одной из ключевых идей, заложенных в принципе действия инерциальных навигационных систем, является способ исключения из показаний акселерометров вектора удельной гравитационной силы (ускорения гравитационной силы)  $\vec{g}$ . Его техническая реализация заключается в том, что два акселерометра размещаются в горизонтальной плоскости на гиросtabilизированной платформе. При этом вектор  $\vec{g}$  не проецируется на оси чувствительности датчиков и акселерометры измеряют абсолютные ускорения данной платформы.

Однако для реализации той же идеи можно поступить иным образом, а именно, вычислять удельную гравитационную силу и математически исключать ее из дальнейших расчетов. При этом необходимо лишь знать ориентацию данных акселерометров относительно гравитационной вертикали. Эта мысль и легла в основу принципа действия нового типа инерциальных навигационных систем, не имеющих гиросtabilизированной платформы.

Принцип действия БИНС состоит в следующем. Путем обработки сигналов гироскопов вычисляется угловое положение ЛА в инерциальном пространстве. Если известна ориентация опорного навигационного трехгранника  $\xi\eta\zeta$  относительно Земли, а также относительно инерциального пространства, то может быть вычислена ориентация ЛА относительно опорного трехгранника, в том числе, в виде трех пилотажных углов. Эта информация является выходной, а также используется для преобразования сигналов акселерометров к осям трехгранника  $\xi\eta\zeta$ . Далее, как и в платформенных ИНС, интегрируются дифференциальные уравнения для акселерометров (точнее, для соответствующих проекций их выходных сигналов на горизонтальные оси) и определяются горизонтальные составляющие вектора скорости. В зависимости от используемых уравнений может быть вычислена как абсолютная, так и земная скорость (относительно вращающейся Земли). На основе полученных данных производится счисление координат ЛА и определение ориентации опорного навигационного трехгранника. Описанный принцип поясняется схемой обработки информации в БИНС, представленной на рисунке 1.4.



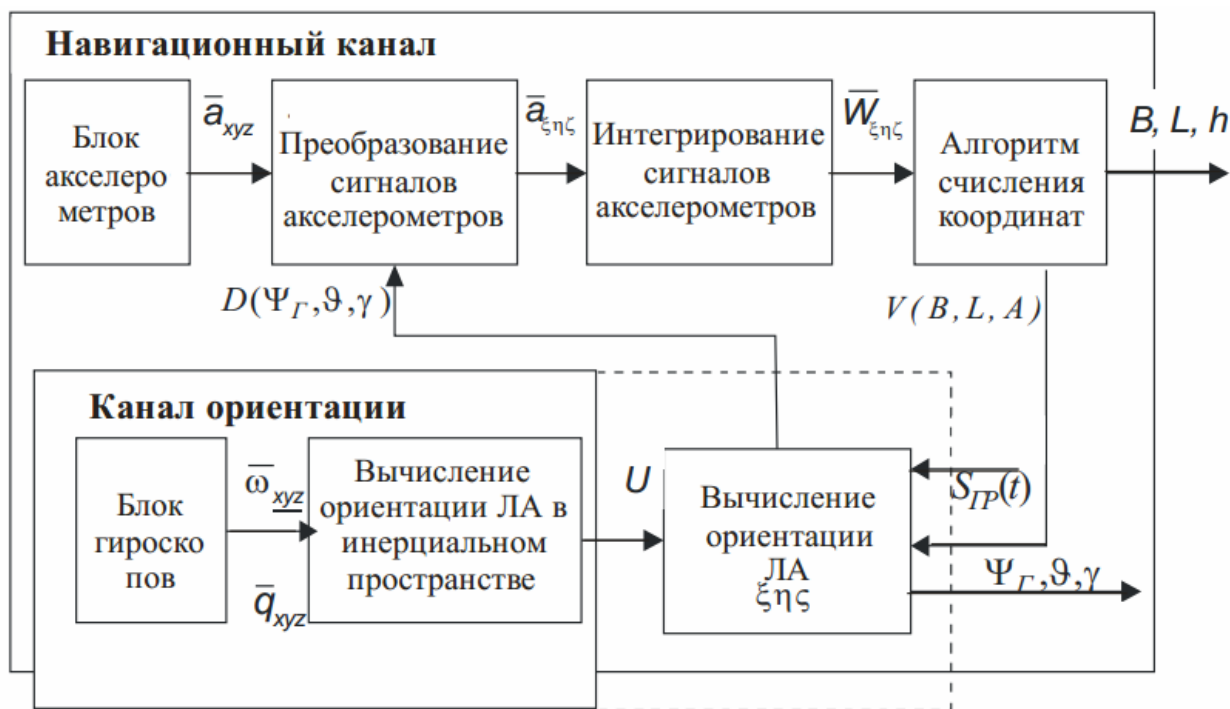


Рис. 1.4 — Схема обработки информации в БИНС.

На этой схеме нетрудно выделить канал ориентации, где вычисляется угловое положение самолета, и навигационный канал, где производится счисление координат. Оба этих канала во многом независимы, что позволяет в дальнейшем рассматривать их алгоритмы отдельно друг от друга.

Следует заметить, что такое деление алгоритмов БИНС довольно условное, и может быть предложено несколько способов прохождения границы между каналами ориентации и навигации. Например, можно считать, что вычисление ориентации самолета относительно трехгранника  $\xi\eta\zeta$  вместе с процедурами определения пилотажных углов входит в канал ориентации, как показано пунктиром на рисунке 1.4. Такое деление кажется вполне логичным, но при этом функционирование данного канала зависит от выходных сигналов навигационного канала. А можно ограничиться в нем вычислением углового положения ЛА относительно инерциального пространства и полагать, что определение курса, тангажа и крена проводится в навигационном канале. Тогда канал ориентации становится независимым от навигационного. Примем для определенности вторую схему деления алгоритмов БИНС на каналы.

Заметим, что положение трехгранника  $\xi\eta\zeta$  относительно ЛА определяется в вычислителе. Поэтому иногда говорят о так называемой «аналитической платформе», оси которой отождествляют с осями этого трехгранника.

В БИНС используются современные высокоточные акселерометры и гироскопы нового поколения интегрирующего типа, поэтому при разработке алгоритмов ориентации и навигационных вычислений необходимо учитывать эту особенность [9, 10, 54].

При синтезе алгоритмического обеспечения используют различные

кинематические параметры: матрицы направляющих косинусов, параметры Родрига-Гамильтона – кватернионы, вектор Эйлера. Выбор тех или иных параметров определяется типом датчиков первичной информации, организацией вычислительного процесса (разбиение на циклы вычислений), конкретными техническими решениями конструкции БИНС, а также выбором класса точности ИНС в составе ИКБО [9, 10, 54].

Исследования, проводимые отечественными и зарубежными специалистами, показывают, что до 80% погрешностей БИНС обусловлены погрешностью аналитического построения расчетной системы координат (СК), т.е. системы ориентации [9, 10, 11, 12, 54].

Погрешности системы ориентации разделяются на три типа:

- инструментальные погрешности (погрешности гироскопов);
- погрешности начальной выставки;
- вычислительные погрешности, обусловленные методическими погрешностями алгоритмов и погрешностями округления чисел в БЦВМ.

Первые два типа погрешностей можно считать неустранимыми, так как они определяются уровнем развития производства гироскопов и БИНС в целом. Вычислительные погрешности могут быть снижены до любого требуемого на практике уровня за счет применения высокоточных алгоритмов системы ориентации и выбора ЦВМ с требуемым быстродействием и разрядностью чисел.

Для получения заданных характеристик БИНС, отвечающих современным требованиям, необходимы не только прецизионные датчики (гироскопы:  $\sigma_{\omega_{\text{фл}}} = 0,001 \text{ град/ч}$ ; акселерометры:  $\sigma_a \leq 10^{-5} \text{ g}$ ;) и требуемая точность выставки ( $\Delta\psi, \Delta\alpha, \Delta\gamma \leq 30 \text{ угл. сек}$ ), но и соответствующее программно-математическое обеспечение алгоритмов ориентации.

Так как именно алгоритмы вычисления параметров ориентации предъявляют наиболее “жесткие” требования к характеристикам БЦВМ, то здесь особую важность и актуальность приобретает проблема разработки и выбора экономичных алгоритмов ориентации БИНС [9, 10, 54].

## 1.3. Выбор кинематических параметров ориентации БИНС

### 1.3.1 Анализ классических параметров определения ориентации

Под ориентацией будем понимать угловое положение связанной с твердым телом ортогональной системы координат относительно опорной (базовой, расчетной) системы координат. Величины, однозначно определяющие взаимную ориентацию этих СК, называются параметрами ориентации.

Для описания вращательного движения некоторой подвижной СК относительно опорной могут быть использованы различные виды параметров ориентации.

Углы Эйлера-Крылова являются самыми распространенными, так как наиболее простым и наглядным способом определяют ориентацию твердого тела. Каждый параметр является углом плоского вращения вокруг надлежащим образом выбранной оси. Каждому пространственному вращению однозначно отвечают три угла, выполненные на определенную величину и в определенной последовательности. Совокупность всех последовательностей поворотов образует систему углов конечного вращения. Обычно указывается двенадцать возможных последовательностей, из которых действительно разными являются только четыре. Основным недостатком данных параметров является их вырождаемость, что приводит к неоднозначности или невозможности описания пространственной ориентации. Кинематическое уравнение, характеризующее последовательные вращения объекта вокруг связанных с ним двух осей имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{p}} &= B\bar{\omega}; \quad \bar{p} = [\nu \quad \gamma \quad \psi]^T; \quad \bar{\omega} = [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3] \\ B &= \begin{bmatrix} \sin\psi / \sin\nu & \cos\psi / \sin\nu & 0 \\ \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ -\sin\psi \cos\nu / \sin\nu & -\cos\psi \cos\nu / \sin\nu & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Ввиду особой структуры и несимметричности этих уравнений не представляется возможным построить для них в простом явном виде ни общие, ни частные решения.

Искомая ориентация может определяться матрицей  $U$   $3 \times 3$ , элементами которой являются косинусы углов между осями триэдров. Данная матрица называется матрицей направляющих косинусов. Она задает преобразование координат некоторого вектора в связанной системе координат  $[x \quad y \quad z]$  в координаты в неподвижной СК  $[X_{И} \quad Y_{И} \quad Z_{И}]$ :

$$\begin{bmatrix} X_{И} \\ Y_{И} \\ Z_{И} \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{bmatrix}, \quad (1.5)$$

Как любая ортонормированная матрица, матрица  $U$  обладает следующим свойством:

$$U^{-1} = U^T; \quad \det U = 1.$$

Вычисление элементов матрицы направляющих косинусов осуществляется путем решения дифференциального уравнения Пуассона:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= U \cdot \Omega; \quad U(t_0) = U_0; \\ \Omega &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ \omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  – проекции вектора абсолютной угловой скорости вращения на оси связанной СК.

В случае реализации алгоритма (1.6) на циклической основе вычисление матрицы  $U$  производится по следующей формуле:

$$U_{k+1} = U_k \cdot A_{k+1}, \quad (1.7)$$

Матрица направляющих косинусов  $U_{k+1}$ , задает положение осей связанной СК относительно инерциальной в момент времени  $t_{k+1}$  (следующий цикл). Матрица направляющих косинусов  $A_{k+1}$  преобразует координаты некоторого вектора для момента времени  $t_k$  в координаты этого же вектора в момент времени  $t_{k+1}$ . Она играет роль оператора поворота, переводящего связанную систему из положения  $U_k$  в состояние  $U_{k+1}$  [9, 10, 11, 12].

## 1.3.2 Определение углового положения с помощью обобщенного вектора ориентации и его модификаций

### 1.3.2.1 Обобщенный вектор ориентации

Пусть имеется некоторый вектор  $\vec{r}$ , жестко закрепленный со связанной СК  $Oxyz$ . На рисунке 1.5 показано расположение вектора относительно систем координат.

Положение вектора  $\vec{r}$  относительно неподвижной  $OXYZ$  и связанной  $Oxyz$  систем определяется соответствующими координатами:

$$\vec{r}_И = \begin{bmatrix} X_r \\ Y_r \\ Z_r \end{bmatrix}; \quad \vec{r}_С = \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{bmatrix}$$

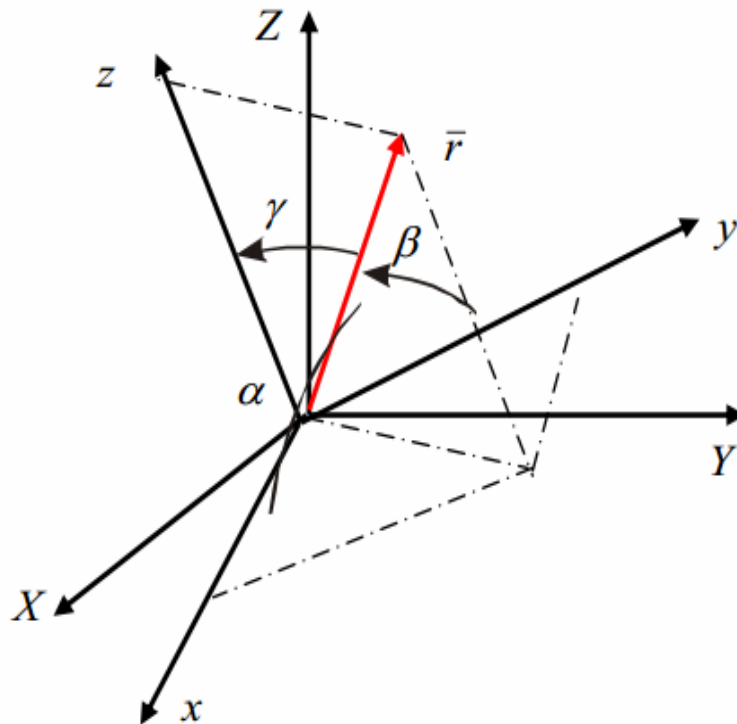


Рис. 1.5 — Расположение вектора  $\vec{r}$  относительно систем координат

Пересчет координат вектора в связанной системе  $\vec{r}_С$  в координаты в инерциальной системе  $\vec{r}_И$  осуществляется с помощью матрицы направляющих косинусов:

$$\begin{bmatrix} Z_r \\ Y_r \\ Z_r \end{bmatrix} = U \cdot \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{bmatrix}.$$

Пусть теперь связанная СК и соответственно вектор  $\vec{r}$  вращаются с некоторой угловой скоростью  $\vec{\omega}$  относительно неподвижной системы координат. Следующее положение также может быть описано своей матрицей направляющих косинусов, найденной путем решения уравнения Пуассона (1.6).

С другой стороны, связанную систему координат в это же положение можно привести путем поворота вокруг некоторой оси  $\vec{e}$  на угол  $\varphi$ , как показано на рисунке 1.6. Это утверждается известной теоремой Эйлера - произвольное перемещение твердого тела, имеющего неподвижную точку, эквивалентно плоскому вращению вокруг некоторой оси. Орт  $\vec{e}$ , вокруг которого осуществляется поворот связанной СК на некоторый угол  $\varphi$  до ее прихода в состояние, описываемое матрицей направляющих косинусов  $U(t)$ , является собственным вектором этой матрицы. Заметим, что другому положению связанной СК относительно инерциальной будет соответствовать другая матрица направляющих косинусов  $U'(t)$  и, следовательно, привести ее в это положение из предыдущего можно путем поворота вокруг другой оси  $\vec{e}'$ , являющейся собственным вектором этой матрицы. В результате можно сделать следующий вывод: положение связанной (подвижной) СК относительно неподвижной можно описать некоторой единичной осью  $\vec{e}$  и углом поворота  $\varphi$  вокруг этой оси.

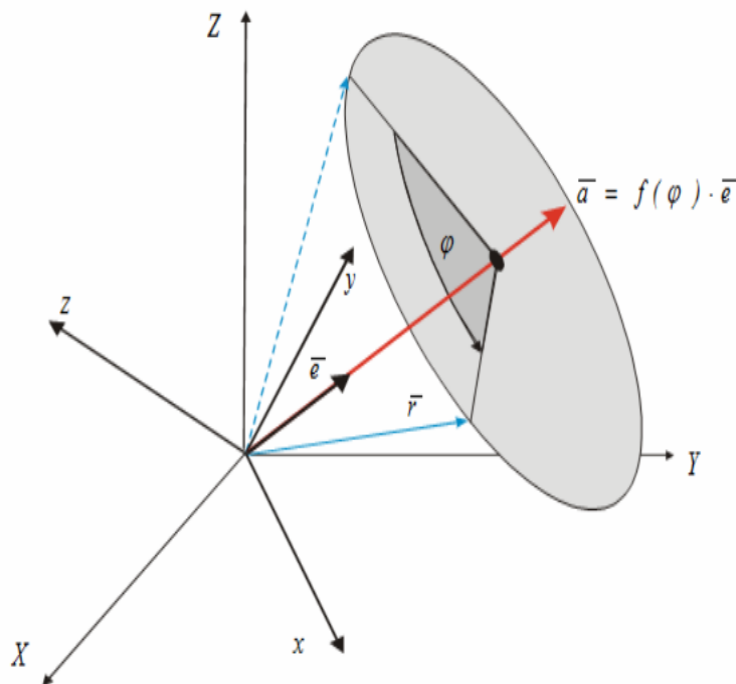


Рис. 1.6 — Параметры вращения вектора  $\vec{r}$  относительно систем координат

Данный вывод можно расширить: положение связанной СК относительно инерциальной можно задать некоторым вектором  $\bar{a}$  (лежащим на единичной оси  $\bar{e}$ ) и поворотом на некоторый угол  $\varphi$  вокруг этого вектора.

Вектор  $\bar{a}$  будем называть обобщенным вектором ориентации:

$$\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \bar{e}, \quad (1.8)$$

где:

$|\bar{a}|$  – модуль (длина) обобщенного вектора;

$\bar{e}$  – единичный орт оси вращения.

Модуль  $|\bar{a}|$  обобщенного вектора ориентации можно задавать различными способами. Например, как функцию от угла поворота  $f(\varphi)$ . В этом случае вектор  $\bar{a}$

$$\bar{a} = f(\varphi) \cdot \bar{e}, \quad (1.9)$$

однозначно задает положение связанной СК относительно инерциальной:

— по направлению вектора  $\bar{a}$  можно найти ось  $\bar{e}$ , вокруг которой осуществляется поворот;

– по модулю  $f(\varphi)$  можно найти угол, на который необходимо повернуть СК относительно оси  $\bar{e}$  для того, чтобы поместить ее в положение, описываемое матрицей направляющих косинусов  $U(t)$ .

Найдем уравнение взаимосвязи обобщенного вектора ориентации и матрицы направляющих косинусов.

Пусть в начальный момент времени  $t_0$  связанная и инерциальная системы совпадали:

$$U(t_0) = E;$$

$$\begin{bmatrix} X(t_0) \\ Y(t_0) \\ Z(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \\ z(t_0) \end{bmatrix}.$$

Пусть далее связанная СК вращается относительно инерциальной СК с некоторой абсолютной угловой скоростью  $\bar{\omega}$ , вектор которой неподвижен относительно инерциальной СК. В этом случае положение связанной СК относительно инерциальной будет определяться матрицей направляющих косинусов  $U(t)$ . Но, как было сказано ранее, в это же положение ее можно привести путем поворота вокруг оси  $\bar{e}$  на некоторый угол  $\varphi$  (рисунок 1.6). При этом заметим, что и вектор  $\bar{\omega}(t)$  так же является в данном случае собственным вектором для матрицы направляющих косинусов, т.е. совпадает по направлению с осью  $\bar{e}$  (связанная СК вращается вокруг оси  $\bar{\omega}(t)$  с угловой

скоростью  $\omega = |\bar{\omega}|$ ). Это означает, что угол поворота  $\varphi$  равен интегралу от величины угловой скорости

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^t \omega(t) dt = \omega \cdot \Delta t = \omega(t - t_0) \quad (1.10)$$

Найдем частное нормированное решение уравнения Пуассона (1.6) методом последовательных приближений при условии  $U(t_0) = E$ :

$$\begin{aligned} \dot{U}(t) &= U(t)\Omega(t); \\ \int_{t_0}^t \dot{U}(\tau) d\tau &= \int_{t_0}^t U(\tau) \cdot \Omega(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \Omega(\tau) d\tau + \\ &+ \int_{t_0}^t \Omega(\tau) \left[ \int_{t_0}^t \Omega(\tau) d\tau \right] d\tau + \int_{t_0}^t \Omega(\tau) \left[ \int_{t_0}^t \Omega(\tau) \left[ \int_{t_0}^t \Omega(\tau) d\tau \right] d\tau \right] d\tau + \dots \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} = \omega(t) \cdot K \quad ;$$

где:  $\omega(t)$  — модуль вектора угловой скорости  $\bar{\omega}$ , определяющий его величину;

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -e_z & e_y \\ e_z & 0 & -e_x \\ -e_y & e_x & 0 \end{bmatrix} \quad \text{— кососимметричная матрица,}$$

составленная из координат вектора  $\bar{e}$  (оси вращения).

С учетом (1.10) выражение (1.11) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} U(t) &= E + K \int_{t_0}^t \omega(\tau) d\tau + K \int_{t_0}^t \omega(\tau) \left[ K \int_{t_0}^t \omega(\tau) d\tau \right] d\tau + \\ &+ K \int_{t_0}^t \omega(\tau) \left[ K \int_{t_0}^t \omega(\tau) \left[ K \int_{t_0}^t \omega(\tau) d\tau \right] d\tau \right] d\tau + \dots \end{aligned} \quad (1.12)$$



Проинтегрировав каждый член с учетом (1.10), имеем:

$$U(t) = E + K \cdot \varphi(t) + \frac{K^2 \varphi^2(t)}{2} + \frac{K^3 \varphi^3(t)}{2 \cdot 3} + \frac{K^4 \varphi^4(t)}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{K^n \varphi^n(t)}{n!} + \dots \quad (1.13)$$

Используя свойство кососимметрических матриц, выразим степени  $K$  через первую и вторую степени:

$$K^{2n+1} = (-1)^n K; \quad K^{2(n+1)} = (-1)^n K^2;$$

$$K^3 = -K; \quad K^4 = -K^2; \quad K^5 = K; \quad K^6 = K^2.$$

При этом выражение (1.13) переписывается в следующем виде:

$$U(t) = E + K\varphi(t) + \frac{\varphi^2(t)}{2} \cdot K^2 - \frac{\varphi^3(t)}{3!} \cdot K - \frac{\varphi^4(t)}{4!} \cdot K^2$$

$$+ \frac{\varphi^5(t)}{5!} \cdot K + \frac{\varphi^6(t)}{6!} \cdot K^2 + \dots =$$

$$= E + K \left( \varphi(t) - \frac{\varphi^3(t)}{3!} + \frac{\varphi^5(t)}{5!} + \dots \right) + K^2 \left( \frac{\varphi^2(t)}{2} - \frac{\varphi^4(t)}{4!} + \frac{\varphi^6(t)}{6!} + \dots \right) \quad ; \quad (1.14)$$

$$U(t) = E + \sin \varphi \cdot K + (1 - \cos \varphi) \cdot K^2.$$

Выразим матрицу  $K$  через введенный ранее обобщенный вектор  $\bar{a} = f(\varphi)\bar{e}$ . Матрица  $K$  — кососимметрическая матрица, составленная из координат вектора  $\bar{e}$ :

$$\bar{e} = \frac{\bar{a}}{f(\varphi)}; \quad K = \frac{1}{f(\varphi)} \cdot A, \quad (1.15)$$

где  $A$  — кососимметрическая матрица, составленная из координат вектора  $\bar{a}$ :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

В этом случае выражение (1.14) может быть переписано так:

$$U(t) = E + \frac{1}{f(\varphi)} \sin \varphi \cdot A + \frac{(1 - \cos \varphi)}{f^2(\varphi)} \cdot A^2 \quad (1.17)$$

Соотношение (1.17) выражает связь между матрицей направляющих косинусов  $U(t)$  и некоторым обобщенным вектором ориентации  $a(t)$ , на-

правленным по оси поворота  $\bar{e}$  и имеющим модуль как функцию  $f(\varphi)$  угла поворота  $\varphi$  вокруг этой оси.

