

Ю. Ф. Лазарєв
П. М. Бондар

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЧУТЛИВИХ ЕЛЕМЕНТІВ СИСТЕМ ОРІЄНТАЦІЇ

*Підручник
для студентів вищих технічних навчальних закладів*

Київ ПОЛІТЕХНІКА 2010

РЕЦЕНЗЕНТИ:

- Онищенко С. М.,** доктор фізико-математичних наук, професор, академік Міжнародної академії навігації та управління рухом, Інститут математики НАН України
- Черняк С. І.,** доктор технічних наук, головний конструктор КП "ЦКБ Арсенал"
- П'ятецький В. О.,** кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри теоретичної і прикладної механіки Київського національного університету ім. Т. Г. Шевченка

Л17

Лазарев Ю. Ф., Бондар П. М. Основи теорії чутливих елементів систем орієнтації. Підручник. – К.: , 2009. – 626 с

Розглянуто питання організації прикладного (інженерного) теоретичного дослідження на прикладі чутливих елементів систем орієнтації, методи теоретичного дослідження нелінійних систем і приклади їх застосування. Головну увагу зосереджено на застосуванні наближених методів, широко застосовуваних в інженерній практиці. Викладено основи прикладної теорії гіроскопів і теорії чутливих елементів систем орієнтації, що супроводжується розрахунками і прикладами. Значну увагу приділено побудові програмних моделей за допомогою комп'ютерної системи Matlab і демонструванню можливостей моделювання поведінки розглядуваних пристроїв та приладів. Ці самі моделі покладено в основу практичних робіт, які виконуються на комп'ютерній техніці. Необхідні тексти програм наведено у додатку.

Призначено для студентів технічних і природничих інженерних спеціальностей університетів. Може стати корисним інженерам і аспірантам.

Іл. 313 , Додаток (програми), бібліографія 65, алфавітний покажчик.

Зміст

Передмова	7
Вступ. Навігація, орієнтація, гіроскопи – практика і теорія	9
Прийняті скорочення	14
ЧАСТИНА 1. ОСНОВИ ТЕОРЕТИЧНИХ ІНЖЕНЕРНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ	15
Розділ 1. Основи побудови математичних моделей механічних систем.	18
1.1. Елементи векторної і матричної алгебри	18
1.1.1. Векторна алгебра	18
1.1.2. Форми подання векторів	19
1.1.3. Матрична алгебра	21
1.1.4. Матрична форма подання векторів	24
1.2. Кінематика поворотів твердого тіла	27
1.2.1. Задання положення тіла у просторі	27
1.2.2. Кути Ейлера	30
1.2.3. Знаходження матриці напрямних косинусів	32
1.2.4. Недоліки застосування кутів Ейлера	36
1.2.5. Теорема Ейлера	38
1.2.6. Вектор повороту Гібса	40
1.2.7. Початкові відомості про кватерніони	40
1.2.8. Подання поворотів за допомогою кватерніонів	45
1.2.9. Диференціювання вектора, заданого в обертовій системі координат	50
1.2.10. Визначення проекцій кутової швидкості	53
1.2.11. Швидкість і прискорення точки в її складному русі	54
1.2.12. Швидкість і прискорення точок твердого тіла	56
1.3. Кінематичні рівняння орієнтації	56
1.3.1. Рівняння орієнтації Пуассона	57
1.3.2. Рівняння орієнтації Ейлера	57
1.3.3. Кватерніонне рівняння орієнтації	57
1.3.4. Матричний аналог кватерніонного рівняння орієнтації	59
1.3.5. Рівняння орієнтації штучного супутника Землі	60
1.4. Головні динамічні величини	61
1.4.1. Імпульс і момент імпульсу	61
1.4.2. Геометрія мас твердого тіла	65
1.4.3. Еліпсоїд інерції	66
1.4.4. Кінетична енергія	68
1.5. Форми законів динаміки	69
1.5.1. Форми запису закону імпульсу	69
1.5.2. Форми запису закону моменту імпульсу	70
1.5.3. Формалізм Лагранжа. Рівняння у формі Жільбера	71
1.5.4. Метод кінетостатики і принцип Даламбера	72
Контрольні запитання	73
Задачі	74
Література	79
Розділ 2. Складання математичних моделей.	80
2.1. Маятник за поступального руху основи	80
2.2. Симетричний зрівноважений гіроскоп	83
2.2.1. Рівняння симетричного зрівноваженого гіроскопа в осях Резаля	83
2.2.2. Рівняння симетричного зрівноваженого гіроскопа в формі Булгакова	85
2.3. Симетричний гіромаятник	88
2.3.1. Рівняння гіромаятника у кутах осциляції	89
2.3.2. Рівняння гіромаятника у кутах Ейлера	90
2.4. Гіроскоп у кардановому підвісі	91
2.4.1. Рівняння гіроскопа у кардановому підвісі на нерухомій основі	92
2.4.2. Рівняння Ейлера-Ішлинського. Моменти реакцій у в'язях	94
2.5. Наближені рівняння триступневих гіроскопів і методи їх складання	99
2.5.1. Способи безпосереднього складання прецесійних рівнянь	102
2.5.2. Опорні системи координат. Визначення положення основи	103
2.5.3. Прецесійні рівняння гіроскопа у кардановому підвісі на рухомій основі	105
2.5.4. Гіромаятник на рухомій основі	108
2.5.5. Маятниковий гірокомпас на рухомій основі	110
2.6. Двоступеневий гіроскоп на обертовій основі	113

Контрольні запитання	114
Задачі	115
Література	115
Розділ 3. Методи теоретичного дослідження	116
3.1. Вступ у теорію коливань	116
3.2. Методи теоретичного дослідження лінійних стаціонарних систем	124
3.2.1. Теоретичне дослідження вільного руху	124
3.2.2. Теоретичне дослідження вимушених коливань. Метод комплексних амплітуд	125
3.2.3. Вимушені коливання гіроскопа у кардановому підвісі	130
3.3. Дослідження стійкості руху нелінійних систем	134
3.3.1. Досліджування стійкості за Ляпуновим	135
3.3.2. Достатня і необхідна умова стійкості дзиги (обертового снаряду)	141
3.3.3. Стійкість стаціонарних рухів	145
3.3.4. Стійкість регулярної прецесії дзиги	150
3.3.5. Дослідження стійкості за структурою сил	152
3.4. Наближені методи дослідження нелінійних і нестационарних систем	164
3.4.1. Методи лінеаризації	165
3.4.2. Метод збурень	179
3.4.3. Метод усереднення	187
Контрольні запитання	207
Література	208
ЧАСТИНА 2. ДЕЯКИ ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРИИ	209
Розділ 4. Нелінійні властивості маятника	209
4.1. Точне дослідження власних коливань. Неізохронність власних коливань	210
4.2. Дослідження власних коливань методами лінеаризації	213
4.3. Амплітудно-частотні характеристики вимушених коливань	215
4.4. Випрямний ефект фізичного маятника за вібрації точки його підвісу	218
4.5. Параметричні коливання фізичного маятника при вертикальній вібрації	222
Завдання	229
Контрольні запитання	232
Література	232
Розділ 5. Теорія пасивного віброзахисту	233
5.1. Постановка задачі віброзахисту	233
5.2. Теорія лінійної амортизації	234
5.3. Дія удару на лінійну систему амортизації	236
5.4. Внутрішнє тертя у матеріалі при деформаціях пружних елементів	241
5.5. Віброзахисні системи з внутрішнім тертям	246
5.6. Системи амортизації із сухим тертям	249
Контрольні запитання	252
Література	252
Розділ 6. Метод фазової площини. Автоколивання	253
6.1. Фазові портрети лінійних систем	257
6.2. Фазові портрети нелінійних систем	260
6.3. Перехідний процес і автоколивання торпеди з курсу	261
6.3.1. Теоретичне дослідження	262
6.3.2. Моделювання на ЕОМ	267
Контрольні запитання	271
Література	271
ЧАСТИНА 3. ПРИКЛАДНА ТЕОРІЯ ГІРОСКОПІВ	272
Розділ 7. Симетричний зрівноважений гіроскоп	272
7.1. Визначення і властивості гіроскопа	272
7.2. Рівняння руху симетричного зрівноваженого гіроскопа	277
7.3. Поняття прецесії	280
7.4. Вільний рух симетричного зрівноваженого гіроскопа	283
7.5. Симетричний зрівноважений гіроскоп під дією постійного моменту сил	287
7.6. Поняття швидкого гіроскопа. Псевдорегулярна прецесія	291
7.7. Земля як гіроскоп	292
7.8. Прецесійні рівняння. Наближена теорія гіроскопа	295
7.9. Вплив тертя на поведінку гіроскопа	298
7.10. Моделювання поведінки симетричного зрівноваженого гіроскопа	305
Завдання	311
Задачі	313

Контрольні запитання	315
Література	316
Розділ 8. Гіромаятник	317
8.1. Вільний рух гіромаятника. Точні дослідження	319
8.2. Регулярні прецесії гіромаятника	325
8.3. Вільний рух гіромаятника. Наближені дослідження. Метод компресії	328
8.4. Вплив тертя на поведінку гіромаятника	333
Завдання	338
Задачі	339
Контрольні запитання	340
Література	340
Розділ 9. Гіроскоп у кардановому підвісі на нерухомій основі	341
9.1. Вільний рух гіроскопа у кардановому підвісі. Дрейф Магнуса	344
9.1.1. Дослідження руху за прецесійною моделлю	
Помилка! Закладка не определена. 345	
9.1.2. Дослідження руху за лінеаризованою моделлю	345
9.1.3. Метод зображувальної точки Ніколаї. Компресія рівнянь	348
9.1.4. Точне дослідження повних рівнянь гіроскопа у кардановому підвісі	350
9.1.5. Дрейф Магнуса	353
9.1.6. Фізична причина дрейфу Магнуса	355
9.1.7. Моделювання поведінки гіроскопа у кардановому підвісі	360
9.2. Дія на гіроскоп у кардановому підвісі сталих моментів сил і сил тертя	364
9.2.1. Рух гіроскопа у кардановому підвісі під дією постійних моментів сил	364
9.2.2. Рух гіроскопа у кардановому підвісі під дією моментів сил в'язкого тертя	368
9.2.3. Рух гіроскопа у кардановому підвісі під дією моментів сил сухого тертя. Метод Ніколаї	370
9.3. Дія на гіроскоп у кардановому підвісі періодичних моментів сил	374
9.3.1. Усталені вимушені коливання	376
9.3.2. Дрейфи гіроскопа у кардановому підвісі під дією періодичних моментів сил	377
9.3.3. Дрейф гіроскопа у кардановому підвісі через динамічну незбалансованість ротора	386
9.4. Дія на гіроскоп у кардановому підвісі моментів сил по головній осі	389
9.4.1. Рух гіроскопа у кардановому підвісі з закритим гіромотором	389
9.4.2. Розгін ротора асинхронним гіродвигуном	390
9.4.3. Рух гіроскопа у кардановому підвісі з відкритим гіромотором	391
9.4.4. Фізична причина руху гіроскопа у кардановому підвісі під дією моментів по головній осі	393
Завдання	394
Задачі	396
Контрольні запитання	396
Література	397
ЧАСТИНА 4. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЧУТЛИВИХ ЕЛЕМЕНТІВ СИСТЕМ ОРІЄНТАЦІЇ.	398
Розділ 10. Математичні моделі моментів сил при русі основи	399
10.1. Момент пружного дисбалансу. Принцип рівної жорсткості	399
10.2. Момент сил сухого тертя	402
Література	409
Розділ 11. Чутливі елементи на основі двоступеневих гіроскопів	410
11.1. Головна властивість двоступеневого гіроскопа	410
11.2. Двоступеневий гірокомпас	414
11.2.1. Деякі основні похибки	416
11.2.2. Вібраційна похибка	418
11.2.3. Моделювання поведінки двоступеневого гірокомпаса	423
11.3. Гіртахометр	428
11.4. Інші двоступеневі чутливі елементи	433
Завдання	434
Контрольні запитання	435
Література	436
Розділ 12. Чутливі елементи на основі тріступеневого гіроскопа у кардановому підвісі	437
12.1. Гіроскоп у кардановому підвісі на обертовій основі під впливом моментів сил тертя	439
12.2. Дрейфи гіроскопа в кардановому підвісі за хитами основи	448
12.2.1. Аналіз похибок гіроскопа в кардановому підвісі як вказівника напрямку	448

12.2.2. Дрейф за хитавиці через тертя по осях	452
12.2.3. Дрейф за хитавиці через момент привідного двигуна гіромотора	455
12.3. Гіроскоп напрямку	461
12.3.1. Карданова похибка	465
12.3.2. Забезпечення стійкості власних коливань	468
12.3.3. Віражна похибка	471
12.3.4. Похибка за хитавиці	477
12.3.5. Застосування теореми про тілесний кут	482
Завдання	486
Контрольні запитання	487
Література	488
Розділ 13. Чутливі елементи на основі маятникових гіроскопів	489
13.1. Гіромаятник як гіровертикаль	489
13.1.1. Швидкісна похибка і перехідний процес	490
13.1.2. Балістична похибка. Умова незбурюваності	501
13.1.3. Моделювання поведження гіромаятника	504
13.2. Маятниковий гірокомпас	515
13.2.1. Швидкісна похибка і перехідний процес	516
13.2.2. Балістична похибка. Умова незбурюваності	519
13.2.3. Інтеркардинальна похибка	520
13.2.4. Моделювання поведження маятникового гірокомпаса	523
Завдання	533
Контрольні запитання	535
Література	535
Розділ 14. Чутливі елементи на основі осциляторних гіроскопів	536
14.1. Двоступеневий роторний вібраційний гіроскоп	536
14.1.1. Принцип дії і рівняння руху роторного вібраційного гіроскопа	537
14.1.2. Роторний вібраційний гіроскоп як вимірювач кутової швидкості	538
14.1.3. Роторний вібраційний гіроскоп як вимірювач кутів повороту	543
14.2. Триступеневий роторний вібраційний гіроскоп	544
14.2.1. Триступеневий РВГ як вимірювач кутів повороту	545
14.2.2. Триступеневий ДНГ як вимірювач кутової швидкості	552
14.3. Мікромеханічні осциляторні гіроскопи	554
14.3.1. Принципи побудови осциляторних гіроскопів	555
14.3.2. Одномасовий осциляторний вібраційний гіроскоп	558
14.3.3. Мікромеханічний гіроскоп на обертовій основі	559
14.3.4. Власні коливання інерційної маси	561
14.3.5. Вимушені коливання інерційної маси	565
14.3.6. Вплив поступальних прискорень	572
Контрольні запитання	578
Література	578
Література для поглибленого вивчення	579
ДОДАТКИ	582
Додаток 1. До розділу 4.	582
Додаток 2. До розділу 6.	585
Додаток 3. До розділу 7.	591
Додаток 4. До розділу 8.	597
Додаток 5. До розділу 9.	601
Додаток 6. До розділу 11	607
Додаток 7. До розділу 12	609
Додаток 8. До розділу 13	615
АБЕТКОВИЙ ПОКАЖЧИК	621

Передмова

Підручник створено на базі багаторічного досвіду викладання авторами у Київському політехнічному інституті навчальних дисциплін «Теорія гіроскопів», «Теорія коливань і віброзахист приладів», «Математичні моделі електромеханічних систем» і, останнім часом, «Основи теорії чутливих елементів систем орієнтації». Ці лекції покладено в основу базової теоретичної підготовки інженерів у галузі проектування приладів і систем орієнтації та навігації і передусім – гіроскопічних приладів і пристроїв.

За слушним зауваженням Р. Граммеля [10], особлива привабливість вивчення явищ, пов'язаних з рухом гіроскопа, полягає, без сумніву, у єдності теорії і практики. Різноманітність завдань, що постають перед створювачами гіроскопічних приладів і пристроїв, породжує велике розмаїття методів теоретичного досліджування їх поведінки, більшість з яких демонструє значну ефективність і пристосованість для вирішення інженерних задач. Це такі сучасні розділи науки, як теорія динамічних систем, теорія коливань, зокрема нелінійних і параметрично збуджуваних, теорія стійкості за Ляпуновим, теорія Томсона і Тета нелінійних систем з гіроскопічними силами, такі методи дослідження лінійних систем, як методи теорії автоматичного керування, метод комплексних амплітуд, метод компресії рівнянь, і нелінійних систем – методи лінеаризації, методи малого параметра, усереднення, методи фазового простору тощо. Цим питанням присвячено велику кількість підручників, навчальних посібників і наукових монографій. Їх наявність – це і перевага, і недолік у сенсі теоретичної підготовки студентів, бо безліч питань виявляються розпорошеними по численних літературних джерелах, які до того ж виявляються значною мірою недосяжними.

Труднощі створення навчального посібника виникають з природного намагання поєднати два суперечливі прагнення:

- по можливості якнайповніше ознайомити студентів з головними найбільш ефективними й уживаними сучасними методами інженерного теоретичного досліджування;
- показати їх ефективність на найбільш простих і наочних прикладах.

Пропонований підручник «Основи теорії чутливих елементів систем орієнтації і навігації» є спробою частково розв'язати цю суперечність і надати студентам можливість опанувати сучасні методи теоретичного досліджування, користуючись єдиним джерелом.

Перша частина підручника складається з трьох розділів і присвячена ознайомленню студентів з основами побудови математичних моделей систем орієнтації і застосування методів їх теоретичного дослідження. Перший розділ «Основи побудови математичних моделей механічних систем» носить вступний характер. Тут більш докладно, аніж зазвичай, викладено основні відомості з теоретичної механіки і математики, потрібні для практичного опанування засобами утворення математичних моделей механічних систем. У другому розділі «Складання математичних моделей гіроскопічних пристроїв, які використовуються для теоретичного аналізу руху цих пристроїв. Третій розділ знайомить з основними поняттями тео-

рії коливань і теорії динамічних систем, методами теоретичного дослідження лінійних і нелінійних динамічних систем. Наведено приклади їх застосування для розв'язання типових задач. Окремо подано основні відомості про теорію стійкості руху за Ляпуновим, яку досить ефективно застосовують для дослідження саме гіроскопічних систем.

У частині другій наведено деякі важливі прикладення теорії для випадків, часто використовуваних в інженерній практиці фахівців у галузі проектування систем орієнтації. На прикладі дослідження фізичного маятника в четвертому розділі показано сфери застосування і ефективність деяких з викладених наближених методів теоретичного дослідження з наведенням деяких відомостей про важливі нелінійні особливості поведіння маятника. Теорії пасивного віброзахисту, яку застосовують для проектування систем віброзахисту та ударозахисту, присвячено п'ятий розділ. Значну увагу приділено віброзахисту за допомогою амортизаторів з внутрішнім тертям. Шостий розділ знайомить з методом фазового простору, який досить поширений у теоретичних дослідженнях поведінки суттєво нелінійних систем автоматичного керування. Результати дослідження руху торпеди з курсу перевірено та проілюстровано моделюванням на ЕОМ.

Прикладну теорію гіроскопів викладено у третій частині, що складається з трьох розділів. Сьомий розділ присвячено теорії симетричного зрівноваженого гіроскопа, восьмий – теорії гіромаятника, а дев'ятий – теорії гіроскопа в кардановому підвісі, що є основою більшості гіроскопічних приладів і пристроїв.

В останній, четвертій, частині йдеться власне про основи теорії чутливих елементів систем орієнтації. Тут подано найбільш цікаві з теоретичного і практичного погляду прикладення теорії до чутливих елементів. У десятому розділі наведено сучасні математичні моделі деяких найбільш практично значущих моментів сил, що діють на гіроскоп у кардановому підвісі, якщо враховувати рух основи. Теорію деяких важливих застосувань двоступеневих гіроскопів викладено в одинадцятому розділі. Поведіння гіроскопа у кардановому підвісі на рухомій основі і його застосування як чутливого елемента є предметом розгляду у дванадцятому розділі. Основам теорії маятникових чутливих елементів – гіромаятника як гіровертикалі і маятникового гірокомпаса – присвячено тринадцятий розділ. В останньому чотирнадцятому розділі викладається теорія чутливих елементів, що створюються на основі осциляторних гіроскопів, які наразі інтенсивно розвиваються і впроваджуються у практику.

Автори сподіваються, що підручник стане доброю підмогою бажаючим опанувати теоретичні засоби пізнання світу.

Вступ. Навігація, орієнтація, гіроскопи – практика і теорія

З давніх-давен людина прагнула пізнати навколишній світ, установити зв'язки з іншими світами і, можливо, підкорити їх. Уже на зорі розвитку людства люди будували судна і плавали на них морями, прагнучи досягти невідомих берегів і знайти на них щось корисне для свого племені. Наразі вважається, що вже папуаси, які заселяли острови Океанії, і індіанці, що розселилися в Америці, вийшовши з Азії, за 15-20 століть до нашої ери почали мігрувати за океан.

Але плавання у відкритому морі наштовхувалося на значні труднощі щодо визначення місця розташування корабля і напрямку, у якому потрібно спрямувати його рух для досягнення мети подорожі. Отже, потрібні були засоби, які дозволяли б реєструвати напрямок руху судна і вимірювати пройдений ним шлях. Потрібні були знання, які дозволяли б безпечно і з найменшими витратами матеріальних засобів провести судно з одного пункту до іншого. Відповідну галузь знань стали називати *навігацією*.

Перші мореплавці, імовірно, користувалися окомірними визначеннями у межах видимості берегів, а у відкритому морі орієнтувалися по небесних світилах. Саме відтоді почала розвиватися астрономія у давнину. Подальший розвиток методів навігації тісно пов'язаний з винаходами і застосуванням різноманітних технічних засобів судноводіння.

Задля курсовказання здавна почали використовувати *магнітну стрілку*. Скандинави користувалися магнітною стрілкою вже в XI ст. [37]. Власне *магнітний компас* був утворений Флавіно Джойа на початку XIV ст.

Для визначення поточного місцеперебування судна за допомогою зчислення шляху потрібні були засоби для вимірювання пройденої судном відстані і напрямку його руху. Протягом тривалого часу для визначення швидкості судна і пройденої відстані користувалися способом «голландського лага», коли з крамболу кидали у воду предмет, що плаває, і помічали час, за який він проходив мимо двох спостерігачів, що стояли на палубі на відомій відстані один від одного. Час оцінювали за допомогою водяних або пісочних годинників або навіть скандуванням розміреним голосом віршів чи молитов. Потім *лаг* багаторазово вдосконалювали.

Перші науково обґрунтовані методи визначення широти місця по висоті (вертикальному куту) Полярної зірки і по висоті Сонця у полудень появились у період великих географічних відкриттів XV – XVIII ст. [59]. Для вимірювання висот з палуби судна, яке перебуває у морі, застосовувалися спеціальні кутомірні інструменти – *градиток*, *астролябія*, *квадрант*. У першій половині XVIII ст. був сконструйований принципово новий кутомірний прилад, побудований на використанні законів відбиття світла і названий *октантом*. Потім у цьому приладі дещо збільшили кут огляду, і він став називатися *секстантом*. Важлива його властивість – можливість застосування для вимірювання кутів з рухомою і нестійкою основою (палуби) [5].

Визначення довготи місця становило тривалий час для мореплавця непомірно великі труднощі, оскільки ще не було точного вимірювача часу (годинника). У 1767 році був винайдений *хронометр*, який забезпечував «зберігання» часу по-

чаткового меридіана протягом тривалого часу. Це дозволило визначати довготу місця і підвищило точність розв'язання інших задач навігації, які потребували знань обчислених заздалегідь координат світил – *ефемерид*. Перші ефемериди для Сонця появилися у XV ст. Пізніше стали виходити щорічні видання координат світил у різних країнах. Перший руський астрономічний щорічник «Морской месящеслов» датується 1814 р.

Астрономічні методи визначення місцеперебування корабля спираються на видимість світил. Їх неможливо застосовувати у хмарну погоду і поза зоною прямої видимості. Окрім того, вони потребують точного визначення горизонтального напрямку. Точність показань магнітного компасу залежить від багатьох факторів і передусім від наявності на борту судна залізних мас. З появою залізних і броньованих суден, корабельних двигунів із залізними корпусами, саморушних підводних суден також із залізними корпусами стало практично неможливо користуватися магнітними компасами через неприпустимі їх похибки, а у випадку підводних човнів – неможливо користуватися й астрономічними засобами. Постає нагальна потреба створити автономні засоби навігації і орієнтації, які б дозволяли визначати (і використовувати для судноводіння) кути орієнтації корпусу судна відносно поверхні Землі і його географічні координати без використання зовнішньої інформації (про положення світил чи магнітного поля Землі). З цього часу починає розвиватися так звана гіроскопічна техніка.

Перші нагадування про дзигу і її незвичайні властивості відносяться до давніх-давен. До наших днів дійшли такі іграшки, виготовлені в Китаї у третьому тисячолітті до нашої ери. Властивості дзиги, – її стійкість (незмінність напрямку у просторі осі власного обертання і надзвичайна опірність зовнішнім діям) і прецесія (повільне обертання осі власного обертання дзиги під дією моменту сил) – стали підґрунтям створення на її основі цілої низки приладів і пристроїв, які називають гіроскопічними. Першу, зазначену у літературі, спробу використати властивості дзиги у практичних цілях відносять до 1742 – 1743 рр. [59], коли англійський механік Д. Серсон створив прилад, який мав у разі вимірювання висот секстантом вказувати площину горизонту. У цьому приладі перевернута металева чаша, що спиралася на шпильку, приводилася в обертання шнуром, а відполіроване плоске дно чаші прислужувалося як площина горизонту. Хоча перші випробування були успішними, проте цей прилад не набув поширення через трагічні обставини, за яких загинув і корабель, і сам винахідник. Реалізовано первісну ідею Серсона було тільки наприкінці XIX ст. у приладі французького винахідника Флеріє [44]. Відрізнявся морський гірогоризонт Флеріє від приладу Серсона головним чином тим, що такий самий ротор приводився в обертання стислим повітрям від ручного насоса, а для спостереження площини горизонту на верхній поверхні ротора були діаметрально розміщені дві лінзи, на які нанесено штрихи, перпендикулярні осі ротора. Завдяки цьому спостереження в оптичну трубу цих лінз дозволяло за рухом штрихів визначити положення площини горизонту.

У 1898 році лейтенант австрійського флоту Леон Обрі винайшов гіроскопічний напрямний апарат для саморушійної міни (торпеди) Уайтхеда. Цей апарат застосовували задля забезпечення заданого курсу торпеди, що рухається у воді. У торпедній справі прилади такого типу набули широкого застосування і надалі

безперервно вдосконалювалися. Без суттєвих змін прилад Обрі використовували аж до 50-х років ХХ ст. у флотах майже всіх країн світу. Це перше вдале застосування гіроскопічного приладу на практиці.

Другим, ще більш поширеним застосуванням гіроскопа було створення гіроскопічного компасу. Німецький фізіолог і географ Г. Аншютц-Кемпфе у 1908 р. побудував перший гіроскопічний компас, а в березні-квітні 1909 р. цей гірокомпас успішно пройшов випробування на лінкорі «Дойчланд». Теоретичну частину роботи виконував Макс Шюлер. У 1910 р. він оприлюднив винайдену ним умову незбурюваності гіроскопічного компасу (умову Шюлера). Коли гірокомпас Аншютца вже був прийнятий на озброєння германського і британського флотів, у його показах виявилися неприпустимі похибки, коли судно йшло «інтеркардинальним» курсом (тобто у напрямках «південний схід», «південний захід», «північний схід» і «північний захід») і одночасно зазнавало значної бортової хитавиці. Тому гірокомпаси були повернуті виробнику з рекамаціями, а перший гірокомпас Аншютца прозвали «гірокомпасом для доброї погоди». Ця обставина змусила М. Шюлера більш уважно вивчити вплив хитавиці на роботу приладу, внаслідок чого був розроблений новий тригіроскопний гірокомпас. Уже у 1913 році тригіроскопний гірокомпас Аншютца був випробуваний у морі і показав добрі результати [15]. У період 1915 – 1927 рр. були побудовані і знайшли застосування на флоті і в авіації гіроскопічні вертикалі (гірогоризонти), кращими зразками яких були гіровертикалі Аншютца з неперетинними осями карданового підвісу і гіровертикалі Сперрі – з повітродувною корекцією і з кульовим гіроскопом у газодинамічному підвісі. У 1927 р. фірма «Аншютц» випустила свій новий двороторний гірокомпас, який став згодом основою для створення багатьох чудово себе зарекомендувавших на практиці приладів.

Із розвитком флоту постало актуальне завдання створення точного штучного горизонту, який би незначно збурювався при маневруванні корабля. Г. Аншютц-Кемпфе зробив ще один крок у напрямі надання незбурюваності своєму компасу – перебудував двороторний компас таким чином, щоб в ньому умова Шюлера виконувалася і щодо коливань маятника навколо полуденної лінії. В результаті у 1931 році був створений гірогоризонткомпас. Його призначення полягало у тому, щоб вимірювати кути хитавиці і рискання корабля задля керування стрільбою по невидимих цілях.

Подальший розвиток флоту, авіації, поява і розвиток ракетобудування потребували розширення можливостей гіроскопічної техніки. Особливо стрімко зростали вимоги до точності гіроскопічних систем, що спонукало враховувати вплив на їх роботу обставин, які раніше вважалися несуттєвими. На флоті, в авіації, ракетній і космічній техніці набули поширення прилади, що ґрунтуються на властивості вільного астатичного гіроскопа зберігати напрямок осі власного обертання відносно «нерухомих зірок». Беручи такі напрямки як базові, надають бажану орієнтацію рухомому об'єкту або розташованим на ньому пристроям, наприклад, акселерометрам. Стали розвиватися дві суттєво відмінні схеми вільного гіроскопа: ротор у кардановому підвісі та кульовий гіроскоп. Уперше вільний гіроскоп був застосований у вигляді приладу Обрі – гіроскопічного приладу для вирівнювання курсу торпеди. В 1940-х роках був створений комплект з двох віль-

них гіроскопів і застосований для керування польотом балістичної ракети V-2 (Німеччина).

Уже на початку ХХ ст. були зроблені спроби використати гіроскоп для кутової стабілізації, тобто для утворення моментів сил, які б утримували те чи інше тіло (судно, вагон і т. і.) поблизу бажаної орієнтації. Першим успіхом у цьому відношенні був гіроскопічний заспокоювач бортової хитавиці судна, запропонований у 1904 р. німецьким інженером О. Шліком. Більш ефективно використання моменту гіроскопічних сил досягнуто в запропонованому Е. Сперрі активному гіроскопічному заспокоювачі хитавиці (1911). Щоб запобігти шкідливого впливу циркуляції судна на роботу заспокоювача бортової хитавиці, фірма «Сперрі» у 1916 році створила активний заспокоювач з двома однаковими зчленованими гіроскопами. У 1900 р. А. Шерль, Л. Бреннан і П. П. Шиловський запропонували однорейкову залізницю зі статично нестійким вагоном, який стабілізується за допомогою гіроскопа. При цьому А. Шерль і П. П. Шиловський мали на увазі такий саме гіроскопічний пристрій, як у О. Шліка, але з центром тяжіння гіроскопа, вищим за вісь підвісу. У системі Л. Бреннана вісь прецесії стабілізуючого гіроскопа є вертикальною, а вісь ротора у положенні рівноваги направлена вздовж поперечної осі вагона. На осі прецесії розташовано пружину, яка робить гіроскоп нестійким. У подальшому Бреннан замінив один гіроскоп двома. Хоча практична доцільність побудови однорейкових залізниць зі статично нестійким вагоном так і залишилася недоведеною, а гіроскопічні заспокоювачі хитавиці суден знайшли лише обмежене застосування, у процесі роботи зі створення і дослідження цих пристроїв накопичені цінні ідеї і теоретичні результати. Наприклад, слід відзначити винахід способу використання двоступеневого гіроскопа як вимірювача кутової швидкості об'єкта, що стабілізується.

У 1924 р. С. А. Ноздровський запропонував *силовий гіроскопічний стабілізатор* з розвантажувальним двигуном [53]. Порівняно з вільним гіроскопом така конструкція має ту перевагу, що дозволяє навантажувати вісь стабілізації моментами зовнішніх сил. Це дає змогу розміщувати на зовнішній рамці тіла, що стабілізуються (наприклад, маятник чи акселерометр), і встановлювати на осі стабілізації різні датчики.

Силовий гіростабілізатор спочатку використовували як гіроскоп напрямку на літаках. Згодом для стабілізації тіла навколо двох або трьох ортогональних осей почали застосовувати спочатку двовісний, а потім і тривісний силові гіростабілізатори. Двовісний використовували як гіровертикаль, для чого на стабілізованій основі розміщували маятники, які керують через електричні сигнали датчиками моментів по осях прецесії гіроскопів. За допомогою такого пристрою стабілізували й тіла великої маси, наприклад, кулемет. Тривісний гірокомпас містив гіровертикаль і розташований на її площадці одновісний гіростабілізатор – гіроазимут. Цей прилад – гіроазимутгоризонт – дозволяв за допомогою слідкувальних сервоприводів і перетворювачів полярних координат стабілізувати різні пристрої на кораблі (візирі, знаряддя), а також виробляти дані, потрібні для керування артилерійською стрільбою. На літаках подібні прилади виконують аналогічні функції, їх також прислужують як датчики кутів для автопілоту. У кінці 1940-х років у зв'язку з передбачуваним використанням гіростабілізаторів у системах навігації

намітилася тенденція до різкого підвищення точності цих приладів і перш за все до зменшення швидкості дрейфу стабілізованих платформ. У 1950-х роках визначився розвиток двох типів гіростабілізаторів – з трьома двоступеневими або з двома вільними (треступеневими) гіроскопами як чутливими елементами. Досягнення у теорії і техніці гіроскопічних стабілізаторів дозволили значною мірою підвищити їх точність і поліпшити інші якості. В результаті стало можливим використання гіроскопічних пристроїв задля побудови інерціальних систем керування рухомими об'єктами не тільки короткочасної, але й порівняно довготривалої дії.