Найдем кинематическое уравнение для обобщенного вектора ориентации. Для этого выражение (1.17) перепишем в виде:

$$U(t) = E + \alpha A + \beta A^2 \quad (1.18)$$

где  $\alpha = \frac{1}{f(\varphi)} \sin \varphi; \quad \beta = \frac{(1 - \cos \varphi)}{f^2(\varphi)}$

Транспонируя выражение (1.18), получим:

$$U^T(t) = E - \alpha A + \beta A^2 \quad (1.19)$$

Вычтем (1.19) из (1.18)

$$2\alpha A = U(t) - U^T(t)$$

и продифференцировав по времени, находим:

$$2\dot{\alpha}A + 2\alpha\dot{A} = \dot{U}(t) - \dot{U}^T(t);$$

$$\dot{A} + \frac{1}{\alpha} \cdot \dot{\alpha}A = \frac{1}{2\alpha} (\dot{U}(t) - \dot{U}^T(t)).$$

С учетом (1.6) данное выражение можно записать в виде:

$$\dot{A} + \frac{1}{\alpha} \cdot \dot{\alpha}A = \frac{1}{2\alpha} \Omega U + \frac{1}{2\alpha} U^T \Omega;$$

$$\dot{A} + \frac{1}{\alpha} \cdot \dot{\alpha}A = \frac{1}{2\alpha} \Omega (E + \alpha A + \beta A^2) + \frac{1}{2\alpha} \Omega (E + \alpha A + \beta A^2) + \frac{1}{2\alpha} (E + \alpha A + \beta A^2) \cdot \Omega;$$

$$\dot{A} + \frac{1}{\alpha} \cdot \dot{\alpha}A = \frac{1}{2\alpha} \Omega + \frac{1}{2} \Omega A + \frac{\beta}{\alpha} \Omega A^2 + \frac{1}{2\alpha} \Omega - \frac{1}{2} A \Omega + \frac{1}{2\alpha} \beta A^2 \Omega;$$

$$\dot{A} + \frac{1}{\alpha} \cdot \dot{\alpha}A = \frac{1}{\alpha} \Omega - \frac{1}{2} A \Omega + \frac{1}{2} \Omega A + \frac{1}{2\alpha} \beta (\Omega A^2 + A^2 \Omega) \quad (1.20)$$

Поскольку  $\Omega A^2 + A^2 \Omega = -2f^2(\varphi)\Omega - f^2(\varphi)\Omega + (\bar{a} \cdot \bar{\omega}) \cdot A$   
то (2.20) примет вид:

$$\dot{A} + \frac{1}{\alpha} \cdot \dot{\alpha}A = \frac{1}{\alpha} \Omega - \frac{1}{2} A \Omega + \frac{1}{2} \Omega A + \frac{\beta}{2\alpha} (-2f^2(\varphi)\Omega - f^2(\varphi)\Omega + (\bar{a} \cdot \bar{\omega}) \cdot A);$$

или

$$\begin{aligned}
\dot{A} + \frac{1}{\alpha} \cdot \dot{\alpha}A &= \frac{1}{\alpha} \Omega - \frac{1}{2} A\Omega + \frac{1}{2} \Omega A + \frac{\beta}{2\alpha} (-2f^2(\varphi)\Omega) - \frac{\beta}{2\alpha} (f^2(\varphi)\Omega + (\bar{a} \cdot \bar{\omega}) \cdot A); \\
&= \frac{\Omega - \beta f^2(\varphi)\Omega}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} (1 - \beta f^2(\varphi)) \Omega = \\
&= \frac{f(\varphi)}{\sin \varphi} \left( 1 - \frac{(1 - \cos \varphi)}{f^2(\varphi)} \cdot f^2(\varphi) \right) = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} f(\varphi) \frac{\cos \varphi}{\alpha} \alpha; \\
\dot{A} + \frac{1}{\alpha} \cdot \dot{\alpha}A &= \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} \cdot f^2(\varphi) \right) \cdot \Omega - \frac{1}{2} (A\Omega - \Omega A) - \frac{\beta}{2\alpha} (-f^2(\varphi)\Omega + (\bar{a} \cdot \bar{\omega}) \cdot A); \\
\dot{A} + \frac{1}{\alpha} \cdot \dot{\alpha}A &= \frac{\cos \varphi}{\alpha} \Omega - \frac{1}{2} (A\Omega - \Omega A) - \frac{\beta}{2\alpha} (-f^2(\varphi)\Omega + (\bar{a} \cdot \bar{\omega}) \cdot A) \tag{1.21}
\end{aligned}$$

Матричному выражению  $A\Omega - \Omega A$  соответствует выражение

$$A \cdot \bar{\omega} = A \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix};$$

в то время как соотношению  $-f^2(\varphi)\Omega + (\bar{a} \cdot \bar{\omega}) \cdot A$  соответствует выражение  $A^2 \cdot \bar{\omega}$ . В этом случае формула (1.21) может быть записана так:

$$\dot{\bar{a}} + \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \cdot \bar{a} = \frac{\cos \varphi}{\alpha} \cdot \bar{\omega} - \frac{1}{2} A \cdot \bar{\omega} - \frac{\beta}{2\alpha} A^2 \cdot \bar{\omega}$$

Поскольку:

$$\alpha = \frac{\sin \varphi}{f(\varphi)}; \quad \dot{\alpha} = \frac{\cos \varphi \cdot \dot{\varphi}}{f(\varphi)} - \frac{\sin \varphi}{f^2(\varphi)} \cdot \dot{\varphi} = \frac{1}{f^2(\varphi)} (\cos \varphi \cdot \dot{\varphi} \cdot f(\varphi) - \sin \varphi \cdot \dot{\varphi});$$

$$\frac{df(\varphi)}{dt} = \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = \frac{\bar{a} \cdot \dot{\bar{a}}}{f(\varphi)};$$

то

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{f^2(\varphi)} \cdot \left( \frac{\cos \varphi}{\frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi}} - \sin \varphi \right) \cdot (\bar{a} \cdot \dot{\bar{a}}).$$

Согласно теореме о взаимосвязи абсолютной и относительной производных:

$$\dot{\bar{a}} = U^T \dot{\bar{a}}^*;$$

где  $\dot{\bar{a}}^*$  — относительная (локальная) производная обобщенного вектора ориентации  $\bar{a}$  относительно связанной СК.

Далее везде при написании кинематических дифференциальных уравнений будут фигурировать локальные производные.

Окончательно получаем:

$$\dot{\bar{a}}^* = \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi} \cdot \bar{\omega} + \frac{1}{2} \bar{a} \times \bar{\omega} + \frac{1}{f^2(\varphi)} \left( \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi} - \frac{f(\varphi) \cdot \sin \varphi}{2(1 - \cos \varphi)} \right) \cdot \bar{a} \times (\bar{a} \times \bar{\omega}) \quad (1.22)$$

Выражение (1.22) является кинематическим дифференциальным уравнением обобщенного вектора ориентации и устанавливает связь между локальной производной обобщенного вектора  $\bar{a}$  и абсолютной угловой скоростью  $\bar{\omega}$ . Оно может быть записано следующим образом:

$$\dot{\bar{a}}^* = \frac{f(\varphi)}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \cdot \bar{\omega} + \frac{1}{2} \bar{a} \times \bar{\omega} + \frac{1}{f^2(\varphi)} \left( \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi} - \frac{f(\varphi) \cdot \sin \varphi}{2(1 - \cos \varphi)} \right) \cdot (\bar{a} \times \bar{\omega}) \bar{a} \quad (1.23)$$

Итак, получены уравнения, связывающие абсолютную угловую скорость  $\bar{\omega}$  с обобщенным вектором ориентации  $\bar{a}$  (1.22, 1.23), а также уравнение, связывающее обобщенный вектор ориентации  $\bar{a}$  и матрицу направляющих косинусов (1.17).

Выражение (1.22) представляет собой систему трех скалярных дифференциальных уравнений. Выражение (1.17) — чисто алгебраическое. Вследствие этого они требуют меньших вычислительных затрат, чем при решении шести дифференциальных уравнений (ДУ) Пуассона и трех уравнений связи [9, 10, 11, 12].

### 1.3.2.2 Вектор ориентации Эйлера

Было установлено в п.1.3.2.1, что ориентацию подвижной (в нашем случае связанной) СК относительно опорной (расчетной) можно описать с помощью некоторого вектора ориентации, направление которого определяет ось вращения, а модуль (длина) несет информацию об угле поворота. Выбор этой функции может в значительной степени повлиять на поведение самого вектора в процессе изменения направления абсолютной угловой скорости, а также упростить структуру кинематического уравнения (1.22) и уравнения связи с матрицей направляющих косинусов (1.17).

Если длину принять равной непосредственно углу поворота  $f(\varphi)=\varphi$ , то получим следующее соотношение:

$$\bar{\varphi} = \varphi \cdot \bar{e}. \quad (1.24)$$

Данный вектор известен под названием вектора ориентации Эйлера. Кинематическое дифференциальное уравнение для вектора Эйлера (более известное как уравнение Бортона) имеет вид:

$$\dot{\bar{\varphi}} = \bar{\omega} + \frac{1}{2} \bar{\varphi} \times \bar{\omega} + \frac{1}{\varphi^2} \left( 1 - \frac{\varphi \sin \varphi}{2(1 - \cos \varphi)} \right) \cdot \bar{\varphi} \times (\bar{\varphi} \times \bar{\omega}) \quad (1.25)$$

Связь вектора Эйлера с матрицей направляющих косинусов определяется соотношением:

$$U = E + \frac{\sin \varphi}{\varphi} \Phi + \frac{1 - \cos \varphi}{\varphi^2} \Phi^2; \quad (1.26)$$

где  $\Phi = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 0 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 0 \end{bmatrix}$  - кососимметрическая матрица, составленная

из координат вектора  $\bar{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \end{bmatrix}^T$  в связанной СК.

Используя разложение в ряд тригонометрических функций, не составляет труда с помощью выражения (2.17) доказать, что матрица направляющих косинусов  $U$  выражается через вектор ориентации следующим образом:

$$U = e^{\Phi} = E + \Phi + \frac{1}{2!} \Phi^2 + \frac{1}{3!} \Phi^3 + \dots; \quad (1.27)$$

Итак, вектор ориентации Эйлера представляет собой вектор, направленный по оси конечного поворота и равный по модулю величине угла этого поворота (рисунок 1.7).

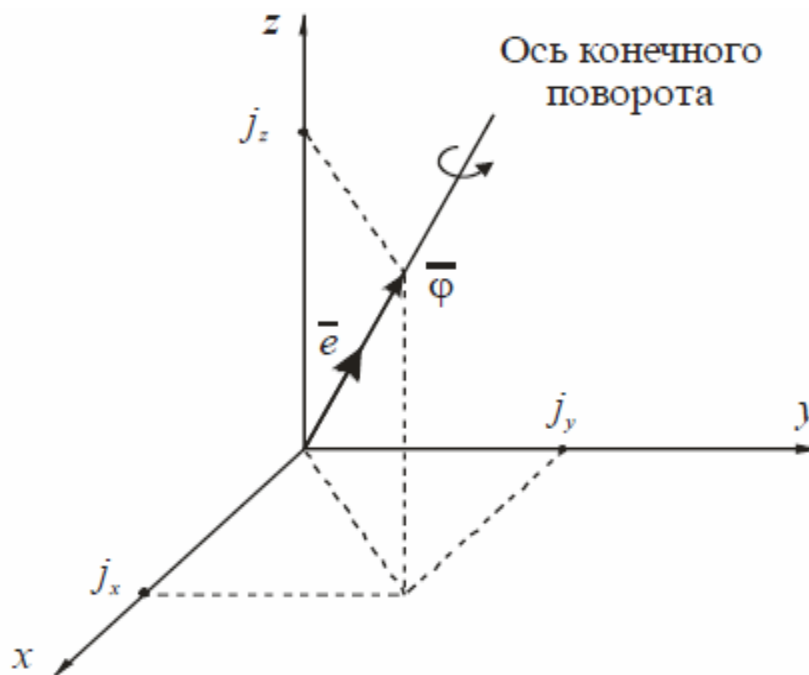


Рис. 1.7 – Вектор ориентации Эйлера

Перечислим его основные свойства:

- вектора Эйлера не подчиняются правилам сложения обычных векторов, поскольку сами повороты некоммутативны.
- если вектор  $\bar{\phi}$  задает поворот от неподвижного трехгранника  $\xi\eta\zeta$  к подвижному  $xuz$ , тогда его проекции на оси  $\xi, \eta, \zeta$  совпадают с проекциями на оси  $x, y, z$ ;
- вектор Эйлера является собственным вектором соответствующей матрицы направляющих косинусов с собственным числом, равным единице.
- матрица направляющих косинусов  $U$ , соответствующая вектору Эйлера  $\bar{\phi}$ , определяется посредством выражения (1.26, 1.27)
- вектор Эйлера подчиняется кинематическому дифференциальному уравнению - уравнению Бортца (выражение (1.25)).

По аналогии с обобщенным вектором ориентации нахождение вектора Эйлера требует решения трех скалярных дифференциальных уравнений [9, 11].

### 1.3.2.3 Параметры ориентации Родрига-Гамильтона

В теории конечных поворотов доказывается, что перевести трехгранник из одного углового положения в любое другое можно лишь одним поворотом вокруг некоторой оси, неподвижной в пространстве. Такой поворот называется конечным, а ось — осью конечного поворота [9, 11].

Конечный поворот может быть задан четырьмя параметрами  $l$ ,  $m$ ,  $n$ ,  $\varphi$ , которые характеризуют направление оси и угол поворота (рисунок 1.8). Первые три параметра — это проекции единичного вектора (вектора Родрига), направленного вдоль оси конечного поворота. Этим параметрам ставятся в соответствие четыре числа, которые и называют параметрами Родрига-Гамильтона:

$$p_0 = \cos \frac{\varphi}{2}; p_1 = l \sin \frac{\varphi}{2}; p_2 = m \sin \frac{\varphi}{2}; p_3 = n \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (1.28)$$

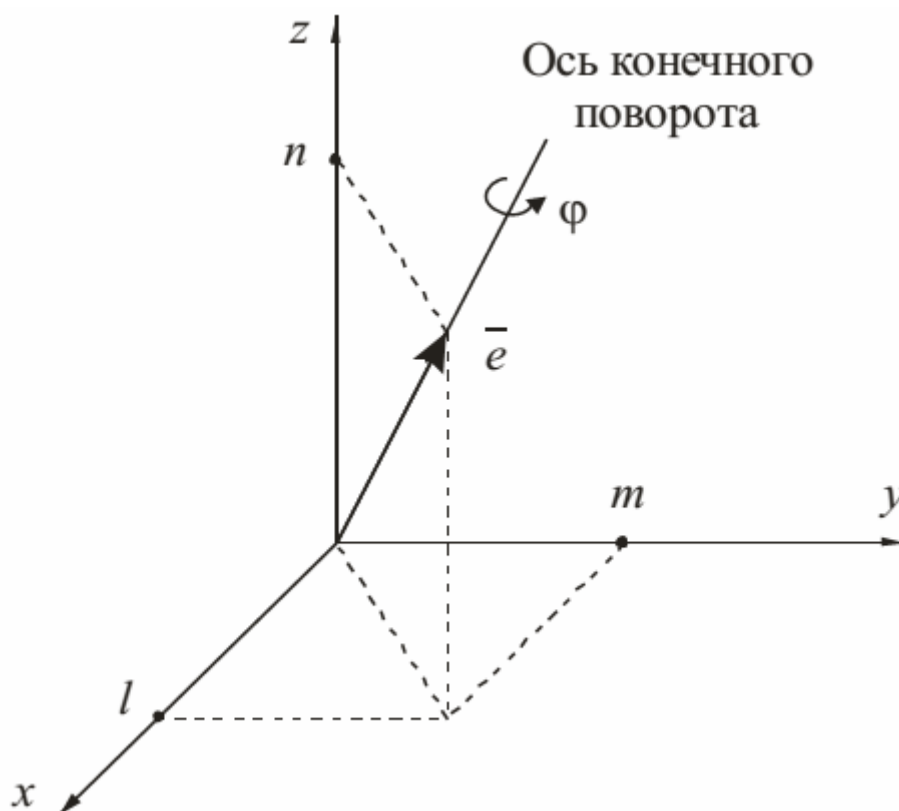


Рис. 1.8 – Параметры ориентации Родрига-Гамильтона

Для удобства преобразований, связанных с несколькими последовательными поворотами, эти числа рассматриваются как компоненты гиперкомплексного числа (кватерниона)  $p = p_0 + ip_1 + jp_2 + kp_3$  с одной

действительной и тремя мнимыми частями. Здесь  $i, j, k$  — мнимые единицы, операции с которыми подчиняются следующим правилам:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1; \quad ij = k; \quad jk = i; \quad ki = j; \quad ji = -1; \quad kj = -1; \quad ik = -1$$

Перечислим основные свойства параметров Родрига-Гамильтона:

- сумма квадратов этих параметров равна единице:

$$p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1;$$

- два последовательных поворота, описываемых кватернионами  $p_a$  и  $p_b$  дают новый конечный поворот, который может быть представлен кватернионом  $P_c = P_a \cdot P_b$ .

- матрица-столбец  $\mathbf{p}$ , составленная из параметров Родрига-Гамильтона, при вращении трехгранника  $\chi_{uz}$  с угловой скоростью  $\bar{\omega}$  подчиняется дифференциальному уравнению:

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{1}{2} \mathbf{\Gamma} \mathbf{p}, \quad (1.29)$$

$$\text{где } \mathbf{p} = (p_0 \quad p_1 \quad p_2 \quad p_3)^T, \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Параметры кватерниона  $p$  связаны с соответствующей матрицей направляющих косинусов  $\mathbf{A}$  следующими соотношениями:

$$p_0 = \frac{1}{2} \sqrt{u_{11} + u_{22} + u_{33} + 1};$$

$$p_1 = \frac{u_{23} - u_{32}}{4p_0}; \quad p_2 = \frac{u_{31} - u_{13}}{4p_0}; \quad p_3 = \frac{u_{12} - u_{21}}{4p_0};$$

$$U = \begin{pmatrix} 2p_0^2 + 2p_1^2 - 1 & 2(p_1p_2 + p_0p_3) & 2(p_1p_3 - p_0p_2) \\ 2(p_1p_2 - p_0p_3) & 2p_0^2 + 2p_2^2 - 1 & 2(p_2p_3 + p_0p_1) \\ 2(p_1p_3 + p_0p_2) & 2(p_2p_3 - p_0p_1) & 2p_0^2 + 2p_3^2 - 1 \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

Перейдя к параметрам Родрига-Гамильтона, мы стали оперировать с четырьмя компонентами кватерниона, что соответствует решению четырех кинематических дифференциальных уравнений [9, 10, 64].



Рассмотренные выше параметры ориентации, за исключением матрицы направляющих косинусов  $U$ , не позволяют взаимно - однозначно определять произвольное положение в пространстве связанного с ЛА базиса. Кроме того, некоторые параметры вырождаются при определенных значениях, что делает невозможным их применение для решения поставленной задачи. Например, различная комбинация и величины углов Эйлера - Крылова могут определять одно и тоже положение связанного базиса. Кроме того, при определенном выборе описания вращения подвижного базиса они могут вырождаться на углах, кратных  $\pi$ . Параметры Родрига - Гамильтона и основанные на них кватернионы не вырождаются, но при этом не могут однозначно определять ориентацию, поскольку одному положению связанного трехгранника соответствуют два кватерниона  $P$  и  $-P$ . Векторы ориентации также не обладают необходимым свойством из-за неоднозначностей при кратных углах  $\pi$  и вырождении некоторых из них.

Матрица направляющих косинусов, имеющая  $3 \times 3 = 9$  параметров обладает свойством глобальной однозначности, которое означает, что определенному положению связанного базиса относительно опорного отвечает одна и только одна матрица направляющих косинусов. Из-за расщепляемости этой матрицы обычно решают 6 дифференциальных уравнений – 2 столбца или 2 строки. Для нахождения оставшихся трех элементов используют уравнения связи, вытекающие из свойства ортогональности матрицы направляющих косинусов. Таким образом, достаточно 6 параметров для однозначного глобального определения ориентации связанной системы координат относительно инерциального пространства.

Таким образом, при синтезе алгоритмов БИНС необходимо использовать несколько параметров: в качестве промежуточных на малых промежутках времени вектор ориентации Эйлера, имеющий минимальные вычислительные затраты на реализацию, а в качестве конечных параметров - матрицу направляющих косинусов, обладающую свойством глобальной однозначности.

## 1.4 Синтез семейства алгоритмов ориентации БИНС

### 1.4.1 Особенности выходных сигналов современных гироскопических датчиков

В настоящее время наибольшее распространение в бесплатформенных ИНС получили кольцевые лазерные гироскопы (КЛГ), волоконно-оптические гироскопы (ВОГ), твердотельные волновые гироскопы (ТВГ). По сравнению с традиционными механическими гироскопами они обладает уникальным свойством — практически неограниченным диапазоном измерения угловых скоростей. Именно это свойство позволило отказаться от карданова подвеса и перейти к бесплатформенной схеме ИНС [56].

Особенностью современных гироскопических датчиков является то, что они измеряют угол поворота, а не угловую скорость. Такие датчики обычно называют гироскопами интегрирующего типа.

Выходные сигналы тройки гироскопических датчиков интегрирующего

типа  $\bar{q}(t_k) = [q_x(t_k) \quad q_y(t_k) \quad q_z(t_k)]^T$  в момент времени  $t_k$  равны интегралам от проекций абсолютных угловых скоростей на соответствующие оси чувствительности:

$$\bar{q}(t_k) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \bar{\omega}(t) dt, \quad (1.31)$$

где:  $t_{k-1}$  — предыдущий момент времени выдачи сигнала датчиком;

$\bar{\omega}(t) = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T$  — проекции вектора абсолютной угловой скорости вращения связанной СК на соответствующие оси чувствительности.

Практически интеграл (1.31) представляет собой число накопленных за интервал дискретности работы БЦВМ элементарных импульсов  $\delta\bar{q}$ , поступающих с выхода блока гироскопов:

$$\bar{q}(t_k) = \sum_{t_{k-1}}^{t_k} \delta\bar{q}, \quad (1.32)$$

Сигналы вида (1.31), имеющие размерность плоского угла, называются квазикоординатами. Физически они определяют угол поворота связанного трехгранника относительно инерциального пространства в течение периода дискретизации и являются неголономными параметрами, так как не могут быть непосредственно (без предварительных преобразований и некоторых допущений) использованы для определения ориентации летательного аппарата.

Для пояснения рассмотрим графический пример, представленный на рисунке 1.9. Пусть блок гироскопов с осями чувствительности, совпадающими

с осями связанной системы координат  $Oxyz$ , последовательно совершает угловые движения:

- поворот на  $90^\circ$  относительно оси  $x$ , затем на  $90^\circ$  относительно оси  $y$ ;
- поворот на  $90^\circ$  относительно оси  $y$ , затем на  $90^\circ$  относительно оси  $x$  (предыдущие повороты, но в обратной последовательности).

Очевидно, в обоих случаях на выходе блока чувствительных элементов по окончании этих поворотов будут сформированы одинаковые сигналы. Но, как видно из рисунка 1.9, конечные положения блока гироскопов будут различными.

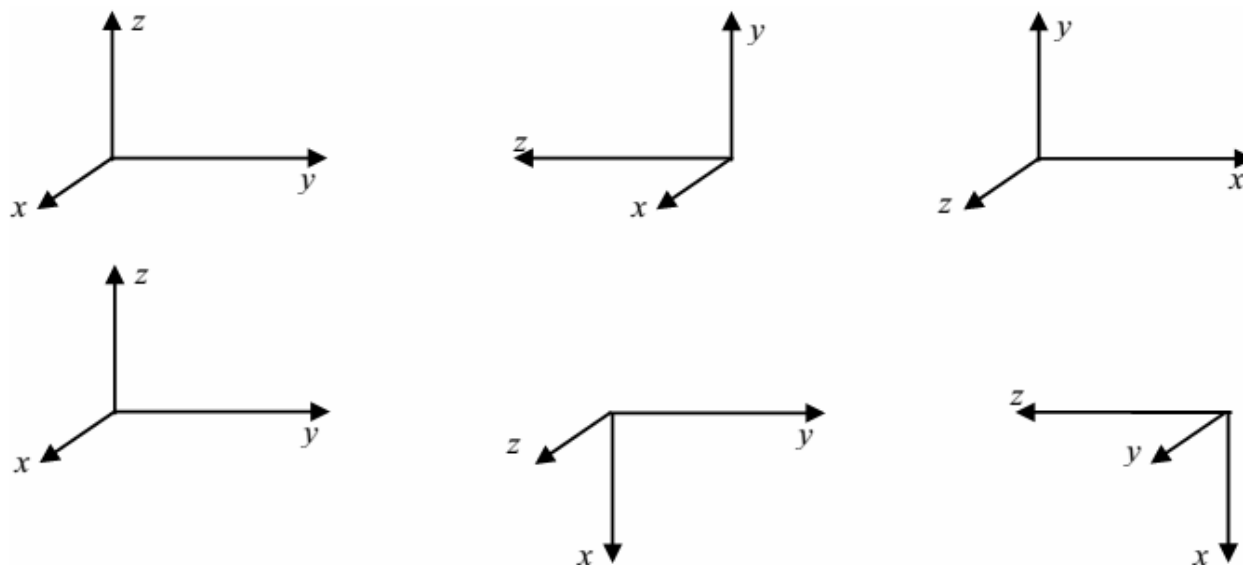


Рис. 1.9 – Угловые движения блока гироскопов

Таким образом, одинаковые квазикоординаты могут быть сформированы блоком гироскопов бесплатформенной ИНС при различных угловых движениях летательного аппарата. Поэтому точное определение ориентации ЛА с использованием выходного сигнала гироскопов интегрирующего типа, вообще говоря, невозможно. Причиной методической погрешности определения ориентации объекта в трехмерном пространстве по сигналам вида (1.31) является свойство некоммутативности трехмерных поворотов [9, 10, 11, 12, 56].

Таким образом при синтезе алгоритмов БИНС необходимо учитывать особенности выходных сигналов блока интегрирующих гироскопических датчиков.

### 1.4.2 Синтез приближенных алгоритмов ориентации

Применение алгоритмов (1.6) и (1.7) в вычислителях бесплатформенных ИНС для определения ориентации ЛА невозможно, поскольку их гироскопические датчики не являются измерителями абсолютной угловой скорости ЛА. Дифференцирование выходного сигнала (2.31) гироскопического блока по времени с последующим решением кинематических уравнений для параметров ориентации также приводит к быстрому накоплению погрешностей ориентации, счисляемой в БИНС.

Эта проблема привела к необходимости разработки специализированных алгоритмов ориентации БИНС, использующих квазикоординаты (1.31) в качестве сигналов первичной инерциальной информации. Классический метод решения дифференциального уравнения Пуассона (1.6) при интегральном характере выходной информации основан на предположении, что в течение шага интегрирования направление вектора угловой скорости остается постоянным. Алгоритм решения уравнения (1.6) с учетом сделанного предположения представлен далее. Общее решение имеет вид:

$$U(t) = U(t_{k-1}) \cdot \exp\left(\int_{t_{k-1}}^t \Omega(\tau) d\tau\right), \quad (1.33)$$

а матричная экспонента  $\exp\left(\int_{t_{k-1}}^t \Omega(\tau) d\tau\right)$  с учетом (1.6) может быть

составлена из квазикоординат (1.31):

$$\exp\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \Omega(\tau) d\tau\right) = e^Q = E + Q + \frac{1}{2!} Q^2 + \frac{1}{3!} Q^3 + \dots, \quad (1.34)$$

где  $Q = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Omega(\tau) d\tau = \begin{bmatrix} 0 & -q_z & q_y \\ q_z & 0 & -q_x \\ -q_y & q_x & 0 \end{bmatrix}$  – кососимметрическая матрица.

Используя свойства кососимметрических матриц, не составляет труда доказать, что для матрицы  $Q$  справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} Q^3 &= -q^2 \cdot Q, & Q^5 &= q^4 \cdot Q, & Q^7 &= -q^6 \cdot Q, \dots, \\ Q^4 &= -q^2 \cdot Q^2, & Q^6 &= q^4 \cdot Q^2, & Q^8 &= -q^6 \cdot Q^2, \dots \end{aligned}$$

где  $q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}$ .

В этом случае бесконечный ряд (1.34) запишется следующим образом:

$$e^Q = E + \left(1 - \frac{1}{3!}q^2 + \frac{1}{5!}q^4 - \dots\right) \cdot Q + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4!}q^2 + \frac{1}{6!}q^4 - \dots\right) \cdot Q^2, \quad (1.35)$$

Используя разложение в ряд функций  $\sin(q)$  и  $\cos(q)$ , получим:

$$e^{Q(t_k)} = \exp\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \Omega(\tau) d\tau\right) = E + \frac{\sin(q(t_k))}{q(t_k)} \cdot Q(t_k) + \frac{1 - \cos(q(t_k))}{q^2(t_k)} Q^2(t_k), \quad (1.36)$$

С учетом (1.36) выражение (1.33) примет окончательный вид:

$$U(t_k) = U(t_{k-1}) \cdot \left( E + \frac{\sin(q(t_k))}{q(t_k)} \cdot Q(t_k) + \frac{1 - \cos(q(t_k))}{q^2(t_k)} Q^2(t_k) \right), \quad (1.37)$$

Полученный алгоритм позволяет определять ориентацию связанного базиса непосредственно по показаниям блока интегрирующих гироскопов, минуя их предварительное дифференцирование. Заметим, что формула (1.37) может быть получена из соотношения (1.26), если принять такое же предположение о постоянстве направления вектора угловой скорости:

$$\bar{\varphi}(t_k) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \bar{\omega}(t) dt = \bar{q}(t_k)$$

Алгоритмы численного интегрирования различных порядков точности могут быть получены использованием ряда (1.35) с удержанием членов соответствующих порядков:

– алгоритм первого порядка точности:

$$U(t_k) = U(t_{k-1}) \cdot (E + Q); \quad (1.38)$$

– алгоритм второго порядка точности:

$$U(t_k) = U(t_{k-1}) \cdot \left( E + Q + \frac{1}{2} Q^2 \right); \quad (1.39)$$

– алгоритм третьего порядка точности

$$U(t_k) = U(t_{k-1}) \cdot \left( E + Q + \frac{1}{2} Q^2 - \frac{1}{6} q^2 Q - \frac{1}{24} q^2 Q^2 \right). \quad (1.40)$$

Аналогичным образом могут быть получены алгоритмы любой точности. Необходимо отметить, что формула (1.37) имеет методическую погрешность вследствие принятия допущения о постоянстве направления вектора угловой скорости  $\bar{\omega}(t)$ . На самом же деле вектор  $\bar{\omega}(t)$  непрерывно

изменяет свое направление из-за наличия углового ускорения  $\frac{d}{dt} \bar{\omega}(t)$ . Кроме того, вибрации основания имеют в спектре сигнала первую, вторую и старшие производные. Дополнительно, при изменении направления вектора угловой

скорости, возникает рассмотренный ранее эффект некоммутативности конечных поворотов, когда набор выходных сигналов  $\bar{q} = [q_x \quad q_y \quad q_z]^T$  не дает однозначного ответа о величине и направлении вектора угловой скорости.

Поэтому для реализации высокоточных алгоритмов БИНС данное выражение неприменимо [9, 55].

Решение дифференциального уравнения Пуассона (1.6) численными методами при предварительном дифференцировании выходной информации датчиков снижает точность определения пространственной ориентации, поскольку при этом возрастают дисперсии шумов измерений. Кроме того, необходимо решать в реальном масштабе времени систему шести дифференциальных уравнений и трех уравнений связи, что значительно повышает требования по быстродействию БЦВМ [9].

## 1.4.3 Синтез циклических алгоритмов ориентации с использованием промежуточных параметров

### 1.4.3.1 Общая организация вычислительных циклов

Наиболее эффективным решением задачи определения ориентации является разбиение процесса вычислений на циклы (сверхбыстрые, быстрые, медленные) с решением в каждом из них кинематического уравнения для промежуточного параметра. На рисунке 1.10 представлено разбиение вычислительного процесса в БИНС на циклы.

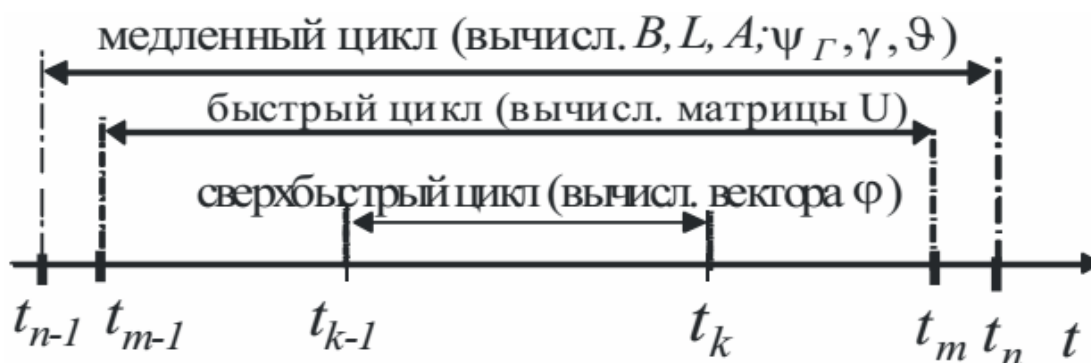


Рис. 1.10 – Организация вычислительных циклов в БИНС

В качестве промежуточных параметров ориентации необходимо выбрать параметры, полностью или частично удовлетворяющие следующим требованиям [54, 58]:

- разбиение процесса вычисления на циклы, с решением в сверхбыстром цикле кинематических дифференциальных уравнений для промежуточных параметров ориентации;
- невырождаемость при малых значениях;
- наименьшее число кинематических дифференциальных уравнений, требующих решения в реальном времени;
- наиболее простая связь с матрицей направляющих косинусов;
- время сверхбыстрого цикла равно дискретности датчиков БИНС.

Для уменьшения методических погрешностей следует продолжительность сверхбыстрого цикла вычисления промежуточного параметра принять равной величине дискретности снятия сигнала с блока гироскопов, поскольку за этот промежуток времени угловая скорость и ориентация изменятся незначительно. Частота съема информации у современных гироскопических датчиков составляет 100-200 Гц. Это позволяет предположить, что за период дискретности  $\tau$  угол поворота связанной СК не превысит значения  $\pi$ . В этом случае в качестве промежуточных парамет-

ров можно применять рассмотренные ранее векторы ориентации, не опасаясь их вырождения. Снижение количества дифференциальных уравнений до трех вместо шести для матрицы направляющих косинусов позволит снизить вычислительные нагрузки БЦВМ. Переход к матрице направляющих косинусов можно осуществлять с меньшей частотой (быстрый цикл), которая, однако, также должна быть достаточной для требуемой точности решения задач навигации.

В настоящее время имеются методики, позволяющие синтезировать алгоритмы различной структуры и степени точности [9, 10, 54, 58]. В них промежуточные параметры ориентации вычисляются по одношаговым и многошаговым алгоритмам. Одношаговые алгоритмы на каждом сверхбыстром цикле  $k$  используют информацию об одном отсчете блока гироскопов  $\bar{q}(t_k) = \bar{q}_k$  (шаг  $k$  вычисления параметров и шаг  $h$  съема информации совпадают:  $k=h$ ). Многошаговые алгоритмы предполагают получение нескольких отсчетов выходных сигналов с последующим вычислением по ним параметров ориентации в течение сверхбыстрого цикла  $k$  (на шаге  $k$  используется  $n$  съемов  $k = n \cdot h$ , где  $n$  - характеристика шаговости алгоритма).

Многошаговые алгоритмы более точны, однако они снижают полосу пропускания датчиков. Например, в четырехшаговых алгоритмах частота выдачи информации о параметрах ориентации составляет 25 Гц, в то время как частота гироскопических датчиков равна 100 Гц. К тому же эти алгоритмы достаточно сложны, что увеличивает вычислительные нагрузки на БЦВМ.

Примем в качестве промежуточного параметра вектор ориентации Эйлера (1.24)  $\bar{\varphi} = \varphi \cdot \bar{e}$ . Он представляет собой ось  $\bar{e}$ , вокруг которой необходимо совершить поворот на угол  $\varphi$ , чтобы связанная СК из положения в начальный момент переместилась в следующее положение. Этот процесс может быть описан следующим матричным уравнением:

$$U(t_m) = U(t_{m-1}) \cdot A(t_m); \quad (1.41)$$

В этом выражении  $A(t_m)$ - некоторый оператор вращения, переводящий связанную СК из начального положения  $U(t_{m-1})$  в следующее положение, описываемое матрицей направляющих косинусов  $U(t_m)$ . Промежуток времени  $t_m - t_{m-1}$  между двумя последовательными вычислениями матрицы направляющих косинусов называется быстрым циклом. Для вектора ориентации Эйлера оператор поворота  $A(t_m)$  может быть получен по формуле

$$A(t_m) = E + \frac{\sin(\varphi(t_m))}{\varphi(t_m)} \cdot \Phi(t_m) + \frac{1 - \cos(\varphi(t_m))}{\varphi^2(t_m)} \cdot \Phi^2(t_m); \quad (1.42)$$

$$\Phi(t_m) = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_z(t_m) & \varphi_y(t_m) \\ \varphi_z(t_m) & 0 & -\varphi_x(t_m) \\ -\varphi_y(t_m) & \varphi_x(t_m) & 0 \end{bmatrix}; \quad (1.43)$$



где:  $\varphi(t_m) = \sqrt{\varphi_x^2(t_m) + \varphi_y^2(t_m) + \varphi_z^2(t_m)}$  - угол поворота (модуль вектора ориентации);

$\Phi(t_m)$  - кососимметрическая матрица, составленная из координат вектора ориентации.

Кинематическое дифференциальное уравнение для вектора Эйлера имеет вид:

$$\dot{\bar{\varphi}}(t) = \bar{\omega}(t) + \frac{1}{2} \bar{\varphi}(t) \times \bar{\omega}(t) + \frac{1}{\varphi^2} \left( 1 - \frac{\varphi \cdot \sin \varphi}{2(1 - \cos \varphi)} \right) \bar{\varphi}(t) \times (\bar{\varphi}(t) \times \bar{\omega}(t)); \quad (1.44)$$

где  $\dot{\bar{\varphi}}(t)$  - локальная производная вектора ориентации.

Решение данного уравнения при интегральном характере выходных сигналов датчиков составляет основную трудность определения промежуточного параметра ориентации [9, 54, 58, 59, 60].

### 1.4.3.2 Синтез циклических разгонных алгоритмов

Синтезируем одношаговый разгонный алгоритм, который по окончании одного сверхбыстрого цикла  $k$  определяет промежуточный параметр  $\bar{\varphi}(t_k)$  и осуществляет переход к матрице направляющих косинусов  $U(t_k)$ . Очевидно, что решение уравнения (1.44) для вектора ориентации  $\bar{\varphi}(t)$  на интервале времени  $\tau = t_k - t_{k-1}$  обработки сигналов гироскопов, формально считая  $\bar{\varphi}(t_{k-1}) = 0$ , можно представить в виде суммы интегралов [9, 11, 54, 61]:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(t_k) = & \int_{t_{k-1}}^{t_k} \bar{\omega}(t) dt + \frac{1}{2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \bar{\varphi}(t) \times \bar{\omega}(t) dt + \\ & + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{1}{\varphi^2} \left( 1 - \frac{\varphi \cdot \sin \varphi}{2(1 - \cos \varphi)} \right) \bar{\varphi}(t) \times (\bar{\varphi}(t) \times \bar{\omega}(t)) dt. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Заметим, что первое слагаемое в выражении (1.54) есть не что иное как выходной сигнал блока интегрирующих гироскопов. Кроме того, при разложении в ряд коэффициента при двойном векторном произведении и удержании членов до 6 порядка имеем:

$$\frac{1}{\varphi^2} \left( 1 - \frac{\varphi \cdot \sin \varphi}{2(1 - \cos \varphi)} \right) \approx \frac{1}{12} + Q^{(7)}. \quad (1.46)$$

Тогда уравнение (1.45) можно записать в упрощенном виде:

$$\bar{\varphi}(t_k) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \bar{\omega}(t) dt + \frac{1}{2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \bar{\varphi}(t) \times \bar{\omega}(t) dt + \frac{1}{12} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \bar{\varphi}(t) \times (\bar{\varphi}(t) \times \bar{\omega}(t)) dt. \quad (1.47)$$

Если бы на выходе блока гироскопов имелась информация об угловой скорости  $\bar{\omega}(t)$ , то решение уравнения (1.47) не составляло бы труда. Однако известны лишь интегралы от проекций вектора угловой скорости на оси связанной СК.

Как уже отмечалось, в современных интегрирующих гироскопах выходной сигнал (рисунок 1.11)  $\bar{q}_k$  представляет собой сумму элементарных импульсов  $\delta \bar{q}$ , регистрирующих наличие вращения на некотором интервале  $\tau = t_k - t_{k-1}$  (формально представляемую в виде интеграла от угловой скорости):

$$\bar{q}_k = \sum_{t_{k-1}}^{t_k} \delta \bar{q} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \bar{\omega}(t) dt \quad ; \quad (1.48)$$

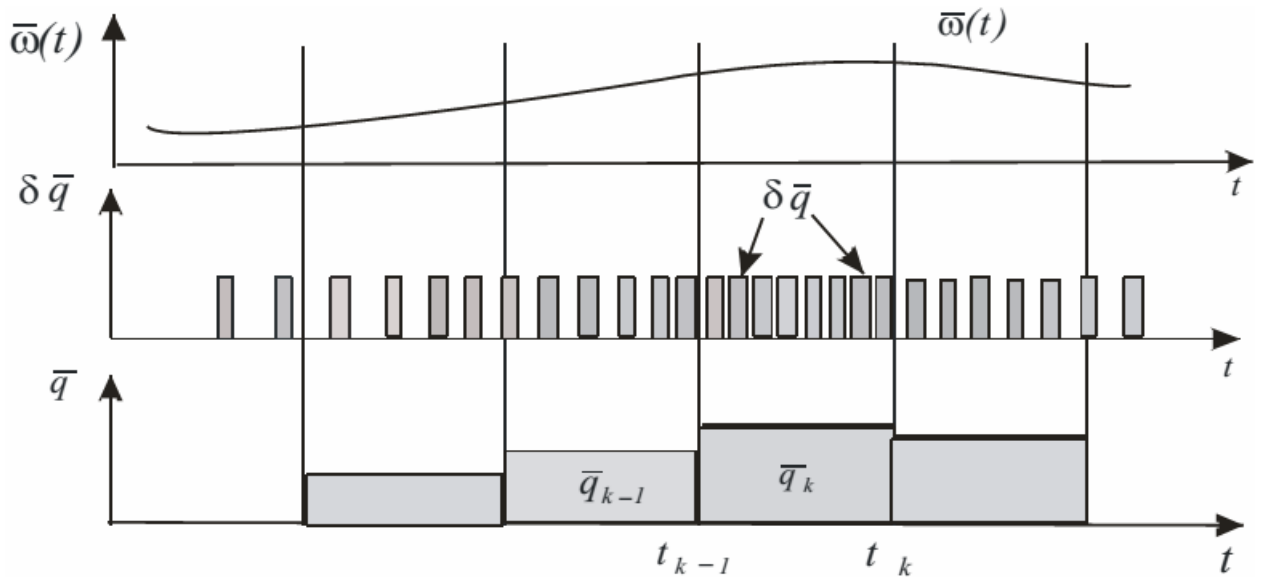


Рис. 1.11 – Входной и выходные сигналы интегрирующих гироскопов

Будем предполагать, что за время  $t_k - t_{k-1}$  суммирования электроникой гироскопа элементарных импульсов  $\delta \bar{q}$  в течение одного  $k$ -го цикла (равного периоду дискретности) угловая скорость изменялась по линейному закону:

$$\bar{\omega}_a(t) = \bar{a} + \bar{b}(t - t_{k-1}); \quad (1.49)$$

где  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  - постоянные векторные коэффициенты.

Для вычисления коэффициентов  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  можно использовать два последних измерения блока гироскопов:

$$\bar{q}_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \bar{\omega}(t) dt, \quad \bar{q}_{k-1} = \int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}} \bar{\omega}(t) dt. \quad (1.50)$$

Подставляя в формулы (1.50) выражение для предполагаемого закона изменения угловой скорости (1.49), получим:

$$\begin{aligned} \bar{q}_k &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \bar{\omega}_a(t) dt = \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\bar{a} + \bar{b}(t - t_{k-1})) dt = \bar{a} \tau + \bar{b} \frac{\tau^2}{2}; \\ \bar{q}_{k-1} &= \int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}} \bar{\omega}_a(t) dt = \int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}} (\bar{a} + \bar{b}(t - t_{k-1})) dt = \bar{a} \tau - \bar{b} \frac{\tau^2}{2}, \end{aligned} \quad (1.51)$$

где  $\tau = t_k - t_{k-1} = t_{k-1} - t_{k-2}$  - дискретность снятия сигналов.

Решая систему уравнений (1.51), не составляет труда найти искомые векторные коэффициенты как функции квазиординат:

$$\bar{a} = \frac{\bar{q}_k + \bar{q}_{k-1}}{2\tau}, \quad \bar{b} = \frac{\bar{q}_k - \bar{q}_{k-1}}{\tau^2} \quad (1.52)$$

Геометрическая интерпретация описанной процедуры для каждой из проекций вектора угловой скорости показана на рисунке 1.12, где  $q_1$

и  $q_2$  представляют собой площади соответствующих трапеций.

Решим уравнение (1.47) методом последовательных приближений. В качестве первого приближения примем следующее соотношение:

$$\bar{\varphi}_1(t) = \int_{t_{k-1}}^t \bar{\omega}(t) dt. \quad (1.53)$$

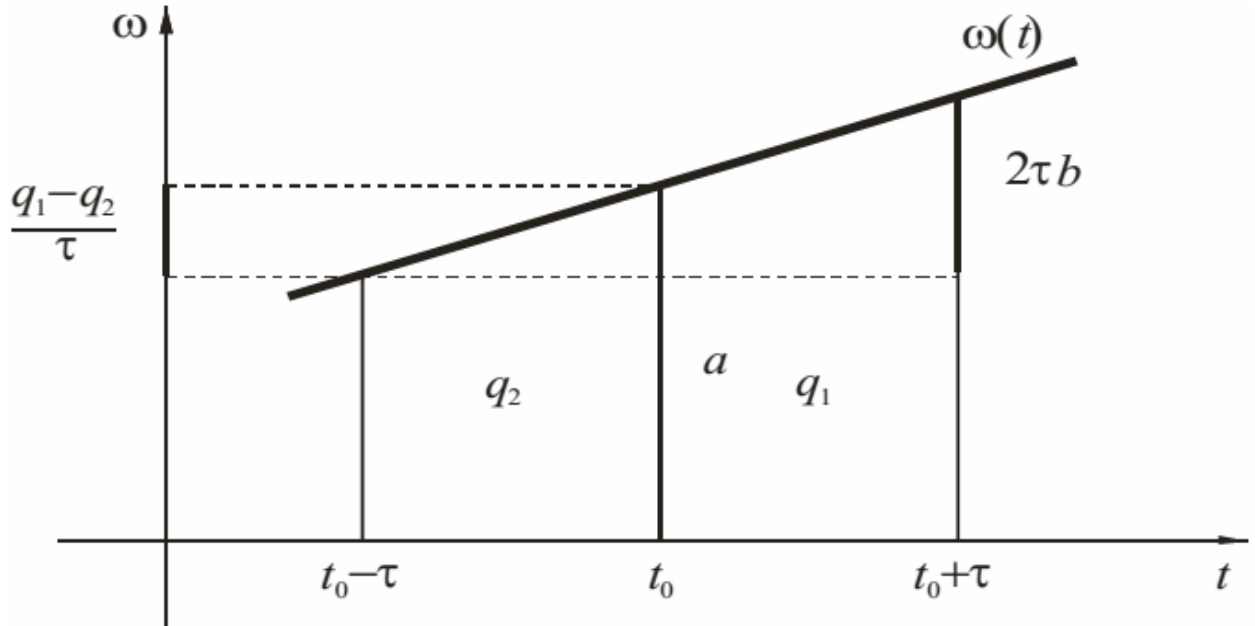


Рис. 1.12 – Геометрическая интерпретация синтеза одношагового разгонного алгоритма

Заметим, что данное выражение является верным, если вектор угловой скорости не меняет своего направления (что имеет место на малых промежутках времени). Подставляя в (1.53) соотношение для угловой скорости (1.49) имеем:

$$\bar{\varphi}_1(t) = \int_{t_{k-1}}^t (\bar{a} + \bar{b}(t - t_{k-1})) dt = \bar{a}(t - t_{k-1}) + \bar{b} \frac{(t - t_{k-1})^2}{2}. \quad (1.54)$$

С учетом коэффициентов (1.52) или из соотношения (1.54) значение вектора ориентации в первом приближении по окончании сверхбыстрого цикла  $k$  будет равно вектору измерений (квазикоординатам) блока гироскопов:

$$\bar{\varphi}(t_k) = \bar{q}_k; \quad (1.55)$$

Найдем с учетом первого приближения второй интеграл, входящий в выражение (1.47). Для этого вычислим:

$$\bar{\varphi}(t) \times \bar{\omega}(t) = \bar{\varphi}_1(t) \times \bar{\omega}_a(t) = \left( \bar{a}(t - t_{k-1}) + \bar{b} \frac{(t - t_{k-1})^2}{2} \right) \times (\bar{a} + \bar{b}(t - t_{k-1})).$$