На самому початку розвитку гіроскопічної техніки визначилося прагнення замінити астрономічне визначення місцеперебування, яке потребує спостереження світил і горизонту, роботою механічної системи, що містить гіроскопи, маятник і годинник. Таке мали на меті заявки на винахід М. Керрі (1903), В. Алексєєва (1911) і Ф. Свині (1911). У запропонованих ними пристроях два вільні гіроскопи вказували незмінні відносно зірок напрямки, а гіромайтник – вертикаль. Користуючись цими засобами, знаючи точку відправлення судна і враховуючи за допомогою хронометра кут повороту Землі відносно зірок за час шляху, можна визначати поточне географічне місце перебування корабля подібно тому як це робиться за допомогою секстанта. На цій основі у другій половині ХХ ст. були створені досконалі інерціальні навігаційні системи. У 60-ті роки ХХ ст., коли обчислювальна техніка досягла досить високого рівня розвитку, почалося детальне розроблення так званих «безплатформових» інерціальних систем, чутливі елементи яких – гіроскопи і акселерометри – розміщуються безпосередньо на борті об'єкта (без гіростабілізатора).

Однороторний гіроскопічний компас застосовують і для визначення площини орбіти штучних супутників Землі. Конструкція такого гіроприладу, який отримав назву *гіроорбітанту* (*гіроскопічної орбіти*), через роботу його у специфічних умовах відрізняється від конструкції морських гірокомпасів.

Нині гіроскопічна техніка дедалі більше наближається до побутових потреб. Велике поширення автомобільної техніки і розвиток технології створення мікромеханічних зразків гіроскопічної техніки (які визначаються набагато меншою собівартістю) створили умови їх застосування для короткочасної автономної навігації автомобілів за несприятливих умов – поза зони видимості GPS (Global Position System). Тому наразі набуло сенсу й вивчення поведінки таких мікромеханічних приладів.

Усі ці досягнення сучасної навігаційної техніки були б неможливими без спираючись на теоретичні дослідження і широкого використання здобутків науки у різних її галузях – математиці, механіці, електротехніці, теорії автоматичного керування тощо. У свою чергу, досягнення техніки і технології, поява нових технічних об'єктів і їх експериментальне дослідження привели до бурхливого розвитку наукових методів і їх вдосконалення.

Література

[10]; [37]; [59]; [5]; [44]; [17]; [53]; [15].

Прийняті скорочення

АО	- амортизований об'єкт
АЧХ	- амплітудно-частотна характеристика
ДГ	- двоступеневий гіроскоп
ДГК	- двоступеневий гірокомпас
ДНГ	- динамічно настроєний гіроскоп
ГК	- гірокомпас
ГКП	- гіроскоп у кардановому підвісі
ГМ	- гіромаятник
ГН	- гіроскоп напрямку
ГТ	- гіротахометр
КВ	- кінетична вісь
МГК	- маятниковий гірокомпас
ММГ	- мікромеханічний гіроскоп
ОВГ	- осциляторний вібраційний гіроскоп
ПДЕ	- пружно-демпфувальний елемент
РВГ	- роторний вібраційний гіроскоп
ФМ	- фізичний маятник
ФЧХ	- фазочастотна характеристика
ШСЗ	- штучний супутник Землі

Частина 1. Основи теоретичних інженерних досліджень

Характерною особливістю проектування гіроскопічних приладів, які становлять основу систем орієнтації і навігації новітніх транспортних засобів, є нерозривність їх теоретичного і практичного досліджень. Це обумовлено двома обставинами. З одного боку, створення гіроскопічних приладів і пристроїв є надто дорогою і тривалою працею, яка потребує значних матеріальних і людських ресурсів вищої кваліфікації, застосування новітніх високих технологій. Тому створювати гіроскопічні прилади «навмання», застосовуючи метод спроб і помилок, вельми нераціонально. З іншого боку, поведження гіроскопа, його основні властивості і особливості поведження, як виявилось, досить ефективно і точно описуються за допомогою законів механіки і математики. Тому завдяки випереджальному теоретичному досліджуванню можливо передбачити поведження об'єкта і свідомо обрати параметри пристрою, щоб гарантовано забезпечити його належне функціонування.

Ефективний і достатньо точний опис властивостей гіроскопічних пристроїв можливий на ґрунті основних законів механіки і фізики. Необхідним засобом такого опису є математика. Саме тому перші видатні результати в області опису гіроскопічних явищ належать найвідомішим механікам (Томсону (лорду Кельвіну) і Тету), фізикам (Леону Фуко) і математикам (Леонарду Ейлеру, Софії Ковалевській). Гіроскопія являє собою благодатне поле для практичного використання математичних знань. Саме тут перевіряються ефективність і дієвість нових математичних методів. Всі відомі наразі властивості гіроскопів теоретично підтверджуються і описуються законами механіки. І навпаки, теоретично передбачені явища і властивості гіроскопа отримують експериментальне підтвердження. Симбіоз механіки і математики в гіроскопії став потужним знаряддям свідомого перетворення і створення нових гіроскопічних приладів і пристроїв.

На відміну від теоретичної механіки гіроскопія – прикладна, інженерна наука. Це означає, що головне полягання в ній робиться не на математично точні методи, які іноді мають лише обмежене застосування на практиці. Перевага віддається загальним інженерним, інколи спрощеним і наближеним методам отримання найбільш загальних і важливих для практики результатів. Завдяки тій обставині, що інженер, створюючи чи спостерігаючи реальний технічний об'єкт, може перевірити слушність використаних спрощень і наближень, такий підхід є зрозумілим і виправданим. Саме тому особливої значущості в гіроскопії набуває не стільки вміння скласти точні рівняння гіроскопічного пристрою, скільки побудувати *математичну модель* такого пристрою, тобто скласти такі рівняння руху, які дозволяли би досліджувати суттєві для заданої мети досліджування властивості гіроскопа і водночас були б значно простішими за повні, щоб швидше й ефективніше відшукувати їхній математичний розв'язок, аналізувати рух гіроскопа.

Уже з такого стислого опису моделі стає очевидним, що не існує точних, дедуктивних способів утворення математичних моделей. Справді, в основні характеристики моделі входять такі неформалізовані поняття, як мета дослідження, швидкість і ефективність пошуку інженерного рішення.

Навчитися створювати математичні моделі можна тільки на практиці, неперервно зіставляючи результати математичних досліджень різного роду спрощених рівнянь наближеними методами з практично спостережуваними властивостями об'єкту дослідження. Якщо ці результати добре узгоджуються, то математична модель (яка містить спрощені, наближені рівняння руху і метод (можливо, теж наближений) одержання результатів) є *адекватною* процесу, що вивчається. У протилежному випадку слід говорити про неадекватну (що невірно відображує дійсність) модель. Поняття адекватності залежить від мети і задачі дослідження. Одна й та сама модель може бути адекватною реальному процесу в одному сенсі (відношенні) і неадекватною – в іншому. Тому не можна вважати адекватною модель, не з'ясувавши для якої мети її створено.

Інженер, навіть користуючись повними рівняннями руху і досліджуючи їх точними математичними методами, має справу з моделлю реального пристрою. Рівняння руху, які дійсно можуть бути точними, бо ґрунтуються на неодноразово перевірених з усією досяжною точністю законах механіки, містять «зовнішні» або «узагальнені» сили і моменти сил. Знання реальних сил і моментів, що діють на об'єкт досліджування, завжди є неповним, неточним. Використовуючи у точних рівняннях ті чи інші функції узагальнених координат, швидкостей і часу замість узагальнених сил, насправді замінюють реальні сили їхніми моделями, що одразу перетворює точні рівняння руху у математичну модель, яка лише до деякої міри збігається з дійсністю. Тому немає «точних» рівнянь руху реальних систем, і тому правочинне питання: чи можна ґрунтуватися на повних, точних рівняннях, якщо заздалегідь відома груба наближеність окремих членів цих рівнянь? Може вивчення таких «точних» рівнянь призведе до результату, що значно далі відстоїть від дійсності, аніж якщо б були відкинуті чи спрощені деякі члени рівнянь? Якщо виходять приблизно ті самі результати, не краще б було скористатися саме останньою моделлю, оскільки її дослідження значно простіше?

Відповіді на ці запитання не є однозначними. Вони, як це вже зазначалося, залежать від мети досліджування.

Отже, під час теоретичних досліджень того чи іншого процесу або об'єкта завжди мають справу з моделлю. Не можна ставити питання про те, вірна чи невірна, правильна чи неправильна модель. Можна лише оцінювати, чи достатньо точно вона відображує той бік процесу, об'єкта, який цікавить дослідника, тобто чи адекватна модель поставленій меті досліджування.

Математичними моделями зазвичай є системи диференціальних рівнянь руху досліджуваних реальних (проеКТованих) систем. Тому далі під терміном «система» будемо розуміти математичну модель або систему рівнянь, що описує реальний об'єкт.

Незаперечними перевагами теоретичного дослідження є спірання на багаторазово перевірені людською практикою фізичні закони і отримання резуль-

татів у аналітичному (формульному) вигляді, що дозволяє дослідити тенденції змінювання поведження реальних систем за довільної зміни їх параметрів, а тому й прогнозувати можливі властивості цих систем.

Зауважимо, що аналітичні методи дослідження нелінійних систем дозволяють розв'язувати лише задачі з невеликою кількістю змінних й незначною нелінійністю. Для досліджування складних систем доцільніше використовувати обчислювальну техніку. Чисельні методи, реалізовані на цифрових обчислювальних машинах (ЦОМ), дозволяють досліджувати системи диференціальних рівнянь великих порядків з врахуванням суттєвих нелінійностей із виявленням особливих точок, побудовою розгалужених розв'язків і вивченням їх стійкості. Використання ЦОМ дає змогу розв'язувати складні динамічні задачі, що виникають у практиці проектування, приводить до кінцевого числового наслідку, який безпосередньо можна використовувати у подальших точнісних або оптимізаційних розрахунках проектованої системи. Водночас аналітичні методи є незамінними для дослідження загальних нелінійних закономірностей у поведженні систем, а також для грамотної побудови математичних моделей складних нелінійних систем, розробки тестових варіантів їх поведження для перевірки цих моделей на адекватність. В інженерії важливо вміло поєднувати переваги теоретичного дослідження з застосуванням великих можливостей сучасної обчислювальної техніки.

Розділ 1. Основи побудови математичних моделей механічних систем

Основою теоретичного дослідження є теоретичний аналіз, тобто вивчення поведінки матеріальної системи за створеною їй математичною моделлю. Математичні моделі мають вигляд диференціальних рівнянь, математичних співвідношень, рівностей і нерівностей. Підґрунтям для побудови математичних моделей поведінки механічних систем є головні закони динаміки – *закон змінювання кількості руху* (закон імпульсу) і *закон змінювання моменту кількості руху* (закон моментів). Вони мають векторно-диференціальну форму. Оскільки математична модель у кінцевому підсумку має вид сукупності скалярних диференціальних рівнянь (системи диференціальних рівнянь), для складання математичних моделей потрібно опанувати головні правила оперування векторами і їх проекціями на осі різних систем координат.

1.1. Елементи векторної і матричної алгебри

Головні закони механіки формулюються у векторній формі. Необхідною передумовою переведення їх у скалярні диференціальні рівняння руху є вміння вільно користуватися апаратом векторної і матричної алгебри.

1.1.1. Векторна алгебра

Вектором \mathbf{a} називатимемо деякий математичний об'єкт, який характеризується числом (*модулем* a вектора, його *довжиною*) і напрямком у просторі.

Сумою двох векторів \mathbf{a} і \mathbf{b} називається третій вектор \mathbf{c} , початок якого збігається з початком першого вектора, а кінець – з кінцем другого вектора за умови, що початок другого вектора суміщено з кінцем першого (правило трикутника або паралелограма):

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

Скалярним добутком двох векторів є скаляр, величина якого визначається як добуток модулів (довжин) векторів-множників і косинуса кута між їх напрямками:

$$d = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \varphi = b \text{Пр}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = a \text{Пр}_{\mathbf{a}} \mathbf{b},$$

де $\text{Пр}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}$ означає величину прямокутної проекції вектора \mathbf{a} на напрямок вектора \mathbf{b} : $\text{Пр}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = a \cos \varphi$.

Наслідки.

1. Якщо один з векторів \mathbf{a} і \mathbf{b} є одиничним, скалярний добуток цих векторів дорівнюватиме величині проекції другого вектора на напрямок першого.

2. Якщо обидва вектори \mathbf{a} і \mathbf{b} є одиничними, їхній скалярний добуток дорівнює косинусу кута між напрямками цих векторів.

Векторний добуток $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ двох векторів \mathbf{a} і \mathbf{b} є вектором, перпендикулярним площині, що містить обидва вектори-множники, напрямленим у той бік, з якого найкоротший поворот від першого вектора до другого видається здійснюваним проти годинникової стрілки. Його величина дорівнює площі па-

паралелограма, побудованого на векторах-співмножниках як на сторонах: $c = ab \sin \varphi$, де φ – кут між напрямками векторів, що перемножуються.

Як впливає з визначення, якщо вектори-співмножники поміняти місцями у векторному добутку, то зміниться лише напрямок вектора результату на протилежний, а його величина залишиться попередньою. Цю властивість векторного добутку називають його антикомутативністю: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

Векторно-скалярний (змішаний) добуток трьох векторів \mathbf{a} , \mathbf{b} і \mathbf{c} є скалярною величиною, яка чисельно дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах-співмножниках як на сторонах. Векторно-скалярний добуток дозволяє циклічну перестановку співмножників. При цьому виходить той самий скаляр:

$$d = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}. \quad (1.1)$$

Як видно, для змішаного добутку не має значення, між якими із сусідніх векторів поставити знак векторного добутку, а тому цей знак взагалі випускають и записують векторно-скалярний добуток у вигляді:

$$d = \mathbf{abc} = \mathbf{cab} = \mathbf{bca}.$$

Якщо у записаних сполученнях поміняти місцями два сусідні вектори, то результат змінить свій знак на протилежний:

$$d = -\mathbf{acb} = -\mathbf{cba} = -\mathbf{bac}.$$

Подвійний векторний добуток $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ є вектором \mathbf{d} , який міститься у площині векторів \mathbf{b} і \mathbf{c} і тому може бути поданий у вигляді розкладу за напрямками цих двох векторів як складових:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \quad (1.2)$$

Формулу (1.2) часто використовують у механіці твердого тіла і теорії гіроскопів.

1.1.2. Форми подання векторів

Вектори і результати дій над ними можуть бути поданими у кількох формах. Одну з таких форм, використану вище, називають *векторною* формою. Вона найбільш загальна, бо не залежить від обрання координатного базису. Існують й інші форми подання векторів, наприклад, *координатна*, *векторно-координатна* і *матрична*. Усі вони потребують попереднього обрання деякого координатного базису. Надалі як базисну систему координат завжди будемо використовувати прямокутну (декартову) систему координат (рис. 1.1).

Координатна форма подання вектора – це задання трійки чисел, які характеризують довжини проєкцій цього вектора на осі базисної системи координат:

$$\mathbf{a}\{a_\xi, a_\eta, a_\zeta\}.$$

Задля більшої зручності подання формул переходу від одного координатного базису до іншого умовимося першу з координатних осей (ξ або x на рис. 1.1) позначати цифрою 1, другу вісь – цифрою 2 (осі η або y), а третю вісь – цифрою 3 (осі ζ або z). Самий координатний базис позначатимемо однією великою літерою латиниці. Наприклад, позначимо через P систему осей xuz , а

через S – систему осей $\xi\eta\zeta$. Тоді осі ξ , η і ζ матимуть позначення 1_S , 2_S і 3_S , а осі x , y і z – 1_P , 2_P і 3_P відповідно. За таких умов координатна форма подання вектора \mathbf{a} у системі $\xi\eta\zeta$ матиме вигляд $\mathbf{a}\{a_{1S}, a_{2S}, a_{3S}\}$, а в системі координат xuz – $\mathbf{a}\{a_{1P}, a_{2P}, a_{3P}\}$.

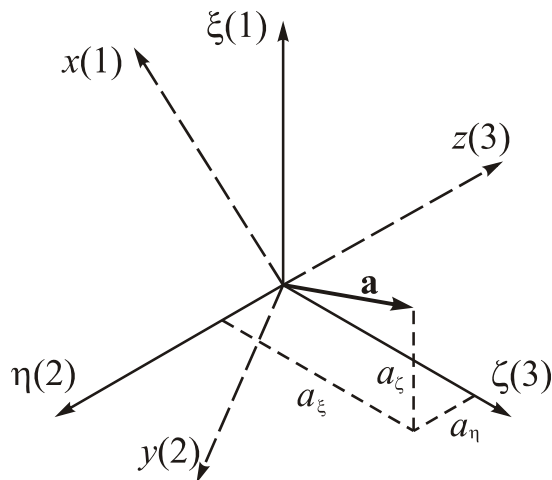


Рис. 1.1. Вектор у системі координат

Величини a_{1P} , a_{2P} і a_{3P} визначаються як величини проєкцій вектора \mathbf{a} відповідно на осі 1_P , 2_P і 3_P :

$$a_{iP} = a \cos(\mathbf{a}, \mathbf{I}_P) .$$

Ця рівність є узагальненою формою запису всіх трьох проєкцій вектора \mathbf{a} на осі довільно обраної системи координат, причому індекс i є номером осі системи координат P , а $\mathbf{1}_P$, $\mathbf{2}_P$ і $\mathbf{3}_P$ позначеннями одиничних векторів системи P (ортів координатного базису).

Напрямними косинусами вектора \mathbf{a} називають косинуси кутів між напрямком цього вектора і додатними напрямками координатних осей обраної системи координат:

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{I}_P) = \mathbf{e} \cdot \mathbf{I}_P; \quad (I = 1, 2, 3).$$

Тут позначено \mathbf{e} – одиничний вектор напрямку вектора \mathbf{a} .

Усі дії над векторами для їх запису в координатній формі потребують, щоб попередньо усі вектори, над якими здійснюються операції, були визначені в одному координатному базисі.

Візьмемо за такий базис систему координат P .

Суму векторів у координатній формі можна відобразити так:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad c_{iP} = a_{iP} + b_{iP}; \quad (i = 1, 2, 3),$$

тобто

$$c_{1P} = a_{1P} + b_{1P}; \quad c_{2P} = a_{2P} + b_{2P}; \quad c_{3P} = a_{3P} + b_{3P}.$$

Скалярний добуток двох векторів у координатній формі відображується як сума добутків однойменних проєкцій векторів-співмножників на осі координатного базису:

$$d = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_{1P}b_{1P} + a_{2P}b_{2P} + a_{3P}b_{3P}.$$

Векторний добуток двох векторів у базисі P умовно можна подати як визначник, у якому один з рядків складається з ортів обраної системи відліку:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{1}_P & \mathbf{2}_P & \mathbf{3}_P \\ a_{1P} & a_{2P} & a_{3P} \\ b_{1P} & b_{2P} & b_{3P} \end{vmatrix} = \mathbf{1}_P(a_{2P}b_{3P} - a_{3P}b_{2P}) + \mathbf{2}_P(a_{3P}b_{1P} - a_{1P}b_{3P}) + \mathbf{3}_P(a_{1P}b_{2P} - a_{2P}b_{1P}). \quad (1.3)$$

Із виразу (1.3) випливає

$$c_{1P} = a_{2P}b_{3P} - a_{3P}b_{2P}; \quad c_{2P} = a_{3P}b_{1P} - a_{1P}b_{3P}; \quad c_{3P} = a_{1P}b_{2P} - a_{2P}b_{1P}.$$

Перебіг індексів у проекціях векторів \mathbf{c} , \mathbf{a} і \mathbf{b} визначається правилом циклічного переставляння.

Векторно-скалярний добуток трьох векторів також можна подати у вигляді визначника

$$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} c_{1P} & c_{2P} & c_{3P} \\ a_{1P} & a_{2P} & a_{3P} \\ b_{1P} & b_{2P} & b_{3P} \end{vmatrix}.$$

Застосовуючи до ортів координатної системи операції скалярного й векторного добутоків, подамо таблицю цих добутоків (вектори, що записані у лівій колонці є першими співмножниками, а ті, що записані зверху, – другими співмножниками):

Скалярні добутки ортів

\cdot	$\mathbf{1}_P$	$\mathbf{2}_P$	$\mathbf{3}_P$
$\mathbf{1}_P$	1	0	0
$\mathbf{2}_P$	0	1	0
$\mathbf{3}_P$	0	0	1

Векторні добутки ортів

\times	$\mathbf{1}_P$	$\mathbf{2}_P$	$\mathbf{3}_P$
$\mathbf{1}_P$	0	$\mathbf{3}_P$	$-\mathbf{2}_P$
$\mathbf{2}_P$	$-\mathbf{3}_P$	0	$\mathbf{1}_P$
$\mathbf{3}_P$	$\mathbf{2}_P$	$-\mathbf{1}_P$	0

Векторно-координатна форма дозволяє поєднувати векторну форму подання з координатною. Для цього використовують позначення ортів координатного базису, наприклад, вектор \mathbf{a} у базисі S має вигляд:

$$\mathbf{a} = a_{1S}\mathbf{1}_S + a_{2S}\mathbf{2}_S + a_{3S}\mathbf{3}_S,$$

а в базисі P

$$\mathbf{a} = a_{1P}\mathbf{1}_P + a_{2P}\mathbf{2}_P + a_{3P}\mathbf{3}_P.$$

Перш ніж перейти до матричного подання векторів і дій над ними, нагадаймо деякі відомості з теорії матриць.

1.1.3. Матрична алгебра

Матрицею розміру $m \times n$ називають таблицю, яка складається з m рядків і n стовпців, елементами якої є дійсні або комплексні числа:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \|a_{ij}\|.$$

Якщо $m = n$, матрицю називають квадратною. Якщо $m = 1$ матриця перетворюється у вектор-рядок

$$A = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n],$$

а якщо $n = 1$ матриця перетворюється у вектор-стовпець

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix}.$$

Сумою двох матриць A і B однакового розміру $m \times n$ називають матрицю C такого самого розміру, елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів матриць-доданків:

$$\begin{aligned} C &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} = \\ &= A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Тобто елементи матриці-суми визначають за формулою

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Добутком двох матриць A і B розмірів відповідно $m \times r$ і $r \times n$ (тобто таких, у яких кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці) є матриця розміру $m \times n$, елементи якої визначаються виразом

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^r a_{ik} b_{kj}; \quad (i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n).$$

Приклад 1. Добуток матриці-рядка на матрицю-стовпець такої самої довжини (тобто з такою ж кількістю елементів) утворює матрицю розміру 1×1 , тобто число:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Приклад 2. Добуток матриці-стовпця на матрицю-рядок такої самої довжини (тобто з такою ж кількістю елементів n) утворює квадратну матрицю розміру $n \times n$:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix}.$$

З наведених прикладів стає очевидним, що добуток матриць не є комутативним: у разі переставляння матриць у добутку в загальному випадку може вийти матриця зовсім іншого розміру і навіть взагалі добуток не матиме сенсу (якщо кількість рядків першої матриці не дорівнюватиме кількості стовпців другої матриці).

Транспонованою відносно заданої матриці A називають матрицю A^T , у якій рядки матриці A є відповідними стовпцями, а стовпці матриці A є відповідними рядками. Отже, елементи a_{ij}^T матриці A^T визначаються за елементами a_{ij} матриці A відповідно до співвідношення

$$a_{ij}^T = a_{ji}.$$

Одиничною називають квадратну матрицю E , усі діагональні елементи якої дорівнюють одиниці, а недіагональні – нулю.

Добуток одиничної матриці зліва на будь-яку матрицю A з кількістю рядків матриці E дорівнює самій цій матриці A . Аналогічно добуток одиничної матриці справа на будь-яку матрицю B з кількістю стовпців матриці E дорівнює самій цій матриці B :

$$EA = A; \quad BE = B.$$

Оберненою матрицею відносно заданої матриці A називають таку матрицю A^{-1} , яка, якщо її помножити на задану, дає одиничну матрицю:

$$AA^{-1} = E.$$

Для квадратної матриці A обернена матриця визначається у такий спосіб:

$$A^{-1} = \|a_{ij}\|^{-1} = \frac{\|A_{ji}\|}{\det(\|a_{ij}\|)},$$

де A_{ji} – алгебричне доповнення елемента a_{ji} у визначнику $\det(\|a_{ij}\|)$. Обернена матриця існує лише тоді, коли визначник початкової матриці A не дорівнює нулю. Матрицю, для якої виповнено цю умову, називають *невиродженою*.

Слідом матриці $A = \|a_{ij}\|$ є сума її діагональних елементів:

$$\text{Tr}(A) = \sum_{k=1}^n a_{kk} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn},$$

де n – кількість елементів головної діагоналі матриці A .

Квадратну матрицю C називають *симетричною*, якщо її елементи, розташовані симетрично відносно головної діагоналі, дорівнюють один одному:

$$c_{ij} = c_{ji}; \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Квадратна матриця K називається *косиметричною*, якщо її елементи, розташовані симетрично відносно головної діагоналі дорівнюють один одному із протилежним знаком:

$$k_{ij} = -k_{ji}; \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Будь-яка квадратна матриця A може бути розкладеною на суму симетричної C і косиметричної K матриць

$$A = C + K.$$

Елементи цих матриць визначаються, як неважко довести, зі співвідношень:

$$C = (A + A^T) / 2 \Rightarrow c_{ij} = (a_{ij} + a_{ji}) / 2;$$

$$K = (A - A^T) / 2 \Rightarrow k_{ij} = (a_{ij} - a_{ji}) / 2.$$

Квадратну матрицю називають *ортогональною*, якщо її добуток на її транспоновану приводить до одиничної матриці:

$$AA^T = E.$$

1.1.4. Матрична форма подання векторів

Подання векторів у матричній формі можливе двома способами.

Перший спосіб – подання вектора як матриці-стовпця, що складається з величин проєкцій вектора \mathbf{a} на осі обраного координатного базису, наприклад P :

$$A_P = \begin{bmatrix} a_{1P} \\ a_{2P} \\ a_{3P} \end{bmatrix}.$$

В іншій координатній системі S цьому вектору \mathbf{a} відповідатиме інша матриця:

$$A_S = \begin{bmatrix} a_{1S} \\ a_{2S} \\ a_{3S} \end{bmatrix}.$$

Другий спосіб – подання вектора у вигляді косиметричної матриці ($A_P \times$) розміру 3×3 , яка теж повністю визначається лише трьома своїми елементами. У цьому разі косиметричну матрицю ($A_P \times$) зручно подавати через проєкції вектора \mathbf{a} так:

$$(A_P \times) = \begin{bmatrix} 0 & -a_{3P} & a_{2P} \\ a_{3P} & 0 & -a_{1P} \\ -a_{2P} & a_{1P} & 0 \end{bmatrix}.$$

Таку форму можна успішно застосовувати для подання у матричній формі векторного добутку векторів (на що й указує позначка \times у матриці).

Добуток матриці-стовпця на матрицю-рядок дорівнює квадратній матриці розміру $(r \times r)$, де r – довжина матриці-стовпця й матриці-рядка. Такий добуток називають *діадою*:

$$\text{diad}(A, B) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_r \end{bmatrix} [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_r] = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_r \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_r b_1 & a_r b_2 & \dots & a_r b_r \end{bmatrix}.$$

Діада того самого вектора має вигляд

$$\text{diad}(A) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_r \end{bmatrix} [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_r] = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & \dots & a_1 a_r \\ a_2 a_1 & a_2^2 & \dots & a_2 a_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_r a_1 & a_r a_2 & \dots & a_r^2 \end{bmatrix}.$$

Векторно-координатну форму можна дещо спростити, якщо скористатися матричним поданням вектора. Задля цього розглянемо умовну векторну матрицю-стовпець \mathbf{O} , елементи якої складають вектори ортів обраної системи відліку:

$$\mathbf{O}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_S \\ \mathbf{2}_S \\ \mathbf{3}_S \end{bmatrix}, \quad \text{або} \quad \mathbf{O}_P = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_P \\ \mathbf{2}_P \\ \mathbf{3}_P \end{bmatrix}.$$

З урахуванням правил множення матриць вектор \mathbf{a} можна подати у вигляді:

$$\mathbf{a} = A_S^T \mathbf{O}_S = \mathbf{O}_S^T A_S = A_P^T \mathbf{O}_P = \mathbf{O}_P^T A_P, \quad (1.4)$$

де A_S і A_P – матриці-стовпці.

Додавання двох векторів можна подати у матричній формі (якщо всі вектори визначені в одній системі координат) у такий спосіб:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad C_P = A_P + B_P; \quad (C_P \times) = (A_P \times) + (B_P \times).$$

Скалярний добуток векторів можна подати як добуток транспонованої матриці першого вектора (вектора-рядка) на матрицю-стовпець другого вектора:

$$d = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = A_P^T B_P = B_P^T A_P =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{1P} & a_{2P} & a_{3P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1P} \\ b_{2P} \\ b_{3P} \end{bmatrix} = a_{1P}b_{1P} + a_{2P}b_{2P} + a_{3P}b_{3P}.$$

Його можна подати і як слід квадратної матриці, що виходить внаслідок множення матриці-стовпця першого вектора на матрицю-рядок другого вектора:

$$\begin{aligned} d = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \text{Tr}(A_P B_P^T) = \text{Tr}(B_P A_P^T) = \\ &= \text{Tr} \begin{bmatrix} a_{1P}b_{1P} & a_{1P}b_{2P} & a_{1P}b_{3P} \\ a_{2P}b_{1P} & a_{2P}b_{2P} & a_{2P}b_{3P} \\ a_{3P}b_{1P} & a_{3P}b_{2P} & a_{3P}b_{3P} \end{bmatrix} = a_{1P}b_{1P} + a_{2P}b_{2P} + a_{3P}b_{3P}. \end{aligned}$$

Векторний добуток зображується у матричній формі у вигляді добутку матриці першого вектора у кососиметричній формі на матрицю-стовпець другого вектора:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad C_P = (A_P \times) B_P = \begin{bmatrix} 0 & -a_{3P} & a_{2P} \\ a_{3P} & 0 & -a_{1P} \\ -a_{2P} & a_{1P} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1P} \\ b_{2P} \\ b_{3P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{2P}b_{3P} - a_{3P}b_{2P} \\ a_{3P}b_{1P} - a_{1P}b_{3P} \\ a_{1P}b_{2P} - a_{2P}b_{1P} \end{bmatrix},$$

що повністю відповідає виразу (1.3).

Унаслідок властивості антикомутативності векторного добутку можна записати співвідношення:

$$\begin{aligned} (A_P \times) B_P &= -(B_P \times) A_P = (B_P^T \times) A_P; \\ A_P^T (B_P \times) &= -B_P^T (A_P \times) = B_P^T (A_P^T \times). \end{aligned} \quad (1.20)$$

У координатній формі *векторно-скалярний добуток* трьох векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ (див. (1.1)) найпростіше подається як визначник квадратної матриці:

$$d = \mathbf{abc} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_{1P} & a_{2P} & a_{3P} \\ b_{1P} & b_{2P} & b_{3P} \\ c_{1P} & c_{2P} & c_{3P} \end{vmatrix}.$$

Векторно-координатна й матрична форми приводять до однакового результату

$$d = \mathbf{abc} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = A_P^T (B_P \times) C_P.$$

Зі співвідношень (1.1) випливають такі співвідношення між матрицями:

$$\begin{aligned} A_P^T (B_P \times) C_P &= A_P^T (C_P \times)^T B_P = B_P^T (A_P \times)^T C_P = \\ &= B_P^T (C_P \times) A_P = C_P^T (B_P \times)^T A_P = C_P^T (A_P \times) B_P. \end{aligned}$$

Запишемо *подвійний векторний добуток* у векторно-координатній формі (див. (1.4)):

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = A_P^T \mathbf{O}_P \times \mathbf{O}_P^T (B_P \times) C_P = \mathbf{O}_P^T (A_P \times) (B_P \times) C_P.$$

Звідси випливає й матрична форма:

$$D_P = (A_P \times) (B_P \times) C_P. \quad (1.5)$$

Неважко впевнитися у слушності наступної залежності:

$$(A_P \times)(B_P \times) = B_P A_P^T - B_P^T A_P E.$$

З її врахуванням формулу (1.5) можна перетворити на таку:

$$D_P = B_P (A_P^T C_P) - (B_P^T A_P) C_P,$$

що, як неважко збагнути, є модифікацією співвідношення (1.2) у матричному варіанті.

Потрійний векторний добуток. Користуючись співвідношенням (1.2) потрійний векторний добуток можна подати у вигляді:

$$\mathbf{d} \times [\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})] = \mathbf{d} \times [\mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})] = (\mathbf{d} \times \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{d} \times \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

Звідси випливає:

$$\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})] = -\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a})] = (\mathbf{b} \times \mathbf{a})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \quad (1.6)$$

а також

$$\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a})] = -\mathbf{b} \times [\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})]. \quad (1.7)$$

У матричній формі виразам (1.6) і (1.7) відповідають співвідношення

$$\begin{aligned} (A \times)(B \times)(A \times)B &= -(A \times)(B \times)(B \times)A = \\ &= -(B \times)(A \times)(A \times)B = (B \times)AA^T B = (B \times) \text{diad}(A)B. \end{aligned}$$

1.2. Кінематика поворотів твердого тіла

Поняття про рух, як і про спокій, за самою природою є відносним. Інакше кажучи, судити про рух чи спокій тіла можна лише у тому випадку, коли вказано предмет, відносно якого з часом змінюється чи залишається незмінним положення цього тіла. За теоретичного опису явищ руху як такий предмет зазвичай беруть деяку декартову систему координат. Вибір її у кінематиці, по суті, довільний і визначається лише характером здійснюваного відносно неї руху. Будемо називати цю систему координат умовно нерухомою (опорною) або абсолютною системою координат і позначати $\xi\eta\zeta$ за її координатними осями (рис. 1.2).

1.2.1. Задання положення тіла у просторі

Оберемо у рухомому тілі довільну точку O і вважатимемо її початком системи координат xuz , жорстко пов'язаної з тілом (рис. 1.2). Цю систему координат називатимемо *рухомою* (P), а її початок O – *полюсом*. Координати x , y і z довільної точки M тіла у такій рухомій системі є відомими і незмінними протягом руху.

Рух твердого тіла вважається відомим, якщо відомі в довільний момент часу координати ξ , η і ζ будь-якої його точки в абсолютній системі S . Якщо (рис. 1.2) $\mathbf{r}_O \{\xi_O, \eta_O, \zeta_O\}$ і $\mathbf{r} \{\xi, \eta, \zeta\}$ – радіуси-вектори полюса O і довільної точки M в абсолютній системі S , а $\mathbf{p} \{x, y, z\}$ – радіус-вектор цієї точки відносно полюса O , то, очевидно, матимемо

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \mathbf{p}. \quad (1.8)$$

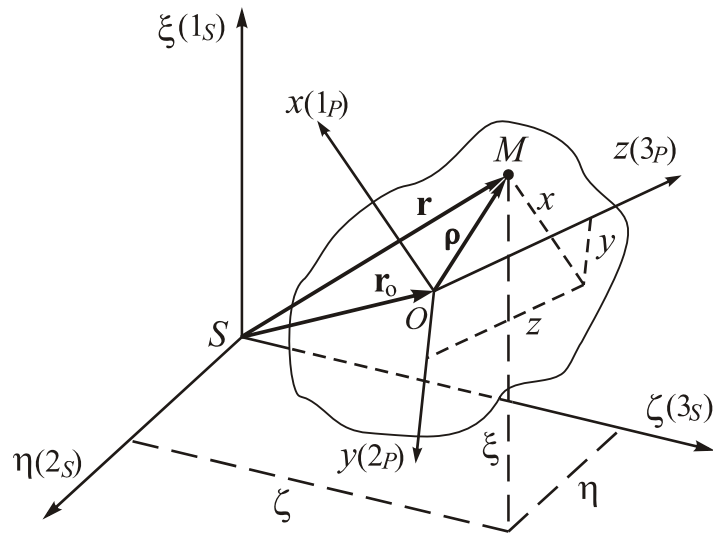


Рис. 1.2. Задання положення точки твердого тіла

Якщо позначити одиничні вектори осей x , y і z через \mathbf{i} , \mathbf{j} і \mathbf{k} відповідно, то вираз (1.8) можна подати у вигляді

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z. \quad (1.9)$$

Проекції ортів \mathbf{i} , \mathbf{j} і \mathbf{k} на осі координатної системи $\xi\eta\zeta$ дорівнюють напрямним косинусам між осями системи xuz і осями системи $\xi\eta\zeta$. З урахуванням цього векторну рівність (1.9) можна подати у вигляді трьох скалярних:

$$\begin{cases} \xi = \xi_0 + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z; \\ \eta = \eta_0 + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z; \\ \zeta = \zeta_0 + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{cases} \quad (1.10)$$

де використано позначення

$$\begin{aligned} a_{11} &= \mathbf{i}_\xi = \cos(x, \xi); & a_{12} &= \mathbf{j}_\xi = \cos(y, \xi); & a_{13} &= \mathbf{k}_\xi = \cos(z, \xi); \\ a_{21} &= \mathbf{i}_\eta = \cos(x, \eta); & a_{22} &= \mathbf{j}_\eta = \cos(y, \eta); & a_{23} &= \mathbf{k}_\eta = \cos(z, \eta); \\ a_{31} &= \mathbf{i}_\zeta = \cos(x, \zeta); & a_{32} &= \mathbf{j}_\zeta = \cos(y, \zeta); & a_{33} &= \mathbf{k}_\zeta = \cos(z, \zeta). \end{aligned}$$

Формули (1.10) є загальними рівняннями руху твердого тіла, вони безпосередньо виражають координати будь-якої його точки в опорній системі відліку як функції часу. У ці рівняння, окрім постійних за величиною координат x , y і z , входять дванадцять функцій часу, а саме: три координати полюса O – ξ_0 , η_0 і ζ_0 , і дев'ять напрямних косинусів a_{ij} , які зручно подавати таблицею:

A^{SP}	$x(1_p)$	$y(2_p)$	$z(3_p)$
$\xi(1_s)$	a_{11}	a_{12}	a_{13}
$\eta(2_s)$	a_{21}	a_{22}	a_{23}
$\zeta(3_s)$	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Очевидно, що цю таблицю можна розглядати як матрицю A^{SP} напрямних косинусів рухомої системи координат P (xuz) відносно нерухомої системи S ($\xi\eta\zeta$):

$$A^{SP} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Лінійне перетворення (1.10) можна записати у вигляді матричної рівності:

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (1.11)$$

Позначаючи стовпцеві матриці

$$R_S = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}; \quad R_{OS} = \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix}; \quad R_P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

замість (1.11) дістаємо

$$R_S = R_{OS} + A^{SP} R_P,$$

або

$$R_S - R_{OS} = A^{SP} R_P, \quad (1.12)$$

Співвідношення (1.12) характеризує перехід від координат точки M у рухомій системі P до координат тієї самої точки у нерухомій системі S , тобто перетворення із системи xuz у систему $\xi\eta\zeta$.

Дев'ять елементів матриці напрямних косинусів не є незалежними. Передусім сума квадратів напрямних косинусів будь-якої осі (наприклад x , y або z) у декартовій системі координат (наприклад, $\xi\eta\zeta$) дорівнює одиниці, бо вона визначає квадрат модуля одиничного вектора відповідної осі:

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1; \quad a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1; \quad a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1. \quad (1.13)$$

Оскільки будь-які дві координатні осі прямокутної (декартової) системи координат є перпендикулярними одна до одній, то $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$; $\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0$; $\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$, з чого випливають очевидні рівності:

$$\begin{aligned} a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} &= 0; & a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} &= 0; \\ a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} &= 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Між дев'ятьма напрямними косинусами матриці напрямних косинусів є ще кілька груп співвідношень, однак незалежні лише шість, наприклад (1.13) і (1.14). Отже, можна довільно задати лише три напрямні косинуси, решту шість необхідно визначати, використовуючи співвідношення (1.13) і (1.14). Вирази цих напрямних косинусів виявляються досить складними.

Більш компактний запис співвідношень між напрямними косинусами у матричній формі. Дійсно, обернене до виразу (1.12) перетворення координат вектора при переході від системи S до системи P можна записати у вигляді

$$R_P = A^{PS} (R_S - R_{OS}), \quad (1.15)$$

де вже A^{PS} – матриця напрямних косинусів цього переходу. Врахувавши (1.12) у (1.15), дійдемо

$$A^{SP} A^{PS} = E.$$

Маємо тривіальний висновок, що матриці напрямних косинусів прямого і зворотного переходів є взаємно оберненими.

Неважко впевнитися, що завдяки парності функції косинуса $\cos(\mathbf{I}_P, \mathbf{J}_S) = \cos(\mathbf{J}_S, \mathbf{I}_P)$ матриця A^{PS} є транспонованою відносно A^{SP} : $A^{PS} = (A^{SP})^T$. Звідси випливає головне співвідношення, що пов'язує елементи будь-якої матриці напрямних косинусів:

$$A^{SP} (A^{SP})^T = E,$$

або, у розгорнутому вигляді

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Воно описує найважливішу властивість: **матриця напрямних косинусів ортогональна**. Умову ортогональності матриці можна також подати у компактній формі:

$$\sum_{i=1}^3 a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}, \quad (j, k = 1, 2, 3),$$

де δ_{jk} – символ Кронекера, який набуває значень:

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } j = k; \\ 0, & \text{якщо } j \neq k. \end{cases}$$

1.2.2. Кути Ейлера

Ейлер запропонував як незалежні параметри повороту твердого тіла використовувати не три напрямні косинуси, а три кути послідовних поворотів навколо координатних осей декартової системи координат, через які виражаються усі дев'ять напрямних косинусів. Першій поворот здійснюється навколо будь-якої з трьох координатних осей початкової системи координат, другий – навколо нового положення однієї з двох координатних осей, що не використані при першому повороті, третій поворот – навколо нового положення будь-якої з двох осей, не використаних у другому повороті. Кількість можливих комбінацій осей повороту дорівнює дванадцяти. Серед них виокремлюють два основні типи:

- якщо третій поворот здійснюється навколо осі першого повороту (але повернутій внаслідок другого повороту), то таку послідовність називають кутами Ейлера;

- якщо третій поворот здійснюється навколо нового положення координатної осі, не використаної у попередніх поворотах, то таку послідовність називають кутами Крилова.

Для опису послідовності поворотів першого типу застосуємо такий запис:

$$S \xrightarrow[\substack{\psi \\ 1_S}]{} T \xrightarrow[\substack{\vartheta \\ 2_T}]{} K \xrightarrow[\substack{\phi \\ 1_K}]{} P.$$

Над стрілкою, що вказує напрямок переходу від однієї системи координат до іншої, вказано позначення кута відповідного повороту, а під нею – позначення осі цього повороту. Картину поворотів, яка відповідає цій послідовності, показано на рис. 1.3. Таку послідовність використовував Ейлер для опису поведінки гіромаятника (дзиги). У цьому разі кут ψ отримав назву *кута прецесії*, кут ϑ – *кута нутації*, а ϕ – *кута ротації* гіроскопа.

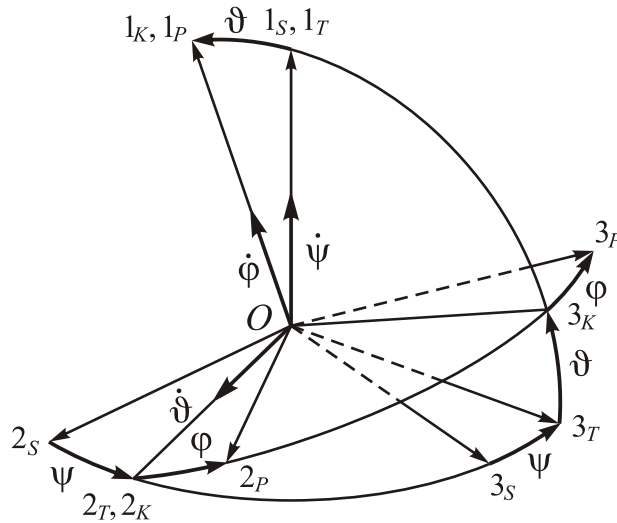


Рис. 1.3. Послідовність поворотів Ейлера

У прикладній теорії гіроскопів і механіці рухомих об'єктів більшого застосування набула послідовність кутів Крилова. Наприклад, для опису кутової орієнтації рухомих об'єктів (наземного транспорту, літаків, ракет, суден і т. п.) використовують таку послідовність:

$$S \xrightarrow[\substack{\psi \\ 1_S}]{} T \xrightarrow[\substack{\vartheta \\ 2_T}]{} K \xrightarrow[\substack{\phi \\ 3_K}]{} P,$$

яку зображено на рис. 1.4. Якщо під системою S розуміти опорну географічну систему координат, пов'язану з поверхнею Землі (вісь 1_S напрямлена вздовж вертикалі місця в зеніт), а під системою P – систему координат, жорстко пов'язану з рухомим об'єктом (причому ось 3_P напрямлена уздовж *поздовжньої* осі, ось 2_P – вздовж *поперечної* осі, а ось 1_P – уздовж *нормальної* осі рухомого об'єкта), то система кутів, подана на рис. 1.4, набуває конкретного фізичного змісту.

Кут ψ при цьому характеризує поворот об'єкта у площині горизонту і називається *кутом рискання*, кут ϑ визначає нахил поздовжньої осі до площині горизонту і називається *кутом тангажа* (диферента – у морських об'єктів), а кут ϕ – поворот об'єкта навколо поздовжньої осі і називається *кутом крена*.

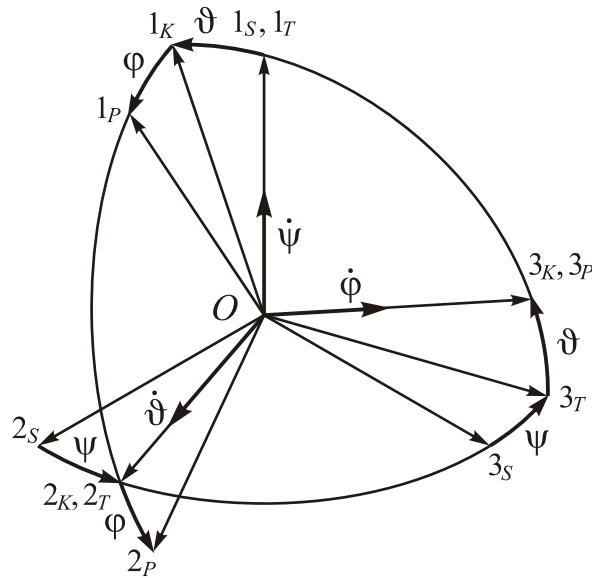


Рис. 1.4. Послідовність поворотів Кривола

У загальному випадку обрання тієї чи іншої послідовності поворотів впливає або із самої постановки завдання, або визначається особливостями конструкції досліджуваного пристрою. Обрані кути Ейлера однозначно визначають кутове положення твердого тіла. Для використання цих кутів при розв'язуванні задач кінематики необхідно у першу чергу навчитися виражати через них усі елементи матриць напрямних косинусів.

1.2.3. Знаходження матриці напрямних косинусів

Визначити матрицю напрямних косинусів – це означає виразити усі елементи цієї матриці через кути обраної послідовності поворотів.

Є два основні способи це зробити: матричний і застосування теореми косинусів сферичної тригонометрії.

Розглянемо матричний спосіб.

Матрицю напрямних косинусів A можна розглядати як оператор, який, діючи на систему координат $\xi\eta\zeta$, перетворює її в систему xuz . Сутність застосування матричного способу перетворення координат ґрунтується на таких положеннях:

а) послідовне застосування лінійних перетворень приводить також до лінійного перетворення, матриця якого є добутком матриць послідовних перетворень;

б) перехід від однієї ортогональної системи координат до іншої можна здійснити низкою послідовних поворотів навколо осей координат; при цьому кожний поворот визначається відповідним кутом і характеризується власною матрицею перетворення – матрицею напрямних косинусів.

Припустимо, що здійснюється послідовний перехід від системи координат S до системи T , потім до системи K і нарешті – до системи P . Кожний з таких переходів перетворює деякий вектор \mathbf{r} :

$$R_S = A^{ST} R_T; \quad R_T = A^{TK} R_K; \quad R_K = A^{KP} R_P,$$

де R – матриця-стовпець з проєкцій вектора \mathbf{r} у системі координат, що показана індексом при матриці; A^{ST} , A^{TK} і A^{KP} – матриці напрямних косинусів відповідно між системами координат S і T , T і K , K і P . Із цих співвідношень випливає рівність:

$$R_S = A^{ST} A^{TK} A^{KP} R_P.$$

Такий самий перехід від системи S до системи P можна описати за допомогою результуючої матриці A^{SP} напрямних косинусів:

$$R_S = A^{SP} R_P.$$

Порівнюючи отриману рівність з попередньою, дістанемо співвідношення, яке пов'язує матрицю результуючого повороту з матрицями складових послідовних поворотів:

$$A^{SP} = A^{ST} A^{TK} A^{KP}.$$

Отже, можна зробити такий висновок: *матриця напрямних косинусів результуючого повороту дорівнює добутку матриць напрямних косинусів складових поворотів, записаних зліва направо у порядку здійснення самих поворотів.*

Як приклад знайдемо матрицю напрямних косинусів послідовності кутів поворотів, зображеної на рис. 1.3. У відповідності до рисунка матимемо:

A^{ST}	1_T	2_T	3_T
1_S	1	0	0
2_S	0	$\cos \psi$	$-\sin \psi$
3_S	0	$\sin \psi$	$\cos \psi$

A^{TK}	1_K	2_K	3_K
1_T	$\cos \vartheta$	0	$\sin \vartheta$
2_T	0	1	0
3_T	$-\sin \vartheta$	0	$\cos \vartheta$

A^{KP}	1_P	2_P	3_P
1_K	1	0	0
2_K	0	$\cos \varphi$	$-\sin \varphi$
3_K	0	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$

Перемножуючи ці три матриці, одержимо матрицю напрямних косинусів для випадку послідовності поворотів Ейлера.

A^{SP}	1_P	2_P	3_P
1_S	$\cos \vartheta$	$\sin \vartheta \sin \varphi$	$\sin \vartheta \cos \varphi$
2_S	$\sin \psi \sin \vartheta$	$\cos \psi \cos \varphi -$ $-\sin \psi \sin \varphi \cos \vartheta$	$-\cos \psi \sin \varphi -$ $-\sin \psi \cos \varphi \cos \vartheta$
3_S	$-\cos \psi \sin \vartheta$	$\sin \psi \cos \varphi +$ $+\cos \psi \sin \varphi \cos \vartheta$	$-\sin \psi \sin \varphi +$ $+\cos \psi \cos \varphi \cos \vartheta$

(1.16)

Перейдемо до другого способу – застосування теореми косинусів сферичного трикутника.

Сферичним трикутником називається фігура, що утворюється на поверхні сфери одиничного радіусу перетинанням трьох дуг великого круга (рис. 1.5).

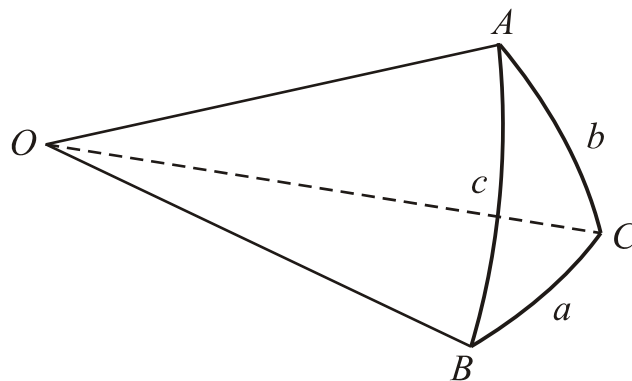


Рис. 1.5. Сферичний трикутник

Дуги AB , BC і CA називаються сторонами трикутника. Вони вимірюються відповідними центральними кутами AOB , BOC і COA (де O – центр сфери). Кутами ABC , BAC і BCA сферичного трикутника є двогранні кути, утворені площинами: AOB і AOC – для вершини A , AOB і BOC – для вершини B , AOC і BOC – для вершини C .

Позначимо сторони сферичного трикутника проти вершин A , B і C відповідно через a , b і c , а двогранні кути при вершинах – великими літерами латиниці, що позначають відповідну вершину. Тоді формулу теореми косинусів сферичного трикутника можна записати у вигляді

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A. \quad (1.17)$$

Теорему можна сформулювати так: *косинус будь-якої сторони сферичного трикутника дорівнює добутку косинусів двох інших його сторін, складеному з добутком синусів цих сторін і косинусу двогранного кута, протилежного шуканій стороні.*

Для визначення напрямних косинусів за допомогою формули (1.17) рекомендується такий порядок дій:

- 1) нарисувати картину послідовних поворотів, як це показано на рис. 1.3 і 1.4;
- 2) відшукати на рисунку координатні осі, косинус між якими потрібно відшукати;

3) знайти на рисунку такий сферичний трикутник, двома вершинами якого були б сліди на сфері двох осей, що знайдені під час виконання п. 2, а третьою вершиною – слід такої координатної осі, що сторони утвореного сферичного трикутника, які прилягають до цієї вершини, лежали б на зображених площинах поворотів;

4) з рисунку визначити (виразити через кути заданої послідовності поворотів) величини сторін, що прилягають до третьої вершини трикутника (знайденої у п. 3); це завжди можливо, бо, за умовою п. 3 сторони лежать у площинах, що містять лише задані кути поворотів;

5) з рисунку визначити (виразити через один з кутів повороту) двогранний кут, що лежить проти шуканої сторони; слід узяти до уваги, що *двогранний кут між площинами кутів двох послідовних поворотів завжди дорівнює $\frac{\pi}{2}$* ;

відмінним від $\frac{\pi}{2}$ є лише двогранний кут між площинами першого і третього поворотів, причому він є функцією другого кута повороту;

б) підставити знайдені значення сторін і двогранного кута між ними у формулу (1.44) і перетворити отриманий вираз до найпростішого вигляду;

7) аналогічно визначити решту вісім напрямних косинусів і записати результат у вигляді таблиці матриці напрямних косинусів;

8) перевірити правильність результатів, використовуючи для цього умови (1.13) і (1.14).

Розглянемо застосування цього способу на прикладі тієї ж послідовності кутів Ейлера (див. рис. 1.3).

Визначимо напрямний косинус між осями 3_S і 3_P . Розглядаючи рис. 1.3, дійдемо висновку, що поставлені умови задовольняє лише трикутник $3_P - 2_K - 3_S$. При цьому сторона $3_P - 2_K$ дорівнює $\pi/2 + \varphi$, сторона $3_S - 2_K$ дорівнює $\pi/2 - \psi$, а двогранний кут $3_P - 2_K - 3_S$ дорівнює ϑ . Застосовуючи теорему косинусів (1.17), дістанемо:

$$\begin{aligned} \cos(3_S, 3_P) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) \cos \vartheta = \\ &= -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Результат, як й слід було очікувати, повністю збігається з одержаним матричним способом (див. матрицю (1.16)).

Застосовуючи цей спосіб до послідовності поворотів Крилова (див. рис. 1.4), дійдемо такої матриці напрямних косинусів:

A^{SP}	1_P	2_P	3_P
1_S	$\cos \vartheta \cos \varphi$	$\cos \vartheta \sin \varphi$	$\sin \vartheta$
2_S	$-\cos \psi \sin \varphi +$ $+\sin \psi \cos \varphi \sin \vartheta$	$\cos \psi \cos \varphi +$ $+\sin \psi \sin \varphi \sin \vartheta$	$-\sin \psi \cos \vartheta$
3_S	$-\sin \psi \sin \varphi -$ $-\cos \psi \cos \varphi \sin \vartheta$	$\sin \psi \cos \varphi -$ $-\cos \psi \sin \varphi \sin \vartheta$	$\cos \psi \cos \vartheta$

(1.18)

Стисло зазначимо переваги і недоліки кожного з розглянутих способів.

1. Суттєві переваги матричного способу – універсальність, застосовність до будь-якої кількості поворотів, простота і прозорість математичних операцій, що дозволяє його застосовувати на ЕОМ.

2. Недоліки матричного способу – громіздкість і недостатня наочність, неможливість досягти кінцевого результату без побудови повних матриць попередніх поворотів.

3. Застосування теореми косинусів сферичної тригонометрії є наочним, дозволяє одержати кінцевий результат без одержання проміжних.

4. Однак теорему косинусів можна застосовувати лише через попереднє графічне зображення картини поворотів і для кількості поворотів не більшої за три.

1.2.4. Недоліки застосування кутів Ейлера

Поворот від однієї, умовно нерухомої системи відліку S до іншої, рухомої P , найбільш природно описати матрицею A^{SP} напрямних косинусів осей системи P у системі S . При цьому проєкції будь-якого вектора \mathbf{x} у «нерухомій» системі S пов'язані із проєкціями цього ж вектора на осі системи P матричним співвідношенням

$$X_S = A^{SP} X_P, \quad (1.19)$$

де $X_S = [x_{1S}, x_{2S}, x_{3S}]^T$ і $X_P = [x_{1P}, x_{2P}, x_{3P}]^T$ – матриці-стовпці з проєкцій вектора на відповідні осі, або аналогічним співвідношенням

$$(X_S \times) = (A^{SP})^T (X_P \times) A^{SP}, \quad (1.20)$$

якщо вектори подано у вигляді кососиметричних матриць

Отже, щоб знайти проєкції вектора \mathbf{x} у деякій системі відліку за заданими його проєкціями в іншій системі відліку, необхідно визначити матрицю напрямних косинусів другої системи відносно першої і помножити її на матрицю-стовпець із відомих проєкцій. При цьому виходить очікувана матриця-стовпець із шуканих проєкцій.

Якщо здійснюються два послідовні повороти, – спочатку від системи відліку S до системи K , а потім від системи K до системи P – то, як було доведено, матриця напрямних косинусів A^{SP} , що відповідає переходу від першої системи відліку S до кінцевої P , дорівнює добутку (зліва направо у порядку здійснення самих поворотів) матриць напрямних косинусів A^{SK} і A^{KP} складових поворотів:

$$A^{SP} = A^{SK} A^{KP}. \quad (1.21)$$

Ці два співвідношення повністю розв'язують проблему відшукування проєкцій будь-якого вектора на осі довільної системи відліку. Але незручністю такого математичного подання поворотів систем відліку є те, що кожний такий поворот описується матрицею з 9 елементів, із яких тільки три є взаємонезалежними, якщо взяти до уваги співвідношення (1.13) і (1.14).

Більш зручним (компактним з математичного погляду) є, на перший погляд, опис поворотів за допомогою задання кутів Ейлера послідовних поворотів навколо трьох осей координат. Але таке подання має наступні недоліки :

- 1) на відміну від матриці напрямних косинусів, яка є завжди єдиною для будь-якого певного кутового положення двох систем відліку, опис за допомогою кутів Ейлера є неоднозначним; є щонайменше дванадцять різних сполучень послідовних поворотів, що відповідають тому самому взаємному положенню систем відліку;
- 2) найбільшою вадою опису поворотів кутами Ейлера є «вироджуваність» будь-якої послідовності кутів Ейлера: за деяких певних значеннях другого кута повороту напрямки осей першого й третього поворотів збігаються у просторі; це призводить до того, що результуючий поворот зводиться лише до двох, а не трьох поворотів, які необхідні для визначення кутового положення тіла.

Проілюструємо ці висновки.

Нехай, наприклад, для послідовності поворотів, зображеної на рис. 1.3, значення кутів ψ , ϑ і φ дорівнюють кожний по $\pi/6 = 30^\circ$. Розрахуємо для цього положення тіла значення матриці (1.43) його напрямних косинусів (усі програми подані М-мовою):

```
syms ps te f1
A1 =sym([1 0 0; 0 cos(ps) -sin(ps);0 sin(ps) cos(ps)]);
A2 =sym([ cos(te) 0 sin(te);0 1 0;-sin(te) 0 cos(te)]);
A3 =sym([1 0 0;0 cos(f1) -sin(f1); 0 sin(f1) cos(f1)])
AS = sym(A1*A2*A3)
ps = pi/6;      te=pi/6;f1=pi/6;
Ar = subs(AS)
Ar =
    0.8660    0.2500    0.4330
    0.2500    0.5335   -0.8080
   -0.4330    0.8080    0.3995
```

Очевидно, це значення матриці напрямних косинусів однозначно визначає певне кутове положення тіла. Таке саме положення тіла може бути задане і за допомогою іншої послідовності поворотів, наприклад, тою, що подана на рис. 1.4. Новій послідовності вже відповідає матриця напрямних косинусів (1.18). Як впливає з розгляду цієї матриці, значення кутів ψ , ϑ і φ цієї послідовності поворотів можна визначити по значеннях елементів матриці з таких формул:

$$\psi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{a_{12}^{SP}}{a_{11}^{SP}}\right); \quad \vartheta = \operatorname{arcsin}(a_{13}^{SP}); \quad \varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{a_{23}^{SP}}{a_{33}^{SP}}\right).$$

Здійснюючи обчислення за цими формулами, отримаємо такі значення кутів ψ , ϑ і ϕ у градусах

```
psn=atan(-Ar(2,3)/Ar(3,3))*180/pi
ten=asin(Ar(1,3))*180/pi
fin=atan(-Ar(1,2)/Ar(1,1))*180/pi
psn = 63.6901
ten = 25.6589
fin = -16.1021
```

Отже, таке саме положення тіла визначається вже зовсім іншими значеннями кутів поворотів. Очевидно, кожній послідовності поворотів відповідатиме власна трійка значень кутів, які визначають задане положення тіла.

Якщо другий кут повороту (ϑ) дорівнює у випадку послідовності рис. 1.3 нулю, матриця (1.16) набуває вигляду:

$$A^{SP} = \begin{bmatrix} 1; & 0; & 0 \\ 0; & \cos(\psi + \phi); & -\sin(\psi + \phi) \\ 0; & \sin(\psi + \phi); & \cos(\psi + \phi) \end{bmatrix}.$$

У цьому разі перші координатні осі початкової й кінцевої систем відліку збігаються, а завдання положення двох інших осей невизначене: тому самому положенню тіла (кінцевої системи відліку) у просторі (початковій системі відліку) відповідає безліч пар значень кутів ψ і ϕ , сума яких дорівнює певному куту. Саме ця сума, а не окремо кути ψ і ϕ , визначає у цьому випадку положення тіла.

Те саме спостерігається за послідовності поворотів, зображеній на рис. 1.4, якщо другий кут ϑ дорівнює $\pi/2$. У цьому випадку вісь 3_P збігається з віссю 1_S , а матриця напрямних косинусів (1.45) «вироджується» до такої:

$$A^{SP} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin(\psi + \phi) & \cos(\psi + \phi) & 0 \\ -\cos(\psi + \phi) & \sin(\psi + \phi) & 0 \end{bmatrix}.$$

Як очевидно, у цих випадках операція визначення положення тіла за допомогою конкретної послідовності поворотів стає нескінченнозначною.

Звідси випливає, що кути Ейлера не задовольняють умові однозначності опису положення тіла.

1.2.5. Теорема Ейлера

Для опису поворотів бажано мати такі три (незалежні один від одного) скалярні параметри, які б були єдиними, універсальними, однозначно б визначали довільну кутову орієнтацію тіла. Таку можливість забезпечує встановлена Ейлером обставина: *довільне кутове положення однієї системи відліку відносно іншої завжди можна подати як єдиний поворот початкової системи на певний кут (кут Ейлера) навколо певно орієнтованої осі (осі Ейлера, ейлеревої осі), завдяки якому ця система відліку збігатиметься з кінцевою.*

Косинус кута δ такого повороту доволі просто можна визначити з матриці напрямних косинусів

$$\cos \delta = [\text{Tr}(A^{SP}) - 1] / 2, \quad (1.22)$$

де $\text{Tr}(A^{SP})$ – слід (trace) матриці напрямних косинусів, тобто сума діагональних її елементів.

Напрямні косинуси e_{1S} , e_{2S} і e_{3S} осі цього повороту відносно осей початкової системи 1_S , 2_S і 3_S (або, що те саме, проекції одиничного вектора e осі Ейлера на ці осі) визначаються співвідношеннями

$$e_{1S} = \frac{a_{32}^{SP} - a_{23}^{SP}}{2 \sin \delta}; \quad e_{2S} = \frac{a_{13}^{SP} - a_{31}^{SP}}{2 \sin \delta}; \quad e_{3S} = \frac{a_{21}^{SP} - a_{12}^{SP}}{2 \sin \delta}. \quad (1.23)$$

Неважко збагнути, що кути між віссю Ейлера й осями координат не змінюються при повороті навколо неї. Тому напрямні косинуси ейлерової осі у кінцевій системі відліку будуть тими самими:

$$e_{1S} = e_{1P} = e_1; \quad e_{2S} = e_{2P} = e_2; \quad e_{3S} = e_{3P} = e_2.$$

Зворотний зв'язок між матрицею напрямних косинусів і елементами повороту Ейлера можна подати у вигляді:

$$A^{SP} = \cos \delta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (1 - \cos \delta) \begin{bmatrix} e_1^2 & e_1 e_2 & e_1 e_3 \\ e_2 e_1 & e_2^2 & e_2 e_3 \\ e_3 e_1 & e_3 e_2 & e_3^2 \end{bmatrix} + \sin \delta \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.24)$$

Неважко впевнитися, що перша матриця у правій частині (1.24) є одиничною, друга матриця – діадою, складеною з проекцій орту осі Ейлера на осі системи S (або P), а третя матриця є поданням того ж орта у вигляді кососиметричної матриці з тих самих проекцій, тому (1.24) можна записати так

$$A^{SP} = E \cos \delta + (1 - \cos \delta) \text{diad}(e) + (e \times) \sin \delta, \quad (1.25)$$

де позначено:

$$\text{diad}(e) = \begin{bmatrix} e_1^2 & e_1 e_2 & e_1 e_3 \\ e_2 e_1 & e_2^2 & e_2 e_3 \\ e_3 e_1 & e_3 e_2 & e_3^2 \end{bmatrix}; \quad (e \times) = \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Легко встановити, що

$$\begin{aligned} \text{diad}(e) &= \begin{bmatrix} e_1^2 & e_1 e_2 & e_1 e_3 \\ e_2 e_1 & e_2^2 & e_2 e_3 \\ e_3 e_1 & e_3 e_2 & e_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - e_2^2 - e_3^2 & e_1 e_2 & e_1 e_3 \\ e_2 e_1 & 1 - e_1^2 - e_3^2 & e_2 e_3 \\ e_3 e_1 & e_3 e_2 & 1 - e_2^2 - e_1^2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -e_2^2 - e_3^2 & e_1 e_2 & e_1 e_3 \\ e_2 e_1 & -e_1^2 - e_3^2 & e_2 e_3 \\ e_3 e_1 & e_3 e_2 & -e_2^2 - e_1^2 \end{bmatrix} = E + (e \times)^2. \end{aligned}$$

Це дозволяє перетворити (1.25) у вираз

$$A^{SP} = E + (e \times) \sin \delta + (e \times)^2 (1 - \cos \delta). \quad (1.26)$$

Запишемо перетворення (1.19) вектора x з врахуванням виразу (1.25):

$$\begin{aligned} X_S = A^{SP} X_P &= \{ \cos \delta E + (1 - \cos \delta) \text{diad}(e) + \sin \delta (e \times) \} X_P = \\ &= \cos \delta X_P + (1 - \cos \delta) \text{diad}(e) X_P + \sin \delta (e \times) X_P. \end{aligned}$$

Враховуючи тепер, що

$$\begin{aligned} \text{diad}(e) X_P &= \begin{bmatrix} e_1^2 & e_1 e_2 & e_1 e_3 \\ e_1 e_2 & e_2^2 & e_2 e_3 \\ e_1 e_3 & e_2 e_3 & e_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1p} \\ x_{2p} \\ x_{3p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 (x_{1p} e_1 + x_{2p} e_2 + x_{3p} e_3) \\ e_2 (x_{1p} e_1 + x_{2p} e_2 + x_{3p} e_3) \\ e_3 (x_{1p} e_1 + x_{2p} e_2 + x_{3p} e_3) \end{bmatrix} = \\ &= x \cos \varepsilon \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = x \cos \varepsilon e, \end{aligned}$$

дістанемо таке співвідношення:

$$X_S = \cos \delta X_P + (1 - \cos \delta) x \cos \varepsilon e + \sin \delta (e \times) X_P, \quad (1.27)$$

де через ε позначено кут між вектором x і ортом e ейлерової осі, $e = [e_1, e_2, e_3]^T$, а x – довжина вектора x . Вираз (1.56) фактично є поданням вектора x у системі відліку S через його подання у системі P за допомогою розкладу за напрямками:

- образу вектора x у системі P ;
- одиничного вектора e осі ейлерового повороту;
- перпендикуляра до попередніх двох напрямків.