Учитывая, что  $\bar{a} \times \bar{a} = 0$ ,  $\bar{b} \times \bar{b} = 0$ ,  $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$  окончательно имеем:

$$\bar{\varphi}_1(t) \times \bar{\omega}_a(t) = \frac{1}{2} \bar{a} \times \bar{b} \cdot (t - t_{k-1})^2.$$

Тогда второй интеграл будет равен:

$$\int_{t_{k-1}}^t \bar{\varphi}_1(t) \times \bar{\omega}_a(t) dt = \int_{t_{k-1}}^t \frac{1}{2} \bar{a} \times \bar{b} \cdot (t - t_{k-1})^2 dt = \frac{1}{6} \bar{a} \times \bar{b} \cdot (t - t_{k-1})^3. \quad (1.56)$$

В этом случае второе приближение для вектора ориентации с учетом (1.54), (1.55) и (1.56) будет равно:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_2(t) &= \bar{\varphi}_1(t) + \frac{1}{2} \int_{t_{k-1}}^t \bar{\varphi}_1(t) \times \bar{\omega}_a(t) dt = \\ &= \bar{a}(t - t_{k-1}) + \bar{b} \frac{(t - t_{k-1})^2}{2} + \frac{1}{12} \bar{a} \times \bar{b} \cdot (t - t_{k-1})^3 = \\ &= \bar{a}(t - t_{k-1}) + \bar{b} \frac{(t - t_{k-1})^2}{2} + \frac{1}{12} A \cdot (t - t_{k-1})^3; \\ &A = \bar{a} \times \bar{b}. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Поскольку

$$\bar{a} \times \bar{b} = \left( \frac{\bar{q}_k + \bar{q}_{k-1}}{2\tau} \right) \times \left( \frac{\bar{q}_k - \bar{q}_{k-1}}{\tau^2} \right) = \frac{1}{\tau^3} \cdot (\bar{q}_{k-1} \times \bar{q}_k) = \frac{1}{\tau^3} \cdot Q,$$

$$Q = \bar{q}_{k-1} \times \bar{q}_k;$$

то вектор ориентации во втором приближении по окончании сверхбыстрого цикла  $k$  будет равен:

$$\bar{\varphi}_2(t_k) = \bar{q}_k + \frac{1}{12} \cdot \bar{q}_{k-1} \times \bar{q}_k = \bar{q}_k + \frac{1}{12} \cdot Q. \quad (1.58)$$

Найдем третий интеграл, входящий в уравнение (1.47). Для этого вычислим подынтегральное выражение с учетом второго приближения:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_2(t) \times \bar{\omega}_a(t) &= \\ &= \left( \bar{a}(t - t_{k-1}) + \bar{b} \frac{(t - t_{k-1})^2}{2} + \frac{1}{12} A \cdot (t - t_{k-1})^3 \right) \times (\bar{a} + \bar{b} \cdot (t - t_{k-1})) = \\ &= \frac{1}{2} C \cdot (t - t_{k-1})^2 - \frac{1}{12} \bar{a} \times C \cdot (t - t_{k-1})^3 - \frac{1}{12} \bar{b} \times C \cdot (t - t_{k-1})^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bar{\varphi}_2(t) \times (\bar{\varphi}_2(t) \times \bar{\omega}_a(t)) = \\
& = \left( \bar{a}(t-t_{k-1}) + \bar{b} \frac{(t-t_{k-1})^2}{2} + \frac{1}{12} C \cdot (t-t_{k-1})^3 \right) \times \\
& \times \left( \frac{1}{2} C \cdot (t-t_{k-1})^2 - \frac{1}{12} \bar{a} \times C \cdot (t-t_{k-1})^3 - \frac{1}{12} \bar{b} \times C \cdot (t-t_{k-1})^4 \right) = \\
& = \frac{1}{2} \bar{a} \times C \cdot (t-t_{k-1})^3 - \frac{1}{12} \bar{a} \times (\bar{a} \times C) \cdot (t-t_{k-1})^4 - \frac{1}{12} \bar{a} \times (\bar{b} \times C) \cdot (t-t_{k-1})^5 + \\
& + \frac{1}{4} \bar{b} \times C \cdot (t-t_{k-1})^4 - \frac{1}{24} \bar{b} \times (\bar{a} \times C) \cdot (t-t_{k-1})^5 - \frac{1}{24} \bar{b} \times (\bar{b} \times C) \cdot (t-t_{k-1})^6 - \\
& - \frac{1}{144} C \times (\bar{a} \times C) \cdot (t-t_{k-1})^6 - \frac{1}{144} C \times (\bar{b} \times C) \cdot (t-t_{k-1})^7. \\
& \qquad \qquad \qquad C = \bar{a} \times \bar{b}.
\end{aligned}$$

Интегрируя полученное выражение на интервале сверхбыстрого цикла, получим:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{12} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \bar{\varphi}_2(t) \times (\bar{\varphi}_2(t) \times \bar{\omega}_a(t)) dt = \\
& = \frac{\tau^4}{96} \bar{a} \times C + \frac{\tau^5}{240} \bar{b} \times C - \frac{\tau^5}{720} \bar{a} \times (\bar{a} \times C) - \frac{\tau^6}{864} \bar{a} \times (\bar{b} \times C) - \\
& - \frac{\tau^6}{1728} \bar{b} \times (\bar{a} \times C) - \frac{\tau^7}{2016} \bar{b} \times (\bar{b} \times C) + \frac{\tau^7}{12096} (\bar{a} \times C) \times C + \frac{\tau^8}{13824} (\bar{b} \times C) \times C.
\end{aligned}$$

Подставляя в данное выражение значения коэффициентов (1.52), имеем:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{12} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \bar{\varphi}_2(t) \times (\bar{\varphi}_2(t) \times \bar{\omega}_a(t)) dt = \frac{3}{320} \bar{q}_k \times Q + \frac{1}{960} \bar{q}_{k-1} \times Q - \frac{23}{13440} \bar{q}_k \times (\bar{q}_k \times Q) + \\
& + \frac{53}{120960} \bar{q}_k \times (\bar{q}_{k-1} \times Q) - \frac{17}{120960} \bar{q}_{k-1} \times (\bar{q}_k \times Q) + \frac{1}{40320} \bar{q}_{k-1} \times (\bar{q}_{k-1} \times Q) + \\
& + \frac{11}{96768} (\bar{q}_k \times Q) \times Q - \frac{1}{32256} (\bar{q}_{k-1} \times Q) \times Q.
\end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение и соотношение (1.58) в формулу (1.47), окончательно получим:

$$\begin{aligned}
& \bar{\varphi}(t_k) = \bar{q}_k + \frac{1}{12} \cdot Q + \frac{3}{320} \bar{q}_k \times Q + \frac{1}{960} \bar{q}_{k-1} \times Q - \frac{23}{13440} \bar{q}_k \times (\bar{q}_k \times Q) + \\
& + \frac{53}{120960} \bar{q}_k \times (\bar{q}_{k-1} \times Q) - \frac{17}{120960} \bar{q}_{k-1} \times (\bar{q}_k \times Q) + \frac{1}{40320} \bar{q}_{k-1} \times (\bar{q}_{k-1} \times Q) + \quad (1.59) \\
& + \frac{11}{96768} (\bar{q}_k \times Q) \times Q - \frac{1}{32256} (\bar{q}_{k-1} \times Q) \times Q; \\
& Q = \bar{q}_{k-1} \times \bar{q}_k.
\end{aligned}$$

Выражение (1.59) является алгоритмом для определения вектора ориентации по выходным сигналам интегрирующих гироскопов. Как показывает практика, первых четырех членов этого выражения достаточно для высокоточного определения ориентации ЛА [9, 11, 54, 61].

Для получения конечной формы одношагового разгонного алгоритма оставляем первые два члена выражения (1.59), в итоге получим выражение вида:

$$\bar{\varphi}(t_k) = \bar{q}_k + \frac{1}{12} \cdot \bar{q}_{k-1} \times \bar{q}_k; \quad (1.60)$$

Используя подобную методику можно получить целое семейство разгонных алгоритмов. Приведем их примеры.

Принимая за квазикоординаты параметры  $q_1$  и  $q_2$  и используя выражение (1.60), получим одношаговый (с одним шагом разгонки) алгоритм 3 порядка точности:

$$\bar{\varphi}_2 = \bar{q}_2 + \frac{1}{12} \cdot \bar{q}_1 \times \bar{q}_2, \quad (1.61)$$

а затем более сложный и точный одношаговый (с двумя шагами разгонки) алгоритм 3 порядка точности:

$$\bar{\varphi}_1 = \bar{q}_1 + \frac{1}{6} (\bar{q}_2 \times \bar{q}_1) - \frac{1}{24} (\bar{q}_3 \times \bar{q}_1) \quad (1.62)$$

Алгоритмы (1.61) или (1.62) являются разгонным, поскольку в каждом цикле вычислений матрицы ориентации они опираются на измерения гироскопов, выполненные в предыдущем цикле. Поэтому на начальном этапе необходимо задаваться некоторым значением  $q_1$ , предшествующим первым шагам измерений.

Подсчет вектора Эйлера  $\bar{\varphi}(t_k)$  в алгоритмах ориентации осуществляется на каждом сверхбыстром цикле по двум выходным сигналам: текущему  $\bar{q}_k$  и предыдущему  $\bar{q}_{k-1}$ , полученному в прошедшем сверхбыстром цикле.

Оператор поворота  $A(t_k)$ , переводящий систему координат из положения  $U(t_{k-1})$  в следующее положение  $U(t_k)$ , вычисляется по формуле:

$$A(t_k) = E + \frac{\sin(\varphi(t_k))}{\varphi(t_k)} \cdot \Phi(t_k) + \frac{1 - \cos(\varphi(t_k))}{\varphi^2(t_k)} \cdot \Phi^2(t_k) \quad (1.63)$$

где  $\varphi(t_k) = \sqrt{\varphi_x^2(t_k) + \varphi_y^2(t_k) + \varphi_z^2(t_k)}$ ;

$$\Phi(t_k) = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_z(t_k) & \varphi_y(t_k) \\ \varphi_z(t_k) & 0 & -\varphi_x(t_k) \\ -\varphi_y(t_k) & \varphi_x(t_k) & 0 \end{bmatrix}.$$

Ориентация связанной с ЛА системы координат по окончании сверхбыстрого цикла  $k$  определяется матрицей направляющих косинусов:

$$U(t_k) = U(t_{k-1}) \cdot A(t_k) \quad (1.64)$$

Соотношения (1.61), (1.62), (1.63) и (1.64) образуют семейство одношаговых разгонных алгоритмов определения ориентации по показаниям гироскопических датчиков интегрирующего типа [9, 61, 62].



### 1.4.3.3 Синтез циклических безразгонных алгоритмов

В безразгонных алгоритмах матрица ориентации вычисляется после нескольких шагов измерений гироскопов.

Аналогично синтезу разгонных алгоритмов, опираясь на рисунок 1.13, можно синтезировать двухшаговый безразгонный алгоритм [9, 11, 54, 61, 62].

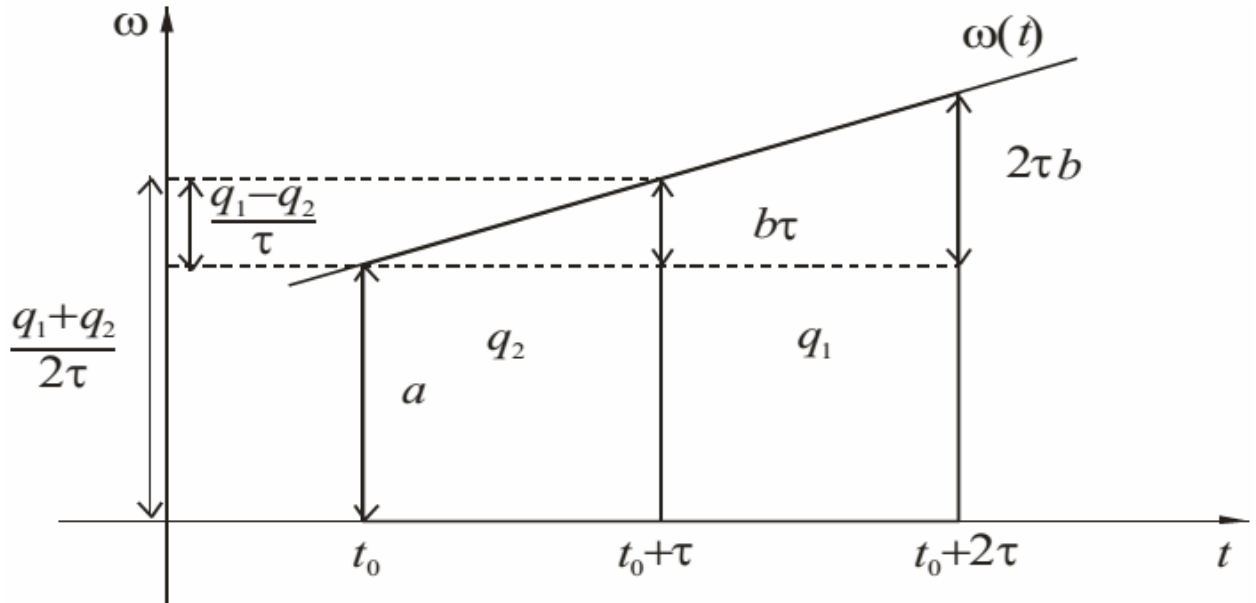


Рис. 1.13 – Геометрическая интерпретация синтеза двухшагового безразгонного алгоритма

Каждый цикл определения вектора Эйлера включает в себя два шага измерений интегрирующих гироскопов и длится от  $t_0$  до  $t_0 + 2\tau$ .

$$\varphi(\tau) = \int_{t_0}^{t_0+2\tau} \omega d(t) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0+2\tau} (\varphi \times \omega) d(t). \quad (1.65)$$

Представим угловую скорость в виде линейной функции времени (1.49). Тогда коэффициенты  $a$  и  $b$  найдем, исходя из уравнений:

$$\begin{cases} q_1 = a\tau + \frac{1}{2}b\tau^2; \\ q_2 = a\tau + \frac{3}{2}b\tau^2. \end{cases} \quad (1.66)$$

Получим коэффициенты:

$$a = \frac{3q_1 - q_2}{2\tau};$$

$$b = \frac{q_2 - q_1}{\tau^2}.$$
(1.67)

В соответствии с этим:

$$a \times b = \frac{1}{\tau^3} (q_1 \times q_2).$$

Тогда:

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0+2\tau} (\varphi \times \omega) d(t) = \frac{1}{12} (a \times b) (2\tau)^3 = \frac{2}{3} (q_1 \times q_2).$$
(1.68)

В результате имеем безразгонный двухшаговый алгоритм четвертого порядка точности. Алгоритм определяет вектор Эйлера по двум измерениям интегрирующих гироскопов:

$$\bar{\varphi}_2 = \bar{q}_1 + \bar{q}_2 + \frac{2}{3} \cdot (\bar{q}_1 \times \bar{q}_2)$$
(1.68)

Используя подобную методику можно получить целое семейство безразгонных алгоритмов. Приведем их примеры.

$$\bar{\varphi}_1 = \bar{q}_1,$$
(1.69)

$$\bar{\varphi}_3 = \bar{q}_3 + \bar{q}_2 + \bar{q}_1 + \frac{9}{8} (\bar{q}_3 \times \bar{q}_1),$$
(1.70)

$$\bar{\varphi}_3 = \bar{q}_3 + \bar{q}_2 + \bar{q}_1 + \frac{9}{20} (\bar{q}_3 - \bar{q}_1) \times (\bar{q}_1 + \frac{3}{2} \bar{q}_2),$$
(1.71)

$$\bar{\varphi}_4 = \bar{q}_1 + \bar{q}_2 + \bar{q}_3 + \bar{q}_4 + \frac{2}{3} [(\bar{q}_1 + \bar{q}_2) \times (\bar{q}_3 + \bar{q}_4)],$$
(1.72)

$$\bar{\varphi}_5 = \bar{q}_5 + \bar{q}_4 + \bar{q}_3 + \bar{q}_2 + \bar{q}_1 - \frac{1375}{432} (\bar{q}_4 \times \bar{q}_2) - \frac{1625}{864} (\bar{q}_5 \times \bar{q}_1) +$$

$$+ \frac{875}{216} (\bar{q}_4 \times \bar{q}_1 + \bar{q}_5 \times \bar{q}_2),$$
(1.73)

$$\bar{\varphi}_5 = \bar{q}_5 + \bar{q}_4 + \bar{q}_3 + \bar{q}_2 + \bar{q}_1 - \frac{1375}{432} (\bar{q}_4 \times \bar{q}_2) - \frac{1625}{864} (\bar{q}_5 \times \bar{q}_1) +$$

$$+ \frac{875}{216} (\bar{q}_4 \times \bar{q}_1 + \bar{q}_5 \times \bar{q}_2) + \frac{625}{432} (\bar{q}_5 \times (\bar{q}_4 \times \bar{q}_1) - \bar{q}_2 \times (\bar{q}_5 \times \bar{q}_2)) -$$

$$- \frac{625}{288} (\bar{q}_3 \times (\bar{q}_3 \times (\bar{q}_4 \times \bar{q}_2))).$$
(1.74)

Здесь представлены соответственно: одношаговый второго порядка

точности (1.69), две модификации трехшаговых алгоритмов четвертого порядка (1.70, 1.71), четырехшаговый алгоритм четвертого порядка (1.72), две модификации пятишаговых четвертого (1.73) и шестого (1.74) порядка точности. В приведенных формулах индексы при векторе ориентации  $\vec{\varphi}$  показывают число шагов измерений, на протяжении которых происходил соответствующий ему поворот [9, 60, 61, 62].

Соотношения (1.68) - (1.74) вместе с выражениями (1.63), (1.64) образуют семейство многошаговых безразгонных алгоритмов ориентации ЛА. Подобные алгоритмы представлены и в работе [9]. Заметим, что они являются более быстрым по сравнению с алгоритмами (1.61), (1.62), поскольку вычислительные процедуры проводятся не на каждом шаге измерений гироскопов. Однако и использовать полученную матрицу ориентации можно только в моменты ее вычисления, т.е. реже, чем в разгонном алгоритме.

Общая характеристика синтезированных алгоритмов:

- повышенная точность;
- значительное снижение вычислительных нагрузок на БЦВМ по причине отсутствия дифференциальных уравнений;
- не требуется предварительное дифференцирование выходных сигналов гироскопических датчиков;
- инвариантность к проблеме некоммутативности конечных поворотов;
- возможность решения в реальном масштабе времени.

### 1.4.4 Синтез циклического безразгонного четырехшагового алгоритма повышенной точности

Следует заметить, что задача синтеза четырехшагового алгоритма повышенной точности связана с обеспечением работы БИНС в особой ситуации (отказ вычислительного ядра ИКБО). Этот алгоритм с одной стороны является алгоритмом повышенной точности, с другой стороны среди однотипных алгоритмов его реализация обеспечивает минимальную загрузку БВМ. Для решения задачи синтеза используем семейство безразгонных алгоритмов, требующих меньше вычислительных затрат. В БИНС частота опроса гироскопов фиксирована ( $f=100\text{Гц}$ ) и решить задачу повышения точности традиционно, т.е. чаще получить информацию об угловой скорости не представляется возможным. Поэтому используем более простой способ – метод Рунге, который обеспечивает вывод формулы высокой точности из формулы низкой точности. На рисунке 1.14 приведена геометрическая интерпретация синтеза алгоритма [9, 60, 63].

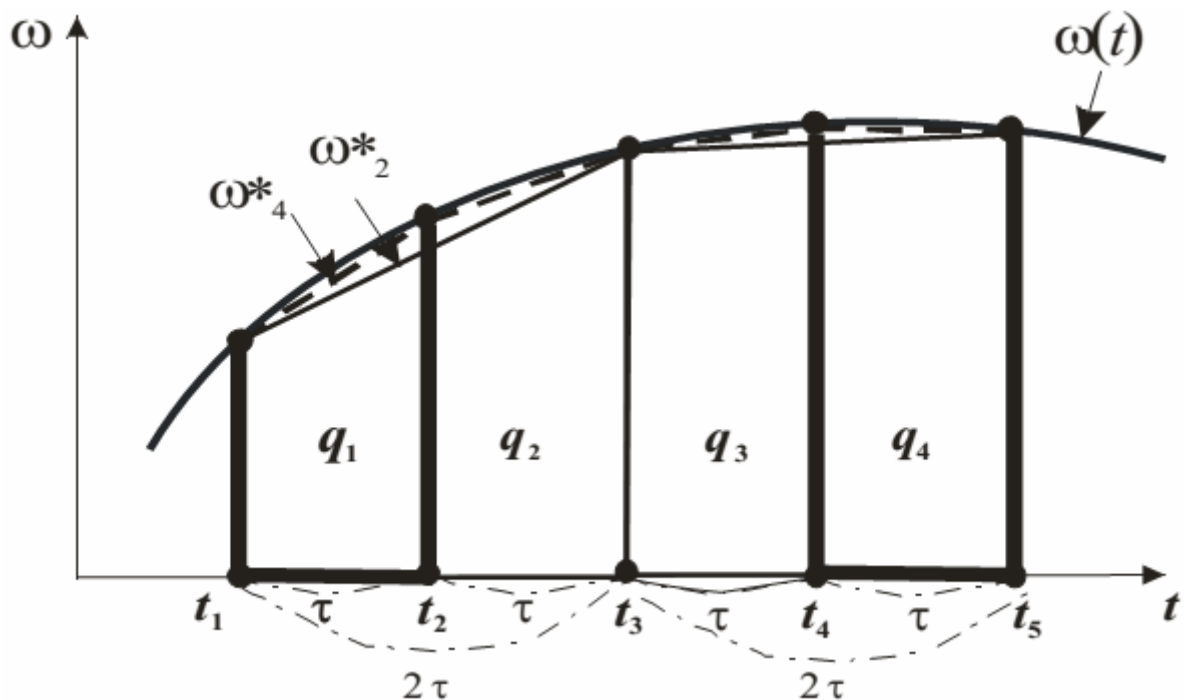


Рис. 1.14 – Геометрическая интерпретация синтеза алгоритма

Обозначения на рисунке:

$\omega(t)$  – точное значение функции;

$\omega(t, h)^*$  – пригл. значение функции на сетке  $h$ ;

$\omega(t) = \omega(t, h)^* + \Delta h$ , где  $\Delta h$  – погрешность на сетке  $h$ .

$\omega_4 = \omega_4^* + \Delta_4$  – значение функции  $\omega(t)$  на сетке 4 с шагом  $h=\tau$

$\omega_2 = \omega_2^* + \Delta_2$  – значение функции  $\omega(t)$  на сетке 2 с шагом  $h=2\tau$

$$\bar{q}_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \bar{\omega}(t) dt$$

– квазикоординаты (выходной сигнал гироскопа), т.е. площадь трапеций  $q_1, q_2, q_3, q_4$ ; при  $\tau = t_i - t_{i-1} = \text{const}$ ;  $\varphi = f(\omega)$ .

В качестве исходного возьмем 4-х шаговый алгоритм 4-го порядка точности (алгоритм 4), получим для него реализацию на сетке 4 с шагом  $h = \tau$ . Затем возьмем 2-х шаговый алгоритм 4-го порядка точности (алгоритм 2), получим реализацию на сетке 2 с шагом  $h = 2\tau$  (разрежение сетки).

Расчет во второй – разряженной сетке позволяет оценить погрешность расчета на первой сетке с точностью до членов более высокого порядка, т.е. пятого. Из формулы, реализованной на сетке 2, вычитаем формулу, реализованную на сетке 4, в итоге получаем (алгоритм 4+) [60, 63, 64, 65].