Як випливає з виразу (1.56), довжина складової вектора x вздовж напрямку його у системі P дорівнює $x \cos \delta$, уздовж ейлерової осі – $x(1 - \cos \delta) \cos \varepsilon$, а вздовж напрямку, ортогонального до попередніх, – $x \sin \delta \sin \varepsilon$.

1.2.6. Вектор повороту Гібса

Поворот Ейлера можна подати у вигляді вектора повороту Гібса \mathbf{G}^{SP} :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_S^{SP} &= G_{1S}^{SP} \mathbf{1}_S + G_{2S}^{SP} \mathbf{2}_S + G_{3S}^{SP} \mathbf{3}_S = \\ &= tg \frac{\delta}{2} (e_{1S} \mathbf{1}_S + e_{2S} \mathbf{2}_S + e_{3S} \mathbf{3}_S) = tg \frac{\delta}{2} \mathbf{e}_S \end{aligned} \quad (1.28)$$

Тут G_{1S}^{SP} , G_{2S}^{SP} , G_{3S}^{SP} – проєкції вектора Гібса на напрямки осей початкової системи відліку; $\mathbf{1}_S$, $\mathbf{2}_S$, $\mathbf{3}_S$ – позначення ортів цієї системи, а

$$\mathbf{e}_S = e_{1S} \mathbf{1}_S + e_{2S} \mathbf{2}_S + e_{3S} \mathbf{3}_S$$

– позначення одиничного вектора осі Ейлера.

Як випливає з визначення, довжина вектора Гібса дорівнює тангенсу половини кута повороту, а напрямком збігається з додатним напрямком осі ейлерового повороту. З цього випливає, що *проєкції вектора Гібса, який описує поворот, що переводить одну систему декартових координат в іншу, однакові в обох цих системах відліку*, тобто вектор Гібса має такі властивості:

$$G_S^{SP} = G_P^{SP} = C^{SP} G_P^{SP} = (C^{SP})^T G_S^{SP},$$

або просто (знімаючи непотрібні індекси)

$$G^{SP} = C^{SP} G^{SP} = (C^{SP})^T G^{SP}.$$

Замість векторної форми (1.57) можна використовувати матричну форму

$$G^{SP} = [G_1^{SP}, G_2^{SP}, G_3^{SP}]^T = \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} [e_1, e_2, e_3]^T = \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} e.$$

Матриця напрямних косинусів пов'язана з вектором Гіббса залежністю:

$$C^{SP} = \frac{[1 - (G^{SP})^T G^{SP}]E + 2G^{SP} (G^{SP})^T + 2(G^{SP} \times)}{1 + (G^{SP})^T G^{SP}}.$$

Проекції будь-якого вектора x перетворюються з однієї системи відліку в іншу через вектор Гіббса у такий спосіб:

$$X_S = C^{SP} X_P = \frac{[1 - (G^{SP})^T G^{SP}]X_P + 2(G^{SP})^T X_P G^{SP} + 2(G^{SP} \times)X_P}{1 + (G^{SP})^T G^{SP}}, \quad (1.29)$$

де $(G^{SP} \times)$ – кососиметрична матриця з проекцій вектора G на осі системи P або S , G^{SP} – матриця-стовпець із цих проекцій.

Виразимо співвідношення (1.29) через кут δ і матрицю-стовпець e одиничного вектора ейлерева повороту, враховуючи, що

$$(G^{SP})^T G^{SP} = \operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{2} e^T e = \operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{2}; \quad (G^{SP} \times) = \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} (e \times);$$

$$1 + (G^{SP})^T G^{SP} = 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\delta}{2}}; \quad 1 - (G^{SP})^T G^{SP} = 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{2} = \frac{\cos \delta}{\cos^2 \frac{\delta}{2}};$$

$$G^{SP} (G^{SP})^T = \operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{2} (e e^T) = \operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{2} \operatorname{diad}(e) = \operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{2} [E + (e \times)^2];$$

Матимемо:

$$\begin{aligned} X_S &= \cos \delta X_P + 2 \sin^2 \frac{\delta}{2} [E + (e \times)^2] X_P + 2 \sin \frac{\delta}{2} \sin \frac{\delta}{2} (e \times) X_P = \\ &= \{ \cos \delta E + 2 \sin^2 \frac{\delta}{2} [E + (e \times)^2] + 2 \sin \frac{\delta}{2} \sin \frac{\delta}{2} (e \times) \} X_P = \\ &= \{ E + (1 - \cos \delta)(e \times)^2 + \sin \delta (e \times) \} X_P. \end{aligned}$$

Це збігається з виразом (1.26).

Щоб можна було користуватися вектором Гіббса для опису складних поворотів, треба ще встановити правило «додавання» поворотів, тобто визначення вектора Гіббса результуючого повороту за заданими векторами Гіббса складових поворотів. Правило можна сформулювати так:

$$G^{SP} = G^{ST} \oplus G^{TP} = \frac{G^{ST} + G^{TP} + G^{ST} \times G^{TP}}{1 - G^{ST} \cdot G^{TP}}. \quad (1.30)$$

Знаком \oplus тут позначено операцію «додавання» векторів Гіббса.

Цю операцію слід розуміти так. Задана деяка початкова система відліку (наприклад, S). У цій системі задані два різні повороти, які переводять цю систему у деякі дві різні системи відліку (від S до T і від T до деякої системи P). Потрібно визначити у цій початковій системі вектор результуючого повороту (від системи S до системи P), який виходить унаслідок послідовного повороту початкової системи на кут першого повороту, а потім одержаної системи T на кут другого повороту.

Ця операція є деяким еквівалентом множення матриць напрямних косинусів для отримання матриці напрямних косинусів результуючого повороту. На відміну від звичайного поняття підсумовування, «додавання» векторів Гібса не є комутативним ($\mathbf{G}_1 \oplus \mathbf{G}_2 \neq \mathbf{G}_2 \oplus \mathbf{G}_1$), бо остання складова чисельника (1.62) змінює свій знак на протилежний у разі зміни порядку підсумовування.

1.2.7. Початкові відомості про кватерніони

Кватерніоном називають гіперкомплексне число із трьома уявними одиницями. У загальному випадку воно має вигляд

$$\mathbf{Q} = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3,$$

де q_0, q_1, q_2, q_3 – деякі дійсні числа, а $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – уявні одиниці. Поняття кватерніону можна вважати узагальненням поняття комплексного числа на випадок, коли уявний простір тривимірний і заданий системою відліку з координатним базисом (ортами) $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

Дії над кватерніонами підпорядковуються таким головним правилам.

1. Два кватерніони \mathbf{Q}_1 і \mathbf{Q}_2 дорівнюють один одному, якщо однакові їх елементи

$$q_{1i} = q_{2i}; \quad (i = 0, 1, 2, 3).$$

2. Сумою кватерніонів \mathbf{Q}_1 і \mathbf{Q}_2 називається кватерніон, елементами якого є сума відповідних елементів кватерніонів доданків

$$\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 = (q_{10} + q_{20}) + \mathbf{i}(q_{11} + q_{21}) + \mathbf{j}(q_{12} + q_{22}) + \mathbf{k}(q_{13} + q_{23}).$$

3. Добутком кватерніону на число є кватерніон, усі елементи якого дорівнюють відповідному елементу початкового полінома, помноженому на це число

$$a\mathbf{Q} = a q_0 + \mathbf{i}(a q_1) + \mathbf{j}(a q_2) + \mathbf{k}(a q_3).$$

З цих визначень випливає, що додавання кватерніонів і добуток їх на скаляр підпорядковуються правилам звичайної алгебри чисел.

Одиниці – $1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – можна вважати за одиничні вектори (орти) чотиривимірного простору, яке складається зі звичайної числової осі і тривимірного уявного простору з ортами $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

Щоб визначити добуток кватерніонів, необхідно, передусім визначити правила множення одиниць $1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Ці правила найзручніше подати у вигляді таблиці (знак \circ означає кватерніонне множення):

\circ	1	\mathbf{i}	\mathbf{j}	\mathbf{k}
1	1	\mathbf{i}	\mathbf{j}	\mathbf{k}
\mathbf{i}	\mathbf{i}	-1	\mathbf{k}	$-\mathbf{j}$
\mathbf{j}	\mathbf{j}	$-\mathbf{k}$	-1	\mathbf{i}
\mathbf{k}	\mathbf{k}	\mathbf{j}	$-\mathbf{i}$	-1

(1.31)

За такими правилами добуток кватерніонів (його позначатимемо знаком \circ між позначеннями кватерніонів, що перемножуються) є також кватерніоном:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1 \circ \mathbf{Q}_2 &= (q_{10} + \mathbf{i}q_{11} + \mathbf{j}q_{12} + \mathbf{k}q_{13}) \circ (q_{20} + \mathbf{i}q_{21} + \mathbf{j}q_{22} + \mathbf{k}q_{23}) = \\ &= (q_{10}q_{20} - q_{11}q_{21} - q_{12}q_{22} - q_{13}q_{23}) + \\ &+ \mathbf{i}(q_{10}q_{21} + q_{11}q_{20} + q_{12}q_{23} - q_{13}q_{22}) + \\ &+ \mathbf{j}(q_{10}q_{22} + q_{12}q_{20} + q_{13}q_{21} - q_{11}q_{23}) + \\ &+ \mathbf{k}(q_{10}q_{23} + q_{13}q_{20} + q_{11}q_{22} - q_{12}q_{21}) \end{aligned} \quad (1.32)$$

Завдяки правилам (1.31) перемножування кватерніонів алгебра кватерніонів містить у собі алгебру дійсних і комплексних чисел, а також тривимірну векторну алгебру.

Кватерніони охоплюють *дійсні числа* $(q_0, 0, 0, 0)$ з єдиною одиницею 1, *комплексні числа* $(q_0, q_1, 0, 0)$ із двома одиницями 1 та \mathbf{i} , а також *вектори* $(0, q_1, q_2, q_3)$ у просторі трьох вимірів. Можна ідентифікувати одиниці $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ортами тривимірного векторного простору і розглядати елементи кватерніону при цих одиницях як компоненти вектора. Подамо кватерніон у вигляді суми *скалярної* q_0 та *векторної* \mathbf{q} частин

$$\mathbf{Q} = q_0 + \mathbf{q}. \quad (1.33)$$

Назвемо *вектор-кватерніоном* кватерніон, скалярна частина якого дорівнює нулеві.

4. *Кватерніонний добуток двох вектор-кватерніонів складається з векторного добутку цих векторів та їх скалярного добутку із протилежним знаком.* Дійсно, нехай

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{q}_1 = \mathbf{i}q_{11} + \mathbf{j}q_{12} + \mathbf{k}q_{13}; \quad \mathbf{Q}_2 = \mathbf{q}_2 = \mathbf{i}q_{21} + \mathbf{j}q_{22} + \mathbf{k}q_{23}.$$

Тоді, перемножуючи ці вектор-кватерніони, матимемо:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 \circ \mathbf{q}_2 &= -(q_{11}q_{21} + q_{12}q_{22} + q_{13}q_{23}) + \\ &+ \mathbf{i}(q_{12}q_{23} - q_{13}q_{22}) + \mathbf{j}(q_{13}q_{21} - q_{11}q_{23}) + \mathbf{k}(q_{11}q_{22} - q_{12}q_{21}) = \\ &= -\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Як бачимо, добуток (кватерніонний) двох вектор-кватерніонів приводить у кінцевому підсумку не до вектор-кватерніону, а до повного кватерніону. У цьому кватерніонний добуток істотно відрізняється від векторного. Він містить у собі і векторний, і скалярний добуток векторів.

Наслідок 1. *Сума кватерніонних добутків двох вектор-кватерніонів у прямому і зворотному порядку дорівнює подвійному скалярному добуткові цих векторів (з протилежним знаком):*

$$\mathbf{q}_1 \circ \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_2 \circ \mathbf{q}_1 = -\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 \times \mathbf{q}_1 = -2\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2.$$

Наслідок 2. *Різниця між кватерніонними добутками двох вектор-кватерніонів у прямому і зворотному порядку дорівнює подвійному векторному добутку першого вектора на другий*

$$\mathbf{q}_1 \circ \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_2 \circ \mathbf{q}_1 = -\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 \times \mathbf{q}_1 = 2\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2. \quad (1.35)$$

З врахуванням (1.34), можна подати добуток (1.32) двох кватерніонів у такому спрощеному вигляді:

$$\mathbf{Q}_1 \circ \mathbf{Q}_2 = q_{10}q_{20} - \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 + q_{10}\mathbf{q}_2 + q_{20}\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2. \quad (1.36)$$

5. Скалярна частина добутку двох кватерніонів дорівнює добутку їх скалярних частин мінус скалярний добуток їх векторних частин. Векторна частина дорівнює сумі добутків скалярних частин кожного із кватерніонів на векторну частину іншого співмножника і векторного добутку векторних частин.

Наслідок 3. Різниця між добутками двох кватерніонів у прямому і зворотному порядку дорівнює подвійному векторному добутку векторної частини першого кватерніону на векторну частину другого

$$\mathbf{Q}_1 \circ \mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_2 \circ \mathbf{Q}_1 = 2\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2.$$

6. Множення кватерніонів має властивості асоціативності та дистрибутивності щодо додавання, але не є комутативним (при зміні порядку співмножників у формулі (1.70) змінюється знак останнього члена – векторного добутку).

7. Кватерніоном, **спряженим** до заданого (1.33), називають кватерніон $\tilde{\mathbf{Q}}$ із такою самою скалярною частиною і з протилежною за знаком векторною частиною:

$$\tilde{\mathbf{Q}} = q_0 - \mathbf{q}. \quad (1.37)$$

8. Добуток кватерніону на спряжений до нього дорівнює сумі квадратів усіх його елементів, яку називають **нормою** кватерніону. Доведемо це:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \circ \tilde{\mathbf{Q}} &= (q_0 + \mathbf{q}) \circ (q_0 - \mathbf{q}) = q_0^2 - \mathbf{q} \circ \mathbf{q} = q_0^2 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = \\ &= q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = \|\mathbf{Q}\|^2 \end{aligned}$$

9. Якщо норма $\|\mathbf{Q}\|$ кватерніону дорівнює одиниці, кватерніон називають **нормованим**.

10. Кватерніон, спряжений до добутку двох кватерніонів, дорівнює добутку спряжених кватерніонів, узятих у зворотному порядку:

$$(\mathbf{Q}_1 \circ \mathbf{Q}_2) \tilde{\phantom{\mathbf{Q}}} = \tilde{\mathbf{Q}}_2 \circ \tilde{\mathbf{Q}}_1.$$

11. Норма добутку двох кватерніонів дорівнює добутку норм співмножників:

$$\|\mathbf{Q}_1 \circ \mathbf{Q}_2\| = \|\mathbf{Q}_1\| \|\mathbf{Q}_2\|.$$

12. Кватерніоном, **оберненим** до заданого кватерніону \mathbf{Q} , називають кватерніон \mathbf{Q}^{-1} , добуток якого на заданий дорівнює одиниці;

$$\mathbf{Q} \circ \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^{-1} \circ \mathbf{Q} = 1.$$

13. Обернений кватерніон дорівнює спряженому, поділеному на його норму

$$\mathbf{Q}^{-1} = \frac{\tilde{\mathbf{Q}}}{\|\mathbf{Q}\|}. \quad (1.38)$$

14. Будь-який ненульовий кватерніон завжди може бути поданий у вигляді

$$\mathbf{Q} = Q(\cos \vartheta + \mathbf{e} \sin \vartheta), \quad (1.39)$$

$$Q = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

– *модуль* («довжина») кватерніону,

$$\cos \vartheta = \frac{q_0}{Q}; \quad \sin \vartheta = \frac{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}{Q}; \quad (0 \leq \vartheta < \pi).$$

а \mathbf{e} – одиничний вектор напрямку векторної частини кватерніону:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \frac{\mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} = \frac{\mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3}{q} = \\ &= \mathbf{i}c_{q_1} + \mathbf{j}c_{q_2} + \mathbf{k}c_{q_3}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Тут

$$q = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

– модуль векторної частини кватерніону, а $c_{q_1}, c_{q_2}, c_{q_3}$ – напрямні косинуси додатного напрямку кватерніону відносно базису $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

15. Величину ϑ у поданні (1.78) називатимемо *аргументом, або кутом кватерніону*, а вектор \mathbf{e} (1.40) – *ортом векторної частини кватерніону*.

16. Скалярна частина добутку кватерніонів не змінюється у разі циклічного переставляння співмножників.

Для двох множників у цьому можна впевнитися безпосередньо з виразу (1.36)

$$\text{sqa}(\mathbf{Q}_1 \circ \mathbf{Q}_2) = \text{sqa}(\mathbf{Q}_2 \circ \mathbf{Q}_1). \quad (1.41)$$

Доведемо це твердження для трьох співмножників, спираючись на властивість (1.41), як на доведену:

$$\begin{aligned} \text{sqa}(\mathbf{Q}_1 \circ \mathbf{Q}_2 \circ \mathbf{Q}_3) &= \text{sqa}[\mathbf{Q}_1 \circ (\mathbf{Q}_2 \circ \mathbf{Q}_3)] = \text{sqa}[(\mathbf{Q}_2 \circ \mathbf{Q}_3) \circ \mathbf{Q}_1] = \\ &= \text{sqa}[\mathbf{Q}_2 \circ (\mathbf{Q}_3 \circ \mathbf{Q}_1)] = \text{sqa}[(\mathbf{Q}_3 \circ \mathbf{Q}_1) \circ \mathbf{Q}_2] = \text{sqa}(\mathbf{Q}_3 \circ \mathbf{Q}_1 \circ \mathbf{Q}_2). \end{aligned}$$

1.2.8. Подання поворотів за допомогою кватерніонів

Алгебра кватерніонів дозволяє подати поворот у просторі у простій і зручній формі. Таке подання ґрунтується на такій фундаментальній теоремі:

Якщо \mathbf{Q} і \mathbf{A} – нескалярні кватерніони, то величина

$$\mathbf{A}' = \mathbf{Q} \circ \mathbf{A} \circ \mathbf{Q}^{-1} \quad (1.84)$$

є кватерніоном, норма і скалярна частина якого збігається з нормою і скалярною частиною кватерніону \mathbf{A} , а векторна частина виходить поворотом векторної частини кватерніону \mathbf{A} по конусу навколо осі напрямку кватерніону \mathbf{Q} на подвійний кут кватерніону \mathbf{Q} .

Доведення.

Врахуємо визначення оберненого кватерніону (1.38) і подамо складові кватерніони у формі (1.39):

$$\mathbf{Q} \circ \mathbf{A} \circ \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q} \circ \mathbf{A} \circ \frac{\tilde{\mathbf{Q}}}{\|\mathbf{Q}\|} =$$

$$= Q(\cos \vartheta + \mathbf{e} \sin \vartheta) \circ A(\cos \varphi + \mathbf{a} \sin \varphi) \circ Q(\cos \vartheta - \mathbf{e} \sin \vartheta) / \|Q\|,$$

де Q – модуль кватерніону \mathbf{Q} ; $\|\mathbf{Q}\| = Q^2$ – його норма; ϑ – кут; \mathbf{e} – одиничний вектор напрямку цього кватерніону; A, \mathbf{a}, φ – модуль, напрямок і кут кватерніону \mathbf{A} . Отже маємо

$$\mathbf{Q} \circ \mathbf{A} \circ \mathbf{Q}^{-1} = A(\cos \vartheta + \mathbf{e} \sin \vartheta) \circ (\cos \varphi + \mathbf{a} \sin \varphi) \circ (\cos \vartheta - \mathbf{e} \sin \vartheta).$$

Виконаємо перемноження

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \circ \mathbf{A} \circ \mathbf{Q}^{-1} = A\{ & \cos^2 \vartheta \cos \varphi + \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi \cdot \mathbf{e} + \cos^2 \vartheta \sin \varphi \cdot \mathbf{a} - \\ & - \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi \cdot \mathbf{e} + \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi \cdot \mathbf{e} \circ \mathbf{a} - \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi \cdot \mathbf{a} \circ \mathbf{e} - \\ & - \sin^2 \vartheta \cos \varphi \cdot \mathbf{e} \circ \mathbf{e} - \sin^2 \vartheta \sin \varphi \cdot \mathbf{e} \circ \mathbf{a} \circ \mathbf{e}\} \end{aligned} \quad (1.43)$$

Усе звелось до кватерніонних добутків векторів, які визначаються співвідношенням (1.34). З нього випливає:

$$\begin{aligned} 1) \mathbf{e} \circ \mathbf{e} &= -\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \times \mathbf{e} = -1; \\ 2) \mathbf{e} \circ \mathbf{a} &= -\mathbf{e} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{e} \times \mathbf{a}; \\ 3) \mathbf{a} \circ \mathbf{e} &= -\mathbf{e} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{e} \times \mathbf{a}; \\ 4) \mathbf{e} \circ \mathbf{a} \circ \mathbf{e} &= \mathbf{e} \circ (\mathbf{a} \circ \mathbf{e}) = \mathbf{e} \circ (-\mathbf{e} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{e} \times \mathbf{a}) = -(\mathbf{e} \cdot \mathbf{a})\mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) - \\ & - \mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) = -\cos \varepsilon \mathbf{e} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{a})\mathbf{e} + \mathbf{a}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}) = -2 \cos \varepsilon \mathbf{e} + \mathbf{a}, \end{aligned} \quad (1.44)$$

де ε – кут між напрямками осей вектор-кватерніонів \mathbf{e} і \mathbf{a} . При доведенні останньої формули враховано, що векторно-скалярний добуток з однакових векторів дорівнює нулю. Підставляючи (1.44) у (1.43), матимемо:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \circ \mathbf{A} \circ \mathbf{Q}^{-1} &= A\{\cos \varphi + \\ & + \sin \varphi[(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta)\mathbf{a} + 2 \sin^2 \vartheta \cos \varepsilon \mathbf{e} + 2 \sin \vartheta \cos \vartheta(\mathbf{e} \times \mathbf{a})]\} = \\ &= A\{\cos \varphi + \sin \varphi[\cos 2\vartheta \mathbf{a} + (1 - \cos 2\vartheta) \cos \varepsilon \mathbf{e} + \sin 2\vartheta(\mathbf{e} \times \mathbf{a})]\}. \end{aligned}$$

Порівнюючи вираз у квадратних дужках із правою частиною співвідношення (1.27), можна зробити висновок, що він збігається з виразом вектора \mathbf{a} , повернутого на кут 2ϑ відносно осі \mathbf{e} , тобто відносно осі кватерніону \mathbf{Q} . Це й треба було довести.

Операція (1.42) змінює лише векторну частину кватерніону, тому її можна розглядати як операцію перетворення вектора \mathbf{x} у вектор \mathbf{x}' згідно з формулою

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Q} \circ \mathbf{x} \circ \mathbf{Q}^{-1} \quad (1.45)$$

Це перетворення є поворотом навколо деякої осі, причому воно у вигляді (1.45) одразу визначає вісь цього повороту. Цією віссю є векторна частина \mathbf{q} кватерніону \mathbf{Q} , оскільки ця вісь не змінюється цим перетворенням:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}' &= \mathbf{Q} \circ \mathbf{q} \circ \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q} \circ \mathbf{q} \circ (q_0 - \mathbf{q}) / \|\mathbf{Q}\| = \mathbf{Q} \circ (q_0 \mathbf{q} - \mathbf{q} \circ \mathbf{q}) / \|\mathbf{Q}\| = \\ &= \mathbf{Q} \circ (q_0 - \mathbf{q}) \circ \mathbf{q} / \|\mathbf{Q}\| = \mathbf{Q} \circ \mathbf{Q}^{-1} \circ \mathbf{q} = \mathbf{q}. \end{aligned}$$

Щоб подати поворот системи координат навколо деякої осі на кут δ , достатньо у перетворенні (1.84) узяти як перетворювальний нормований кватерніон \mathbf{Q} із кутом кватерніону, що дорівнює половині кута δ :

$$\mathbf{Q} = \cos \frac{\delta}{2} + \mathbf{e} \sin \frac{\delta}{2}, \quad (1.46)$$

де \mathbf{e} – одиничний вектор напрямку, навколо якого здійснюється поворот на кут δ . Наприклад, для опису повороту від початкової системи відліку S можна під \mathbf{e} розуміти вектор-кватерніон вигляду:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_S = e_{1S} \mathbf{1}_S + e_{2S} \mathbf{2}_S + e_{3S} \mathbf{3}_S; \quad (e_{1S}^2 + e_{2S}^2 + e_{3S}^2 = 1), \quad (1.47)$$

де e_{1S}, e_{2S}, e_{3S} – напрямні косинуси осі повороту у початковій системі відліку.

Чотири компоненти кватерніону повороту (1.46):

$$\lambda = e_{1S} \sin \frac{\delta}{2}; \quad \mu = e_{2S} \sin \frac{\delta}{2}; \quad \nu = e_{3S} \sin \frac{\delta}{2}; \quad \rho = \cos \frac{\delta}{2};$$

одержали назву *параметрів Ейлера* або *параметрів Родріга-Гамільтона*.

Перейдемо до подання поворотів систем координат. Нехай потрібно описати поворот від системи S до системи P . Тоді, позначаючи кватерніон такого повороту через

$$\mathbf{Q}^{SP} = \cos \frac{\delta}{2} + \mathbf{e}^{SP} \sin \frac{\delta}{2},$$

де \mathbf{e}^{SP} – одиничний вектор ейлеревої осі, поворот навколо якої системи відліку S на кут δ переводить її у систему P , можна подати у цілому перетворення будь-якого вектор-кватерніону \mathbf{x}_P , заданого своїми проекціями на осі системи P , у вектор-кватерніон \mathbf{x}_S , що складається із проекцій цього вектора на осі початкової системи, у такому вигляді (див. (1.46))

$$\mathbf{x}_S = \mathbf{Q}^{SP} \circ \mathbf{x}_P \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{SP}. \quad (1.48)$$

Оскільки кватерніон \mathbf{Q}^{SP} повороту має однакові складові як у початковій, так й у кінцевій системі відліку, перетворення можна записати у двох еквівалентних формах

$$\mathbf{x}_S = \mathbf{Q}_S^{SP} \circ \mathbf{x}_P \circ \tilde{\mathbf{Q}}_S^{SP}; \quad \mathbf{x}_S = \mathbf{Q}_P^{SP} \circ \mathbf{x}_P \circ \tilde{\mathbf{Q}}_P^{SP} \quad (1.49)$$

Зворотний перехід – від системи P до системи S – визначиться кватерніоном \mathbf{Q}^{PS} , який, очевидно, матиме той самий напрямок векторної частини, що й кватерніон \mathbf{Q}^{SP} , той самий аргумент, але протилежного знака, тобто буде спряженим до останнього:

$$\mathbf{Q}^{PS} = \tilde{\mathbf{Q}}^{SP}.$$

Знайдемо явні вирази компонент кватерніону

$$\mathbf{x}_S = \mathbf{1}_S x_{1S} + \mathbf{2}_S x_{2S} + \mathbf{3}_S x_{3S} \quad (1.50)$$

відповідно до виразу (1.48), який слід розуміти так. У початковому стані система відліку P збігається із системою S . У ній задано вектор \mathbf{x} своїми проекціями на осі системи P (отже, і S):

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{1}_P x_{1P} + \mathbf{2}_P x_{2P} + \mathbf{3}_P x_{3P} = \mathbf{1}_S x_{1P} + \mathbf{2}_S x_{2P} + \mathbf{3}_S x_{3P}. \quad (1.51)$$

Потім здійснюється поворот системи P у нове положення. Цей поворот описаний кватерніоном \mathbf{Q}^{SP} , векторна частина якого задана своїми проєкціями на осі тієї ж системи S :

$$\mathbf{Q}_S^{SP} = q_0 + \mathbf{1}_S q_{1S} + \mathbf{2}_S q_{2S} + \mathbf{3}_S q_{3S} = q_0 + \mathbf{1}_S q_1 + \mathbf{2}_S q_2 + \mathbf{3}_S q_3. \quad (1.52)$$

Разом із системою P повертається і вектор \mathbf{x} . Потрібно визначити проєкції цього вектора на осі системи S .

Ураховуючи у співвідношенні (1.48) вирази (1.51), (1.52) і здійснюючи операції кватерніонного множення, дістанемо:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_S &= \mathbf{1}_S x_{1S} + \mathbf{2}_S x_{2S} + \mathbf{3}_S x_{3S} = (q_0 + \mathbf{1}_S q_{1S} + \mathbf{2}_S q_{2S} + \mathbf{3}_S q_{3S}) \circ \\ &\circ (\mathbf{1}_S x_{1P} + \mathbf{2}_S x_{2P} + \mathbf{3}_S x_{3P}) \circ (q_0 - \mathbf{1}_S q_{1S} - \mathbf{2}_S q_{2S} - \mathbf{3}_S q_{3S}) = \\ &= \mathbf{1}_S \{(q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) \cdot x_{1P} + 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) x_{2P} + 2(q_0 q_2 + q_1 q_3) x_{2P}\} + \\ &+ \mathbf{2}_S \{2(q_1 q_2 + q_0 q_3) x_{1P} + (q_0^2 + q_2^2 - q_1^2 - q_3^2) x_{2P} + 2(q_3 q_2 - q_1 q_0) x_{3P}\} + \\ &+ \mathbf{3}_S \{2(q_1 q_3 - q_0 q_2) x_{1P} + 2(q_0 q_1 + q_2 q_3) x_{2P} + (q_0^2 + q_3^2 - q_1^2 - q_2^2) x_{3P}\}. \end{aligned}$$

Із цього випливає

$$\begin{aligned} x_{1S} &= (q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) x_{1P} + 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) x_{2P} + 2(q_0 q_2 + q_1 q_3) x_{2P}; \\ x_{2S} &= 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) x_{1P} + (q_0^2 + q_2^2 - q_1^2 - q_3^2) x_{2P} + 2(q_3 q_2 - q_1 q_0) x_{3P}; \\ x_{3S} &= 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) x_{1P} + 2(q_0 q_1 + q_2 q_3) x_{2P} + (q_0^2 + q_3^2 - q_1^2 - q_2^2) x_{3P}. \end{aligned}$$

Порівнюючи знайдені співвідношення з виразом (1.19), можна впевнитися, що матриця напрямних косинусів A^{SP} однозначно визначається параметрами кватерніону повороту у такий спосіб:

$$\begin{aligned} A^{SP} &= \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_0 q_2 + q_1 q_3) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2 + q_2^2 - q_1^2 - q_3^2 & 2(q_3 q_2 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_0 q_1 + q_2 q_3) & q_0^2 + q_3^2 - q_1^2 - q_2^2 \end{bmatrix} = \\ &= E + 2 \begin{bmatrix} -q_2^2 - q_3^2 & q_1 q_2 - q_0 q_3 & q_0 q_2 + q_1 q_3 \\ q_1 q_2 + q_0 q_3 & -q_1^2 - q_3^2 & q_3 q_2 - q_0 q_1 \\ q_1 q_3 - q_0 q_2 & q_0 q_1 + q_2 q_3 & -q_1^2 - q_2^2 \end{bmatrix} = \\ &= E + 2q_0 \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -q_2^2 - q_3^2 & q_1 q_2 & q_1 q_3 \\ q_1 q_2 & -q_1^2 - q_3^2 & q_3 q_2 \\ q_1 q_3 & q_2 q_3 & -q_1^2 - q_2^2 \end{bmatrix} = \\ &= E + 2q_0(q \times) + 2(q \times)(q \times) = E + 2[q_0 \cdot E + (q \times)](q \times). \quad (1.53) \end{aligned}$$

Тут

$$(q \times) = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix}$$

є кососиметричною матрицею, яка складається з компонентів векторної частини кватерніону на кшталт того, як кососиметрична матриця складається із проєкцій вектора.

Із виразу (1.53) легко визначити слід матриці напрямних косинусів:

$$\text{Tr}(A^{SP}) = 3q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 = 4q_0^2 - 1 = 4 \cos^2 \frac{\delta}{2} - 1 = 2 \cos \delta + 1,$$

що доводить співвідношення (1.22).

Аналогічно доводиться і слухність співвідношення (1.23). Наприклад

$$a_{32} - a_{23} = 4q_0q_1 = 4 \cos \frac{\delta}{2} q_1 = 4 \cos \frac{\delta}{2} \sin \frac{\delta}{2} e_{1S} = 2 \sin \delta e_{1S},$$

звідки випливає перше співвідношення (1.23).

Неважко довести, що вираз (1.53) є кватерніонним аналогом співвідношення (1.24). Дійсно, враховуючи, що у цьому випадку скалярна частина кватерніону переходу від початкової системи S до кінцевої P дорівнює $q_0 = \cos \frac{\delta}{2}$, а компоненти векторної частини кватерніону повороту зв'язані із проєкціями одиничного вектора \mathbf{e} співвідношеннями

$$q_1 = \sin \frac{\delta}{2} e_1; \quad q_2 = \sin \frac{\delta}{2} e_2; \quad q_3 = \sin \frac{\delta}{2} e_3,$$

можна перетворити (1.24) у такий спосіб:

$$\begin{aligned} A^{SP} &= \cos \delta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (1 - \cos \delta) \begin{bmatrix} e_1^2 & e_1 e_2 & e_1 e_3 \\ e_2 e_1 & e_2^2 & e_2 e_3 \\ e_3 e_1 & e_3 e_2 & e_3^2 \end{bmatrix} + \sin \delta \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= (2q_0^2 - 1)E + 2 \sin^2 \frac{\delta}{2} \cdot \begin{bmatrix} e_1^2 & e_1 e_2 & e_1 e_3 \\ e_2 e_1 & e_2^2 & e_2 e_3 \\ e_3 e_1 & e_3 e_2 & e_3^2 \end{bmatrix} + 2 \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2} \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= (2q_0^2 - 1)E + 2 \begin{bmatrix} q_1^2 & q_1 q_2 & q_1 q_3 \\ q_2 q_1 & q_2^2 & q_2 q_3 \\ q_3 q_1 & q_3 q_2 & q_3^2 \end{bmatrix} + 2q_0 \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= (2q_0^2 - 1)E + 2 [(1 - q_0^2)E + (q \times)(q \times)] + 2q_0 (q \times) = \\ &= E + 2 (q \times)(q \times) + 2q_0 (q \times). \end{aligned}$$

Це й потрібно було довести.

Установимо тепер правило перетворення кватерніонів поворотів при складанні поворотів. Нехай перший перехід від початкової системи відліку S до проміжної системи T описується кватерніоном \mathbf{Q}^{ST} , а другий перехід – від системи T до системи P – кватерніоном \mathbf{Q}^{TP} . Тоді, користуючись співвідношенням (1.48), запишемо

$$\mathbf{x}_S = \mathbf{Q}^{ST} \circ \mathbf{x}_T \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{ST}; \quad \mathbf{x}_T = \mathbf{Q}^{TP} \circ \mathbf{x}_P \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{TP}; \quad \mathbf{x}_S = \mathbf{Q}^{SP} \circ \mathbf{x}_P \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{SP}.$$

Підставивши другий вираз у перший, матимемо

$$\mathbf{x}_S = \mathbf{Q}^{ST} \circ \mathbf{Q}^{TP} \circ \mathbf{x}_P \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{TP} \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{ST},$$

порівнюючи який із третім виразом, одержимо

$$\mathbf{Q}^{SP} = \mathbf{Q}^{ST} \circ \mathbf{Q}^{TP}. \quad (1.54)$$

Звідси випливає такий висновок: *кватерніон результуючого повороту дорівнює кватерніонному добутку кватерніонів складових поворотів у порядку (зліва направо) здійснення самих поворотів.*

Наведемо порівняльний аналіз розглянутих математичних моделей поворотів систем відліку:

- 1) опис поворотів за допомогою трьох кутів послідовних поворотів є одним із найкомпактніших (бо містить лише три параметри – кути Ейлера), але він вироджується за певних значень кута другого повороту, не є однозначним і для нього немає досить простого правила складання поворотів;
- 2) матриця напрямних косинусів є однозначним і найбільш загальним способом опису повороту систем відліку, складання поворотів описується досить простим правилом (1.21), але вона має дев'ять параметрів, які пов'язані між собою шістьма співвідношеннями, через що їх не можна вважати незалежними, і під час обчислень потрібно на кожному кроці перевіряти, чи виконуються вони;
- 3) опис поворотів за допомогою векторів Гібса має такі самі переваги, що й сукупність кутів послідовного повороту, до чого додаються ще правило (1.30) перетворень векторів Гібса при складанні поворотів та єдиність подання; недоліком є вироджуваність вектора Гібса при куті повороту $\delta = \pi$ й складність правила складання (1.30);
- 4) найбільш вдалим є подання поворотів за допомогою кватерніонів; подання повороту у вигляді кватерніону є однозначним, визначається чотирма параметрами, які не вироджуються за будь-яких поворотів, правило (1.54) складання поворотів для кватерніонів дуже просте – воно зводиться до простого перемножування кватерніонів складових поворотів; недоліком є зайва кількість параметрів, які пов'язані між собою співвідношенням

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1.$$

1.2.9. Диференціювання вектора, заданого в обертовій системі координат

У механіці часто трапляються ситуації, коли вектор заданий своїми проєкціями на осі деякої рухомої системи координат, причому прирости цього вектора і надалі зручно описувати саме в цій рухомій системі. Оскільки головні закони механіки сформульовані для «нерухомої» інерціальної системи координат, необхідно встановити залежність між швидкостями змінювання вектора відносно рухомої і нерухомої систем відліку. Для цього перш за все потрібно вирішити питання: як виразити абсолютну швидкість змінювання вектора, якщо є відомими його відносні координати і заданий рух рухомої системи координат в абсолютній системі відліку?

Під швидкістю вектора зазвичай розуміють швидкість кінця вектора відносно його початку. Тому очевидно, що поступальний рух полюса (початку рухомої системи координат) не впливає на величину цієї швидкості. Впливає лише можливе обертання рухомої системи координат відносно нерухомої. Тому для аналізу взаємозв'язку між абсолютною і відносною швидкостями деякого вектора \mathbf{a} скористаємося матричним співвідношенням типу (1.46) між координатами цього вектора у різних системах

$$A_S = C^{SP} A_P, \quad (1.55)$$

де A_S і A_P – матриці-стовпці з проекцій вектора на осі нерухомої S і рухомої P систем координат; C^{SP} – матриця напрямних косинусів переходу від нерухомої до рухомої системи. При цьому випущено складову з координатами полюса.

Продиференціюємо рівність (1.55) за часом, щоб одержати швидкість вектора:

$$\frac{dA_S}{dt} = C^{SP} \frac{dA_P}{dt} + \frac{dC^{SP}}{dt} A_P. \quad (1.56)$$

Неважко зрозуміти, що величина $\frac{dA_S}{dt}$ є матрицею-стовпцем з проекцій абсолютної швидкості вектора \mathbf{a} на осі нерухомої системи, тобто подає вектор абсолютної швидкості вектора, $\frac{dA_P}{dt}$ є матрицею-стовпцем з проекцій відносної швидкості вектора \mathbf{a} на осі рухомої системи, тобто подає вектор його відносної швидкості.

Перепроєціюємо рівність (1.56) на осі рухомої системи відліку. Для цього, у відповідності до виразу (1.15), потрібно помножити обидві частини (1.56) зліва на обернену матрицю напрямних косинусів $C^{PS} = (C^{SP})^{-1} = (C^{SP})^T$:

$$C^{PS} \frac{dA_S}{dt} = (C^{SP})^{-1} C^{SP} \frac{dA_P}{dt} + (C^{SP})^T \frac{dC^{SP}}{dt} A_P = \frac{dA_P}{dt} + (C^{SP})^T \frac{dC^{SP}}{dt} A_P. \quad (1.57)$$

Диференціюючи тотожність $(C^{SP})^T C^{SP} = E$, одержимо:

$$(C^{SP})^T \frac{dC^{SP}}{dt} + \left(\frac{dC^{SP}}{dt} \right)^T C^{SP} = \frac{dE}{dt} \equiv 0.$$

З цього випливає

$$(C^{SP})^T \frac{dC^{SP}}{dt} = - \left(\frac{dC^{SP}}{dt} \right)^T C^{SP},$$

що є умовою кососиметричності матриці. Тому введемо кососиметричну матрицю

$$(\omega_P^{PS} \times) = (C^{SP})^T \frac{dC^{SP}}{dt}. \quad (1.58)$$

Із врахуванням цього співвідношення (1.57) можна подати у вигляді:

$$C^{PS} \frac{dA_S}{dt} = \frac{dA_P}{dt} + (\omega_P^{PS} \times) A_P. \quad (1.59)$$

Матриця $(\omega_P^{PS} \times)$, яка визначена співвідношенням (1.58), має такі властивості:

- 1) залежить лише від обертання рухомої системи координат відносно нерухомої;
- 2) визначається швидкістю цього обертання, обертаючись у нуль у разі нерухомості рухомої системи координат відносно нерухомої;
- 3) визначається лише трьома своїми компонентами, як і будь-яка кососиметрична матриця розміром 3×3 .

Ці властивості дозволяють розглядати матрицю (1.58) як один з різновидів матричного подання деякого вектора ω^P на осі рухомої системи, який має назву кутової швидкості рухомої системи координат (по відношенню до нерухомої системи). Тому у векторній формі співвідношення (1.59) можна подати так:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \tilde{d}_P \mathbf{a} + \omega^P \times \mathbf{a}. \quad (1.60)$$

Перший доданок у правій частині називають *локальною похідною вектора*. Він характеризує відносну швидкість вектора. Другий доданок визначається вектором ω^P абсолютної кутової швидкості рухомої системи. Він визначає переносну швидкість вектора, обумовлену обертанням рухомої системи.

Отже, правило диференціювання вектора, визначеного в обертівій системі координат, можна сформулювати так: *абсолютна похідна вектора за часом дорівнює сумі локальної похідної вектора і векторного добутку вектора кутової швидкості обертівій системи координат відносно абсолютної на сам вектор*.

Із зіставлення виразів (1.60) і (1.59) випливає, що проекції вектора ω^P на осі рухомої системи координат пов'язані з елементами матриці напрямних косинусів матричним співвідношенням

$$(\omega_P^{PS} \times) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{3P}^P & \omega_{2P}^P \\ \omega_{3P}^P & 0 & -\omega_{1P}^P \\ -\omega_{2P}^P & \omega_{1P}^P & 0 \end{bmatrix} = (C^{SP})^T \frac{dC^{SP}}{dt}, \quad (1.61)$$

яке є еквівалентним до трьох скалярних

$$\begin{cases} \omega_{1P}^P = \sum_{k=1}^3 c_{k3} \frac{dc_{k2}}{dt} \\ \omega_{2P}^P = \sum_{k=1}^3 c_{k1} \frac{dc_{k3}}{dt} \\ \omega_{3P}^P = \sum_{k=1}^3 c_{k2} \frac{dc_{k1}}{dt} \end{cases}. \quad (1.62)$$

Проекції на осі нерухомої системи визначаються аналогічними співвідношеннями:

$$(\omega_S^{PS} \times) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{3S}^P & \omega_{2S}^P \\ \omega_{3S}^P & 0 & -\omega_{1S}^P \\ -\omega_{2S}^P & \omega_{1S}^P & 0 \end{bmatrix} = \frac{dC^{SP}}{dt} (C^{SP})^T.$$

Це еквівалентно наступним трьом скалярним рівностям

$$\begin{cases} \omega_{1S}^P = \sum_{k=1}^3 c_{k2} \frac{dc_{k3}}{dt} \\ \omega_{2S}^P = \sum_{k=1}^3 c_{k3} \frac{dc_{k1}}{dt} \\ \omega_{3S}^P = \sum_{k=1}^3 c_{k1} \frac{dc_{k2}}{dt} \end{cases} \quad (1.63)$$

1.2.10. Визначення проєкцій кутової швидкості

Визначити проєкції кутової швидкості – це означає виразити ці проєкції через кути послідовних поворотів та їх похідні за часом.

Це можна зробити, користуючись знайденими співвідношеннями (1.62) і (1.63), якщо елементи матриці напрямних косинусів виразити через кути послідовних поворотів. Але такий спосіб є нераціональним.

Значно простіше виходити з подання вектора кутової швидкості у вигляді суми векторів похідних за часом від кутів послідовних поворотів (які напрямлені вздовж осі відповідного повороту). Наприклад, для послідовностей, зображених на рис. 1.3 і 1.4, вектор кутової швидкості ω^P можна подати так:

$$\omega^P = \dot{\psi} + \dot{\theta} + \dot{\phi}. \quad (1.64)$$

Спираючись на відповідний рисунок, проєкції визначають перепроєціюванням правої частини виразу (1.64) на відповідну вісь. Так, проєціюючи на осі рухомої системи P , згідно з рис. 1.3 отримуємо для послідовності кутів Ейлера:

$$\begin{cases} \omega_{1P}^P = \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\phi} \\ \omega_{2P}^P = \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi \\ \omega_{3P}^P = \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta} \sin \varphi \end{cases}$$

Проєціювання на осі нерухомої системи дає:

$$\begin{cases} \omega_{1S}^P = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \vartheta \\ \omega_{2S}^P = \dot{\phi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi \\ \omega_{3S}^P = -\dot{\phi} \sin \vartheta \cos \psi + \dot{\vartheta} \sin \psi \end{cases}$$

Зазвичай ці співвідношення називають *кінематичними рівняннями Ейлера*.

Аналогічно, для послідовності кутів Крилова, зображеної на рис. 1.4, матимемо

$$\begin{cases} \omega_{1P}^P = \dot{\psi} \cos \vartheta \cos \varphi + \dot{\vartheta} \sin \varphi \\ \omega_{2P}^P = -\dot{\psi} \cos \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi \\ \omega_{3P}^P = \dot{\psi} \sin \vartheta + \dot{\varphi} \end{cases} \quad (1.65)$$

$$\begin{cases} \omega_{1S}^P = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \sin \vartheta \\ \omega_{2S}^P = -\dot{\varphi} \cos \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi \\ \omega_{3S}^P = \dot{\varphi} \cos \vartheta \cos \psi + \dot{\vartheta} \sin \psi \end{cases}$$

1.2.11. Швидкість і прискорення точки в її складному русі

Нехай деяка точка M рухається відносно рухомої системи координат xuz , яка теж переміщується відносно нерухомої системи координат $\xi\eta\zeta$. У цьому випадку говорять про складний рух точки, тобто про одночасне її переміщення у двох системах координат – абсолютній $\xi\eta\zeta$ і рухомій xuz . *Рух точки M у системі xuz називають відносним, а її рухів системі $\xi\eta\zeta$ – абсолютним.*

Термін «абсолютний» слід розуміти лише у тому сенсі, що рух точки віднесено до системи $\xi\eta\zeta$, взятої за основну. *Рух системи xuz відносно нерухомої $\xi\eta\zeta$ є для рухомої точки переносним рухом.* У кінематиці поняття абсолютного і відносного рухів є відносним. Лише при розв'язуванні задач динаміки поняття абсолютного руху стає певним – це рух в інерціальному просторі. При цьому *під абсолютною розуміють інерціальну систему координат.*

Положення точки M відносно нерухомої системи координат визначимо її радіус-вектором \mathbf{r} (рис. 1.6). Якщо \mathbf{r}_O – радіус-вектор полюса, а $\boldsymbol{\rho}$ – радіус-вектор точки M у координатній системі xuz , то

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}. \quad (1.66)$$

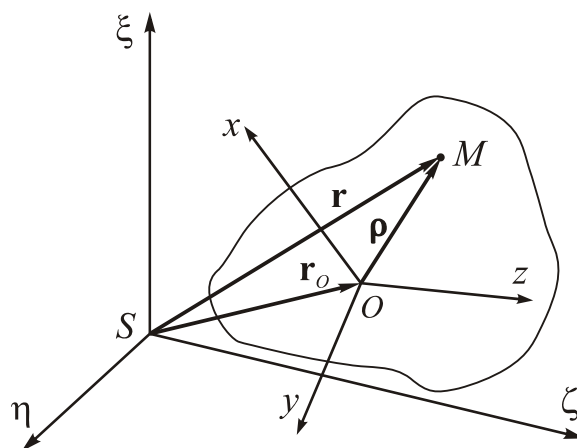


Рис. 1.6. Складний рух матеріальної точки

За зовнішнім виглядом ця векторна рівність не відрізняється від (1.32), але слід зауважити, що суттєвою її відмінністю є те, що у виразі (1.66) відносні координати x , y і z точки є вже не незмінними.

Абсолютну швидкість точки M , яку позначатимемо через \mathbf{v} , визначимо як похідну від абсолютного радіус-вектора \mathbf{r} за часом. Згідно з правилом (1.60) диференціювання вектора, заданого в обертовій системі координат, отримаємо:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_O}{dt} + \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_O}{dt} + \boldsymbol{\omega}^P \times \mathbf{p} + \frac{\tilde{d}_P \mathbf{p}}{dt}. \quad (1.67)$$

Перший доданок у правій частині (1.118) є абсолютною швидкістю полюса:

$$\mathbf{v}_O = \frac{d\mathbf{r}_O}{dt}.$$

Другий доданок визначає частку швидкості точки, зумовлену обертанням проміжної системи координат. У сумі ці два доданки визначають частку швидкості точки M , зумовлену переносним рухом проміжної системи відліку, і тому вони утворюють так звану *переносну швидкість* точки:

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega}^P \times \mathbf{p}.$$

Останній доданок у виразі (1.67) визначає відносну швидкість точки \mathbf{v}_r :

$$\mathbf{v}_r = \frac{\tilde{d}_P \mathbf{p}}{dt}.$$

Отже, для визначення абсолютної швидкості точки в її складному русі маємо формулу:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega}^P \times \mathbf{p} + \mathbf{v}_r, \quad (1.68)$$

яка показує, що у кожному момент часу *абсолютна швидкість точки складається з відносної і переносної швидкостей, а остання – зі швидкості полюса і векторного добутку кутової швидкості проміжної системи координат на відносний радіус-вектор точки.*

Абсолютне прискорення точки визначають як похідну за часом від вектора абсолютної швидкості (1.68):

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_O}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}^P}{dt} \times \mathbf{p} + \boldsymbol{\omega}^P \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_r}{dt}.$$

Але відповідно до правила (1.60) маємо

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\omega}^P}{dt} &= \frac{\tilde{d}_P \boldsymbol{\omega}^P}{dt} + \boldsymbol{\omega}^P \times \boldsymbol{\omega}^P = \frac{\tilde{d}_P \boldsymbol{\omega}^P}{dt}; \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= \frac{\tilde{d}_P \mathbf{p}}{dt} + \boldsymbol{\omega}^P \times \mathbf{p} = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega}^P \times \mathbf{p}; \quad \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} = \frac{\tilde{d}_P \mathbf{v}_r}{dt} + \boldsymbol{\omega}^P \times \mathbf{v}_r. \end{aligned}$$

Тепер вираз для абсолютного прискорення набуває вигляду:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon}^P \times \mathbf{p} + \boldsymbol{\omega}^P \times (\boldsymbol{\omega}^P \times \mathbf{p}) + 2\boldsymbol{\omega}^P \times \mathbf{v}_r + \mathbf{w}_r, \quad (1.69)$$

де $\mathbf{w}_O = \frac{d\mathbf{v}_O}{dt}$ – абсолютне прискорення полюса; $\boldsymbol{\varepsilon}^P = \frac{d\boldsymbol{\omega}^P}{dt} = \frac{\tilde{d}_P \boldsymbol{\omega}^P}{dt}$ – абсолютне

кутове прискорення проміжної системи відліку; $\mathbf{w}_r = \frac{\tilde{d}_P \mathbf{v}_r}{dt}$ – відносне прискорення точки.

Перші три складові у правій частині виразу (1.123) обумовлені рухом проміжної системи координат, тому вони утворюють переносне прискорення

$$\mathbf{w}_e = \mathbf{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon}^P \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega}^P \times (\boldsymbol{\omega}^P \times \boldsymbol{\rho}). \quad (1.70)$$

Як бачимо, переносне прискорення складається з трьох компонентів – прискорення полюса \mathbf{w}_O , обертального прискорення $\boldsymbol{\varepsilon}^P \times \boldsymbol{\rho}$, зумовленого рухом проміжної системи координат із кутовим прискоренням, і доосьового прискорення $\boldsymbol{\omega}^P \times (\boldsymbol{\omega}^P \times \boldsymbol{\rho})$, зумовленого обертальним рухом проміжної системи з певною кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}^P$ і напрямленого до осі вектора цієї кутової швидкості.

Четверта складова у правій частині (1.69) визначається як відносним рухом точки, так і переносним обертанням проміжної системи координат. Вона має особливе значення у теорії гіроскопів, спричиняє деякі незвичні явища, що спостерігаються у відносному русі. Її називають *кориолісовим прискоренням*:

$$\mathbf{w}_c = 2\boldsymbol{\omega}^P \times \mathbf{v}_r.$$

Тепер *абсолютне прискорення можна подати як суму переносного, відносного прискорень і прискорення Кориоліса*:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_c + \mathbf{w}_r. \quad (1.71)$$

1.2.12. Швидкість і прискорення точок твердого тіла

Як важливий окремий випадок розглянемо швидкість і прискорення довільної точки твердого тіла. Нехай полюсом буде одна з точок тіла, рух тіла заданий абсолютною швидкістю \mathbf{v}_O полюса O , абсолютною кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}$ тіла і абсолютним його кутовим прискоренням $\boldsymbol{\varepsilon}$. Оберемо як рухому систему координат, осі якої жорстко зв'язані з тілом. Тоді кутові швидкість і прискорення рухомої системи координат дорівнюватимуть відповідним величинам тіла, а відносні швидкості і прискорення точок тіла – нулю:

$$\boldsymbol{\omega}^P = \boldsymbol{\omega}; \quad \boldsymbol{\varepsilon}^P = \boldsymbol{\varepsilon}; \quad \mathbf{v}_r = 0; \quad \mathbf{w}_r = 0.$$

Тому із формул (1.68), (1.71) і (1.70) випливає

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}, \quad (1.72)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}). \quad (1.73)$$

1.3. Кінематичні рівняння орієнтації

На практиці орієнтацію у просторі твердого тіла часто визначають з використанням як вимірювачів трьох гіротахometrів, жорстко встановлених на цьому твердому тілі (корпусі транспортного засобу). Гіротахометри вимірюють поточні проекції абсолютної кутової швидкості тіла на три ортогональні осі системи координат, зв'язані з ним. Задача визначення поточної орієнтації тіла у просторі зводиться у цьому випадку до встановлення диференціальних рівнянь, інтегруючи які, можна визначати поточні значення параметрів орієнтації. Ці рівняння називають кінематичними рівняннями орієнтації.

1.3.1. Рівняння орієнтації Пуассона

Якщо як параметри орієнтації використовувати матрицю напрямних косинусів, то, розв'язуючи співвідношення (1.110) відносно похідної, можна дістати диференціальне рівняння

$$\frac{dC^{SP}}{dt} = C^{SP} (\omega_P^{PS} \times), \quad (1.74)$$

за допомогою якого можна визначити поточні значення матриці напрямних косинусів рухомого об'єкта чисельним інтегруванням його на бортовій ЕОМ за вимірними (гіротахометрами) проекціями кутової швидкості. Це матричне рівняння називають *рівнянням Пуассона*.

1.3.2. Рівняння орієнтації Ейлера

Найвідомішою формою кінематичних рівнянь є така, в якій вони подані через кути Ейлера послідовних поворотів.

Оскільки подання повороту через кути послідовних поворотів не є єдиним, форма кінематичних рівнянь у цьому випадку також не є єдиною і визначається цією послідовністю поворотів. З огляду на те, що кутове положення рухомого об'єкта зазвичай визначають послідовністю кутів Крилова, зображеною на рис. 1.4, скористаємося співвідношеннями (1.65). Виразимо з них похідні з відповідних кутів

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dt} = (\omega_{1P}^{PS} \cos \varphi - \omega_{2P}^{PS} \sin \varphi) / \cos \vartheta; \\ \frac{d\vartheta}{dt} = \omega_{2P}^{PS} \cos \varphi + \omega_{1P}^{PS} \sin \varphi; \\ \frac{d\varphi}{dt} = \omega_{3P}^{PS} - \operatorname{tg} \vartheta (\omega_{1P}^{PS} \cos \varphi - \omega_{2P}^{PS} \sin \varphi). \end{cases}$$

Зазвичай ці співвідношення називають *кінематичними рівняннями Ейлера*.

1.3.3. Кватерніонне рівняння орієнтації

Для визначення аналогічних рівнянь кватерніонної форми, скористаємося рівнянням повороту (1.49) у другій формі (через кватерніон повороту в рухомій системі координат):

$$\mathbf{a}_S = \mathbf{Q}_P^{SP} \circ \mathbf{a}_P \circ \tilde{\mathbf{Q}}_P^{SP}.$$

Візьмемо похідну за часом з обох частин цього рівняння. Матимемо

$$\frac{d\mathbf{a}_S}{dt} = \mathbf{Q}^{SP} \circ \frac{d\mathbf{a}_P}{dt} \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} + \frac{d\mathbf{Q}^{SP}}{dt} \circ \mathbf{a}_P \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} + \mathbf{Q}^{SP} \circ \mathbf{a}_P \circ \frac{d\tilde{\mathbf{Q}}^{SP}}{dt}.$$

Перепроєціюємо цей результат на осі системи P :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \frac{d\mathbf{a}_S}{dt} \circ \mathbf{Q}^{SP} &= \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \mathbf{Q}^{SP} \circ \frac{d\mathbf{a}_P}{dt} \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \mathbf{Q}^{SP} + \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \frac{d\mathbf{Q}^{SP}}{dt} \circ \mathbf{a}_P \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \mathbf{Q}^{SP} + \\ &+ \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \mathbf{Q}^{SP} \circ \mathbf{a}_P \circ \frac{d\tilde{\mathbf{Q}}^{SP}}{dt} \circ \mathbf{Q}^{SP} = \frac{d\mathbf{a}_P}{dt} + \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \frac{d\mathbf{Q}^{SP}}{dt} \circ \mathbf{a}_P + \mathbf{a}_P \circ \frac{d\tilde{\mathbf{Q}}^{SP}}{dt} \circ \mathbf{Q}^{SP}. \end{aligned}$$

Тут використано співвідношення

$$\tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \mathbf{Q}^{SP} = 1,$$

яке випливає з того, що кватерніон повороту є нормованим. Продиференціюємо його за часом

$$\frac{d\tilde{\mathbf{Q}}^{SP}}{dt} \circ \mathbf{Q}^{SP} = -\tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \frac{d\mathbf{Q}^{SP}}{dt}.$$

З урахуванням цього можна записати (крапка зверху позначає похідну за часом):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \frac{d\mathbf{a}_S}{dt} \circ \mathbf{Q}^{SP} &= \frac{d\mathbf{a}_P}{dt} + \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \frac{d\mathbf{Q}^{SP}}{dt} \circ \mathbf{a}_P - \mathbf{a}_P \circ \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \frac{d\mathbf{Q}^{SP}}{dt} = \\ &= \dot{\mathbf{a}}_P + 2 \cdot (\tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \frac{d\mathbf{Q}^{SP}}{dt}) \times \mathbf{a}_P \end{aligned} \quad (1.75)$$

Тут враховано властивість (1.35) і позначено $(\mathbf{Q}) \times = \mathbf{q} \times$ векторний добуток векторної частини кватерніону \mathbf{Q} на наступний вектор.

Доведемо, що *добуток кватерніону, спряженого до кватерніону повороту, на його похідну за часом завжди є вектором*, тобто його скалярна частина дорівнює нулю:

$$sqal(\tilde{\mathbf{Q}} \circ \dot{\mathbf{Q}}) = 0. \quad (1.76)$$

Доведення. Запишемо кватерніон повороту у вигляді (див. (1.46), (1.47))

$$\mathbf{Q} = \cos \frac{\delta}{2} + \sin \frac{\delta}{2} (e_1 \mathbf{i} + e_2 \mathbf{j} + e_3 \mathbf{k}),$$

причому виконуються співвідношення

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1. \quad (1.77)$$

Тоді матимемо:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Q}} &= \cos \frac{\delta}{2} - \sin \frac{\delta}{2} (e_1 \mathbf{i} + e_2 \mathbf{j} + e_3 \mathbf{k}); \\ \dot{\mathbf{Q}} &= \frac{\dot{\delta}}{2} \left\{ -\sin \frac{\delta}{2} + \cos \frac{\delta}{2} (e_1 \mathbf{i} + e_2 \mathbf{j} + e_3 \mathbf{k}) \right\} + \sin \frac{\delta}{2} (\dot{e}_1 \mathbf{i} + \dot{e}_2 \mathbf{j} + \dot{e}_3 \mathbf{k}) = \\ &= -\frac{\dot{\delta}}{2} \sin \frac{\delta}{2} + \mathbf{i} \left(\frac{\dot{\delta}}{2} e_1 \cos \frac{\delta}{2} + \dot{e}_1 \sin \frac{\delta}{2} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\dot{\delta}}{2} e_2 \cos \frac{\delta}{2} + \dot{e}_2 \sin \frac{\delta}{2} \right) + \\ &\quad + \mathbf{k} \left(\frac{\dot{\delta}}{2} e_3 \cos \frac{\delta}{2} + \dot{e}_3 \sin \frac{\delta}{2} \right). \end{aligned}$$

Перемножимо знайдені кватерніони й обмежимося визначенням лише скалярної частини результату:

$$\begin{aligned}
sqal(\tilde{\mathbf{Q}} \circ \dot{\mathbf{Q}}) &= \cos \frac{\delta}{2} \left(-\frac{\dot{\delta}}{2} \sin \frac{\delta}{2} \right) + \sin \frac{\delta}{2} \left\{ e_1 \left(\frac{\dot{\delta}}{2} e_1 \cos \frac{\delta}{2} + \dot{e}_1 \sin \frac{\delta}{2} \right) + \right. \\
&+ e_2 \left(\frac{\dot{\delta}}{2} e_2 \cos \frac{\delta}{2} + \dot{e}_2 \sin \frac{\delta}{2} \right) + e_3 \left(\frac{\dot{\delta}}{2} e_3 \cos \frac{\delta}{2} + \dot{e}_3 \sin \frac{\delta}{2} \right) \left. \right\} = \\
&= -\sin \frac{\delta}{2} \left\{ \frac{\dot{\delta}}{2} \cos \frac{\delta}{2} - \frac{\dot{\delta}}{2} \cos \frac{\delta}{2} (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) + \sin \frac{\delta}{2} (e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3) \right\}
\end{aligned}$$

З огляду на вираз (1.77) і співвідношення, яке випливає з нього

$$\frac{d}{dt} (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = 2(e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3) = 0,$$

можна дійти виразу (1.76), що й треба було довести.

Тепер порівняємо співвідношення (1.75) і (1.59). Вони, очевидно, описують одну й ту саму залежність дещо відмінними засобами. Є повна відповідність один одному кожного із членів цих двох рівнянь. Тому, зіставляючи останні члени рівнянь, можна зробити висновок, що векторний кватерніон $2(\tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \dot{\mathbf{Q}}^{SP})$ має дорівнювати вектор-кватерніону із проєкцій на осі системи P вектора кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}^{PS}$ обертання системи P відносно системи S . Позначаючи цей кватерніон $\boldsymbol{\Omega}_P^{PS}$

$$\boldsymbol{\Omega}_P^{PS} = \mathbf{1}_P \omega_{1P}^{PS} + \mathbf{2}_P \omega_{2P}^{PS} + \mathbf{3}_P \omega_{3P}^{PS}.$$

можна встановити таке кватерніонне кінематичне рівняння

$$\boldsymbol{\Omega}_P^{PS} = 2(\tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \frac{d\mathbf{Q}^{SP}}{dt}). \quad (1.78)$$

Резюмуючи, можна сформулювати таке **правило визначення вектора кутової швидкості**: вектор-кватерніон із проєкцій кутової швидкості рухомої системи відліку відносно нерухомої на осі рухомої системи дорівнює подвійному добуткові спряженого кватерніону повороту нерухомої системи до рухомої на похідну за часом кватерніону того ж повороту.

Розв'язуючи рівняння (1.78) відносно похідної, одержимо

$$\frac{d\mathbf{Q}^{SP}}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^{SP} \circ \boldsymbol{\Omega}_P^{PS}. \quad (1.79)$$

Це й є кінематичне рівняння у кватерніонах, яке визначає швидкість змінювання компонентів кватерніону повороту тіла через його кутову швидкість.