*Методика синтеза алгоритма (используется метод Рунге):*

а) Вычисления на сетке 4 с шагом  $h = \tau$  ( $\varphi_4 = \varphi_4^* + \Delta\varphi_4$ ):

$$\bar{\varphi}_4(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3, \bar{q}_4) = \bar{q}_1 + \bar{q}_2 + \bar{q}_3 + \bar{q}_4 + \frac{2}{3}(\bar{q}_1 + \bar{q}_2) \times (\bar{q}_3 + \bar{q}_4);$$

б) Вычисления на сетке 2 с шагом  $h = 2\tau$ , выполним разрежение сетки:

$q_1 = q_2; q_4 = q_3$  ( $\varphi_2 = \varphi_2^* + \Delta\varphi_2$ ):

$$\bar{\varphi}_4(\bar{q}_1, \bar{q}_4) = \bar{q}_1 + \bar{q}_2 + \bar{q}_3 + \bar{q}_4 + \frac{4}{3}(\bar{q}_1 + \bar{q}_4);$$

в) Оценка погрешности расчета на сетке 4 (1 формула Рунге  $\Delta = \Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_4$ ):

$$\Delta = \bar{q}_1 - \bar{q}_2 - \bar{q}_3 + \bar{q}_4 + \frac{4}{3}(\bar{q}_1 + \bar{q}_4) - \frac{2}{3}(\bar{q}_1 + \bar{q}_2) \times (\bar{q}_3 + \bar{q}_4);$$

г) Получение выражения более высокого порядка точности (2 формула Рунге  $\varphi_{4+} = \varphi_4 - \Delta$ ):

4-х шаговый безразгонный алгоритм повышенной точности:

$$\bar{\varphi}_{4+} = \bar{q}_2 + \bar{q}_2 + \bar{q}_3 + \bar{q}_3 + \frac{4}{3}((\bar{q}_1 \times \bar{q}_3) + (\bar{q}_2 \times \bar{q}_3) + (\bar{q}_2 \times \bar{q}_4)); \quad (1.75)$$

К полученному выражению (1.75) необходимо добавить выражения (1.63), (1.64). Заметим, что полученный четырехшаговый алгоритм является алгоритмом пятого порядка точности, он является более точным по сравнению с четырехшаговыми (1.72) и пятишаговым (1.73), но при этом не намного сложнее четырехшагового (1.72) и более экономичным по сравнению с пятишаговым (1.73) [9, 60, 63, 65].

Таким образом, синтезирован циклический безразгонный четырехшаговый алгоритм повышенной точности.

### 1.4.5 Разделение алгоритмов ориентации на классы по точности и экономичности

Основной задачей алгоритмов ориентации БИНС является определение матрицы  $A(t_k)$ , переводящей систему координат из положения  $U(t_{k-1})$  в следующее положение  $U(t_k)$  по сигналам интегрирующих гироскопов. Существуют два подхода к решению этой задачи. Первый из них составляет основу так называемых безразгонных алгоритмов. Он состоит в накоплении информации с выходов гироскопов на протяжении всего интервала времени  $\Delta t$  и последующем вычислении матрицы поворота (рисунок 1.15). При втором подходе матрица поворота  $A(t_k)$  и сама матрица ориентации  $U(t_k)$  определяются на каждом шаге измерений гироскопов, но при этом используется информация о предшествующих измерениях (рисунок 1.16). В данном случае для функционирования алгоритма на начальном этапе необходима его предварительная «разгонка», т.е. процедура накопления выходных сигналов гироскопов без вычисления матриц поворота. Поэтому такие алгоритмы называют разгонными [9, 11, 54, 60, 61, 62].

Для реализации синтезированных алгоритмов ориентации БИНС в составе отказоустойчивого ИКБО разделим их по точности и экономичности на два класса.

Безразгонные алгоритмы

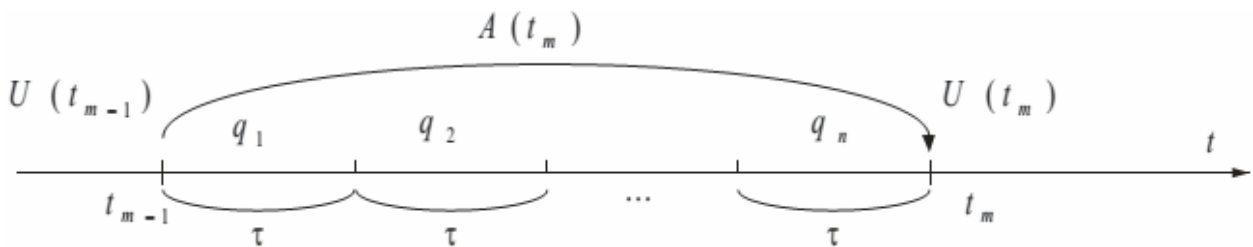


Рис.1.15 – Организация вычислительных циклов безразгонных алгоритмов БИНС

Приведем примеры алгоритмов:

- 1) одношаговый алгоритм второго порядка точности

$$\bar{\varphi}_1 = \bar{q}_1, \quad [\text{алгоритм 1}] \quad (1.76)$$

- 2) двухшаговый алгоритм четвертого порядка точности

$$\bar{\varphi}_2 = q_1 + q_2 + \frac{2}{3}(q_1 \times q_2), \quad [\text{алгоритм 2}] \quad (1.77)$$

- 3) трехшаговый алгоритм четвертого порядка точности

$$\bar{\varphi}_3 = \bar{q}_3 + \bar{q}_2 + \bar{q}_1 + \frac{9}{8}(\bar{q}_3 \times \bar{q}_1), \quad [\text{алгоритм 3}] \quad (1.78)$$

- 4) трехшаговый алгоритм четвертого порядка точности

$$\bar{\varphi}_3 = \bar{q}_3 + \bar{q}_2 + \bar{q}_1 + \frac{9}{20}(\bar{q}_3 - \bar{q}_1) \times (\bar{q}_1 + \frac{3}{2}\bar{q}_2), \quad [\text{алгоритм 3.1}] \quad (1.79)$$

5) четырехшаговый алгоритмы четвертого порядка точности

$$\bar{\varphi}_4 = \bar{q}_1 + \bar{q}_2 + \bar{q}_3 + \bar{q}_4 + \frac{2}{3}[(\bar{q}_1 + \bar{q}_2) \times (\bar{q}_3 + \bar{q}_4)], \quad [\text{алгоритм 4}] \quad (1.80)$$

6) четырехшаговый алгоритмы пятого порядка точности

$$\bar{\varphi}_{4+} = \bar{q}_2 + \bar{q}_2 + \bar{q}_3 + \bar{q}_3 + \frac{4}{3}[(\bar{q}_1 \times \bar{q}_3) + (\bar{q}_2 \times \bar{q}_3) + (\bar{q}_2 \times \bar{q}_4)], \quad [\text{алгоритм 4+}] \quad (1.81)$$

7) пятишаговый алгоритм четвертого порядка точности

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_5 = & \bar{q}_5 + \bar{q}_4 + \bar{q}_3 + \bar{q}_2 + \bar{q}_1 - \frac{1375}{432}(\bar{q}_4 \times \bar{q}_2) - \frac{1625}{864}(\bar{q}_5 \times \bar{q}_1) + \\ & + \frac{875}{216}(\bar{q}_4 \times \bar{q}_1 + \bar{q}_5 \times \bar{q}_2), \end{aligned} \quad [\text{алгоритм 5}] \quad (1.82)$$

Безразгонные алгоритмы «работают» быстрее, поскольку вычисления матриц ориентации производятся реже, иначе говоря, для их реализации требуются меньшие вычислительные затраты. При этом они являются менее точными по сравнению с разгонными [9, 60, 61, 62].

Разгонные алгоритмы.

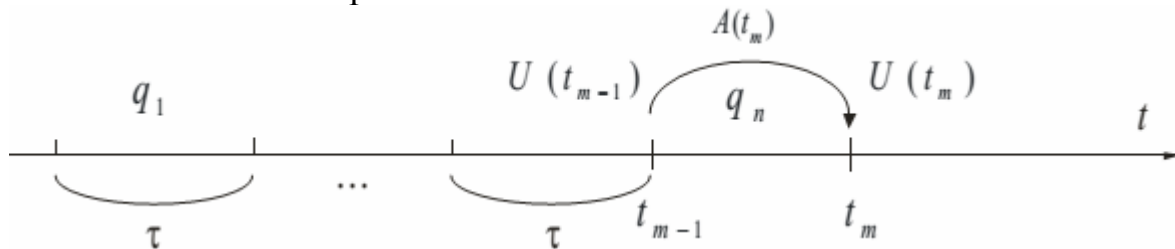


Рис. 1.16 – Организация вычислительных циклов разгонных алгоритмов БИНС

Приведем примеры алгоритмов:

1) одношаговый (с одним шагом разгонки) алгоритм третьего порядка точности:

$$\bar{\varphi}_2 = \bar{q}_2 + \frac{1}{12} \cdot \bar{q}_1 \times \bar{q}_2, \quad [\text{алгоритм 6}] \quad (1.83)$$

2) одношаговый (с двумя шагами разгонки алгоритма четвертого порядка точности:

$$\bar{\varphi}_3 = \bar{q}_1 + \frac{1}{6}(\bar{q}_2 \times \bar{q}_1) - \frac{1}{24}(\bar{q}_3 \times \bar{q}_1) \quad [\text{алгоритм 7}] \quad (1.84)$$

Разгонные алгоритмы являются более точными, поскольку информация об ориентации ЛА обновляется с каждым шагом измерений. При этом «работают» медленно, поскольку вычисления матриц ориентации производятся чаще, для их реализации требуется больше вычислительных затрат [9,60,61,62].

## **1.5. Синтез навигационного алгоритма БИНС определения прямоугольных координат**

Бесплатформенная инерциальная навигационная система совместно со спутниковой радионавигационной системой входит в тракт навигации в составе отказоустойчивого ИКБО. Совместное использование двух сенсоров предполагает объединение их в инерциально-спутниковую систему. Подобные навигационные системы устанавливаются на большинство современных самолетов гражданской авиации [9, 10, 64].

Анализ алгоритмического обеспечения современных навигационных комплексов показывает, что существует много способов счисления пути, использующих самые разнообразные системы координат. Например, местная прямоугольная система координат, ортодромическая, опорный навигационный трехгранник в системах со всеширотным алгоритмом.

Вместе с тем, выходные сигналы СРНС формируются в проекциях на оси прямоугольной гринвичской системы координат (ПЗ-90 или WGS-84). Поэтому при использовании каждого из существующих алгоритмов в перспективных инерциально - спутниковых системах различного назначения возникают определенные трудности, связанные с многократными пересчетами из одной системы координат в другую [10].

Все это обуславливает необходимость разработки унифицированного алгоритма счисления координат в БИНС, обладающего свойством всеширотности и обеспечивающего хорошую (без сложных дополнительных вычислений) совместимость с СРНС для различных схем построения инерциально-спутниковых систем относительной навигации.

Предложенный ниже алгоритм обработки навигационной информации в БИНС отвечает указанным требованиям. Его особенностью является использование в качестве опорного трехгранника прямоугольной гринвичской системы координат ПЗ-90 [10].



### 1.5.1 Особенности выходных сигналов современных акселерометров

В конце 90-х годов отечественная промышленность разработала и приступила к серийному производству перспективных прецизионных акселерометров А-15, А-16, А-17 которые по своим характеристикам не уступает лучшим зарубежным аналогам, а в некоторых условиях работы и превосходит их.

По принципу действия эти акселерометры относятся к маятниковым акселерометрам. Их чувствительные элементы изготовлены в форме диска из монокристаллического кремния.

Характерной особенностью современных прецизионных акселерометров является то, что они являются датчиками интегрирующего типа. Связано это с тем, что высокоточное аналого-цифровое преобразование их выходного сигнала на современной отечественной элементной базе можно осуществить лишь по схеме преобразования “напряжение-частота” с последующим подсчетом числа периодов колебаний на некотором интервале времени. В результате на выходе будут иметь место интегралы от соответствующих углов  $\alpha$  отклонения чувствительных элементов на интервале съема информации  $n$  (рисунок 1.17) [51, 57]:

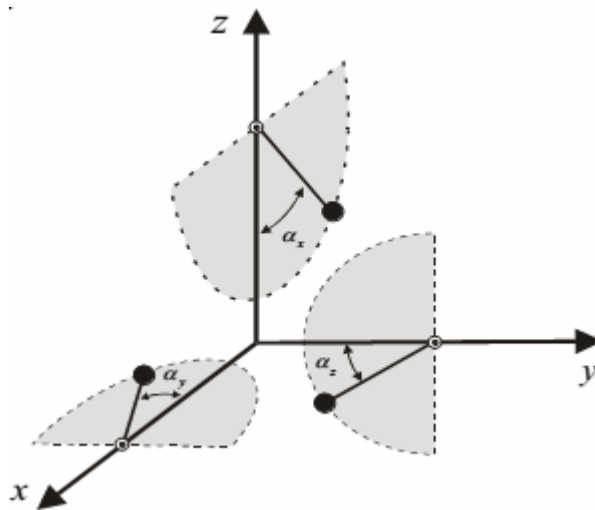


Рис. 1.17 – Оси чувствительности акселерометров БИНС

$$\bar{u}(t_n) = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \bar{\alpha}(t) dt \quad (1.85)$$

где:  $\bar{u} = [u_x \quad u_y \quad u_z]^T$  – вектор выходных сигналов блока акселерометров интегрирующего типа;

$\bar{\alpha} = [\alpha_x \quad \alpha_y \quad \alpha_z]^T$  – вектор углов отклонения чувствительных элементов по соответствующим осям.

Однако, как показано в работе [ 57 ], связь проекций кажущегося ускорения  $\bar{a} = [a_x \quad a_y \quad a_z]^T$  с углами отклонения имеет достаточно сложную нелинейную зависимость:

$$\begin{cases} a_x = k_1 \cdot \alpha_x + k_2 \cdot \omega_x \cdot \omega_z + k_3 \cdot \varepsilon_y \\ a_y = k_1 \cdot \alpha_y + k_2 \cdot \omega_x \cdot \omega_y + k_3 \cdot \varepsilon_z \\ a_z = k_1 \cdot \alpha_z + k_2 \cdot \omega_y \cdot \omega_z + k_3 \cdot \varepsilon_x \end{cases} \quad (1.86)$$

где:  $k_1, k_2, k_3$  – конструктивные параметры тройки акселерометров, зависящие от их геометрического расположения относительно центра масс (могут быть определены расчетным либо экспериментальным путем);

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  – проекции вектора углового ускорения на оси связанной СК;

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$  – проекции абсолютной угловой скорости на оси связанной СК.

Выбор определенных условий размещения тройки акселерометров в корпусе позволяет реализовать не возмущаемую угловыми ускорениями БИНС (коэффициенты  $k_2$  и  $k_3$  равны нулю). Тогда система (1.86) может быть записана в следующем виде:

$$\bar{a}_c = k \cdot \bar{\alpha} \quad (1.87)$$

Таким образом, установлено, что на каждом сверхбыстром цикле обработки сигналов инерциальных датчиков имеется один отсчет блока гироскопов и три отсчета (при частоте  $f_{акс} = 300 \text{ Гц}$ ) блока акселерометров.

### 1.5.2. Алгоритм определения местоположения ВС в прямоугольной системе координат

В дальнейшем будут рассматриваться три системы координат (рисунок 1.2):

- инерциальная  $OX_I Y_I Z_I$ , являющаяся неподвижной (будем называть ее  $L$ );
- прямоугольная гринвичская  $OXYZ$  типа ПЗ-90, вращающаяся относительно инерциальной вокруг оси  $Z$  с угловой скоростью  $\Omega_3$  (будем называть ее  $E$ );
- связанная с ЛА система координат  $Oxyz$ , по осям которой ориентированы оси чувствительности гироскопов и акселерометров (будем называть ее  $C$ ).

Взаимосвязь между указанными выше СК определяется ортогональными матрицами направляющих косинусов [10]:

$$\begin{bmatrix} X_I \\ Y_I \\ Z_I \end{bmatrix} = U \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = D \cdot \begin{bmatrix} X_I \\ Y_I \\ Z_I \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = V \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad (1.88)$$

$$V = D \cdot U. \quad (1.89)$$

В идеальном случае установленные по осям связанной СК инерциальные датчики выдают следующую информацию:

- гироскопы измеряют проекции абсолютной угловой скорости  $\bar{\omega}$  на оси связанной СК  $C$ :

$$\bar{\omega}_C = U^{-1} \bar{\omega};$$

- акселерометры выдают проекции кажущегося ускорения на оси связанной СК  $C$ :

$$\bar{a}_C = U^{-1} \bar{a} - V^{-1} \bar{g}_{\Gamma_E}. \quad (1.90)$$

Решение навигационной задачи заключается в нахождении радиуса вектора  $\bar{R}_E$  местоположения ЛА и его скорости  $\dot{\bar{R}}_E$ :

$$\bar{R}_E = [X \ Y \ Z]; \quad (1.91)$$

$$\dot{\bar{R}}_E = \bar{W}_E = [\dot{X} \ \dot{Y} \ \dot{Z}]. \quad (1.92)$$

Из второй формы уравнений акселерометров следует основное соотношение для счисления прямоугольных координат по показаниям инерциальных датчиков:

$$\ddot{\bar{R}}_E = D \cdot U \cdot \bar{a}_C - 2 \cdot \bar{\Omega}_3 \times \dot{\bar{R}}_E + \bar{g}_{\Gamma_E} \quad (1.93)$$

Специфическим моментом является то, что выходные сигналы гироскопов и акселерометров представляют собой интегралы от соответствующих

щих величин. Кроме того, их выдача производится с различной частотой. Это не позволяет непосредственно применить их при интегрировании дифференциального уравнения (1.93). Поэтому главной проблемой является синтез алгоритмов счисления прямоугольных координат с учетом интегрирующего характера выходной информации датчиков [9, 10, 64].

Определим матрицу  $D(t)$  перехода от инерциальной к прямоугольной системе координат следующим образом. Из пункта 1.3 следует, что матрица  $D(t)$  в течение сверхбыстрого цикла  $k$  может быть определена по следующей формуле:

$$D(t) = D(t_{k-1}) \cdot A_3(t), \quad (1.94)$$

где  $D(t_{k-1})$  – значение матрицы  $D$  по окончании предыдущего сверхбыстрого цикла  $k-1$ ;

$A_3(t)$  – оператор поворота.

Из теории векторов ориентации, рассмотренной в пункте 1.3 получим выражение для определения матрицы  $A_3(t)$ :

$$A_3(t) = E + [\bar{\Omega}_3 \times] \cdot (t - t_{k-1}) + [\bar{\Omega}_3 \times]^2 (t - t_{k-1})^2.$$

Запись  $[\bar{\Omega}_3 \times]$  формально символизирует кососимметрическую матрицу от этого вектора.

С учетом этого выражение для матрицы  $D(t)$  примет вид:

$$D(t) = D(t_{k-1}) \cdot \left( E + [\bar{\Omega}_3 \times] \cdot (t - t_{k-1}) + [\bar{\Omega}_3 \times]^2 (t - t_{k-1})^2 \right) \quad (1.95)$$

Аналогичным образом, используя полученные ранее формулы (1.59), (1.63) и (1.64) определим матрицу  $U(t)$ :

$$U(t) = U(t_{k-1}) \cdot A(t);$$

$$A(t) = E + [\bar{a}_1 \times] \cdot (t - t_{k-1}) + \left( [\bar{a}_1 \times]^2 + \frac{1}{2} [\bar{a}_2 \times] \right) \cdot (t - t_{k-1})^2 + \left( \frac{1}{12} [(\bar{a}_1 \times \bar{a}_2) \times] + \frac{1}{2} [\bar{a}_1 \times] \cdot [\bar{a}_2 \times] + \frac{1}{2} [\bar{a}_2 \times] \cdot [\bar{a}_1 \times] \right) \cdot (t - t_{k-1})^3; \quad (1.96)$$

$$\bar{a}_1 = \frac{\bar{q}_k + \bar{q}_{k-1}}{2\tau}; \quad \bar{a}_2 = \frac{\bar{q}_k - \bar{q}_{k-1}}{\tau^2},$$

где  $\bar{q}_k$  и  $\bar{q}_{k-1}$  – выходные сигналы блока гироскопов.

В результате удалось представить матрицы перехода к инерциальной и прямоугольной СК в виде полиномов по степеням  $t - t_{k-1}$ .

Как указано ранее, выходные сигналы блока акселерометров подаются с частотой порядка 300 Гц, в то время как выходные сигналы блока гироскопов – в три раза реже (100 Гц). Таким образом, необходимо синтезировать алгоритм определения прямоугольных координат типа ПЗ-90 в условиях несинхронного поступления выходных данных инерциальных сенсоров.

Аппроксимируем кажущееся ускорение в течение периода времени  $t-t_{k-1}$  по трем выходным сигналам блока акселерометров. Для этого примем условие, что оно изменялось по следующему закону:

$$\bar{a}(t) = \bar{c} + \bar{d}(t-t_{k-1}) + \bar{e} \frac{(t-t_{k-1})^2}{2} \quad (1.97)$$

Определим коэффициенты выражения (1.97):

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+\delta\tau} \left( \bar{c} + \bar{d}(t-t_{k-1}) + \bar{e} \frac{(t-t_{k-1})^2}{2} \right) dt; \\ \bar{u}_2 &= \int_{t_{k-1}+\delta\tau}^{t_{k-1}+2\delta\tau} \left( \bar{c} + \bar{d}(t-t_{k-1}) + \bar{e} \frac{(t-t_{k-1})^2}{2} \right) dt; \\ \bar{u}_3 &= \int_{t_{k-1}+2\delta\tau}^{t_{k-1}+3\delta\tau} \left( \bar{c} + \bar{d}(t-t_{k-1}) + \bar{e} \frac{(t-t_{k-1})^2}{2} \right) dt; \end{aligned}$$

или

$$\begin{cases} \bar{c} \delta\tau + \bar{d} \frac{\delta\tau^2}{2} + \bar{e} \frac{\delta\tau^3}{6} = \bar{u}_1 \\ \bar{c} \delta\tau + \bar{d} \frac{3\delta\tau^2}{2} + \bar{e} \frac{7\delta\tau^3}{6} = \bar{u}_2 \\ \bar{c} \delta\tau + \bar{d} \frac{5\delta\tau^2}{2} + \bar{e} \frac{19\delta\tau^3}{6} = \bar{u}_3 \end{cases} .$$

Решая данную систему с учетом равенства  $\tau = 3 \cdot \delta\tau$  получим:

$$\begin{aligned} \bar{c} &= \frac{1}{2\tau} (11 \cdot \bar{u}_1 - 7 \cdot \bar{u}_2 + 2 \cdot \bar{u}_3); \\ \bar{d} &= -9 \frac{1}{\tau} (2 \cdot \bar{u}_1 - 3 \cdot \bar{u}_2 + \bar{u}_3); \\ \bar{e} &= 27 \frac{1}{\tau} (\bar{u}_1 - 2 \cdot \bar{u}_2 + \bar{u}_3). \end{aligned} \quad (1.98)$$

Подставляя в выражение (1.93) формулы (1.95), (1.96) и (1.98) и проводя почленное интегрирование, получим алгоритм определения прямоугольных координат и скоростей ЛА по сигналам инерциальных датчиков интегрирующего типа:

$$\begin{aligned} \bar{W}(t_k) &= \bar{W}(t_{k-1}) - 2\bar{\Omega}_z \times \bar{W}(t_{k-1}) + \bar{g}_T(\bar{R}(t_{k-1})) + \\ &+ D(t_k) \cdot U(t_{k-1}) \cdot [10\bar{u}_1 - 17\bar{u}_2 + 10\bar{u}_3 + \\ &+ \bar{q}_{k-1} \times \left( \frac{11}{240}\bar{u}_1 + \frac{19}{120}\bar{u}_2 + \frac{11}{240}\bar{u}_3 \right) + \bar{q}_k \times \left( \frac{19}{240}\bar{u}_1 + \frac{41}{120}\bar{u}_2 + \frac{199}{240}\bar{u}_3 \right) + \\ &+ \bar{Q}_1 \times \left( \bar{Q}_1 \times \left( \frac{1}{240}\bar{u}_1 + \frac{11}{480}\bar{u}_2 + \frac{47}{480}\bar{u}_3 \right) \right) + \bar{Q}_1 \times \left( \bar{Q}_2 \times \left( \frac{91}{320}\bar{u}_1 - \frac{179}{320}\bar{u}_2 + \frac{59}{160}\bar{u}_3 \right) \right) + \\ &+ \bar{Q}_2 \times \left( \bar{Q}_1 \times \left( \frac{91}{320}\bar{u}_1 - \frac{179}{320}\bar{u}_2 + \frac{59}{160}\bar{u}_3 \right) \right) + \bar{Q}_2 \times \left( \bar{Q}_2 \times \left( \frac{1}{280}\bar{u}_1 - \frac{1}{140}\bar{u}_2 + \frac{11}{140}\bar{u}_3 \right) \right) + \\ &+ \bar{Q} \times \left( \frac{1}{480}\bar{u}_1 - \frac{1}{480}\bar{u}_2 + \frac{11}{120}\bar{u}_3 \right) + \bar{Q}_1 \times \left( \bar{Q} \times \left( \frac{1}{960}\bar{u}_1 - \frac{179}{960}\bar{u}_2 + \frac{7}{240}\bar{u}_3 \right) \right) + \\ &+ \bar{Q}_2 \times \left( \bar{Q} \times \left( \frac{11}{16128}\bar{u}_1 - \frac{17}{8064}\bar{u}_2 + \frac{191}{16128}\bar{u}_3 \right) \right)]; \end{aligned} \quad (1.99)$$

$$\begin{aligned}
\bar{R}(t_k) = & \bar{R}(t_{k-1}) + \bar{W}(t_{k-1}) \cdot \tau - 2\bar{\Omega}_3 \times \bar{W}(t_{k-1}) \cdot \tau + \frac{1}{2} \bar{g}_T(\bar{R}(t_{k-1})) \cdot \tau^2 + \\
& + D(t_k) \cdot U(t_{k-1}) \cdot \left[ 2\bar{u}_1 - \frac{7}{4}\bar{u}_2 + \frac{5}{4}\bar{u}_3 + \bar{q}_{k-1} \times \left( \frac{1}{24}\bar{u}_1 + \frac{19}{240}\bar{u}_2 + \frac{1}{240}\bar{u}_3 \right) + \right. \\
& + \bar{q}_k \times \left( \frac{1}{20}\bar{u}_1 + \frac{19}{80}\bar{u}_2 + \frac{7}{80}\bar{u}_3 \right) + \bar{Q}_1 \times \left( \bar{Q}_1 \times \left( \frac{1}{960}\bar{u}_1 + \frac{19}{960}\bar{u}_2 + \frac{1}{96}\bar{u}_3 \right) \right) + \\
& + \bar{Q}_1 \times \left( \bar{Q}_2 \times \left( -\frac{1}{2240}\bar{u}_1 + \frac{23}{2240}\bar{u}_2 + \frac{1}{112}\bar{u}_3 \right) \right) + \bar{Q}_2 \times \left( \bar{Q}_1 \times \left( \frac{1}{480}\bar{u}_1 + \frac{19}{480}\bar{u}_2 + \frac{1}{480}\bar{u}_3 \right) \right) + \\
& \left. + \bar{Q}_2 \times \left( \bar{Q}_2 \times \left( -\frac{1}{1920}\bar{u}_1 + \frac{37}{6720}\bar{u}_2 + \frac{101}{13446}\bar{u}_3 \right) \right) \right] \cdot \tau;
\end{aligned} \tag{1.100}$$

$$\bar{Q} = \bar{q}_{k-1} \times \bar{q}_k; \quad \bar{Q}_1 = \bar{q}_k + \bar{q}_{k-1}; \quad \bar{Q}_2 = \bar{q}_k - \bar{q}_{k-1}.$$