1.3.4. Матричний аналог кватерніонного рівняння орієнтації

Для використання кватерніонного кінематичного рівняння орієнтації (1.79) у теоретичних дослідженнях і розрахунках на ЕОМ зручніше використовувати його матричну форму, яка ґрунтується на поданні кватерніону через його скалярну частину q^{SP} і матрицю-стовпець \mathbf{q}^{SP} зі складових його векторної частини (див. формулу (1.72)). При цьому слід зважити на те, що кватерніон кутової швидкості $\boldsymbol{\Omega}_P^{PS}$ є вектор-кватерніоном, тобто його скалярна частина дорівнює нулеві. Тоді рівняння (1.79) можна звести до таких двох матричних:

$$\frac{dq^{SP}}{dt} = -\frac{1}{2}(\mathbf{q}^{SP})^T \boldsymbol{\omega}_P^{PS}. \quad (1.80)$$

$$\frac{d\mathbf{q}^{SP}}{dt} = \frac{1}{2}[q^{SP} \boldsymbol{\omega}_P^{PS} + (\mathbf{q}^{SP} \times) \boldsymbol{\omega}_P^{PS}],$$

де $\boldsymbol{\omega}_P^{PS} = [\omega_{1P}^{PS}, \omega_{2P}^{PS}, \omega_{3P}^{PS}]^T$ – матриця стовпець з вимірних проєкцій кутової швидкості; $(\mathbf{q}^{SP} \times)$ – кососиметрична матриця відповідна матриці-стовпцю \mathbf{q}^{SP} .

1.3.5. Рівняння орієнтації штучного супутника Землі

Для визначення кутової орієнтації штучного супутника Землі (ШСЗ), тобто поточного кутового положення ШСЗ (зв'язаної з ним системи координат) відносно орбітальної системи координат, в ряді випадків використовують вимірну інформацію про проєкції абсолютної кутової швидкості ШСЗ на осі зв'язаної системи координат, яку отримують за допомогою блока гіроскопічних тахометрів. За цією інформацією, інтегруючи кінематичні рівняння у тій чи іншій формі, отримують інформацію про шукане кутове положення ШСЗ. При цьому, вочевидь, потрібно також використовувати інформацію про кутову швидкість орбітальної системи в інерціальному просторі. Таку інформацію мають у вигляді проєкцій поточного значення вектора орбітальної кутової швидкості на осі саме орбітальної системи відліку.

Використаємо попередні позначення, вважаючи, що S – орбітальна система відліку; P – система координат, пов'язана з корпусом ШСЗ; $\boldsymbol{\omega}^{PS}$ – вектор кутової швидкості повороту ШСЗ відносно орбітальної системи координат, а також уведемо позначення: $\boldsymbol{\omega}$ – вектор абсолютної (відносно інерціального простору) кутової швидкості ШСЗ; $\boldsymbol{\Omega}$ – вектор абсолютної кутової швидкості орбітальної системи відліку.

Між вказаними векторами кутових швидкостей існує зв'язок:

$$\boldsymbol{\omega}^{PS} = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}. \quad (1.81)$$

Рівняння (1.74) Пуассона у цьому випадку набуває вигляду:

$$\frac{dC^{SP}}{dt} = C^{SP} (\boldsymbol{\omega}_P^{PS} \times) = C^{SP} (\boldsymbol{\omega}_P \times) - C^{SP} (\boldsymbol{\Omega}_P \times).$$

Тут величини у круглих дужках – кососиметричні матриці з проєкцій відповідних векторів кутових швидкостей. Як зазначалося, вектор $\boldsymbol{\omega}$ належить припускати відомим у проєкціях на осі зв'язаної системи, тобто вважати відомою матрицю $(\boldsymbol{\omega}_P \times)$, а вектор $\boldsymbol{\Omega}$ – у проєкціях на осі системи координат S . Щоб виразити $(\boldsymbol{\Omega}_P \times)$ через відому матрицю $(\boldsymbol{\Omega}_S \times)$, скористаємося співвідношенням (1.20), яке у цьому разі набуде вигляду

$$(\boldsymbol{\Omega}_P \times) = (C^{SP})^T (\boldsymbol{\Omega}_S \times) C^{SP}.$$

Підставлення його у попереднє співвідношення приводить до корисної форми кінематичного рівняння Пуассона

$$\frac{dC^{SP}}{dt} = C^{SP} (\boldsymbol{\omega}_P \times) - (\boldsymbol{\Omega}_S \times) C^{SP}.$$

Аналогічно можна перетворити кватерніонне рівняння орієнтації. Для цього скористаємося рівнянням (1.79). Із врахуванням (1.81) його можна подати у вигляді

$$\frac{d\mathbf{Q}^{SP}}{dt} = \frac{1}{2}(\mathbf{Q}^{SP} \circ \boldsymbol{\omega}_P - \mathbf{Q}^{SP} \circ \boldsymbol{\Omega}_P). \quad (1.82)$$

Якщо тепер використати перетворення (1.49) у формі

$$\boldsymbol{\Omega}_P = \tilde{\mathbf{Q}}^{SP} \circ \boldsymbol{\Omega}_S \circ \mathbf{Q}^{SP},$$

то з виразу (1.82) матимемо

$$\frac{d\mathbf{Q}^{SP}}{dt} = \frac{1}{2}(\mathbf{Q}^{SP} \circ \boldsymbol{\omega}_P - \boldsymbol{\Omega}_S \circ \mathbf{Q}^{SP}). \quad (1.83)$$

Кінематичні рівняння (1.82) використовують при побудові систем орієнтації ШСЗ. Переведемо їх у матричну форму, користуючись рівняннями (1.80) і (1.81):

$$\begin{aligned} \frac{dq^{SP}}{dt} &= -\frac{1}{2}(\mathbf{q}^{SP})^T (\boldsymbol{\omega}_P - \boldsymbol{\Omega}_S); \\ \frac{d\mathbf{q}^{SP}}{dt} &= \frac{1}{2}[q^{SP} (\boldsymbol{\omega}_P - \boldsymbol{\Omega}_S) + (\mathbf{q}^{SP} \times) \boldsymbol{\omega}_P - (\boldsymbol{\Omega}_S \times) \mathbf{q}^{SP}]. \end{aligned}$$

Саме ці кінематичні рівняння найзручніше використовувати під час теоретичного аналізу і чисельного моделюванні обертального руху космічного апарату.

1.4. Головні динамічні величини

Головними динамічними величинами, що характеризують динаміку руху матеріальної системи, в механіці зазвичай вважають:

- 1) вектор кількості руху (імпульс) \mathbf{Q} ;
- 2) вектор моменту кількості руху (момент імпульсу) \mathbf{K}_O відносно обраного полюса O ;
- 3) кінетичну енергію T .

Саме через ці величини сформульовані динамічні закони механіки, на основі яких і складаються теоретичні моделі механічного руху (складаються рівняння руху) матеріальних систем. Причому закони динаміки визначають швидкості змінювання цих величин у так званій інерціальній системі координат. Тому поняття нерухомої (абсолютної) системи координат при розв'язуванні задач динаміки набуває чітко визначеного сенсу – це інерціальна система координат.

1.4.1. Імпульс і момент імпульсу

Імпульсом (кількістю руху) матеріальної точки називають вектор, що дорівнює добутку маси цієї точки на вектор її абсолютної швидкості:

$$\mathbf{Q} = m\mathbf{v},$$

де m – маса матеріальної точки, \mathbf{v} – її швидкість.

Імпульсом системи матеріальних точок є сума векторів імпульсів окремих матеріальних точок.

Якщо система складається з n матеріальних точок масою m_i зі швидкостями \mathbf{v}_i , то імпульс системи дорівнює:

$$\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^n \mathbf{Q}_i = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i .$$

Розглянемо суцільне тверде тіло. Таке тіло зручно подавати як сукупність нескінченно великої кількості точок зі вельми малою масою dm . Імпульс кожної такої матеріальної точки є також вельми малим за величиною вектором:

$$d\mathbf{Q} = \mathbf{v}dm ,$$

а імпульс усього тіла визначається як інтеграл за об'ємом тіла від цієї величини:

$$\mathbf{Q} = \int_{(V)} d\mathbf{Q} = \int_{(V)} \mathbf{v}dm .$$

Якщо \mathbf{r} – радіус-вектор окремої точки тіла відносно початку інерціальної системи координат, то

$$\mathbf{Q} = \int_{(V)} \frac{d\mathbf{r}}{dt} dm = \frac{d}{dt} \int_{(V)} \mathbf{r}dm = \frac{d}{dt} (m\mathbf{r}_C) = m\mathbf{v}_C . \quad (1.84)$$

Тут $\mathbf{r}_C = \frac{1}{m} \left(\int_{(V)} \mathbf{r}dm \right)$ – радіус-вектор центра мас (центра інерції) тіла;

$m = \int_{(V)} dm$ – маса тіла.

Отже, імпульс тіла дорівнює добутку його маси на абсолютну швидкість його центру мас.

Відповідно до (1.72) швидкість центра мас можна виразити через швидкість полюса \mathbf{v}_O і кутову швидкість $\boldsymbol{\omega}$ тіла:

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_C ,$$

де $\boldsymbol{\rho}_C$ – радіус-вектор центра мас тіла відносно полюса O (який припускається нерухомим відносно тіла). Тому більш розгорнуто можна подати імпульс тіла у такий спосіб:

$$\mathbf{Q} = m\mathbf{v}_C = m(\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_C) = m\left(\mathbf{v}_O + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix}\right) .$$

У цьому варіанті \mathbf{i} , \mathbf{j} і \mathbf{k} – орти координатних осей x , y і z , пов'язаних з тілом; ω_x , ω_y і ω_z проєкції вектора $\boldsymbol{\omega}$; x_C , y_C і z_C – проєкції вектора $\boldsymbol{\rho}_C$ на осі системи координат xuz .

Моментом імпульсу матеріальної точки відносно довільної точки S називають векторний добуток радіус-вектора \mathbf{r} цієї точки відносно точки S на вектор імпульсу цієї точки

$$\mathbf{K}_S = \mathbf{r} \times \mathbf{Q} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} .$$

Для матеріальної точки суцільного тіла з вельми малою масою це може бути записано так:

$$d\mathbf{K}_S = \mathbf{r} \times d\mathbf{Q} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm.$$

Момент імпульсу системи матеріальних точок визначають як векторну суму моментів імпульсу окремих точок системи відносно тієї самої точки. Для суцільного тіла матимемо:

$$\mathbf{K}_S = \int_{(V)} d\mathbf{K}_S = \int_{(V)} \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm. \quad (1.85)$$

Виразимо \mathbf{r} через \mathbf{r}_O і $\boldsymbol{\rho}$ (рис. 1.7). Із (1.85) випливає:

$$\mathbf{K}_S = \int_{(V)} (\mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}) \times \mathbf{v} dm = \mathbf{r}_O \times \int_{(V)} \mathbf{v} dm + \int_{(V)} \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{v} dm.$$

Другий доданок справа являє собою момент імпульсу \mathbf{K}_O відносно полюса O , тому

$$\mathbf{K}_S = \mathbf{r}_O \times \mathbf{Q} + \mathbf{K}_O. \quad (1.86)$$

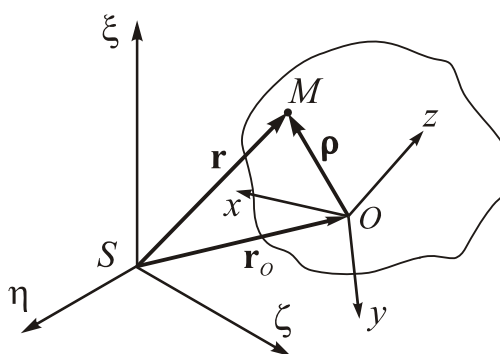


Рис. 1.7. До визначення моменту імпульсу

Ця формула пов'язує моменти імпульсу системи відносно двох різних точок. Надалі розглядатимемо вектор \mathbf{K}_O :

$$\mathbf{K}_O = \int_{(V)} \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{v} dm.$$

Уважаючи полюс O нерухомим у тілі, скористаємося виразом (1.72) для швидкості точки тіла:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_O &= \int_{(V)} \boldsymbol{\rho} \times (\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) dm = \\ &= \left(\int_{(V)} \boldsymbol{\rho} dm \right) \times \mathbf{v}_O + \int_{(V)} \boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) dm = m \boldsymbol{\rho}_C \times \mathbf{v}_O + \mathbf{K}_O^\omega, \end{aligned} \quad (1.87)$$

де використане позначення

$$\mathbf{K}_O^\omega = \int_{(V)} \boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) dm.$$

Частина \mathbf{K}_O^ω кінетичного моменту залежить лише від кутової швидкості тіла. Тому її доцільно назвати *обертальною частиною моменту імпульсу*. Навпаки, перша складова моменту імпульсу (1.87) визначається лише абсолютною швидкістю полюса, і її можна називати *поступальною частиною моменту імпульсу*.

льсу. Отже, у загальному випадку момент імпульсу тіла складається з двох частин – поступальної та обертальної.

Більш докладно зупинимося на вивченні властивостей обертальної частини вектора моменту імпульсу. Застосовуючи задля спрощення правило (1.2) подвійного векторного добутку, дістанемо

$$\mathbf{K}_O^\omega = \int_{(V)} [\boldsymbol{\omega} \rho^2 - \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\rho})] dm.$$

Звідси неважко отримати вирази для проєкцій вектора \mathbf{K}_O^ω на осі будь-якої системи координат, наприклад, x, y, z :

$$K_{OX}^\omega = \omega_X \int_{(V)} (y^2 + z^2) dm - \omega_Y \int_{(V)} xy dm - \omega_Z \int_{(V)} xz dm;$$

$$K_{OY}^\omega = -\omega_X \int_{(V)} yx dm + \omega_Y \int_{(V)} (x^2 + z^2) dm - \omega_Z \int_{(V)} yz dm;$$

$$K_{OZ}^\omega = -\omega_X \int_{(V)} zx dm - \omega_Y \int_{(V)} zy dm + \omega_Z \int_{(V)} (x^2 + y^2) dm.$$

Як бачимо, проєкції обертальної частини вектора моменту імпульсу тіла є лінійними функціями проєкцій кутової швидкості тіла. Коефіцієнти пропорційності

$$J_{OX} = \int_{(V)} (y^2 + z^2) dm; \quad J_{OY} = \int_{(V)} (x^2 + z^2) dm; \quad J_{OZ} = \int_{(V)} (x^2 + y^2) dm; \quad (1.88)$$

$$J_{OXY} = - \int_{(V)} xy dm; \quad J_{OXZ} = - \int_{(V)} xz dm; \quad J_{OYZ} = - \int_{(V)} yz dm. \quad (1.89)$$

називаються моментами інерції тіла: (1.88) – відносно координатних осей (1.89) – відцентровими моментами інерції. З урахуванням цих позначень проєкції обертальної частини моменту імпульсу можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} K_{OX}^\omega &= J_{OX} \omega_X + J_{OXY} \omega_Y + J_{OXZ} \omega_Z; \\ K_{OY}^\omega &= J_{OXY} \omega_X + J_{OY} \omega_Y + J_{OYZ} \omega_Z; \\ K_{OZ}^\omega &= J_{OXZ} \omega_X + J_{OYZ} \omega_Y + J_{OZ} \omega_Z. \end{aligned}$$

Ці три скалярні рівності можна подати як одну матричну

$$\mathbf{K}_{OP}^\omega = I_{OP} \boldsymbol{\Omega}_P, \quad (1.90)$$

де позначено

$$\mathbf{K}_{OP}^\omega = \begin{bmatrix} K_{OX}^\omega \\ K_{OY}^\omega \\ K_{OZ}^\omega \end{bmatrix}; \quad I_{OP} = \begin{bmatrix} J_{OX} & J_{OXY} & J_{OXZ} \\ J_{OXY} & J_{OY} & J_{OYZ} \\ J_{OXZ} & J_{OYZ} & J_{OZ} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\Omega}_P = \begin{bmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{bmatrix}. \quad (1.91)$$

Квадратна матриця I_{OP} є матрицею моментів інерції тіла. Вона, як це впливає з виразів (1.89), завжди є симетричною. Уздовж діагоналі матриці містяться моменти інерції тіла відносно відповідних координатних осей, які дорівнюють сумі добутку мас матеріальних точок, що складають тіло, на квадрат відстані між точкою і відповідною віссю. Тому для будь-якого реального тіла вони є додатними величинами і не можуть дорівнювати нулеві.

Зовні діагоналі розміщені відцентрові моменти інерції тіла (їх ще називають добутками інерції). Як випливає з їх визначення (1.89), вони можуть бути як додатними, так і від'ємними, а також дорівнювати нулю.

Якщо система координат $Oxyz$ жорстко пов'язана з тілом, матриця моментів інерції є незмінною у часі за будь-якого руху тіла у просторі.

1.4.2. Геометрія мас твердого тіла

Наведемо деякі визначення, що характеризують геометрію мас твердого тіла, а також (без доведення) декілька досить ясних теорем, що описують властивості моментів інерції.

Теорема 1. Для будь-якого тіла і будь-якої точки в ньому завжди можна поворотом декартових осей, що проходять крізь цю точку досягнути такого їх положення, що усі відцентрові моменти інерції стають рівними нулю. При цьому матриця моментів інерції набуває діагонального вигляду

$$I_{OP'} = \begin{bmatrix} J_{Ox'} & 0 & 0 \\ 0 & J_{Oy'} & 0 \\ 0 & 0 & J_{Oz'} \end{bmatrix}.$$

Визначення 1. Три взаємно перпендикулярні осі, відносно яких матриця моментів інерції набуває діагонального вигляду, називаються *головними осями інерції* тіла.

Теорема 2. Момент інерції відносно головної осі (головний момент інерції), яка проходить через точку O , завжди має екстремальне значення порівняно з моментами інерції сусідніх з нею осей, які також проходять через точку O . Навпаки, вісь обертання не є головною віссю інерції в тому випадку, якщо момент інерції відносно цієї осі не має екстремального значення порівняно з моментами інерції відносно сусідніх осей, що проходять через точку O .

Теорема 3. Якщо моменти інерції відносно двох головних осей, які проходять через точку O , різні за значенням, то ці осі взаємно перпендикулярні.

Теорема 4. Кожне тіло має щонайменше три взаємно перпендикулярні головні осі інерції, які проходять через точку O , і лише три такі осі, якщо відповідні моменти інерції мають різні значення.

Теорема 5. Якщо тіло має в точці O дві головні осі з однаковими моментами інерції, то будь-яка вісь, яка проходить через точку O і лежить у площині, утвореній першими двома осями, також є головною віссю інерції, причому відносно всіх них момент інерції має однакове значення.

Визначення 2. Площину, яка містить дві головні осі з однаковими моментами інерції, називають *динамічною екваторіальною площиною* тіла для точки O , а саме тіло – *динамічно симетричним* (воно не обов'язково має бути симетричним у геометричному розумінні). Момент інерції відносно будь-якої екваторіальної осі (всі ці моменти однакові) називається *екваторіальним моментом інерції*. Будемо позначати його через J_e .

Теорема 6. Вісь, перпендикулярна до динамічної екваторіальної площини тіла в точці O , також є головною віссю інерції і при цьому єдиною, крім інших,

що лежать в екваторіальній площині, якщо момент відносно неї відрізняється від екваторіального моменту інерції.

Визначення 3. Таку ізольовану головну вісь інерції динамічно симетричного тіла називають його *віссю фігури* для точки O , а момент інерції відносно осі фігури – *осьовим моментом інерції*. Будемо позначати його через J .

Теорема 7. Якщо осьовий момент дорівнює екваторіальному, то всі осі, які проходять через точку O , є головними осями, і моменти інерції відносно всіх цих осей однакові.

Визначення 4. У цьому випадку тіло називається *динамічно кулесиметричним* або *кулястим тілом* (таке тіло не обов'язково має форму кулі).

Теорема 8. Якщо тіло має в точці O три головні осі інерції, які не лежать в одній площині, причому моменти інерції відносно цих осей однакові, то таке тіло є кулесиметричним.

Визначення 5. Динамічно симетричне тіло називають *витягнутим*, якщо його екваторіальний момент інерції перевищує по величині осьовий ($J_e > J$). Динамічно симетричне тіло називається *сплюснутим*, якщо його екваторіальний момент інерції менше за осьовий ($J_e < J$).

Теорема 9. Момент інерції тіла відносно довільної осі дорівнює моменту інерції відносно осі, яка проходить через центр мас і паралельна першій осі, складеному з добутком маси тіла на квадрат відстані між обома осями.

Наслідок. З усіх моментів інерції відносно паралельних між собою осей найменше значення має момент інерції відносно осі, яка проходить через центр мас.

Визначення 6. Симетричним гіроскопом називають динамічно симетричне тверде тіло, якому надано швидкого обертання навколо його осі фігури, і ось фігури якого має змогу займати довільне кутове положення у просторі.

Визначення 7. Сплюснутим гіроскопом називають симетричний гіроскоп, в якому осьовий момент інерції більший за екваторіальний.

Визначення 8. Витягнутим гіроскопом називають симетричний гіроскоп, в якому осьовий момент інерції менший за екваторіальний.

Визначення 9. Кульовим (або кулесиметричним) гіроскопом називають симетричний гіроскоп, у якому осьовий момент інерції дорівнює екваторіальному.

1.4.3. Еліпсоїд інерції

Зручною теоретичною конструкцією, яка повністю характеризує геометрію мас тіла, є еліпсоїд інерції.

Еліпсоїдом інерції називають геометричне місце таких точок, кожна з яких лежить на деякій довільній осі, що проходить через точку O , прийняту за центр, і віддалена від неї на відстань, обернено пропорційну до кореня квадратного зі значення моменту інерції тіла відносно цієї осі.

Уведемо систему координат x, y, z з початком у точці O тіла. Оберемо деяку вісь u , що проходить через початок координат O і утворює з координатними осями кути α , β і γ (рис. 1.8). Позначимо: r – відстань від поточної точки

M з координатами x , y і z від осі u ; \mathbf{R} – радіус-вектор цієї точки відносно початку координат; \mathbf{e} – одиничний вектор осі u . Тоді (рис. 1.8) матимемо:

$$\begin{aligned} r^2 &= R^2 - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{e})^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2 = \\ &= (y^2 + z^2) \cos^2 \alpha + (x^2 + z^2) \cos^2 \beta + (x^2 + y^2) \cos^2 \gamma - \\ &\quad - 2xy \cos \alpha \cos \beta - 2xz \cos \alpha \cos \gamma - 2yz \cos \beta \cos \gamma. \end{aligned}$$

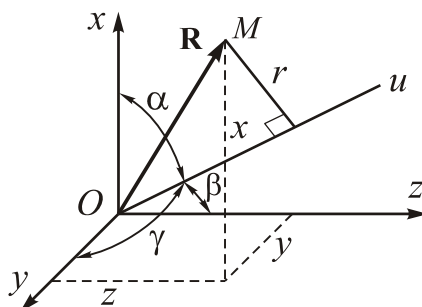


Рис. 1.8. До визначення моменту інерції відносно осі u

Визначимо момент інерції тіла відносно осі u :

$$\begin{aligned} J_u &= \int_{(V)} r^2 dm = \cos^2 \alpha \int_{(V)} (y^2 + z^2) dm + \cos^2 \beta \int_{(V)} (x^2 + z^2) dm + \\ &\quad + \cos^2 \gamma \int_{(V)} (x^2 + y^2) dm - 2 \cos \alpha \cos \beta \int_{(V)} xy dm - 2 \cos \alpha \cos \gamma \int_{(V)} xz dm - \\ &\quad - 2 \cos \beta \cos \gamma \int_{(V)} yz dm. \end{aligned}$$

Ураховуючи позначення моментів інерції (1.155), (1.156), дістанемо

$$\begin{aligned} J_u &= J_{Ox} \cos^2 \alpha + J_{Oy} \cos^2 \beta + J_{Oz} \cos^2 \gamma + 2J_{Oxy} \cos \alpha \cos \beta + \\ &\quad + 2J_{Oxz} \cos \alpha \cos \gamma + 2J_{Oyz} \cos \beta \cos \gamma. \end{aligned} \quad (1.92)$$

Відкладемо вдовж осі u відрізок ON величиною d . Визначимо координати x' , y' і z' точки N : $x' = d \cos \alpha$; $y' = d \cos \beta$; $z' = d \cos \gamma$. Використовуючи це у виразі (1.92), можна записати:

$$J_u d^2 = J_{Ox} x'^2 + J_{Oy} y'^2 + J_{Oz} z'^2 + 2J_{Oxy} x' y' + 2J_{Oxz} x' z' + 2J_{Oyz} y' z'.$$

Оберемо величину d обернено пропорційною до кореня квадратного з моменту інерції тіла відносно осі u :

$$d = \frac{k}{\sqrt{J_u}},$$

де k – довільне додатне постійне число. Тоді координати x' , y' і z' будуть пов'язані між собою рівнянням

$$J_{Ox} x'^2 + J_{Oy} y'^2 + J_{Oz} z'^2 + 2J_{Oxy} x' y' + 2J_{Oxz} x' z' + 2J_{Oyz} y' z' = k^2. \quad (1.93)$$

Це рівняння поверхні другого порядку, по якій рухається точка N , якщо змінювати напрямок осі u . Поверхня, що визначена рівнянням (1.93) є еліпсоїдом. Її називають *еліпсоїдом інерції*.

З аналітичної геометрії відомо, що, обираючи осі симетрії еліпсоїда інерції у якості осей x_1, y_1 і z_1 нової системи координат, можна привести рівняння еліпсоїда до канонічної форми

$$J_{Ox_1}x_1^2 + J_{Oy_1}y_1^2 + J_{Oz_1}z_1^2 = k^2.$$

Відцентрові моменти інерції в системі таких осей дорівнюють нулю

$$J_{Ox_1y_1} = J_{Ox_1z_1} = J_{Oy_1z_1} = 0.$$

Осі симетрії еліпсоїда інерції, побудованого для деякої точки, називаються головними осями інерції для цієї точки, а моменти інерції відносно головних осей – головними моментами інерції.

Отже, у кожній точці твердого тіла, або незмінної матеріальної системи можна відшукати три взаємно ортогональні головні осі інерції. Трійок головних осей для однієї точки може бути більше за одну лише у випадку, коли еліпсоїд інерції є еліпсоїдом обертання. При цьому вісь обертання утворює *вісь фігури* тіла, площина, що є перпендикулярною до осі обертання еліпсоїда інерції утворює *динамічну екваторіальну площину*. У цьому випадку тіло є *динамічно симетричним*.

Форма еліпсоїда інерції нагадує форму самого тіла. Для витягнутого динамічно симетричного твердого тіла, яке має витягнуту вздовж осі фігури форму (веретеноподібну), еліпсоїд інерції також є витягнутим вздовж осі фігури. У сплюсненому вздовж осі фігури тілі (дископодібної форми), еліпсоїд інерції також має сплюснену вздовж цієї осі форму. У тих випадках, коли еліпсоїд інерції є сферою, кожний її діаметр є головною віссю інерції.

1.4.4. Кінетична енергія

Кінетичну енергію матеріальної точки можна визначити як половину скалярного добутку абсолютної швидкості точки на її кількість руху:

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q} == \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} m v^2.$$

Кінетичну енергію системи матеріальних точок визначають як алгебричну суму кінетичних енергій окремих матеріальних точок, які складають цю систему:

$$T = \sum_{i=1}^n T_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{Q}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2.$$

Для точки суцільного тіла вельми малої маси можна записати:

$$dT = \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{Q} == \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dm = \frac{1}{2} v^2 dm,$$

а кінетична енергія усього тіла визначиться інтегралом:

$$T = \int_{(V)} dT = \frac{1}{2} \int_{(V)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{Q}.$$

Якщо обрати як полюс деяку точку O самого тіла, можна скористатися формулою (1.72) для визначення швидкості поточної точки тіла:

$$T = \frac{1}{2} \int_{(V)} (\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) \cdot d\mathbf{Q} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{v}_O \cdot \int_{(V)} d\mathbf{Q} + \boldsymbol{\omega} \cdot \int_{(V)} (\boldsymbol{\rho} \times d\mathbf{Q}) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} (\mathbf{v}_O \cdot \mathbf{Q} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{K}_O). \quad (1.94)$$

Це співвідношення пов'язує кінетичну енергію тіла з раніше визначеними векторами імпульсу і моменту імпульсу тіла:

Подвійна кінетична енергія тіла дорівнює сумі скалярних добутків абсолютної швидкості полюса на імпульс тіла і абсолютної кутової швидкості тіла на момент імпульсу тіла відносно цього полюса.

1.5. Форми законів динаміки

Основою побудови математичних (теоретичних) моделей поведінки механічних систем (складання рівнянь руху) є головні закони динаміки. Вони мають найбільш компактний і простий зміст в інерціальній системі координат, де вони можуть бути сформульовані у такий спосіб.

Закон імпульсу

Швидкість змінювання вектора імпульсу матеріальної системи у кожний момент часу дорівнює головному вектору всіх зовнішніх сил, що діють на цю систему:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (1.95)$$

Закон моменту імпульсу

Швидкість змінювання вектора моменту імпульсу матеріальної системи відносно деякого полюса у кожний момент часу дорівнює головному моменту всіх зовнішніх сил відносно цього полюса:

$$\frac{d\mathbf{K}_S}{dt} = \mathbf{M}_S. \quad (1.96)$$

Для окремої ізольованої механічної системи за допомогою цих законів виходять по три скалярні рівняння. Закон імпульсу визначає характеристики поступального руху системи сумісно з її центром мас. Закон моментів визначає характеристики обертального руху системи навколо полюса.

1.5.1. Форми запису закону імпульсу

Враховуючи вираз (1.84) для кількості руху матеріальної системи, закон імпульсу (1.95) можна подати у вигляді:

$$\frac{d(m\mathbf{v}_C)}{dt} = \mathbf{F}.$$

Якщо маса матеріальної системи не змінюється з часом, доцільно використовувати більш раціональну форму:

$$m\mathbf{w}_C = \mathbf{F}. \quad (1.97)$$

Тут \mathbf{w}_C – абсолютне прискорення центра мас. Така форма вельми нагадує другий закон Ньютона. Але слід наголосити, що закон (1.97) описує не рух матеріальної точки, а рух центра мас матеріальної системи.

1.5.2. Форми запису закону моменту імпульсу

Форма (1.96) закону моментів є нераціональною. Справа у тому, що моменти інерції тіла відносно інерціальних осей при кутовому русі останнього не є постійними, а змінюються з часом залежно від поточного положення тіла. Тому зручніше подавати цей закон у такий формі, де момент імпульсу визначається в координатних осях, відносно яких матриця моментів інерції тіла (або матеріальної системи) залишається незмінною за будь-якого руху тіла (системи), наприклад, у системі координат, жорстко пов'язаній з тілом.

Перш за все перейдемо від полюса S до полюсу O . Врахуємо в рівнянні (1.96) співвідношення (1.86), а також те, що відповідно до рис. 1.7 і закону (1.95), взаємозв'язок між моментами сил відносно двох полюсів можна подати у вигляді:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_S &= \sum_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k = \sum_k (\mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}_k) \times \mathbf{F}_k = \\ &= \mathbf{r}_O \times (\sum_k \mathbf{F}_k) + \sum_k \boldsymbol{\rho}_k \times \mathbf{F}_k = \mathbf{r}_O \times \frac{d\mathbf{Q}}{dt} + \mathbf{M}_O \end{aligned}$$

Отже, матимемо:

$$\frac{d\mathbf{K}_S}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_O \times \mathbf{Q} + \mathbf{K}_O) = \mathbf{M}_S = \mathbf{r}_O \times \frac{d\mathbf{Q}}{dt} + \mathbf{M}_O,$$

з чого випливає

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} + \mathbf{v}_O \times \mathbf{Q} = \mathbf{M}_O. \quad (1.98)$$

Перетворимо ліву частину рівняння (1.98), урахуваючи вираз (1.87) моменту імпульсу через його поступальну і обертальну частини:

$$\frac{d}{dt} (m\boldsymbol{\rho}_C \times \mathbf{v}_O + \mathbf{K}_O^\omega) + \mathbf{v}_O \times \mathbf{Q} = m \frac{d\boldsymbol{\rho}_C}{dt} \times \mathbf{v}_O + m\boldsymbol{\rho}_C \times \mathbf{w}_O + \frac{d\mathbf{K}_O^\omega}{dt} + \mathbf{v}_O \times m\mathbf{v}_C.$$

Надалі вважатимемо: 1) розглядається рух твердого тіла; 2) $\boldsymbol{\omega}$ – вектор абсолютної кутової швидкості цього тіла; 3) новий полюс O є нерухомим відносно тіла.

Тоді $\frac{d\boldsymbol{\rho}_C}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_C$ і матимемо

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{K}_O}{dt} + \mathbf{v}_O \times \mathbf{Q} &= m(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_C) \times \mathbf{v}_O + m\boldsymbol{\rho}_C \times \mathbf{w}_O + \\ &+ \frac{d\mathbf{K}_O^\omega}{dt} + \mathbf{v}_O \times m(\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_C) = \frac{d\mathbf{K}_O^\omega}{dt} + m\boldsymbol{\rho}_C \times \mathbf{w}_O. \end{aligned}$$

Тепер вираз (1.98) можна перетворити до такого:

$$\frac{d\mathbf{K}_O^\omega}{dt} = \mathbf{M}_O + \boldsymbol{\rho}_C \times (-m\mathbf{w}_O). \quad (1.99)$$

Цей важливий і цікавий результат можна сформулювати так: *закон моментів можна (і раціонально) застосовувати у спрощеному варіанті, зводячи всі величини до полюса, жорстко пов'язаного з тілом, використовуючи замість повного моменту імпульсу тіла лише його обертальну частину, якщо до зовні-*

шніх сил додати момент сил інерції тіла, зумовлений абсолютним прискоренням полюсу, вважаючи, що рівнодійна цих сил інерції прикладена до центра мас тіла.

Застосуємо правило (1.60) диференціювання вектора в обертовій системі координат до лівої частини (1.99):

$$\frac{\tilde{d}_P \mathbf{K}_O^\omega}{dt} + \boldsymbol{\omega}^P \times \mathbf{K}_O^\omega = \mathbf{M}_O - m \mathbf{r}_C \times \mathbf{w}_O. \quad (1.100)$$

Форма (1.100) закону моментів є найбільш загальною, зручною і ефективною для застосування. З неї виходять такі скалярні рівняння:

$$\begin{cases} \frac{dK_{OX}^\omega}{dt} + \omega_Y^P K_{OZ}^\omega - \omega_Z^P K_{OY}^\omega = M_{OX} - m(y_C w_{OZ} - z_C w_{OY}) \\ \frac{dK_{OY}^\omega}{dt} + \omega_Z^P K_{OX}^\omega - \omega_X^P K_{OZ}^\omega = M_{OY} - m(z_C w_{OX} - x_C w_{OZ}), \\ \frac{dK_{OZ}^\omega}{dt} + \omega_X^P K_{OY}^\omega - \omega_Y^P K_{OX}^\omega = M_{OZ} - m(x_C w_{OY} - y_C w_{OX}) \end{cases}$$

якщо зпроєціювати векторне рівняння (1.100) на осі проміжної системи координат P з координатними осями x , y і z . Тут x_C, y_C, z_C – проєкції радіус-вектора центра мас \mathbf{r}_C ; w_{OX}, w_{OY}, w_{OZ} – проєкції вектора \mathbf{w}_O абсолютного прискорення полюса O на осі рухомої системи координат P . При цьому проєкції обертальної частини вектора моменту імпульсу \mathbf{K}_O^ω визначають згідно з співвідношеннями (1.90).

Неважко зрозуміти, що рівняння руху значно спрощуються, якщо у якості рухомої системи координат обирати систему головних осей інерції тіла.

1.5.3. Формалізм Лагранжа. Рівняння у формі Жільбера

Для складання рівнянь руху зручно використовувати методи аналітичної механіки, які випливають з головних динамічних законів, зокрема, *формалізм Лагранжа*. Згідно з цим формалізмом, кожне з рівнянь руху механічної системи можна знайти за виразами кінетичної T і потенціальної Π енергій системи через узагальнені координати q і швидкості \dot{q} виконанням над ними математичних дій відповідно до такої форми:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = Q_q. \quad (1.101)$$

Тут Q_q – позначення узагальненої «сили», що відповідає узагальненій координаті q . Кількість рівнянь, що виходять при цьому, дорівнює кількості узагальнених координат, яка збігається з кількістю ступенів вільності системи.

Рівняння Лагранжа другого роду (1.101) більш ефективно застосовувати у формі, до якої вперше дійшов французький вчений-механік Жільбер (Gilbert). Ця форма має наступний вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T^*}{\partial q} + \frac{\partial \Pi^*}{\partial q} = Q_q, \quad (1.102)$$

де кінетична енергія T^* , на відміну від T , обчислюється у спрощеній формі – за припущення, що полюс нерухомий в інерціальному просторі, а вираз потенціальної енергії Π^* , навпаки, ускладнюється за рахунок того, що в ньому враховується вплив абсолютного прискорення полюса.

Зазвичай потенціальну енергію твердого тіла у полі сил тяжіння визначають як скалярний добуток вектора сили тяжіння \mathbf{P} на радіус-вектор \mathbf{r}_C центра мас тіла відносно полюса:

$$\Pi = \mathbf{P} \cdot \mathbf{r}_C = -m(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_C),$$

де m маса тіла; \mathbf{g} – прискорення сили тяжіння. Потенціальну ж енергію Π^* у рівняннях Жільбера визначають за формулою

$$\Pi^* = (\mathbf{P} - \mathbf{F}^{ih}) \cdot \mathbf{r}_C = m(\mathbf{w}_O - \mathbf{g}) \cdot \mathbf{r}_C, \quad (1.103)$$

у якій до сили тяжіння додають силу інерції, яка виникає внаслідок руху полюса з абсолютним прискоренням \mathbf{w}_O .

1.5.4. Метод кінетостатики і принцип Даламбера

Французький вчений Даламбер вніс у механіку поняття «сили інерції», яке дозволило зробити більш наочним механізм руху матеріальної системи.

Силою інерції матеріальної точки називають добуток маси цієї точки на абсолютне прискорення точки, взятий з протилежним знаком:

$$\mathbf{F}^{ih} = -m\mathbf{w}.$$

Сила інерції матеріальної системи є геометричною сумою сил інерції усіх матеріальних точок, що складають цю систему:

$$\mathbf{F}^{ih} = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k^{ih} = -\sum_{k=1}^n m_k \mathbf{w}_k.$$

Для суцільного тіла силу інерції визначають через інтеграл за об'ємом V тіла

$$\mathbf{F}^{ih} = - \int_{(V)} \mathbf{w} dm.$$

З огляду на це поняття, можна подати закон імпульсу у вигляді:

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}^{ih} = 0,$$

яка відображає **принцип Даламбера**: сума зовнішніх сил, що діють на матеріальну систему, і сил інерції завжди (за будь-якого руху системи) дорівнює нулю.

Принцип Даламбера дозволяє по-іншому підійти до складання рівнянь руху, зводячи формально його до задачі статки. Тому складання рівнянь механічних систем за допомогою принципу Даламбера називають *методом кінетостатики*. Складаючи момент сил інерції відносно деякого полюса O , можна перейти до поняття моменту сил інерції матеріальної системи:

$$\mathbf{M}_O^{ih} = \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_{Ok} \times \mathbf{F}_k^{ih} = -\sum_{k=1}^n m_k (\mathbf{r}_{Ok} \times \mathbf{w}_k).$$

Це дозволяє метод кінетостатики застосовувати й для складання рівнянь обертального руху матеріальної системи на основі закону моментів. Оскільки за відносного руху прискорення має кілька складових (див. співвідношення (1.69),

(1.73)), можна виокремити й відповідні моменти сил інерції: момент сил інерції прискорення полюсу, момент сил інерції доцентрового прискорення (його частіше називають *відцентровим моментом сил інерції*), момент сил інерції коріолісового прискорення тощо. Важливо запам'ятати таке правило (яке впливає з принципу Даламбера): щоб можна було використовувати основні закони механіки, сформульовані для інерціального простору, **для опису відносного руху слід розглядати сили і моменти сил інерції, зумовлені рухом переносної системи координат, як «реальні» зовнішні сили, що діють на матеріальну систему**. За цієї умови для опису відносного руху можна застосовувати звичайні закони динаміки, які сформульовані для руху в інерціальному просторі.

Контрольні запитання

1. У якій системі координат зазвичай формулюються головні закони динаміки? Чому?
2. Що розуміють під інерціальною системою відліку? Чи існують реально такі системи відліку?
3. Що розуміють під поняттям «складний рух матеріальної точки»?
4. Що таке «абсолютний», «відносний» і «переносний» рухи матеріальної точки?
5. Які компоненти має переносна швидкість матеріальної точки в її складному русі? Що таке відносна швидкість матеріальної точки? Як пов'язані між собою абсолютна, відносна і переносна швидкості точки?
6. Які складові прискорення матеріальної точки розрізняють за складного руху матеріальної точки? Що таке переносне прискорення матеріальної точки і з яких компонентів воно складається? Що таке відносне прискорення матеріальної точки? Що розуміють під поняттям «коріолісове прискорення» матеріальної точки? Від чого і як залежить коріолісове прискорення?
7. Як пов'язані між собою абсолютне, відносне і переносне прискорення точки? Що таке коріолісове, обертальне і доосьове прискорення? Як вони визначаються і від чого залежать? Про яку вісь ідеться у вислові «доосьове» прискорення?
8. Що називають силами інерції, і на які складові розкладається повна сила інерції матеріальної точки за її складеного руху? Який фізичний зміст мають сили інерції а) при розгляданні абсолютного руху матеріальної точки; б) при вивченні відносного руху?
9. Який берег підмивається ріками, що течуть у Північній півкулі Землі? У Південній півкулі Землі? Чому? Доведіть.
10. Як поводять себе морські течії у Північній півкулі Землі? У Південній півкулі Землі? Чому?
11. Як рухаються повітряні маси всередині циклонів і антициклонів у Північній півкулі Землі, якщо дивитися на них згори? У Південній півкулі Землі? Чому? Доведіть.
12. Що називають моментом інерції тіла відносно деякої осі?
13. Що розуміють під поняттям «радіус інерції» тіла?
14. Охарактеризуйте поняття еліпсоїда інерції тіла.

15. Що таке головні осі інерції тіла?
16. Дайте визначення поняття динамічно симетричного тіла.
17. Що називають симетричним гіроскопом? Який вигляд має еліпсоїд інерції симетричного гіроскопа?
18. Що таке «витагнутий» гіроскоп? «сплюснутий» гіроскоп? Який вигляд мають еліпсоїди інерції для цих видів гіроскопа? Який вигляд мають ці гіроскопи?
19. Відносно яких осей моменти інерції тіла мають найменше значення?
20. Сформулюйте правило диференціювання вектора в обертовій системі координат.
21. Наведіть визначення понять: а) осьовий момент інерції; б) екваторіальний момент інерції; в) динамічна екваторіальна площина; г) вісь фігури; д) момент імпульсу; е) кульовий гіроскоп.

Задачі

Задача 1.1. Три вектори \mathbf{a} , \mathbf{b} і \mathbf{c} задані своїми проекціями на осі деякої системи координат x, y, z (табл. 1.1). Визначте проекції векторів або значення скалярів:

Таблиця 1.1. Варіанти значень проекцій векторів

Проекції	Варіант								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_x	1	2	4	-2	-1	4	2	3	1
a_y	-1	-2	1	1	1	-2	4	0	0
a_z	2	4	2	1	-1	0	5	-1	2
b_x	-4	5	2	-4	2	0	-1	-4	0
b_y	-2	2	4	4	4	0	0	2	2
b_z	-1	1	2	2	-5	1	0	3	0
c_x	5	1	-1	2	3	-2	5	5	2
c_y	-4	1	2	2	-2	4	0	1	0
c_z	-2	1	2	-2	1	1	1	0	-2

- 1) $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$;
- 2) $\mathbf{c} + \mathbf{a} - 2\mathbf{b}$;
- 3) $2\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} - 2\mathbf{c})$;
- 4) $(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{a}$;
- 5) кут між векторами $(2\mathbf{a} + \mathbf{b})$ і \mathbf{b} ;
- 6) проекцію вектора \mathbf{b} на вектор $(2\mathbf{a} + \mathbf{b})$;
- 7) $(\mathbf{c} - 2\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$;
- 8) $(\mathbf{c} - 2\mathbf{b}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

Таблиця 1.2. Варіанти значень елементів матриць

Елемент	Варіант								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_1	1	4	-2	5	1	1	0	-1	0
a_2	2	-5	1	-3	0	2	1	-1	-6
a_3	-3	-6	4	3	1	-1	-2	-1	4
b_1	2	3	4	-5	2	2	-6	2	1
b_2	1	3	-1	3	2	-1	5	5	-2
b_3	6	3	0	2	0	3	0	-6	3
c_{11}	1	-2	0	4	1	4	2	3	4
c_{12}	-1	4	5	2	0	2	1	0	-4
c_{13}	1	5	2	-2	1	0	-1	1	2
c_{21}	2	2	0	4	0	5	1	0	-2
c_{22}	-1	3	0	8	1	-1	4	0	0
c_{23}	2	3	-2	5	0	4	-1	0	0
c_{31}	2	1	3	0	1	2	2	5	1
c_{32}	1	2	4	0	0	3	0	5	0
c_{33}	1	0	1	0	1	4	0	-4	1
d_{11}	4	2	5	1	0	1	0	-2	2
d_{12}	2	3	4	-2	2	1	0	3	0
d_{13}	-2	-4	3	4	2	2	1	1	4
d_{21}	2	5	-1	3	3	-3	-2	0	0
d_{22}	-4	5	0	-1	0	1	0	5	2
d_{23}	2	4	0	-1	1	2	5	-4	0
d_{31}	2	-3	0	0	2	4	2	0	2
d_{32}	3	2	5	0	0	1	0	0	0
d_{33}	2	1	1	5	2	2	0	1	2

Задача 1.3. Зобразіть кінематику трьох послідовних поворотів навколо координатних осей на кути α , β і γ , які переводять початкову систему координат $\xi\eta\zeta$ у систему координат XYZ згідно зі схемою:

$$\xi\eta\zeta \xrightarrow{\alpha} \xi_1\eta_1\zeta_1 \xrightarrow{\beta} \xi_2\eta_2\zeta_2 \xrightarrow{\gamma} XYZ.$$

Розмістіть початкову систему координат так, щоб вісь, яка вказана у табл. 1.3, була напрямлена вертикально. Послідовність осей повороту – за табл. 1.4.

Знайдіть матрицю напрямних косинусів системи XYZ у системі координат $\xi\eta\zeta$. Задачу розв'яжіть двома способами: 1) використовуючи теорему косинусів сферичної тригонометрії; 2) матричним способом.

Перевірте виконання співвідношень між напрямними косинусами.

Таблиця 1.3. Варіанти вертикальної осі

Варіант	1	2	3
Вертикальна вісь	ξ	η	ζ

Таблиця 1.4. Варіанти послідовності осей поворотів

Номер повороту	Варіант											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	ξ	ξ	ξ	ξ	η	η	η	η	ζ	ζ	ζ	ζ
2	ζ_1	η_1	η_1	ζ_1	ξ_1	ζ_1	ξ_1	ζ_1	η_1	ξ_1	η_1	ξ_1
3	η_2	ζ_2	ξ_2	ξ_2	ζ_2	ξ_2	η_2	η_2	ξ_2	η_2	ζ_2	ζ_2

Задача 1.4. Зобразіть кінематику поворотів ротора гіроскопа у кардановому підвісі відносно основі. Розміщення гіроскопа на основі показано на рис. 1.9. З основою зв'яжіть систему координат $X_c Y_c Z_c$, вісь X_c якої спрямувати вертикально. Позначте: α – кут повороту зовнішньої рамки відносно основи, β – кут повороту внутрішньої рамки відносно зовнішньої, γ – кут повороту ротора гіроскопа відносно внутрішньої рамки. З ротором жорстко зв'яжіть систему координат XYZ .

Задача 1.5. Задайте (зобразіть кінематику поворотів) положення основи (рухомого об'єкта – ракета, літак, корабель тощо) в опорній системі координат $\xi\eta\zeta$ (пов'язаній з поверхнею обертової Землі) відповідно до табл. 1.5. Позначте: ψ – кут першого повороту, ϑ – кут другого повороту, φ – кут третього повороту.

Задача 1.6. Для умов задачі 1.3, вважаючи, що система координат XYZ жорстко зв'язана з динамічно симетричним гіроскопом, причому вісь фігури гіроскопа збігається з віссю останнього повороту, знайдіть явні вирази кутової швидкості власного обертання r (проекції кутової швидкості на вісь останнього повороту) і екваторіальної складової ω_e кутової швидкості гіроскопа. Знайдіть проекції кутової швидкості гіроскопа на осі усіх проміжних систем координат. З основою зв'яжіть систему осей $X_c Y_c Z_c$. Знайдіть матрицю напрямних косинусів системи $X_c Y_c Z_c$ у системі координат $\xi\eta\zeta$.

Задача 1.7. Для кінематики гіроскопа у кардановому підвісі, вказаній в задачі 1.4, вважаючи основу нерухомою, знайдіть проекції:

- кутової швидкості зовнішньої рамки карданового підвісу на осі, зв'язані з зовнішньою рамкою;
- кутової швидкості внутрішньої рамки на осі, зв'язані з внутрішньою рамкою;
- кутової швидкості ротора гіроскопа на осі, зв'язані з внутрішньою рамкою.

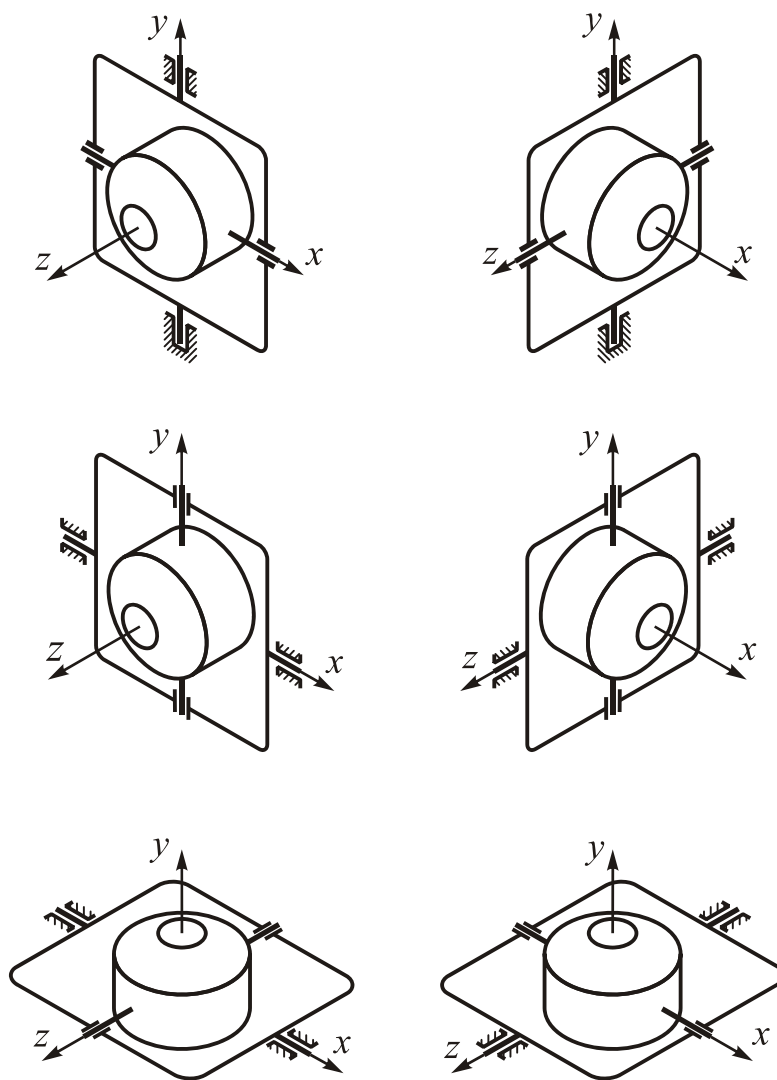


Рис. 1.9. Розташування гіроскопа у кардановому підвісі на основі

Таблиця 1.5. Варіанти послідовності осей поворотів

Номер повороту	Варіант					
	1	2	3	4	5	6
1	ξ	ξ	η	η	ζ	ζ
2	ζ_1	η_1	ξ_1	ζ_1	ξ_1	η_1
3	η_2	ζ_2	ζ_2	ξ_2	η_2	ξ_2

Задача 1.8. Для умов задачі 1.6, вважаючи, що початок усіх систем координат збігається з нерухомою точкою підвісу гіроскопа, а центр мас гіроскопа зміщений відносно точки підвісу вздовж осі фігури на відстань l , знайдіть проєкції абсолютної швидкості центра мас на осі усіх систем координат.

Задача 1.9. Для умов задачі 1.6, вважаючи, що центр мас збігається з точкою підвісу, а остання є нерухомою, знайдіть проєкції вектора моменту імпульсу гіроскопа на осі усіх систем координат. Визначте кінетичну енергію гіроскопа.

Задача 1.10. Для умов задачі 1.8 знайдіть проекції вектора імпульсу і моменту імпульсу гіроскопа відносно точки підвісу на осі супутньої системи координат $\xi_2 \eta_2 \zeta_2$. Визначте кінетичну і потенціальну енергію гіроскопа.

Задача 1.11. Для умов задачі 1.4 і 1.7, вважаючи, що основа є нерухомою, осі, жорстко зв'язані з відповідним елементом карданового підвісу, є головними осями інерції для цього елемента, а ротор – динамічно симетричним тілом з віссю фігури, що збігається з головною віссю гіроскопа, знайдіть проекції:

- моменту імпульсу зовнішньої рамки на осі системи координат, зв'язаної з зовнішньою рамкою;

- моменту імпульсу внутрішньої рамки на осі системи координат, зв'язаної з внутрішньою рамкою;

- моменту імпульсу ротора на осі системи координат, зв'язаної з внутрішньою рамкою.

Знайдіть вираз для кінетичної енергії.

Задача 1.12. Матеріальна точка рухається за законом $x(t) = kt + at^2$, $y(t) = 0$, $z(t) = 0$ відносно тіла, яке обертається з незмінною кутовою швидкістю, причому вважається, що xuz – система декартових координат, пов'язана з цим тілом. Проекції кутової швидкості тіла на осі цієї системи координат дорівнюють $\omega_x = 0$; $\omega_y = \omega$; $\omega_z = 0$. Знайдіть проекції абсолютної швидкості точки і її абсолютного прискорення на ті самі осі.

Відповідь: $v_x = k + 2at$; $v_y = 0$; $v_z = -\omega(kt + at^2)$

$w_x = 2a + \omega^2(kt + at^2)$; $w_y = 0$; $w_z = -2\omega(k + 2at)$.

Задача 1.13. У табл. 1.6 наведено дані про деякі планети сонячної системи.

Таблиця 1.6. Дані про планети

Параметр	Земля	Марс	Місяць
Радіус поверхні, км	6378	3388	1739
Середня густина, кг/м ³	5517	4000	3390
Маса, кг	$5,98 \cdot 10^{24}$	$6,4 \cdot 10^{23}$	$7,36 \cdot 10^{22}$
Прискорення сили тяжіння, м/с ²	9,8062	3,7	1,62
Період власного обертання, діб (с)	1 (86164)	1,0236 (88 200)	27,396 (2360591)
Період обертання по орбіті, діб (с)	365 (31 558 150)	688,2 ($5,93 \cdot 10^7$)	27,396 (2360591)
Радіус орбіти, км	$1,4946 \cdot 10^8$	$2,28 \cdot 10^8$	$384,4 \cdot 10^3$

Користуючись цими даними, обчисліть:

1) періоди коливання математичного маятника довжиною $L = 1$ м, розташованого на поверхні цих небесних тіл;

2) періоди обертання ШСЗ цих небесних тіл, висота обертання яких над поверхнею небесного тіла дорівнює нулю.

Яку довжину повинен мати математичний маятник, щоб період його коливання дорівнював періоду обертання відповідного ШСЗ?

Відповідь: 1) $T_Z = 2,0065$ с; $T_M = 3,2665$ с; $T_L = 4,9365$ с;

2) $T_Z = 5067,2$ с; $T_M = 6012,4$ с; $T_L = 6509,9$ с.

Література:

[28, гл. 2, с. 45-77]; [62, гл. 2 – 4, с. 20-178]; [10, гл. 1, с. 13-68];

[23, гл. 1, 2, с. 25-62, гл. 3, с. 137-156];

[48, ч. 2, с. 62-115, ч. 3, с. 172-189, с. 198-240, ч. 4, с. 353-368];

[56, гл. 1, с. 11-56]; [64, с. 129-157]; [6, гл. 1 – 3, с. 9-146]; [30].

Розділ 2. Складання математичних моделей

Особливості побудови математичних моделей розглянемо на окремих прикладах пристроїв, поведження яких буде об'єктом теоретичного дослідження.

2.1 Маятник за поступального руху основи

Почнемо з побудови математичної моделі руху фізичного маятника, якого встановлено на основі, яка рухається відносно поверхні Землі. Схему маятника показано на рис. 2.1.

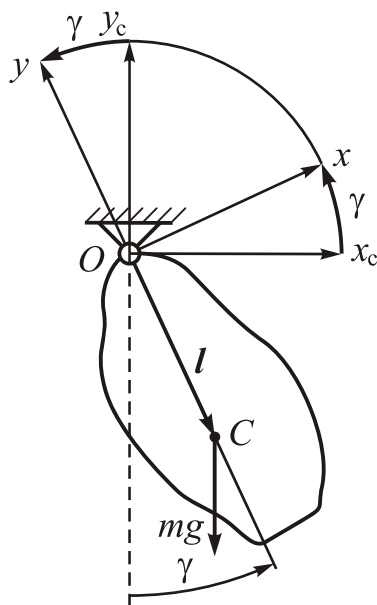


Рис. 2.1. Схема фізичного маятника

Розглянемо систему координат $x_c y_c z_c$, пов'язану з основою, на якій встановлено маятник, і географічну систему координат $\xi\eta\zeta$, вісь η якої напрямлено вдовж вертикалі місця у зеніт, вісь ξ – на північ уздовж лінії перетинання площини горизонту і площини місцевого меридіана, вісь ζ – на схід. Початок обох систем координат сумістимо з точкою підвісу O маятника. Вважатимемо Землю нерухомою в інерціальному просторі, тобто ототожнюватимемо $\xi\eta\zeta$ з інерціальною системою координат. Положення основи відносно системи $\xi\eta\zeta$ визначимо за допомогою трьох кутів (рис. 2.2):

- кута ψ повороту основи навколо вертикалі;
- кута ϑ підйому осі обертання маятника над площиною горизонту;
- кута φ повороту основи навколо осі обертання маятника.

Позначимо \mathbf{u}_c – вектор абсолютної (відносно системи координат $\xi\eta\zeta$) кутової швидкості основи. Тоді з рис. 2.2 випливають такі співвідношення:

$$\mathbf{u}_c = \dot{\psi} + \dot{\theta} + \dot{\phi}. \quad \begin{cases} u_{cA} = \dot{\psi} \cos \vartheta \\ u_{cB} = \dot{\vartheta} \\ u_{czc} = \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \vartheta \end{cases}.$$

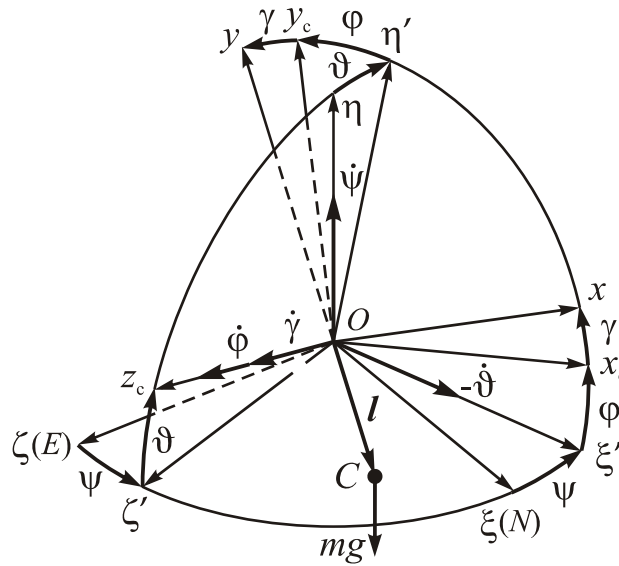


Рис. 2.2. Кінематика поворотів маятника

Систему координат x, y, z жорстко зв'яжемо з тілом маятника, причому вісь z вільного обертання маятника спрямуємо вздовж осі z_c . Ось Oy маятника спрямуємо вдовж осі OC , яка з'єднує центр мас C маятника з точкою O його підвісу. Кут відхилення осі y від вертикальної площини, що проходить через вісь обертання z маятника позначимо через γ (рис. 2.2), а кут повороту осі y відносно осі y_c основи навколо осі z — α . Кутова швидкість маятника складатиметься з кутової швидкості основи та кутової швидкості повороту маятника відносно основи:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{u}_c + \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\psi} + \dot{\theta} + \dot{\phi} + \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\psi} + \dot{\theta} + \dot{\gamma}; \quad (\gamma = \alpha + \varphi).$$

$$\begin{cases} \omega_A = \dot{\psi} \cos \vartheta; \\ \omega_B = \dot{\vartheta}; \\ \omega_{zc} = \dot{\gamma} - \dot{\psi} \sin \vartheta. \end{cases}$$

Рівняння руху математичного маятника складатимемо на основі рівнянь Жільбера (1.102). Для цього необхідно відшукати вираз відносної кінетичної енергії T^* маятника через узагальнену координату маятника, за яку оберемо кут γ відхилення осі OC маятника від вертикальної площини, користуючись припущенням, що точка підвісу маятника є нерухомою в інерціальному просторі (хоча насправді вважатимемо, що вона переміщується з прискоренням \mathbf{w}_O). Щоб знайти цей вираз, скористаємося співвідношенням (1.94), урахувавши в ньому, що швидкість полюса O дорівнює нулю:

$$T^* = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{K}_O) = \frac{1}{2}(\omega_X K_{OX} + \omega_Y K_{OY} + \omega_Z K_{OZ}).$$

Вважаючи, що введені раніше осі x, y, z є головними осями інерції маятника, а J_X, J_Y і J_Z – моменти інерції маятника відносно цих осей, у відповідності до співвідношень (1.90), отримуємо такі проекції вектора моменту імпульсу відносно точки підвісу O маятника:

$$K_{OX} = J_X \omega_X; \quad K_{OY} = J_Y \omega_Y; \quad K_{OZ} = J_Z \omega_Z.$$

Звідси випливає вираз для відносної кінетичної енергії:

$$\begin{aligned} T^* &= \frac{1}{2}(J_X \omega_X^2 + J_Y \omega_Y^2 + J_Z \omega_Z^2) = \\ &= \frac{1}{2}[J_X (\omega_B \cos \gamma + \omega_A \sin \gamma)^2 + J_Y (\omega_A \cos \gamma - \omega_B \sin \gamma)^2 + J_Z \omega_{zc}^2] = \\ &= \frac{1}{2}[J_X (\dot{\vartheta} \cos \gamma + \dot{\psi} \cos \vartheta \sin \gamma)^2 + J_Y (\dot{\psi} \cos \vartheta \cos \gamma - \dot{\vartheta} \sin \gamma)^2 + J_Z (\dot{\gamma} - \dot{\psi} \sin \vartheta)^2]. \end{aligned}$$

Потенціальну енергію Π^* потрібно визначати відповідно до співвідношення (1.103):

$$\begin{aligned} \Pi^* &= m(\mathbf{w}_O - \mathbf{g}) \cdot \mathbf{l} = m[(w_\xi - g_\xi) \cdot l_\xi + (w_\eta - g_\eta) \cdot l_\eta + (w_\zeta - g_\zeta) \cdot l_\zeta] = \\ &= m[w_\xi l_\xi + (g + w_\eta) l_\eta + w_\zeta l_\zeta] = \quad (2.4) \\ &= -mgl[n_\xi (-\cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \cos \gamma \sin \vartheta) + (1 + n_\eta) \cos \vartheta \cos \gamma + \\ &+ n_\zeta (\sin \psi \sin \gamma + \cos \psi \cos \gamma \sin \vartheta)] \end{aligned}$$

де позначено $n_\xi = \frac{w_\xi}{g}$, $n_\eta = \frac{w_\eta}{g}$, $n_\zeta = \frac{w_\zeta}{g}$ – перевантаження точки підвісу маятника у відповідних напрямках.

Єдине рівняння руху, що відповідає єдиному ступеню вільності визначається з рівняння (1.102):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\gamma}} - \frac{\partial T^*}{\partial \gamma} + \frac{\partial \Pi^*}{\partial \gamma} = M_{OZ}, \quad (2.1)$$

Здійснивши математичні операції відповідно до (2.1), матимемо

$$\begin{aligned} &J_Z (\ddot{\gamma} - \ddot{\psi} \sin \vartheta - \dot{\psi} \dot{\vartheta} \cos \vartheta) - \\ &-(J_X - J_Y) (\dot{\psi} \cos \vartheta \cos \gamma - \dot{\vartheta} \sin \vartheta) (\dot{\psi} \cos \vartheta \sin \gamma + \dot{\vartheta} \cos \vartheta) + \\ &+ mgl[(1 + n_\eta) \cos \vartheta \sin \gamma + n_\xi (\cos \psi \cos \gamma + \sin \psi \sin \gamma \sin \vartheta) - \\ &- n_\zeta (\sin \psi \cos \gamma - \cos \psi \sin \gamma \sin \vartheta)] = M_{OZ}. \end{aligned}$$

У випадку, коли основа обертається лише навколо осі вільного обертання маятника, а остання вісь залишається увесь час нерухомою і горизонтальною, це рівняння набуває вигляду:

$$J_Z \ddot{\gamma} + mgl(1 + n_\eta) \sin \gamma = -mgl n_\xi \cos \gamma + M_{OZ}. \quad (2.2)$$

Виокремимо з моментів сил, що діють на маятник навколо осі його вільного обертання, момент сил в'язкого тертя, який є пропорційним до кутової швидкості повороту маятника відносно основи:

$$M_{OZ} = -R\dot{\alpha} + M_Z = -R\dot{\gamma} + R\dot{\phi} + M_Z,$$

де R – постійний коефіцієнт в'язкого тертя. Тоді рівняння (2.2) набуде вигляду:

$$J_Z\ddot{\gamma} + R\dot{\gamma} + mgl(1 + n_\eta)\sin\gamma = -mgl n_\xi \cos\gamma + R\dot{\phi} + M_{OZ}. \quad (2.3)$$

2.2. Симетричний зрівноважений гіроскоп

Симетричний зрівноважений гіроскоп (СЗГ) являє собою динамічно симетричне тверде тіло, центр мас якого суміщено з точкою підвісу гіроскопа (завжди нерухомою відносно основи, на якій встановлено гіроскоп, за будь-якого руху гіроскопа), і яке приведено у швидке обертання навколо своєї осі фігури.