В выражениях (1.99) и (1.100) вектор ускорения силы тяжести может быть найден с помощью традиционного алгоритма:

$$g_X = (g_3 \cos \varphi - g_2 \sin \varphi) \cdot (X(t_{k-1})/m);$$

$$g_Y = (g_3 \cos \varphi - g_2 \sin \varphi) \cdot (Y(t_{k-1})/m);$$

$$g_Z = g_3 \sin \varphi - g_2 \cos \varphi;$$

$$g_2 = (-g_e (e^2 - \eta)(a/R(t_{k-1}))^4 + \Omega^2 \cdot R(t_{k-1})) \cdot \sin \varphi \cos \varphi;$$

$$g_3 = -g_e \cdot (a/R(t_{k-1}))^2 \times$$

$$\times (1 - 0.5e^2 + 1.5\eta + 0.5(e^2 - \eta) \cdot (1 - 3\sin^2 \varphi) \cdot (a/R(t_{k-1}))^2) + \Omega^2 \cdot R(t_{k-1}) \cdot \cos^2 \varphi;$$

$$m = \sqrt{X^2(t_{k-1}) + Y^2(t_{k-1})}; \quad R(t_{k-1}) = \sqrt{X^2(t_{k-1}) + Y^2(t_{k-1}) + Z^2(t_{k-1})};$$

$$\sin \varphi = \frac{Z(t_{k-1})}{R(t_{k-1})}; \quad \cos \varphi = \frac{m}{R(t_{k-1})}; \quad \eta = a\Omega^2 / g_e = 0.00346775;$$

где:  $a = 6378136$  – большая полуось;

$e^2 = 0066934$  – квадрат эксцентриситета;

$g_e = 9.780318$  – ускорение свободного падения на экваторе;

$\Omega = 7292115 \cdot 10^{-11}$  – угловая скорость вращения Земли.

Таким образом, минуя решения дифференциальных уравнений Пуассона и интегрирование уравнения (1.93), удалось получить конечные формулы для определения прямоугольных координат и скоростей ЛА по показаниям блока гироскопов и акселерометров интегрирующего типа [9, 10, 54, 64].

Данный алгоритм является неустойчивым, т.к. в качестве опорной используется прямоугольная гринвичская СК, однако, его применение предполагается только в режиме относительной навигации. Поэтому погрешности будут постоянно компенсироваться с помощью более точной системы СРНС [10, 66].

## Выводы по главе 1

1. Анализ погрешностей БИНС выявил тот факт, что 80% погрешностей обусловлены неточностью определения углового положения связанной СК относительно инерциальной. Установлены погрешности системы ориентации, вносящие наибольший вклад это инструментальные погрешности (погрешности гироскопов), погрешности начальной выставки и методические (вычислительные) погрешности. Методические погрешности алгоритмов ориентации являются устранимыми.

2. Рассмотрены перспективные датчики инерциальной информации. Установлено, что наиболее точные из них являются сенсорами интегрирующего типа и выходные сигналы несут информацию только о квазипараметрах. Данные параметры не могут без предварительной обработки применяться в классических алгоритмах определения координат и скоростей ЛА.

3. Предложено для определения ориентации по квазикоординатам в качестве промежуточного параметра использовать вектор ориентации Эйлера. В результате удалось снизить количество дифференциальных уравнений до трех. На основании теории конечных поворотов твердого тела синтезировано семейство разгонных и безразгонных алгоритмов определения ориентации по выходным сигналам блока гироскопов интегрирующего типа. Преимуществом полученных алгоритмов является отсутствие необходимости решения дифференциальных уравнений, что снижает вычислительные нагрузки на БЦВМ и позволяет определять параметры ориентации в реальном времени.

4. Синтезирован четырехшаговый алгоритм повышенной точности в связи с необходимостью работы БИНС в особой ситуации (отказ вычислительного ядра ИКБО). Этот алгоритм с одной стороны является алгоритмом повышенной точности, с другой стороны среди однотипных алгоритмов его реализация обеспечивает минимальную загрузку БВМ.

5. Разработан алгоритм определения прямоугольных координат ЛА в системе координат ПЗ-90. Выбор обусловлен спецификой функционирования спутниковой системы ГЛОНАСС и призван уменьшить вычислительные затраты при пересчете параметров к различным осям. Алгоритм учитывает вид выходных сигналов блока гироскопов и так же является конечным соотношением, не требующим проведения интегрирования.

## 2. ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗРАБОТАННЫХ АЛГОРИТМОВ ОРИЕНТАЦИИ БЕСПЛАТФОРМЕННОЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

### 2.1 Общая структура системы имитационного моделирования алгоритмов ориентации БИНС

При определении углового положения ВС возникают методические погрешности, величины которых зависят от реализованной в БИНС процедуры вычислений (алгоритма ориентации). Для исследования таких погрешностей в ряде случаев можно использовать имитационное моделирование. Наиболее эффективным для выявления методических погрешностей алгоритма ориентации считается коническое движение, при котором все производные от вектора угловой скорости не равны тождественно нулю. Иначе говоря, при таком движении наиболее заметно проявляется некоммутативный поворот.

Схема моделирования такова. Задается угловое движение ВС как функция времени, и имитируются показания гироскопов. Они подаются на вход исследуемого алгоритма. В результате сравнения его выходных сигналов с известным положением ВС получаем ошибки алгоритма ориентации [9, 10, 67].

Общая схема системы имитационного моделирования алгоритмов ориентации БИНС представлена на рисунке 2.1.

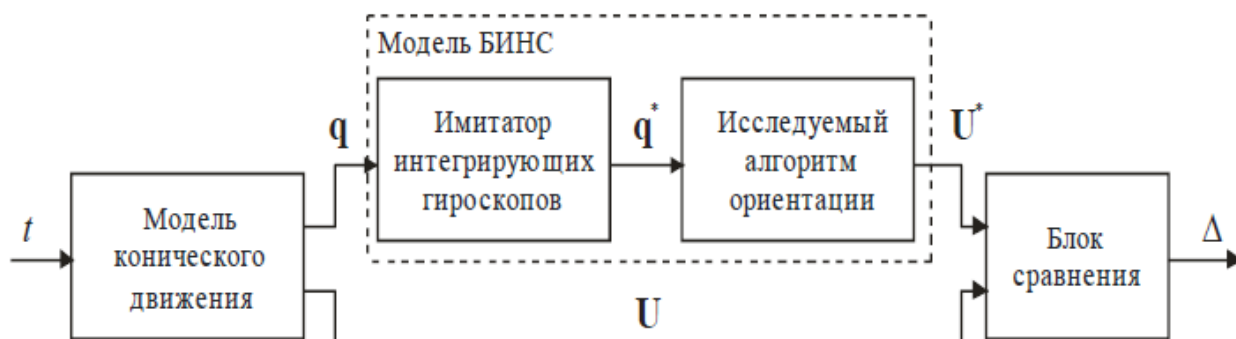


Рис. 2.1 – Система имитационного моделирования алгоритмов ориентации БИНС

Исследование погрешностей алгоритмов определения углового положения включает:

- определение математической модели сложного (конического) углового движения ВС;
- задание матрицы ориентации  $U(t_k)$  в моменты времени  $t_k$  сверхбыстрого цикла вычислений;
- определение идеальных значений квазиординат  $\bar{q}_k$ ;
- начальную выставку алгоритма ориентации БИНС  $U^*(t_0)$ ;



- определение (согласно используемой модели погрешностей гироскопов) значений квазиординат  $q_k^*$  подаваемых на вход алгоритма ориентации БИНС;
- определение с помощью исследуемого алгоритма текущего значения счисляемой матрицы ориентации  $U^*(t_i)$
- сравнение вычисленного и идеального значений матрицы направляющих косинусов с целью определения погрешностей алгоритма ориентации  $\Delta(t)$ .

Угловое коническое движение воздушного судна, при котором вращение происходит относительно неподвижной в инерциальной системе координат оси (в том числе с переменной угловой скоростью), является наиболее простым в смысле решения задачи определения углового положения ВС по сигналам гироскопических датчиков интегрирующего типа. Выходные сигналы тройки гироскопических датчиков интегрирующего типа

$\bar{q}(t_k) = [q_x(t_k) \quad q_y(t_k) \quad q_z(t_k)]^T$  в момент времени  $t_k$  равны интегралам от проекций абсолютных угловых скоростей на соответствующие оси чувствительности:

$$\bar{q}(t_k) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \bar{\omega}(t) dt; \quad (2.1)$$

где  $t_{k-1}$  – предыдущий момент времени выдачи сигнала датчиком;

$\bar{\omega}(t) = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T$  – проекции вектора абсолютной угловой скорости вращения связанной СК на соответствующие оси чувствительности.

Повороты относительно неподвижной в инерциальном пространстве оси являются коммутативными, и никакой алгоритм ориентации в случае такого движения не будет иметь преимуществ перед простейшим приближенным алгоритмом первого порядка точности, синтезированного в п.1.4:

$$U(t_k) = U(t_{k-1}) \cdot (E + Q); \quad (2.2)$$

где  $U(t_{k-1})$  – матрица направляющих косинусов, задает положение осей связанной СК относительно инерциальной в момент времени  $t_{k-1}$ ;

$E = U(t_0)$  – единичная матрица, задается в начальный момент времени  $t_0$  при совпадении связанной и инерциальной систем координат;

$$Q = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Omega(\tau) d\tau = \begin{bmatrix} 0 & -q_z & q_y \\ q_z & 0 & -q_x \\ -q_y & q_x & 0 \end{bmatrix} \text{ – кососимметрическая матрица;}$$

Таким образом, актуальным для исследования погрешностей алгоритмов ориентации является моделирование сложного углового конического движения

ВС, при котором вращение воздушного судна происходит относительно оси, меняющей свое направление в инерциальной системе координат [9, 10, 64, 67].

## 2.2. Математические модели элементов системы имитационного моделирования

Как указано выше, одним из наиболее неблагоприятных для бесплатформенной системы является коническое движение, то есть периодическое угловое движение объекта, при котором одна из его осей описывает коническую поверхность, как изображено на рисунке 2.2. Далее будет показано, что в этом случае гироскопический блок БИНС измеряет постоянную угловую скорость относительно оси симметрии конуса. С другой стороны, такое движение имеет весьма простое математическое и геометрическое описание, что облегчает его моделирование с использованием вычислительной техники.

Таким образом, для сравнительного анализа алгоритмов ориентации далее используется моделирование конического движения ВС.

Пусть положение связанной системы координат  $Oxyz$  в любой момент  $t$  получается конечным поворотом на угол  $\varphi$  из согласованного с инерциальной системой координат  $OX_I Y_I Z_I$  положения, причем ось такого поворота вращается в плоскости  $OX_I Y_I$  угловой скоростью  $\nu$ , как показано на рисунке 2.2.

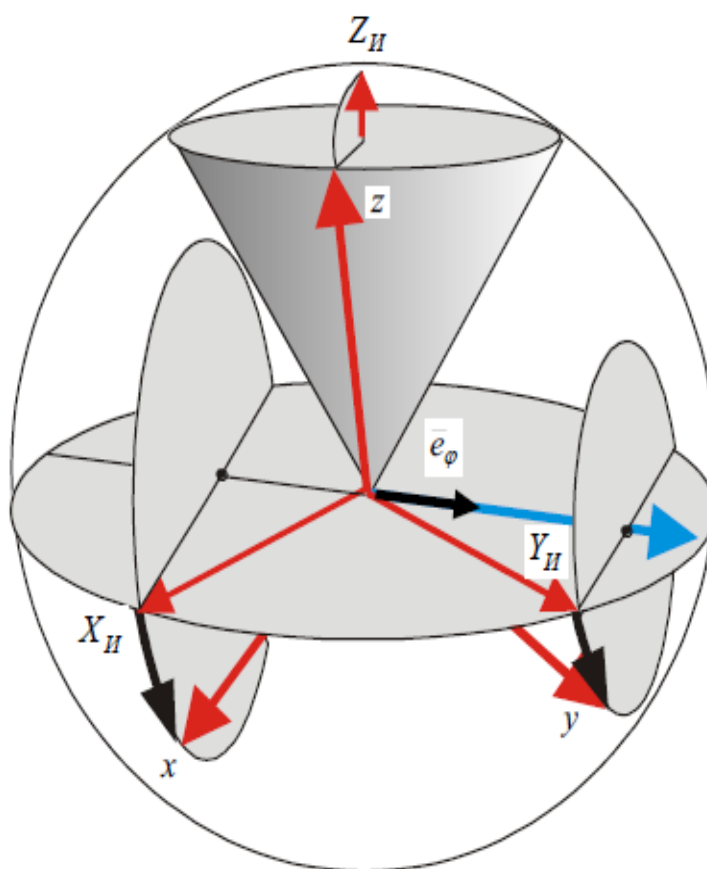


Рис.2.2. Схема конического движения ВС

Положение оси конечного поворота в любой момент времени задается ортом  $\bar{e}_\varphi(t)$ , имеющим следующие координаты:

$$\bar{e}_\varphi(t) = \begin{bmatrix} \sin(v \cdot t) \\ \cos(v \cdot t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Таким образом, положение в связанной системе координат вектора конечного поворота  $\bar{\varphi}(t)$ , определяющего угловое положение подвижной системы координат относительно инерциальной можно описать выражением:

$$\bar{\varphi}(t) = \begin{bmatrix} \alpha \cdot \sin(v \cdot t) \\ \alpha \cdot \cos(v \cdot t) \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (2.4)$$

Данный вектор был рассмотрен в главе 1, где фигурировал под названием «вектор ориентации Эйлера».

Переход от вектора  $\bar{\varphi}(t)$  к матрице направляющих косинусов  $U(t)$  (матрица перехода от инерциальной системы координат к связанной) может быть осуществлен по следующей формуле:

$$U(t) = E + \frac{\sin(\|\bar{\varphi}(t)\|)}{\|\bar{\varphi}(t)\|} \cdot \Phi(t) + \frac{1 - \cos(\|\bar{\varphi}(t)\|)}{(\|\bar{\varphi}(t)\|)^2} \cdot \Phi^2(t), \quad (2.5)$$

где  $\Phi = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 0 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 0 \end{bmatrix}$  - кососимметрическая матрица, составленная из

координат вектора  $\bar{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \end{bmatrix}^T$  в связанной СК.

Подставляя в (2.5) соотношение для вектора ориентации (2.4), получим формулу для вычисления матрицы направляющих косинусов:

$$U(t) = \begin{bmatrix} \cos\alpha + (1 - \cos\alpha)\sin^2(vt) & -\frac{1}{2}(1 - \cos\alpha)\sin(2vt) & \sin\alpha \cdot \cos(vt) \\ \frac{1}{2}(1 - \cos\alpha)\sin(2vt) & \cos\alpha + (1 - \cos\alpha)\sin^2(vt) & -\sin\alpha \cdot \sin(vt) \\ -\sin\alpha \cdot \cos(vt) & \sin\alpha \cdot \sin(vt) & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Выражение (2.6) в любой момент времени определяет угловое положение подвижной системы координат при коническом движении.

Для определения идеальных выходных сигналов гироскопических датчиков воспользуемся уравнением Пуассона в подвижной системе координат.

$$\dot{U} = U \cdot \Omega; \quad U(t_0) = U_0;$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ \omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

из которого найдем кососимметрическую матрицу угловой скорости летательного аппарата:

$$U^T(t) \frac{dU(t)}{dt} = \Omega(t). \quad (2.8)$$

Продифференцировав (2.6) и подставив в (2.8) получим:

$$\Omega(t) = \begin{bmatrix} 0 & -v(1-\cos\alpha) & -v \cdot \sin\alpha \cdot \sin(vt) \\ v(1-\cos\alpha) & 0 & -v \cdot \sin\alpha \cdot \cos(vt) \\ v \cdot \sin\alpha \cdot \sin(vt) & v \cdot \sin\alpha \cdot \cos(vt) & 0 \end{bmatrix}.$$

С учетом (2.7) получим выражение, определяющее проекции вектора абсолютной угловой скорости на оси связанной системы координат:

$$\bar{\omega}(t) = \begin{bmatrix} v \cdot \sin\alpha \cdot \cos(vt) \\ -v \cdot \sin\alpha \cdot \sin(vt) \\ v(1-\cos\alpha) \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

При такой угловой скорости ось  $z$  будет вращаться относительно оси  $Z_H$  по образующей конуса с углом раствора  $2\alpha$ . А оси  $x$  и  $y$  совершают, как показано на рисунке 2.3, движение в виде цифры 8.

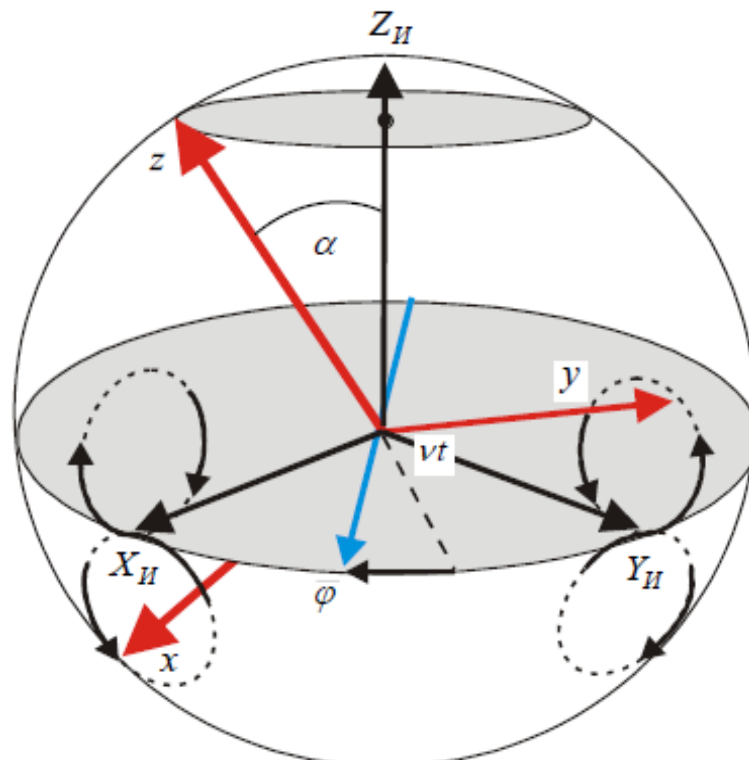


Рис. 2.3 – Взаимное коническое вращение систем координат

Таким образом, в случае конического движения ЛА идеальные выходные сигналы (3.1) гироскопов в  $k$ -й момент времени будут равны:

$$\begin{aligned} (q_x)_k &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} v \cdot \sin \alpha \cdot \cos(vt) dt = -\sin \alpha \cdot (\sin(vt_k) - \sin(v(t_k - \tau))); \\ (q_y)_k &= - \int_{t_{k-1}}^{t_k} v \cdot \sin \alpha \cdot \sin(vt) dt = -\sin \alpha \cdot (\cos(vt_k) - \cos(v(t_k - \tau))); \\ (q_z)_k &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} v(1 - \cos \alpha) dt = v \cdot (1 - \cos \alpha) \cdot \tau; \end{aligned} \quad (2.10)$$

где  $t_k = t_0 + k \cdot \tau$  – момент времени получения вычислителем БИНС  $k$ -го отсчета выходного сигнала гироскопического блока;  $\tau$  – интервал дискретности гироскопов.

Введение в выражение (2.10) соответствующих случайных составляющих и дискретизация компонентов  $q_k$  по уровню позволит имитировать показания гироскопов с инструментальными дрейфами. Эти сигналы подаются на вход исследуемого алгоритма ориентации.

Погрешности алгоритма можно определить по элементам матрицы  $\Delta(t)$ , которая представляет собой матрицу перехода от «вычисленной» подвижной системы координат к задаваемой (см. рисунок 2.1):

$$\Delta(t) = U^*(t) \cdot U^T(t); \quad (2.11)$$

Выражения (2.6) и (2.9) составляют математическую модель конического движения ЛА относительно оси  $Z_{И}$  с параметрами  $\alpha$  и  $v$ . Использование такой модели в схеме исследования погрешностей алгоритма ориентации, представленной на рисунке 2.1, позволяет исследовать так называемые конические погрешности алгоритмов [9, 10, 64, 67].

Следует отметить, что в случае высокочастотного конического движения с малой амплитудой, обусловленного вибрацией в месте установки блока гироскопических элементов, будет наблюдаться так называемый конический дрейф алгоритма. Например, при малых конических колебаниях с  $v\tau = 2\pi$  величина смещения сигнала гироскопического блока (2.10) по оси, описывающей коническую поверхность, составит  $\frac{\pi\alpha^2}{\tau}$ . Это обусловит скорость конического дрей-

фа алгоритма ориентации  $\frac{\pi\alpha^2}{\tau}$  (при  $\alpha = 10$  угловых секунд и  $\tau = 0.008$  секунд это соответствует коническому дрейфу 0,19 град/ч).

Рассмотренный пример синтеза математической модели конического движения летательного аппарата демонстрирует общий подход к созданию моделей сложного углового движения ВС, заключающийся в:

- аналитическом задании зависимости от времени  $\bar{\varphi}(t)$  для вектора ориентации Эйлера, определяющего угловое положение воздушного судна относительно инерциальной системы координат;
- определении в зависимости от времени согласно (2.6) матрицы ориентации  $U(t)$ ;
- определении в соответствии с (2.9) составляющих абсолютной угловой скорости летательного аппарата по осям связанной системы координат как функции времени  $\bar{\omega}(t)$
- определении согласно (2.10) идеальных значений квазиординат  $\bar{q}_k$ .

В заключение приведем математические модели исследуемых алгоритмов ориентации БИНС, которые были синтезированы в главе 1.

В исследуемых алгоритмах ориентации входной информацией являются квазиординаты  $q_k$  (угол поворота связанной относительно инерциальной системы координат на малых промежутках времени), а на выходе конечный параметр ориентации - матрица направляющих косинусов  $U$ , фиксирующая конечное вращение систем координат (рисунок 2.1)

В БИНС оператор поворота  $A(t_k)$ , переводящий систему координат из положения  $U(t_{k-1})$  в следующее положение  $U(t_k)$ , вычисляется по формуле:

$$A(t_k) = E + \frac{\sin(\varphi(t_k))}{\varphi(t_k)} \cdot \Phi(t_k) + \frac{1 - \cos(\varphi(t_k))}{\varphi^2(t_k)} \cdot \Phi^2(t_k) \quad (2.12)$$

где  $\varphi(t_k) = \sqrt{\varphi_x^2(t_k) + \varphi_y^2(t_k) + \varphi_z^2(t_k)}$ ;

$$\Phi(t_k) = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_z(t_k) & \varphi_y(t_k) \\ \varphi_z(t_k) & 0 & -\varphi_x(t_k) \\ -\varphi_y(t_k) & \varphi_x(t_k) & 0 \end{bmatrix}$$

Ориентация связанной с ВС системы координат по окончании сверхбыстрого цикла  $k$  определяется матрицей направляющих косинусов:

$$U(t_k) = U(t_{k-1}) \cdot A(t_k) \quad (2.13)$$

Безразгонные алгоритмы ориентации БИНС:

1. одношаговый алгоритм второго порядка точности

$$\bar{\varphi}_1 = \bar{q}_1, \quad [\text{алгоритм 1}] \quad (2.14)$$

2. двухшаговый алгоритм четвертого порядка точности

$$\varphi_2 = q_1 + q_2 + \frac{2}{3}(q_1 \times q_2), \quad [\text{алгоритм 2}] \quad (2.15)$$

3. трехшаговый алгоритм четвертого порядка точности

$$\bar{\varphi}_3 = \bar{q}_3 + \bar{q}_2 + \bar{q}_1 + \frac{9}{8}(\bar{q}_3 \times \bar{q}_1), \quad [\text{алгоритм 3}] \quad (2.16)$$

4. трехшаговый алгоритм четвертого порядка точности

$$\bar{\varphi}_3 = \bar{q}_3 + \bar{q}_2 + \bar{q}_1 + \frac{9}{20}(\bar{q}_3 - \bar{q}_1) \times (\bar{q}_1 + \frac{3}{2}\bar{q}_2), \quad [\text{алгоритм 3.1}] \quad (2.17)$$

5. четырехшаговый алгоритм четвертого порядка точности

$$\bar{\varphi}_4 = \bar{q}_1 + \bar{q}_2 + \bar{q}_3 + \bar{q}_4 + \frac{2}{3}[(\bar{q}_1 + \bar{q}_2) \times (\bar{q}_3 + \bar{q}_4)], \quad [\text{алгоритм 4}] \quad (2.18)$$

6. четырехшаговый алгоритм пятого порядка точности

$$\bar{\varphi}_{4+} = \bar{q}_2 + \bar{q}_2 + \bar{q}_3 + \bar{q}_3 + \frac{4}{3}[(\bar{q}_1 \times \bar{q}_3) + (\bar{q}_2 \times \bar{q}_3) + (\bar{q}_2 \times \bar{q}_4)] \quad [\text{алгоритм 4+}] \quad (2.19)$$

7. пятишаговый алгоритм четвертого порядка точности

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_5 = \bar{q}_5 + \bar{q}_4 + \bar{q}_3 + \bar{q}_2 + \bar{q}_1 - \frac{1375}{432}(\bar{q}_4 \times \bar{q}_2) - \frac{1625}{864}(\bar{q}_5 \times \bar{q}_1) + \\ + \frac{875}{216}(\bar{q}_4 \times \bar{q}_1 + \bar{q}_5 \times \bar{q}_2), \end{aligned} \quad [\text{алгоритм 5}] \quad (2.20)$$

Соотношения (2.12), (2.13), (2.14) – (2.20) образуют семейство одношаговых безразгонных алгоритмов ориентации БИНС по показаниям гироскопических датчиков интегрирующего типа.

Разгонные алгоритмы ориентации БИНС:

1. одношаговый (с одним шагом разгонки) алгоритм третьего порядка точности:

$$\varphi_2 = q_2 + \frac{1}{12}(q_1 \times q_2). \quad [\text{алгоритм 6}] \quad (2.21)$$

2. одношаговый (с двумя шагами разгонки) алгоритма четвертого порядка точности:

$$\varphi_3 = \bar{q}_1 + \frac{1}{6}(\bar{q}_2 \times \bar{q}_1) - \frac{1}{24}(\bar{q}_3 \times \bar{q}_1) \quad [\text{алгоритм 7}] \quad (2.22)$$

Соотношения (2.12), (2.13), (2.21) и (2.22) образуют семейство одношаговых разгонных алгоритмов ориентации БИНС по показаниям гироскопических датчиков интегрирующего типа [60].



### 2.3. Экспериментальное исследование эффективности разработанных алгоритмов ориентации БИНС

Для проверки разрабатываемых алгоритмов был использован комплекс программных средств, созданный на кафедре Авиационных приборов и навигационных систем ВВИА им. Н.Е. Жуковского, который позволяет исследовать точность определения ориентации и влияние инструментальных погрешностей датчиков. Данный комплекс был дополнен алгоритмами ориентации, синтезированными в работе. Интерфейсная часть программы представлена на рисунке 2.4

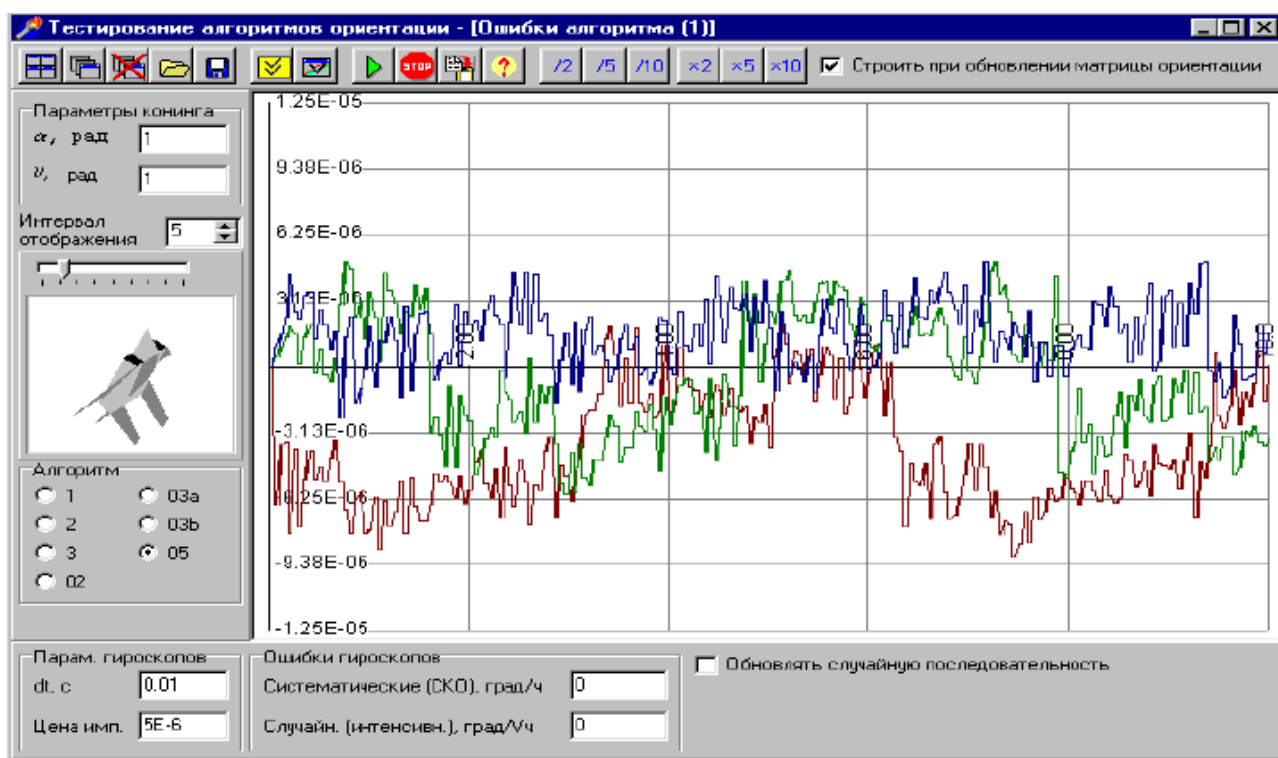


Рис. 2.4 – Интерфейсная часть программы «Тестирование алгоритмов ориентации БИНС»

Проводилось моделирование конического движения блока гироскопических элементов, при котором ось  $Oz$  связанной системы координат описывала коническую поверхность относительно оси  $OZ_{II}$  инерциальной системы координат. Выходной сигнал гироскопического блока (квазикоординаты) имел временную дискретность 1 мс и обрабатывался с помощью разгонного одношагового [алгоритма 6] (2.12), (2.13), (2.21). Имитация погрешностей гироскопического блока не производилась.

Типовое поведение погрешностей алгоритма, имеющее место при параметрах конического движения (конинга)  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\nu = \pi c^{-1}$ , представлено на

рисунке 2.5. Линией зеленого цвета обозначена погрешность определения матрицы направляющих косинусов по оси  $Ox$ . Аналогичные параметры для осей  $Oy$  и  $Oz$  представлены линиями красного и синего цвета соответственно.

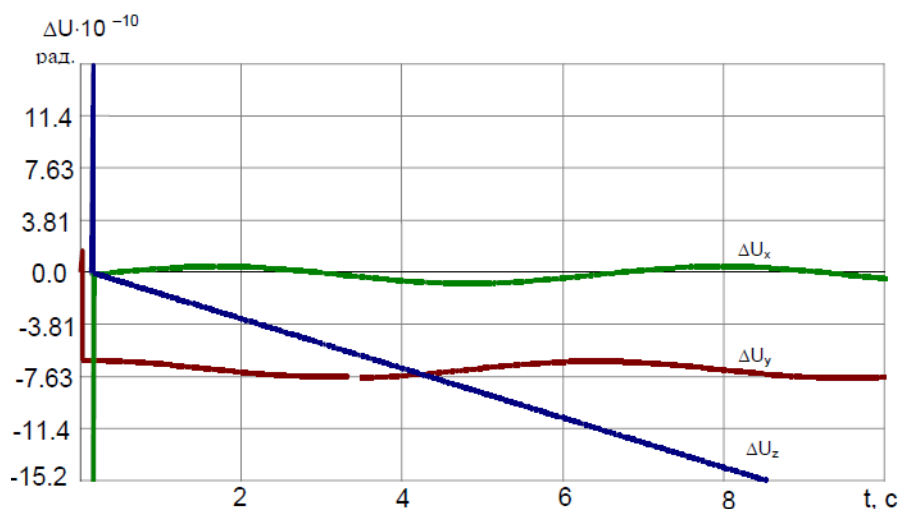


Рис. 2.5 – Погрешности одношагового разгонного [алгоритма 6] при параметрах конинга  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\nu = \pi \text{ c}^{-1}$

Из данных представленных на рисунке 2.5. видно, что при коническом движении гироскопического блока БИНС нарастает составляющая погрешности ориентации  $\Delta U_z$  по оси связанной системы координат  $Oz$ , описывающей коническую поверхность. Погрешности ориентации  $\Delta U_x$  и  $\Delta U_y$  соответственно по осям связанной системы координат  $Ox$  и  $Oy$  имеют статический колебательный характер с незначительной амплитудой и поэтому могут не рассматриваться. Необходимо отметить, что данная ситуация наблюдается для всех типов алгоритмов как разгонных, так и безразгонных при различных параметрах конинга.

Скачки параметров в начале моделирования вызваны наличием неопределенности о значении выходных параметров блока гироскопов в момент старта. Данное свойство характерно для всех разгонных алгоритмов. При проведении моделирования не вводились ошибки квантования сигналов и инструментальные погрешности гироскопов.

Исследуем точность определения ориентации для алгоритмов синтезированных в второй главе. Анализ точностных характеристик синтезированных алгоритмов ориентации БИНС проводился для различных параметров конинга:  
 1  $\rightarrow$  ( $\alpha = 0,087 \text{ рад}$ ,  $\nu = 1 \text{ рад} / \text{с}$ );  
 2  $\rightarrow$  ( $\alpha = 0,5 \text{ рад}$ ,  $\nu = 1 \text{ рад} / \text{с}$ );  
 3  $\rightarrow$  ( $\alpha = 0,087 \text{ рад}$ ,  $\nu = 0,5 \text{ рад} / \text{с}$ ).

Для графиков на рисунках 2.6 и 2.7 слева представлены ошибки определения матриц направляющих косинусов  $U$  в виде случайного сигнала для алгоритмов ориентации по осям  $X, Y, Z$  для параметров конинга (1). По осям  $X, Y$  ошибка постоянна и имеет минимальное значение, поэтому её не рассматриваем. По оси  $Z$  наблюдается её рост. Ошибки ориентации возникают вследствие углового движения объекта по оси  $OZ$  описывающей коническую поверхность.

Для графиков на рисунках 2.6 и 2.7 справа представлены ошибки определения матриц направляющих косинусов  $\Delta U$  в виде случайного сигнала, представленного в виде тренда (после обработки результатов МНК) для алгоритмов ориентации по оси  $Z$ , для параметров конинга (1), (2), (3).

Анализ графиков показывает, что для параметров конинга (1) величины ошибок за исключением алгоритма (1) не выходят за допустимые пределы ( $10^{-3}$  град/ч), необходимые для высокоточного определения координат. Это говорит о возможности использования данного семейства алгоритмов для определения ориентации в БИНС. Алгоритм (1) для параметров конинга (2) имеет ошибку соизмеримую с инструментальной ошибкой гироскопов, этот факт подтверждает актуальность проблемы разработки и выбора высокоточных алгоритмов ориентации БИНС.

Общий вывод по графикам: С увеличением угла конинга наблюдается рост погрешности по оси  $Z$  (график 2 по сравнению с графиком 1). Также на рост погрешности влияет увеличение угловой скорости конинга (график 1 по сравнению с графиком 3). Все это говорит о необходимости использования на этапах захода на посадку и посадки (углы и угловые скорости конинга имеют динамический характер) более точных алгоритмов ориентации. При этом надо учитывать применение быстродействующих БВМ, т.к. у более точных алгоритмов более длительное время реализации. Все это относится к безразгонным алгоритмам. Для разгонных алгоритмов время реализации зависит от частоты опроса датчиков (гироскопов).

Общие характеристики алгоритмов. С увеличением шаговости наблюдается уменьшение погрешности алгоритмов как для разгонных, так и для безразгонных. Сравнивая точностные характеристики синтезированных алгоритмов можно сделать вывод, что самыми точными являются алгоритмы (7) и (6), они относятся к классу разгонных, что подтверждает теоретические выводы. Далее по мере убывания точности алгоритмы представлены следующим образом: (4+), (5), (4), (3.1), (3), (2) и (1). Если сравнивать два однотипных 4-х шаговых алгоритма, то можно сделать вывод, что алгоритм (4+) точнее, чем алгоритм (4) на 25% [60].

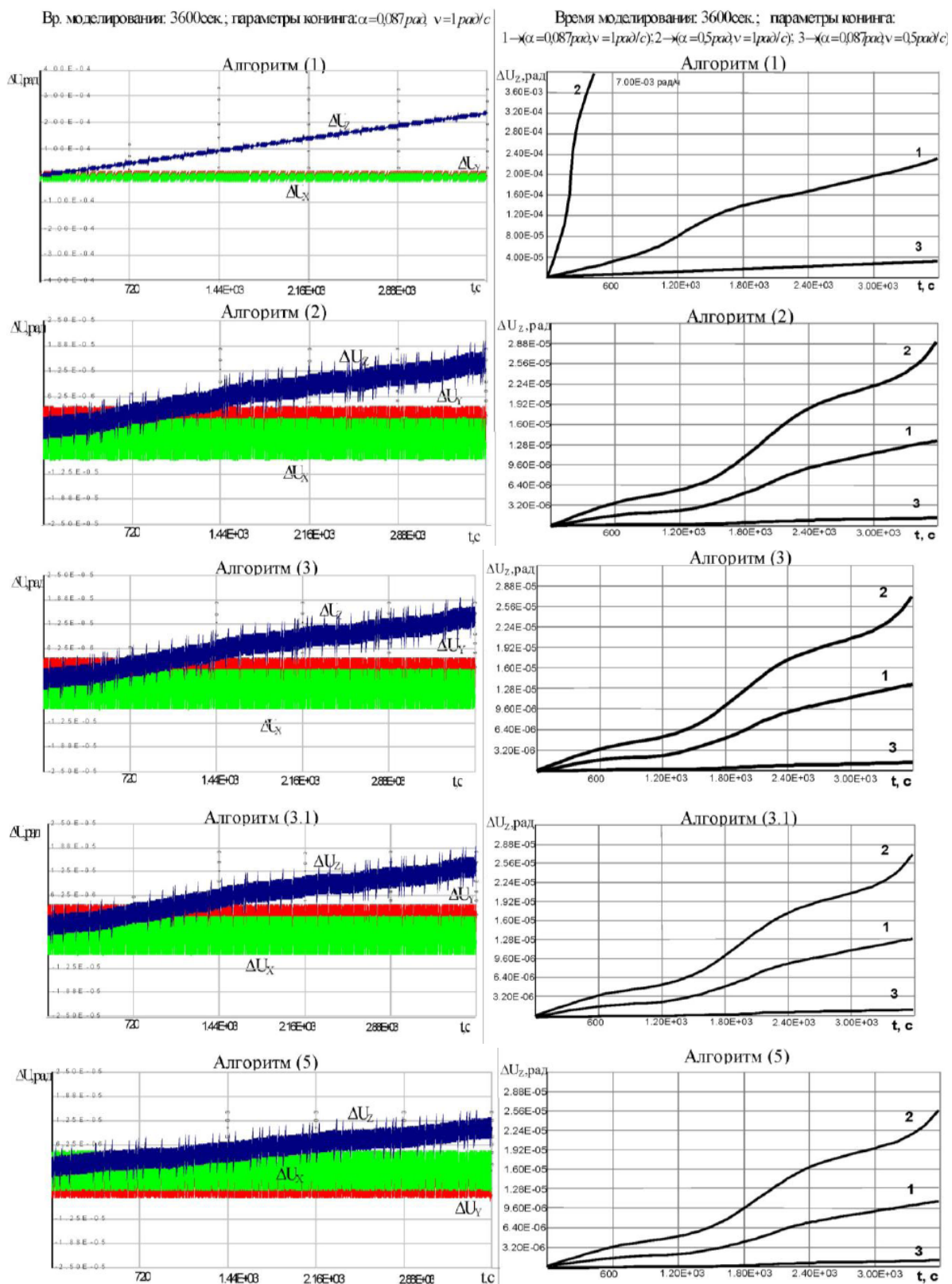
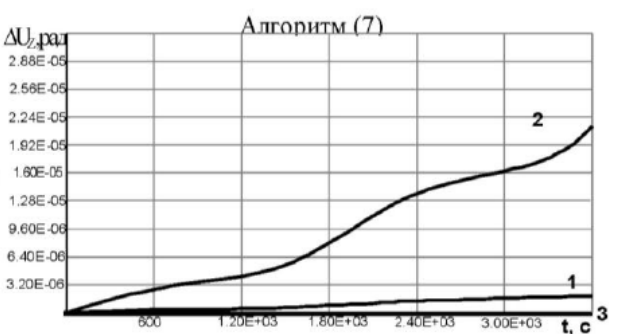
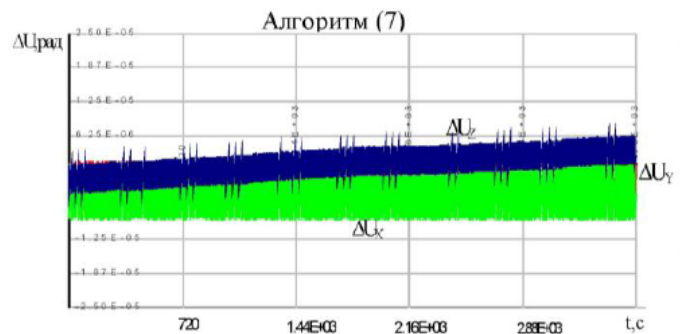
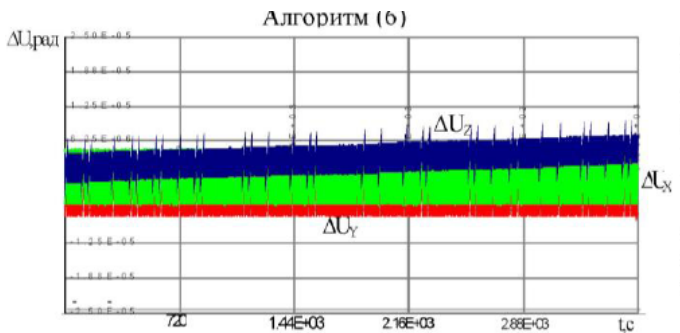
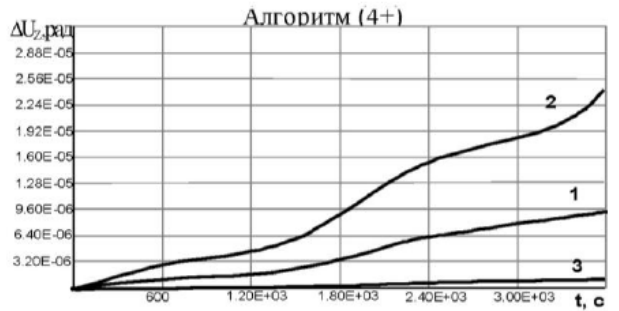
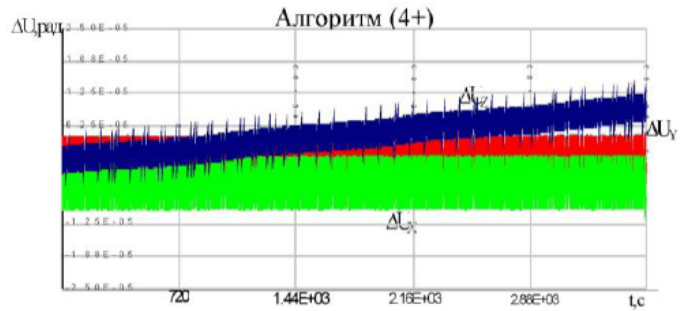
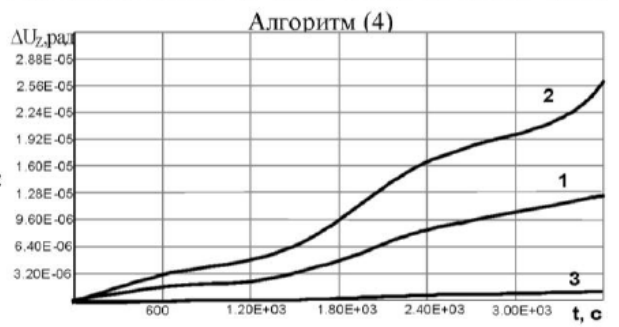
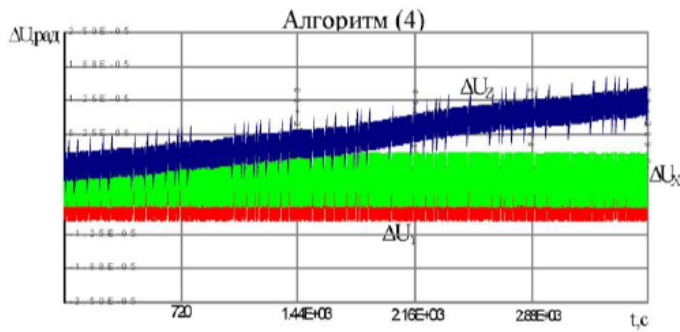


Рис. 2.6 – Результаты исследований синтезированных безразгонных алгоритмов ориентации БИНС

Вр. моделирования: 3600сек.; параметры конинга:  $\alpha=0,087\text{ рад}$ ,  $\nu=1\text{ рад/с}$

Время моделирования: 3600сек.; параметры конинга:  
 1→( $\alpha=0,087\text{ рад}$ ,  $\nu=1\text{ рад/с}$ ); 2→( $\alpha=0,5\text{ рад}$ ,  $\nu=1\text{ рад/с}$ ); 3→( $\alpha=0,087\text{ рад}$ ,  $\nu=0,5\text{ рад/с}$ )



Общие характеристики алгоритмов

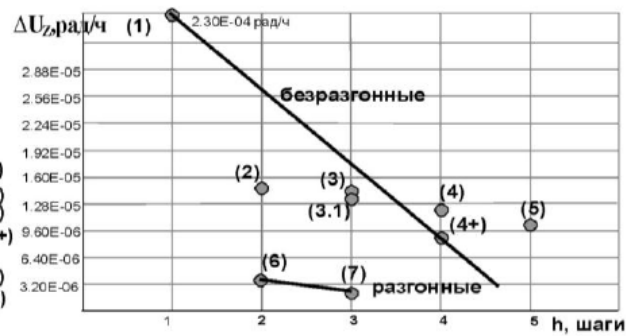
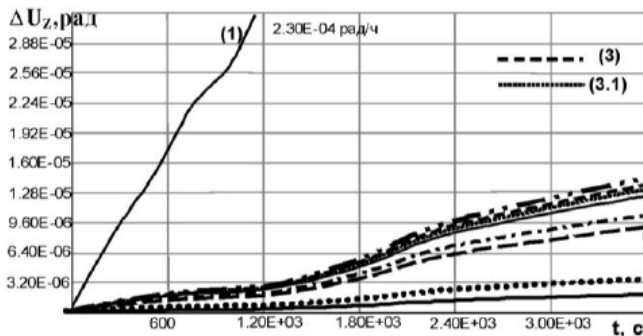


Рис. 2.7 – Результаты исследований синтезированных безразгонных и разгонных алгоритмов ориентации БИНС

## Выводы по главе 2

1. Одним из наиболее неблагоприятных для БИНС и эффективных для выявления методических погрешностей алгоритма ориентации является коническое движение, то есть периодическое угловое движение объекта, при котором одна из его осей (ось OZ) описывает коническую поверхность (кони́нг). В этом случае гироскопический блок БИНС измеряет угловую скорость относительно оси симметрии конуса. С другой стороны, такое движение имеет весьма простое математическое и геометрическое описание, что облегчает его моделирование с использованием вычислительной техники.

2. Для исследования методических погрешностей алгоритма ориентации в ряде случаев можно использовать имитационное моделирование. При построении имитационной модели необходимо синтезировать математические модели конического движения воздушного судна, имитатора интегрирующих гироскопов, а также использовать соответствующие алгоритмы ориентации БИНС.

3. Экспериментальное исследование эффективности разработанных алгоритмов ориентации БИНС позволяет вывести ряд закономерностей. С увеличением шаговости наблюдается уменьшение погрешности алгоритмов, как для разгонных, так и для безразгонных. Сравнивая точностные характеристики синтезированных алгоритмов можно сделать вывод, что самыми точными являются алгоритмы (7) и (6), они относятся к классу разгонных, что подтверждает теоретические выводы. Далее по мере убывания точности алгоритмы представлены следующим образом: (4+), (5), (4), (3.1), (3), (2) и (1). Если сравнивать два однотипных 4-х шаговых алгоритма, то можно сделать вывод, что алгоритм (4+) точнее, чем алгоритм (4) на 25%.

4. Анализ результатов моделирования синтезированных алгоритмов ориентации БИНС указывает на закономерный рост ошибок при увеличении угла конинга. Аналогичный характер поведения ошибок проявляется при увеличении угловой скорости вращения конинга. Однако величины ошибок не выходят за допустимые пределы ( $10^{-3}$  град/ч), необходимые для высокоточного определения координат. Это говорит о возможности использования данного семейства алгоритмов для определения ориентации в БИНС, а также необходимости использования на этапах захода на посадку и посадки (углы и угловые скорости конинга имеют динамический характер) более точных алгоритмов ориентации. При этом надо учитывать необходимость применения быстроредействующих БВМ, т.к. у более точных алгоритмов более длительное время реализации. Вышесказанное относится к безразгонным алгоритмам. Для разгонных алгоритмов время реализации зависит от частоты опроса датчиков (гироскопов).

## Литература

1. Буков В.Н. Основы интеграции систем авиационного оборудования: Материалы лекций. / В.Н. Буков, С.В. Горюнов, В.В. Косьянчук, В.С.Кулабухов, А.И. Наумов, В.Н. Рябченко – М.: ВАТУ им. Е.Жуковского, 2002.- 180с.
2. Буков В.Н. Оптимизация человеко-машинных систем на основе прогнозирования функционального состояния оператора. // АиТ. — 1995. №12, — с.124-137.
3. Буков В.Н. Метод и алгоритмы решения сингулярно-вырожденных задач аналитического конструирования регуляторов / В.Н. Буков, В.Н. Сизых // Изв. АН. Теория и системы управления. — 2001. — №5.
4. Справочник по теории автоматического управления. Под редакцией А.А. Красовского.– М.: Наука, 1987.
5. Красовский, А.А. Аналитическое конструирование контуров управления летательными аппаратами /А.А. Красовский. – М.: Машиностроение, 1969. – 241 с.
6. Красовский, А.А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование / А.А. Красовский. – М.: Наука, 1973 – 560 с.
7. Скрыпник О.Н. Анализ алгоритмов обработки информации в интегрированных системах навигации / О.Н. Скрыпник, В.В. Ерохин. //В сб.: НТК ВАТУ им. Н.Е. Жуковского. – М.: ВВИА, 2000.
8. Скрыпник О.Н. Анализ точностных характеристик интегрированной системы навигации / О.Н. Скрыпник, В.В. Ерохин. // Науч. тр. адъюнктов и соискателей Иркут. ВАИИ. вып.6. – Иркутск. – 2001.
9. Панов А.П. Математические основы теории инерциальной ориентации / А.П. Панов. — Киев: Наукова думка, 1995. - 280с.
10. Бабич, О.А. Обработка информации в навигационных комплексах / О.А. Бабич. – М.: Машиностроение, 1991. – 512 с.
11. Bortz J.E. A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation. IEEE Transactions on aerospace and electronic systems, Vol. AES-7 № 1, 1971.
12. Savage P.G. Strapped-down system algorithms. Document LS-133, Pt.3, Apr. 1984
13. Котлов Ю.В. Чернов В.Ф. О методике синтеза структуры систем управления сложными динамическими объектами по векторному критерию. Материалы научно-технической конференции ВВИА «Проблемы разработки комплексов авиационного оборудования нового поколения», Москва, ВВИА, 1998, с. 45-48
14. Котлов Ю.В., Чернов В.Ф. Алгоритм сужения паретовского множества на графовой модели в задачах выбора. Сборник научных трудов адъюнктов и соискателей, вып. 2, Иркутск, ИВВАИУ, 1996, с.47-50.
15. Котлов Ю.В., Чернов В. Ф. Алгоритмы оценки и оптимизации множества альтернатив в многокритериальных задачах выбора. Оптимизация, управление, интеллект, вып. 3, Иркутск, ИДСТУ СО РАН 1999, с.153-166.
16. Воробьев В.Г. Надежность и эффективность авиационного оборудования. Учеб. для вузов. / В.Г. Воробьев, В.Д. Константинов – М.: Транспорт, 1995. –249с.
17. Воробьев В.Г. Техническое обслуживание и ремонт авиационных электросистем и пилотажно-навигационных комплексов. Учебное пособие. / В.Г. Воробьев, В.Д. Константинов – М.: МГТУ ГА, 2007. –472с.

18. Далецкий С.В. Формирование эксплуатационно-технических характеристик воздушных судов гражданской авиации. / С.В. Далецкий – М.: Воздушный транспорт, 2005. –416с.
19. Ицкович А.А. Управление эффективностью процесса технической эксплуатации гражданской авиации. / А.А. Ицкович, Н.Н.Смирнов – М. МИИГА, 1993. –368с.
20. Воробьев В.Г. Основы теории технической эксплуатации пилотажно-навигационного оборудования. / В.Г.Воробьев В.Г., В.П.Зыль, С.В.Кузнецов – М.: Транспорт, 1999.
21. Состояние и пути совершенствования системы поддержания летной годности отечественных самолетов раннего и нового поколений . Материалы межведомственной конференции в ЗАО «АТБ Домодедово». 29 сентября 2011г.– Электронные интернет - ресурсы. (<http://www.aviaport.ru>....)
22. Анализ опыта летной и технической эксплуатации самолетов Ту-204 всех модификаций в российских авиакомпаниях. Материалы летно технической конференции в Минеральных Водах. 30 июня 2010 г.– Электронные интернет- ресурсы. (<http://www.aviaport.ru>....)
23. Кивокурцев А.Л. Вопросы технической эксплуатации интегрированных комплексов бортового оборудования современных самолетов. / А.Л. Кивокурцев // В сб.: Авиамашиностроение и транспорт Сибири. Сборник статей II Всероссийской научно-практической конференции, приуроченной ко Дню космонавтики. 11-13 апреля 2012г.- Иркутск: ИрГТУ, 2012. с. 61-69.
24. Кивокурцев А.Л. Повышение эффективности процесса технической эксплуатации на основе отказоустойчивости бортовой авионики. / А.Л. Кивокурцев // В сб.: Гражданская авиация на современном этапе развития науки, техники и общества. Сборник тезисов докладов участников Международной научно-технической конференции, посвященной 40-летию образования МГТУ ГА. 26 мая 2011г.- М.: МГТУ ГА, 2011. с. 131.
25. Кивокурцев А.Л. Использование в учебном процессе опыта эксплуатации интегрированных комплексов бортового оборудования современных самолетов. / А.Л. Кивокурцев // В сб.: Актуальные проблемы и перспективы развития гражданской авиации -2012. Сборник трудов Всероссийской научно-практической интернет-конференции преподавателей, научных работников и аспирантов 1 марта 2012г. - Иркутск: ИФ МГТУ ГА, 2012. с. 65-71.
26. Кирпичев Е.Г. Основы стратегии формирования конкурентных преимуществ российской авиационной техники на современном этапе. / Е.Г. Кирпичев, А.А. Кулешов, В.С. Шапкин – М.: Воздушный транспорт, 2007. – 336с.
27. Фёдоров С.М. Бортовые информационно-управляющие системы. / С.М. Фёдоров, О.И. Михайлов, Н.Н. Сухих– М.: Транспорт, 1994. – 276с.
28. Абрамов Б.М. Создание первого отечественного комплекса стандартного цифрового пилотажно-навигационного оборудования (КСЦПНО-96-204 и ЦПНК-114)./ Б.М. Абрамов, А.А. Польский А.А.- ФГУП НИИАО. Авиакосмическое приборостроение, 2003, №1.
29. Воробьев В.Г. Комплексы цифрового пилотажно-навигационного оборудования. Часть 2. Комплекс стандартного пилотажно-навигационного оборудования



- самолета Ту-204 Учебное пособие. / В.Г.Воробьев В.Г., В.П.Зыль, С.В.Кузнецов – М.: МГТУ ГА, 1998. –124с.
30. Устинов В.В. Авиационное оборудование самолета Ил-76 как объекта эксплуатации. Учебное пособие. Гриф УМО. / В.В.Устинов, Д.В.Целищев, В.М.Попов, А.Л. Кивокурцев. Иркутск: ИФ МГТУ ГА, 2012. – 232 с.
31. Алакоз Г.М. Бортовые цифровые вычислительные устройства и машины. Учебное пособие. / Г. М. Алакоз, Ю. Н. Герасимчук, С. М.Кастерский, Б. О. Качанов, Ю. А. Кочетков, П. В. Кравченко, А. И.Неизвестных, В. В.Шишкин / Под ред. Б.О.Качанова. – М.: ВВИА им.проф. Н. Е. Жуковского, 2005. –464с.
32. Кивокурцев А.Л. Перспективы развития и возможность сертификации цифровых пилотажно-навигационных комплексов. / А.Л.Кивокурцев // В сб.: Актуальные проблемы и перспективы развития гражданской авиации России. Сборник трудов I научно-практической конференции преподавателей, научных работников и аспирантов 26 ноября 2009г.– Иркутск: ИФ МГТУ ГА, 2009 с. 42-50.
33. Матов В. И. Бортовые цифровые вычислительные машины и системы / В. И. Матов, Ю. А. Белоусов, Е. П. Федосеев; Под ред. В. И.Матова. - М.: Высшая школа, 1988. –216 с.
34. Авиация России и научно-технический прогресс: Боевые комплексы и системы вчера, сегодня, завтра / Под ред. Е.А. Федосова— М.: Дрофа, 2001.–816 с.
35. Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления: Учебник / Под ред. Н.Д. Егупова— М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. - 744с.
36. Рассел Р.М. Вычислительная система CRAY-1. / Р.М. Рассел // Труды ИИ-ЭР.Т.66, №10. — М.: Наука, 1978, с. 76-91.
37. Павлюченко В.В. Некоторые проблемы надежности программного обеспечения. / В.В. Павлюченко, И.И. Тихий // В сб.: Научные труды адъюнктов и соискателей., вып. 2. – Иркутск: ИВВАИУ, 1996. с. 36-40
38. Согомонян Е.С. Аппаратурное и программное обеспечение отказоустойчивости вычислительных систем. / Е.С. Согомонян, И.В. Шагаев Автоматика и телемеханика, 1988, № 2, с. 3-39.
39. Руднев Ю. П. Повышение надежности цифровых устройств методами избыточного кодирования / Ю. П. Руднев, Я. А. Хетагуров. - М.: Энергия, 1974. –236 с.
40. Харари Ф. Теория графов. Пер. с англ. / Ф. Харари.— М.: Мир, 1973. - 320с.
41. Оре О. Графы и их применение. Пер. с англ. / О. Оре — М.: Мир, 1965. - 275с.
42. Флин М. Сверхбыстродействующие вычислительные системы. Пер. с англ./ М. Флин // Труды ИИЭР.Т.54, №12. — М.: Наука, 1986. – с. 28-35.
43. Кивокурцев А.Л. Оценка производительности иерархической бортовой вычислительной системы с активной защитой от отказов. / А.Л.Кивокурцев. // В сб.: Научные труды ИВВАИУ (ВИ), вып. 6. – Иркутск: ИВВАИУ, 2006. с. 95-99.
44. Кивокурцев А.Л. Методика оценки производительности отказоустойчивой вычислительной системы интегрированного комплекса бортового оборудования. / А.Л. Кивокурцев, О.Н. Скрыпник //Научный вестник МГТУ ГА, № 187.- М.: МГТУ ГА, 2013. с. 168-170

45. Шубинский И.Б. Активная защита от отказов управляющих модульных вычислительных систем. / И.Б. Шубинский, А.П. Сельвестров. — М.: Наука, 1993. — 247 с.
46. Александров А.С. Современное состояние и тенденции развития зарубежных средств и систем навигации подвижных объектов военного и гражданского назначения. / А.С. Александров, Г.Р. Арно — С.-П.: Главное управление навигации и океанографии М.О. Р.Ф., 1994. —276 с.
47. Кивокурцев А.Л. Состояние и перспективы развития инерциальных навигационных систем. / А.Л. Кивокурцев // В сб.: Научные труды адъюнктов и соискателей, вып. 6. — Иркутск: ИВАИИ, 2001. с.32-37.
48. Кивокурцев А.Л. Актуальные проблемы и перспективы развития инерциальных навигационных систем. / А.Л. Кивокурцев, С.В. Мишин // В сб.: Актуальные проблемы развития авиационной техники и методов её эксплуатации — 2010. Сборник трудов III научно-технической конференции студентов и аспирантов 7 мая 2010г. —Иркутск: ИФ МГТУ ГА, 2010 г. с. 6-14.
49. Кивокурцев А.Л. Перспективы развития и эксплуатационные особенности бесплатформенных инерциальных навигационных систем. / А.Л.Кивокурцев // В сб.: Гражданская авиация на современном этапе развития науки, техники и общества. Сборник тезисов докладов участников Международной научно-технической конференции, посвященной 40-летию образования МГТУ ГА 26 мая 2011г.- М.: МГТУ ГА, 2011. с. 130.
50. Коробка. Н.И. Квантовая микромеханика: гироскопы на волнах де Бройля и квантовых свойствах сверхтекучести жидкостей. Тенденции развития и состояние разработок. / Н.И. Коробка. — Гироскопия и навигация. №3, 2009. — с. 36-49.
51. Распопов. В.Я. Инерциальные чувствительные элементы. Ч2. Акселерометры (аналитический обзор). / В.Я. Распопов. — Мир авионики. №3, 2008. — с. 32-45.
52. Распопов. В.Я. Инерциальные чувствительные элементы. Ч1. Гироскопы (аналитический обзор). / В.Я. Распопов. — Мир авионики. №1, 2008. — с. 52-59, 42-48.
53. Распопов. В.Я. Инерциальные чувствительные элементы. Ч1. Гироскопы (аналитический обзор). / В.Я. Распопов. — Мир авионики. №2, 2008. — с 42-48.
54. Savage, P.G., Strapdown Inertial Navigation Integration Algorithm Design Part 1: Attitude Algorithms, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, VO1.21, No.1,2 1998.
55. Кивокурцев А.Л. Приближённые алгоритмы ориентации бесплатформенной инерциальной навигационной системы. / А.Л. Кивокурцев. // В сб.: Научные труды ИВАИИ, вып. 4. — Иркутск: ИВАИИ, 2003. с.31-36.
56. Кивокурцев А.Л. Гироскопические датчики БИНС. / А.Л. Кивокурцев // В сб.: Научные труды адъюнктов и соискателей, вып. 7. — Иркутск: ИВАИИ, 2002. с.39-46.
57. Кивокурцев А.Л. Принцип построения, характерная особенность перспективных датчиков кажущегося ускорения. / А.Л. Кивокурцев, С.П.Назаров // В сб.: Научные труды ИВАИИ, вып. 4. — Иркутск: ИВАИИ, 2003. с.53-57.
58. Михальченко С.В. Обработка сигналов интегрирующих гироскопов в БИНС для определения ориентации летательного аппарата. / С.В.Михальченко, О.И. Федо-

скин // В сб.: Авиационные приборы и навигационные системы летательных аппаратов. Под ред. Е.Е. Семенова. — М.: ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 1996. — с. 107–114.

59. Кивокурцев А.Л. Алгоритмическое обеспечение бесплатформенной инерциальной навигационной системы с экономным расходом вычислительных ресурсов. / А.Л. Кивокурцев // В сб.: Проблемы повышения боевой готовности, боевого применения, технической эксплуатации и обеспечения безопасности полётов ЛА с учётом климотогеографических условий Сибири, Забайкалья и Дальнего Востока. Материалы XIII Всероссийской научно-технической конференции. Часть 1. — Иркутск: ИВАИИ, 2003. с. 170-173.

60. Кивокурцев А.Л. Синтез высокоточного безразгонного экономичного алгоритма блока ориентации авиационной бесплатформенной инерциальной навигационной системы. / А.Л. Кивокурцев, С.В. Мишин // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. Научный журнал, № 2(38).- Иркутск: ИрГУПС, 2013. – с.168-174.

61. Кивокурцев А.Л. Разгонные и безразгонные алгоритмы ориентации для перспективных бесплатформенных инерциальных навигационных систем. / А.Л. Кивокурцев., С.В. Михальченко, С.В. Фесенко // В сб.: Научные труды ИВАИИ, вып. 4. — Иркутск: ИВАИИ, 2003. с.36-40.

62. Кивокурцев А.Л. Семейство экономичных алгоритмов для авиационной бесплатформенной инерциальной навигационной системы. /А.Л.Кивокурцев // Вестник ИГТУ, серия машиноведение №4(28). — Иркутск: ИГТУ, 2006. с.95-97.

63. Кивокурцев А.Л. Использование правила Рунге при синтезе экономичного четырехшагового алгоритма ориентации повышенной точности для бесплатформенной инерциальной навигационной системы. / А.Л.Кивокурцев // В сб.: Информационные системы контроля и управления в промышленности и на транспорте. Сборник научных трудов, вып.20.— Иркутск: ИрГУПС, 2011. с.126-133.

64. Бранец В.Н. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. / В.Н. Бранец, И.П. Шмыглевский И.П. — М.: Наука, 1992. - 280с.

65. Калиткин Н.Н. Численные методы. / Н.Н. Калиткин— М.: Наука, 1978. — 258-261с.

66. Кочетков Ю.А. Основы автоматики авиационного оборудования. / Ю.А. Кочетков — М.: ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 1995. — 574 с.

67. Михальченко С.В., Федоскин О.И. Моделирование конического движения БИНС для исследования алгоритмов ориентации. / С.В. Михальченко, О.И. Федоскин // В сб.: Авиационные приборы и навигационные системы летательных аппаратов. Под ред. Е.Е. Семенова. — М.: ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 1996. — с. 80–84.

68. "БАГЕТ" – семейство ЭВМ для специализированных применений.КБ КО-РУНД-М. Рекламные материалы

69. Авиационная техника на международных авиасалонах в 1997 году. Обзор под ред. Е. А. Федосова. -М: ГосНИИАС, 1998 г.

70. БЦВМ 486-1, БЦВМ 90. Руководства по технической эксплуатации.

71. Козлов Д.И. Управление космическими аппаратами зондирования Земли: Компьютерные технологии./ Д.И. Козлов, Г.П. Аншаков, Я.А. Мостовой, А.В. Сологуб. М: Машиностроение, 1998. - 368с.
72. Алгоритмическое обеспечение БИНС с наименьшим расходом вычислительных ресурсов БЦВМ. Отчет по НИР. Шифр «Барон-2000». – Иркутск: ИВАИИ, 2002.
73. Бродин В.Б. Микропроцессор i486. Архитектура, программирование, интерфейс. / В.Б. Бродин. М: Диалог-МИФИ, 1993. - 240с.
74. Гук М.И. Процессоры Pentium II, Pentium Pro, и просто Pentium. / М.И. Гук. СПб: Пи-тер Ком, 1999. - 288с.
75. Ю-Чжен Лю. Микропроцессоры семейства 8086/8088. Архитектура, программирование и проектирование микрокомпьютерных систем: Пер. с англ. / Ю-Чжен Лю, Г. Гибсон М: Радио и связь, 1987. - 512с.
76. Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления: Учебник / Под ред. Н.Д. Егупова— М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. - 744с.
77. Подиновский В. В. Парето – оптимальные решения многокритериальных задач. / В. В. Подиновский, В. Д. Ногин– М.: Наука, 1982.
78. Кивокурцев А.Л. Оптимизация выбора алгоритмов БИНС в составе интегрированного комплекса бортового оборудования самолета фронтовой авиации. / А.Л. Кивокурцев, С.П. Назаров //Вестник ИГТУ, №4(28). Том 1 – Иркутск: ИГТУ, 2006. с.92-99.
79. Кивокурцев А.Л. Оптимизация выбора алгоритмов бесплатформенной инерциальной навигационной системы в составе интегрированного комплекса бортового оборудования дальнемагистрального самолета. / А.Л. Кивокурцев, С.В. Мишин //Научный вестник МГТУ ГА, №187.- М.: МГТУ ГА, 2013. с. 164-167.
80. Кивокурцев А.Л. Оптимизация алгоритмов ориентации бесплатформенной инерциальной навигационной системы. / А.Л. Кивокурцев// В сб.: Информационные системы контроля и управления на транспорте. Автоматизация технологических процессов в промышленности и на транспорте. Сб. научных трудов, вып. 11.– Иркутск: ИрГУПС, 2004.с.29-32.
81. Кивокурцев А.Л. Решение задачи оптимизации при синтезе алгоритмов бесплатформенной инерциальной навигационной системы. / А.Л.Кивокурцев., С.П. Назаров // В сб.: Проблемы повышения боевой готовности, боевого применения, технической эксплуатации и обеспечения безопасности полётов ЛА. Материалы XIV Всероссийской научно-технической конференции. Часть 2. –Иркутск: ИВВА-ИУ(ВИ), 2005. с. 32-36.
82. Кивокурцев А.Л. Использование скользящего резервирования для построения отказоустойчивых интегрированных комплексов бортового оборудования. / А.Л. Кивокурцев., // В сб.: Актуальные вопросы исследований в авионике: теория, обслуживание, разработки. Сборник тезисов докладов Всероссийской научно-практической конференции. – Воронеж: ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», 2014. – с.125-126.
83. Матов В. И. Теория проектирования вычислительных машин, систем и комплексов. / В.И. Матов, Г.Т. Артамонов, О.М. Брехов, Ю.А. Голубков, К.А. Иыуду. / Под ред. В. И. Матова. - М.: МАИ, 1999. –460 с.

84. Тихий И.И. Организация диагностирования отказовых ситуаций различного типа в распределенных вычислительных системах. / И.И. Тихий, В.В. Кашковский // Контроль. Диагностика, №10 (136)–2009.–с.56-62.
85. Тихий И.И. Самодиагностирование комплекса оборудования с использованием структур взаимоконтроля по минимально-необходимому числу проверок. / И.И. Тихий, В.В. Кашковский // Контроль. Диагностика, №2 (128) – 2009. – с.62-68.
86. Мухопад Ю.Ф. Теория дискретных устройств. / Ю.Ф. Мухопад – Иркутск: ИрГУПС, 2008. – 432 с.
87. Мухопад Ю.Ф. Адаптивный подход к нейронному управлению одним классом абсолютно устойчивых систем. / Ю.Ф. Мухопад, Н.Н.Пашков, В.Н. Сизых // Журнал «Фундаментальные исследования». №8 Ч.1. – М.:РАЕ, 2011. – с.139-147.
88. Рябинин А.Л. Методика формирования требований к эксплуатационно-техническим характеристикам бортового оборудования на основе математического моделирования из условия снижения суммарных расходов на эксплуатацию гражданских воздушных судов. / Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук: специальность 05.22.14. – Эксплуатация воздушного транспорта. – М.: МГТУ ГА, 2001.–199 с.