2.2.1 Рівняння симетричного зрівноваженого гіроскопа в осях Резаля

У відповідності до умови вважатимемо точку підвісу O нерухомою в інерціальному просторі і приймемо її за полюс. Введемо систему координат xuz , жорстко пов'язану з тілом гіроскопа, причому вісь z спрямуємо вдовж осі фігури, а також інерціальну систему координат $\xi\eta\zeta$. Початок обох систем координат сумістимо з полюсом O . Положення осі фігури z відносно інерціальної системи координат визначатимемо за допомогою кутів α і β (рис. 2.3).

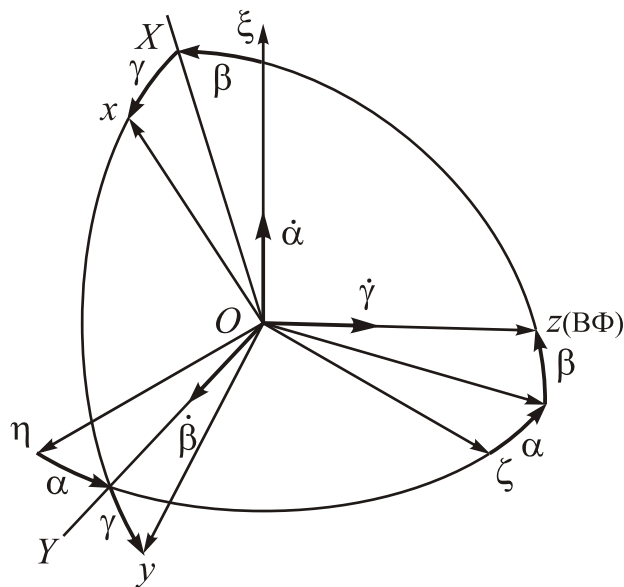


Рис. 2.3. Кінематика поворотів СЗГ

Кут повороту гіроскопа навколо його осі фігури (кут власного обертання) позначимо через γ .

Проміжну систему координат XUz , яка бере участь в усіх поворотах осі власного обертання гіроскопа (у розглядуваному випадку – осі z) у просторі і не бере участі у поворотах гіроскопа навколо цієї осі, називають осями Резаля (у прикладній теорії гіроскопів таку систему координат ще називають супутньою).

Прийmemo у якості рухомої системи координат P систему осей Резаля.
Рівняння руху складемо на основі закону моментів у формі (1.100):

$$\frac{\tilde{d}_P \mathbf{K}_O^\omega}{dt} + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{K}_O^\omega = \mathbf{M}_O. \quad (2.4)$$

де $\boldsymbol{\omega}'$ – вектор абсолютної кутової швидкості осей Резаля:

$$\boldsymbol{\omega}' = \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \dot{\boldsymbol{\beta}}. \quad (2.5)$$

Другий доданок у правій частині рівняння (1.100) дорівнює нулю (і тому його немає у виразі (2.4)) через те, що, по-перше, у розглядуваному випадку $\mathbf{p}_C = 0$ (центр мас збігається з полюсом), а по-друге, $\mathbf{w}_O = 0$ (полюс O є нерухомим за умовою).

Спроєціюємо векторне рівняння на осі системи координат XYZ :

$$\begin{cases} \frac{dK_{OX}^\omega}{dt} + \omega'_Y K_{OZ}^\omega - \omega'_Z K_{OY}^\omega = M_{OX} \\ \frac{dK_{OY}^\omega}{dt} + \omega'_Z K_{OX}^\omega - \omega'_X K_{OZ}^\omega = M_{OY} \\ \frac{dK_{OZ}^\omega}{dt} + \omega'_X K_{OY}^\omega - \omega'_Y K_{OX}^\omega = M_{OZ} \end{cases}.$$

Скористаємося теоремою 5 (див. п. 1.4.2. «Геометрія мас твердого тіла»). Виходячи з неї, осі OX і OY є головними осями інерції гіроскопа, бо лежать в його екваторіальній площині. Моменти інерції гіроскопа відносно цих осей однакові і дорівнюють екваторіальному моменту інерції J_e . Тому проекції обертальної частини моменту імпульсу гіроскопа визначаються з матричного співвідношення (див. (1.90) і (1.91))

$$\begin{bmatrix} K_{OX}^\omega \\ K_{OY}^\omega \\ K_{OZ}^\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_e & 0 & 0 \\ 0 & J_e & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{bmatrix},$$

тобто

$$K_{OX}^\omega = J_e \omega_X; \quad K_{OY}^\omega = J_e \omega_Y; \quad K_{OZ}^\omega = J \omega_Z,$$

де кутова швидкість гіроскопа визначається векторною рівністю

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \dot{\boldsymbol{\beta}} + \dot{\boldsymbol{\gamma}}.$$

Проекції вектора кутової швидкості гіроскопа становлять:

$$\omega_{X'} = \dot{\alpha} \cos \beta; \quad \omega_{Y'} = \dot{\beta}; \quad \omega_Z = \dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta.$$

Тому проекції кінетичного моменту гіроскопа визначаються співвідношеннями:

$$K_{OX'}^\omega = J_e \dot{\alpha} \cos \beta; \quad K_{OY'}^\omega = J_e \dot{\beta}; \quad K_{OZ}^\omega = J(\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta) = H,$$

де H – проекція вектора кінетичного моменту гіроскопа на ось його власного обертання:

$$H = J(\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta).$$

Вона має спеціальну назву *власний кінетичний момент гіроскопа*.

Якщо взяти до уваги, що проекції кутової швидкості осей Резаля відповідно до виразу (2.5) дорівнюють

$$\omega'_{X'} = \dot{\alpha} \cos \beta = \omega_{X'}; \quad \omega'_{Y'} = \dot{\beta} = \omega_{Y'}; \quad \omega'_Z = \dot{\alpha} \sin \beta,$$

то рівняння набудуть такого вигляду

$$\begin{cases} J_e \ddot{\alpha} \cos \beta - 2J_e \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta + H \dot{\beta} = M_{OX'} \\ J_e \ddot{\beta} + J_e \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \cos \beta - H \dot{\alpha} \cos \beta = M_{OY'} \\ \frac{dH}{dt} = M_{OZ} \end{cases} \quad (2.6)$$

Одержані рівняння становлять систему диференціальних рівнянь п'ятого порядку відносно змінних α , β і H .

2.2.2. Рівняння симетричного зрівноваженого гіроскопа в формі Булгакова

Російській вчений Б. В. Булгаков у докторській дисертації вперше звернув увагу на доцільність використання рівнянь руху гіроскопа у проекціях на так звані «кінетичні» осі, пов'язані не з гіроскопом, а з напрямком вектора його кінетичного моменту. Як виявляється, отримані у такий спосіб рівняння дозволяють найбільш просто і наочно дослідити важливі окремі випадки руху СЗГ. Називатимемо їх рівняннями у формі Булгакова.

Розглянемо систему координат $x_K y_K z_K$ (рис. 2.4), одна з осей якої (у розглядуваному випадку – вісь z_K) завжди напрямлена вздовж вектора \mathbf{K}_O^0 моменту імпульсу гіроскопа. Положення осі кінетичного моменту \mathbf{K}_O^0 в інерціальній системі координат визначимо кутами α_K і β_K (рис. 2.4).

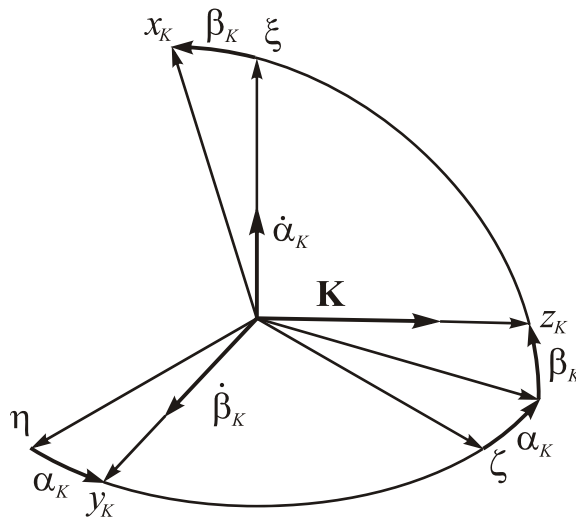


Рис. 2.4. Кінетична система координат

Якщо осі $x_K y_K z_K$ обрати як рухому систему координат P , то закон моментів (1.100) набуде вигляду

$$\frac{\tilde{d}_K \mathbf{K}_O^\omega}{dt} + \boldsymbol{\omega}^K \times \mathbf{K}_O^\omega = \mathbf{M}_O, \quad (2.7)$$

де $\boldsymbol{\omega}^K$ – вектор абсолютної кутової швидкості цих осей, який визначається у такий спосіб:

$$\boldsymbol{\omega}^P = \boldsymbol{\omega}^K = \dot{\boldsymbol{\alpha}}_K + \dot{\boldsymbol{\beta}}_K. \quad (2.8)$$

У проєкціях на осі системи $x_K y_K z_K$ векторне рівняння (2.20) набуває вигляду (нагадаймо, що внаслідок спеціального вибору рухомої системи координат $K_{OxK}^\omega \equiv 0$, $K_{OyK}^\omega \equiv 0$, $K_{OzK}^\omega \equiv K$, де K – поточне значення вектора кінетичного моменту \mathbf{K}_O^ω):

$$K\omega_{yK}^K = M_{xK}; \quad -K\omega_{xK}^K = M_{yK}; \quad \frac{dK}{dt} = M_{zK}. \quad (2.9)$$

Ураховуючи в рівняннях (2.22) вирази проєкцій кутової швидкості відповідно до виразу (2.21)

$$\omega_{xK}^K = \dot{\alpha}_K \cos \beta_K; \quad \omega_{yK}^K = \dot{\beta}_K; \quad \omega_{zK}^K = \dot{\alpha}_K \sin \beta_K = \omega_{xK}^K \operatorname{tg} \beta_K,$$

одержимо такі три рівняння відносно трьох змінних α_K , β_K і K :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\beta_K}{dt} = \frac{M_{xK}}{K}; \\ \frac{d\alpha_K}{dt} = -\frac{M_{yK}}{K \cos \beta_K}; \\ \frac{dK}{dt} = M_{zK}. \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Рівняння (2.10) дозволяють досліджувати *рух в інерціальному просторі вектора кінетичного моменту* (моменту імпульсу). Назвемо їх *рівняннями прецесійного руху* гіроскопа. Сенс такої назви стане зрозумілим пізніше. Зазначимо лише, що ці рівняння є точними, на відміну від прецесійних рівнянь руху, які використовуються у прикладній теорії гіроскопів.

Щоб знайти рівняння, які дозволяють досліджувати рух безпосередньо тіла гіроскопа відносно кінетичної системи координат $x_K y_K z_K$, уведемо три додаткові кути (рис. 2.5) – ψ , ϑ і ϕ . Кут ϑ – це кут між віссю фігури z і віссю z_K кінетичного моменту; ψ – кут між площиною, що проходить через осі C і z_K , і площиною $x_K y_K z_K$, а ϕ – кут, який утворює одна з екваторіальних осей (вісь x), жорстко зв'язана з тілом гіроскопа, з площиною Cz_K .

Абсолютну кутову швидкість гіроскопа тепер можна подати як векторну суму усіх похідних від зазначених кутів:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^K + \dot{\boldsymbol{\psi}} + \dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\phi}}.$$

Спроєціюємо цю векторну рівність на осі A , B і C , вказані на рис. 2.5:

$$\omega_A = \omega_A^K - \dot{\psi} \sin \vartheta; \quad \omega_B = \omega_B^K + \dot{\vartheta}; \quad \omega_C = \omega_C^K + \dot{\phi} \sin \vartheta.$$

Звідси визначимо похідні від додаткових кутів:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\omega_A^K - \omega_A}{\sin \vartheta}; \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \omega_B - \omega_B^K; \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{\omega_C - \omega_C^K}{\sin \vartheta}. \quad (2.11)$$

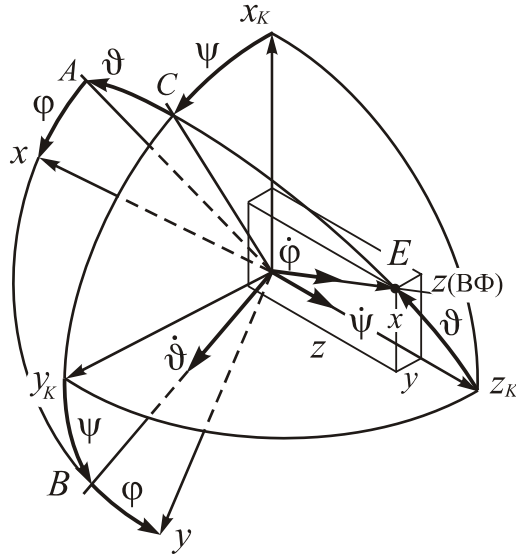


Рис. 2.5. Кінематика поворотів гіроскопа відносно кінетичних осей

Осі A і B лежать в екваторіальній площині, тому проекції кінетичного моменту на головні осі інерції A , B і z можна подати так:

$$K_A = J_e \omega_A; \quad K_B = J_e \omega_B; \quad K_z = J \omega_z. \quad (2.12)$$

Із рис. 2.5 випливає:

$$K_A = -K \sin \vartheta; \quad K_B = 0; \quad K_{Az} = K \cos \vartheta.$$

Використовуючи це, з виразів (2.12) визначимо

$$\omega_A = -\frac{K}{J_e} \sin \vartheta; \quad \omega_B = 0; \quad \omega_z = \frac{K}{J} \cos \vartheta.$$

Для визначення ω_C використаємо геометричне співвідношення:

$$\omega_C = \omega_A \cos \vartheta + \omega_z \sin \vartheta = \left(\frac{1}{J} - \frac{1}{J_e}\right) K \sin \vartheta \cos \vartheta.$$

Проекції вектора ω^K на осі A , B і C можна визначити перепроєціюванням проекцій ω_{xK}^K , ω_{yK}^K і ω_{zK}^K . Якщо при цьому врахувати вирази ω_{xK}^K і ω_{yK}^K через моменти сил, що діють на гіроскоп відповідно до рівнянь (2.9), дістанемо:

$$\begin{aligned} \omega_A^K &= \omega_{xK}^K \cos \psi \cos \vartheta + \omega_{yK}^K \sin \psi \cos \vartheta - \omega_{zK}^K \sin \vartheta = \\ &= \frac{M_{yK}}{K} \operatorname{tg} \beta_K \sin \vartheta - \left(\frac{M_{yK}}{K} \cos \psi - \frac{M_{xK}}{K} \sin \psi\right) \cos \vartheta; \\ \omega_B^K &= -\omega_{xK}^K \sin \psi + \omega_{yK}^K \cos \psi = \frac{M_{xK}}{K} \cos \psi + \frac{M_{yK}}{K} \sin \psi; \\ \omega_C^K &= \omega_{xK}^K \cos \psi + \omega_{yK}^K \sin \psi = -\left(\frac{M_{yK}}{K} \cos \psi - \frac{M_{xK}}{K} \sin \psi\right). \end{aligned}$$

Із врахуванням одержаних співвідношень рівнянням (2.11) можна надати вигляду:

$$\frac{d\psi}{dt} = \lambda - \frac{M_{yK} \cos \psi - M_{xK} \sin \psi}{K \operatorname{tg} \vartheta}; \quad (2.13)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{M_{YK} \cos \psi - M_{XK} \sin \psi}{K}; \quad (2.14)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{1}{J} - \frac{1}{J_e}\right)K \cos \vartheta + \frac{M_{YK} \cos \psi - M_{XK} \sin \psi}{K \sin \vartheta}. \quad (2.15)$$

Вони описують рух тіла гіроскопа відносно кінетичних осей. Сукупність рівнянь (2.13) і (2.14) назвемо *рівняннями нутаційного руху* гіроскопа. За допомогою їх можна досліджувати рух головної осі гіроскопа z у кінетичних осях. Останнє рівняння (2.15) характеризує власне обертання гіроскопа (навколо його головної осі) відносно тих самих кінетичних осей.

Рівняння (2.10), (2.13), (2.14) і (2.15) утворюють сукупність рівнянь першого порядку відносно шести змінних $\alpha_K, \beta_K, K, \psi, \vartheta$ і φ . Сукупність таких змінних, яка дозволяє звести систему диференціальних рівнянь до сукупності диференціальних рівнянь першого порядку у механіці називають *фазовими змінними (фазою)* динамічної системи, а у теорії керування – *змінними стану* системи.

Якщо ввести напрямні косинуси головної осі у кінетичних осях

$$x = \cos(z, x_K); \quad y = \cos(z, y_K); \quad z = \cos(z, z_K),$$

рівняння нутаційного руху можна подати у симетричному вигляді:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + \lambda y = -\frac{M_{XK}}{K} z \\ \frac{dy}{dt} - \lambda x = -\frac{M_{YK}}{K} z \end{cases}, \quad (2.16)$$

де

$$\lambda = \frac{K}{J_e} + \frac{M_{YK}}{K} \operatorname{tg} \beta_K. \quad (2.17)$$

Очевидно, що величина z пов'язана з напрямними косинусами x і y співвідношенням:

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}. \quad (2.18)$$

2.3. Симетричний гіромаятник

Симетричним гіромаятником називають динамічно симетричне тверде тіло, якому надано швидке обертання навколо його осі фігури і центр тяжіння якого зміщений відносно точки його підвісу вздовж осі фігури на деяку відстань l . Відомим реальним прикладом поняття гіромаятника є дитяча іграшка – дзига.

Найбільш суттєвою відмінністю симетричного гіромаятника від СЗГ є суттєвий вплив на рух гіромаятника сили тяжіння, яка, внаслідок незбіжності центра мас, через який проходить рівнодійна сил тяжіння гіромаятника у полі гравітації, з точкою підвісу, утворює момент відносно точки підвісу, який впливає на рух (обертання у просторі головної осі).

2.3.1. Рівняння гіромаятника у кутах осциляції

Уведемо для визначення положення гіромаятника послідовність кутів, показану на рис. 2.6. Кути δ_1 , δ_2 і δ_3 називають кутами осциляції.

Як полюс (початок усіх систем координат) оберемо точку підвісу O гіромаятника, яку вважатимемо є нерухомою за будь-якого руху гіромаятника.

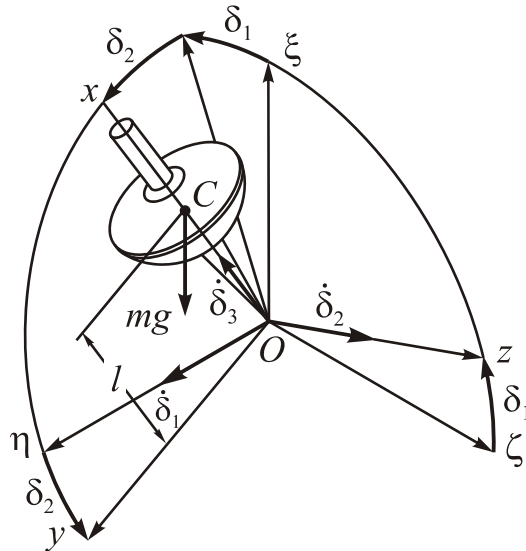


Рис. 2.6. Кути осциляції

Систему координат $\xi\eta\zeta$ вважатимемо інерціальною. Вісь ξ направимо вздовж вертикалі. Через це сила тяжіння mg , прикладена до поточного положення центра мас C , буде паралельною цієї осі. З гіромаятником зв'яжемо систему осей Резаля xuz , причому вісь x спрямуємо вздовж осі фігури симетричного гіромаятника. Саме вздовж цієї самої осі на відстань l зміщений, за умовою, центр мас по відношенню до точки підвісу.

Для складання рівнянь руху використаємо формалізм Лагранжа. У розглядуваному випадку потенціальна енергія зумовлена силами гравітації і визначиться виразом:

$$\Pi = -mg \cdot \mathbf{l} = -m(g_\xi l_\xi + g_\eta l_\eta + g_\zeta l_\zeta) = mgl_\xi = mgl \cos \delta_1 \cos \delta_2.$$

Осі y і z містяться в екваторіальній площині, тому є головними осями інерції гіромаятника. Отже, якщо J_e – екваторіальний момент інерції гіромаятника відносно точки підвісу O , то проекції кінетичного моменту на осі Резаля дорівнюють:

$$K_{Ox}^\omega = H = J\omega_x; \quad K_{Oy}^\omega = J_e\omega_y; \quad K_{Oz}^\omega = J_e\omega_z.$$

Тому відповідності до співвідношення (1.167), кінетичну енергію симетричного гіромаятника можна подати у вигляді:

$$T = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_O \cdot \mathbf{Q} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{K}_O) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{K}_O) =$$

$$= \frac{1}{2} (\omega_X K_{OX}^\omega + \omega_Y K_{OY}^\omega + \omega_Z K_{OZ}^\omega) = \frac{H^2}{2} + \frac{1}{2} J_e (\omega_Y^2 + \omega_Z^2).$$

Оскільки проекції кутової швидкості гіромаятника визначаються виразами (рис. 2.6):

$$\omega_X = \dot{\delta}_3 + \dot{\delta}_1 \sin \delta_2; \quad \omega_Y = \dot{\delta}_1 \cos \delta_2; \quad \omega_Z = \dot{\delta}_2, \quad (2.19)$$

у кінцевому підсумку кінетична енергія як функція узагальнених координат δ_1 , δ_2 , δ_3 і узагальнених швидкостей матиме такий вигляд:

$$T = \frac{H^2}{2J} + \frac{1}{2} J_e (\dot{\delta}_1^2 \cos^2 \delta_2 + \dot{\delta}_2^2), \quad H = J(\dot{\delta}_3 + \dot{\delta}_1 \sin \delta_2). \quad (2.20)$$

Здійснюючи математичні перетворення згідно з формалізмом Лагранжа (1.101) і враховуючи, що *узагальнена сила, яка відповідає кутовій узагальненій координаті, являє собою складову моменту зовнішніх сил, напрямлену вздовж осі, по якій напрямлено відповідну узагальнену швидкість*, отримуємо такі рівняння гіромаятника (дзиги):

$$\left\{ \begin{array}{l} J_e \ddot{\delta}_1 \cos^2 \delta_2 - 2J_e \dot{\delta}_1 \dot{\delta}_2 \sin \delta_2 \cos \delta_2 + H \dot{\delta}_2 \cos \delta_2 = \\ = mgl \sin \delta_1 \cos \delta_2 + M_\eta - M_X \sin \delta_2 \\ J_e \ddot{\delta}_2 + J_e \dot{\delta}_1^2 \sin \delta_2 \cos \delta_2 - H \dot{\delta}_1 \cos \delta_2 = mgl \sin \delta_2 \cos \delta_1 + M_Z \\ \frac{dH}{dt} = M_X \end{array} \right. \quad (2.21)$$

2.3.2. Рівняння гіромаятника у кутах Ейлера

Ейлер під час аналізу поведінки симетричного гіромаятника використовував іншу послідовність кутів – кут прецесії ψ , кут нутації ϑ і кут ротації ϕ (рис. 2.7).

Відповідно до рис. 2.7, поступаючи аналогічно тому, як це було зроблено у п. 2.3.1, дістанемо такі вирази потенціальної енергії

$$\Pi = mgl \cos \vartheta \quad (2.22)$$

і кінетичної енергії

$$T = \frac{H^2}{2J} + \frac{1}{2} J_e (\dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2), \quad H = J(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \vartheta). \quad (2.23)$$

Застосовуючи формалізм Лагранжа, отримуємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} J_e \ddot{\psi} \sin^2 \vartheta + 2J_e \dot{\psi} \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta - H \dot{\vartheta} \sin \vartheta = M_\xi - M_X \cos \vartheta \\ J_e \ddot{\vartheta} - J_e \dot{\psi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta + H \dot{\psi} \sin \vartheta = mgl \sin \vartheta + M_Y \\ \frac{dH}{dt} = M_X \end{array} \right. \quad (2.24)$$

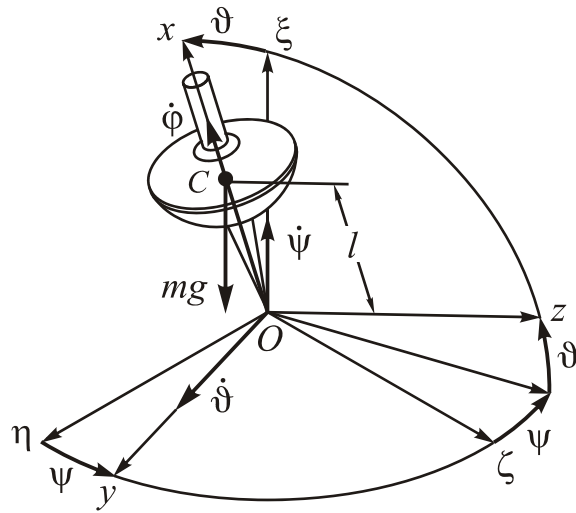


Рис. 2.7. Кути Ейлера

2.4. Гіроскоп у кардановому підвісі

Гіроскоп у кардановому підвісі є значно складнішою системою, схему конструкції якої показано на рис. 2.8.

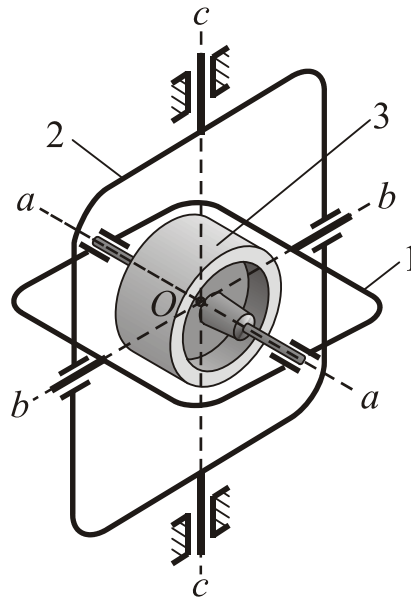


Рис. 2.8. Схема гіроскопа у кардановому підвісі

Він складається з трьох з'єднаних між собою і взаємодіючих тіл – зовнішньої рамки 2, внутрішньої рамки 1 і ротора (власно гіроскопа).

Зовнішня рамка може повертатися відносно основи, на якій встановлено ГКП, лише навколо однієї матеріальної осі cc , яку називають *зовнішньою віссю підвісу*, або віссю зовнішньої рамки. Внутрішня рамка може повертатися відносно зовнішньої лише навколо осі bb , яку називають *внутрішньою віссю підвісу*, або віссю внутрішньої рамки. Вісь aa , навколо якої ротор ГКП може обер-

татися відносно внутрішньої рамки, називатимемо *віссю власного обертання* гіроскопа, або *головною віссю гіроскопа*, або віссю ротора.

Надалі використовуватимемо такі припущення:

– зовнішня вісь підвісу і головна вісь гіроскопа є перпендикулярними внутрішній осі підвісу;

– усі три зазначені матеріальні осі підвісу перетинаються в одній точці O , яка залишається нерухомою відносно основи за будь-яких рухів основи і гіроскопа і тому може вважатися *точкою підвісу гіроскопа*;

– центри мас усіх трьох тіл, що складають ГКП, збігаються з точкою підвісу O ; такий гіроскоп називають *зрівноваженим* або *астатичним*.

2.4.1. Рівняння гіроскопа у кардановому підвісі на нерухомій основі

Складемо рівняння руху ГКП, устатовленого на основі, яка є нерухомою в інерціальному просторі. Уведемо інерціальну систему координат $\xi\eta\zeta$ з початком у точці підвісу O ГКП. Із зовнішньою рамкою зв'яжемо систему координат $x_2y_2z_2$, причому вісь x_2 направимо вздовж зовнішньої осі підвісу, а ось y_2 – вздовж внутрішньої осі підвісу (рис. 2.9). У свою чергу ось x_2 сумістимо з віссю ξ інерціальної системи.

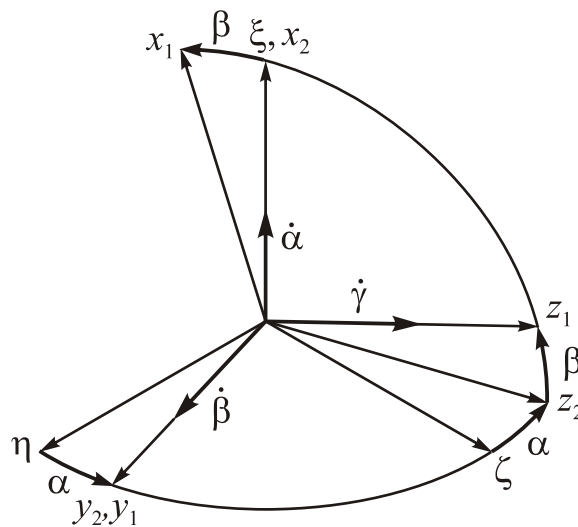


Рис. 2.9. Кінематика відносних поворотів ГКП

З внутрішньою рамкою зв'яжемо систему координат $x_1y_1z_1$ так, щоб вісь y_1 збігалася з внутрішньою віссю підвісу, а вісь z_1 – з головною віссю гіроскопа. Нарешті, з ротором гіроскопа жорстко зв'яжемо систему координат xzy , вісь z якої збігається з головною віссю гіроскопа.

Рівняння руху ГКП складемо за таких припущень:

1) ротор ГКП є динамічно симетричним твердим тілом, вісь фігури якого збігається з головною віссю гіроскопа (умова *динамічної збалансованості ротора*);

2) осі $x_1y_1z_1$ є головними осями інерції для внутрішньої рамки;

3) осі $x_2y_2z_2$ є головними осями інерції для зовнішньої рамки.

Складатимемо рівняння руху на основі формалізму Лагранжа. Як узагальнені координати будемо використовувати відносні кути повороту ГКП:

α – кут повороту зовнішньої рамки відносно основи;

β – кут повороту внутрішньої рамки відносно зовнішньої;

γ – кут повороту ротора відносно внутрішньої рамки.

Гіроскоп у кардановому підвісі являє собою систему з трьох взаємодіючих тіл. Тому кінетична енергія T_Σ ГКП має складатися з кінетичних енергій T ротора, T_1 внутрішньої рамки і T_2 зовнішньої рамки:

$$T_\Sigma = T + T_1 + T_2.$$

Кожна з цих кінетичних енергій може бути визначена з співвідношень, аналогічних (1.167):

$$T = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_O \cdot \mathbf{Q} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{K}_O); \quad T_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_O \cdot \mathbf{Q}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{K}_{1O});$$

$$T_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_O \cdot \mathbf{Q}_2 + \boldsymbol{\omega}_2 \cdot \mathbf{K}_{2O}),$$

де \mathbf{v}_O – швидкість точки підвісу; $\mathbf{Q}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{K}_O$ – відповідно імпульс, кутова швидкість і момент імпульсу ротора; $\mathbf{Q}_1, \boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{K}_{1O}$ і $\mathbf{Q}_2, \boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{K}_{2O}$ – відповідні величини внутрішньої і зовнішньої рамки. Отже можна записати:

$$T_\Sigma = \frac{1}{2}[\mathbf{v}_O \cdot (\mathbf{Q} + \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{K}_O + \boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{K}_{1O} + \boldsymbol{\omega}_2 \cdot \mathbf{K}_{2O}]. \quad (2.25)$$

Першій доданок у (2.25) можна перетворити до виду:

$$\mathbf{v}_O \cdot (\mathbf{Q} + \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) = \mathbf{v}_O \cdot (m\mathbf{v}_C + m_1\mathbf{v}_{C1} + m_2\mathbf{v}_{C2}) = (m + m_1 + m_2)v_O^2.$$

Тут використано ту обставину, що центри мас C, C_1, C_2 усіх трьох тіл збігаються, за умовою, з точкою підвісу O , яку обрано як полюс. Оскільки отриманий вираз не залежить від узагальнених координат і узагальнених швидкостей (швидкість полюса може бути заданою лише як функція часу), ця складова ніяк не вплине на рівняння руху. Тому її можна відкинути і розглядати вираз кінетичної енергії у спрощеному вигляді:

$$\begin{aligned} T_\Sigma &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{K}_O + \boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{K}_{1O} + \boldsymbol{\omega}_2 \cdot \mathbf{K}_{2O}) = \\ &= \frac{1}{2}[(\omega_{X1}K_{X1} + \omega_{Y1}K_{Y1} + \omega_{Z1}K_{Z1}) + (\omega_{1X1}K_{1X1} + \omega_{1Y1}K_{1Y1} + \omega_{1Z1}K_{1Z1}) + \\ &\quad + (\omega_{2X2}K_{2X2} + \omega_{2Y2}K_{2Y2} + \omega_{2Z2}K_{2Z2})]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

У відповідності з припущенням 1 проекції вектора кінетичного моменту ротора на осі $x_1y_1z_1$ визначаються так

$$K_{X1} = J_e \omega_{X1}; \quad K_{Y1} = J_e \omega_{Y1}; \quad K_{Z1} = J \omega_{Z1}. \quad (2.27)$$

Припущення 2 дозволяє подати проекції кінетичного моменту внутрішньої рамки на ті самі осі $x_1y_1z_1$ так:

$$K_{1X1} = J_{1X} \omega_{1X1}; \quad K_{1Y1} = J_{1Y} \omega_{1Y1}; \quad K_{1Z1} = J_{1Z} \omega_{1Z1}. \quad (2.28)$$

Проекції кінетичного моменту зовнішньої рамки на осі $x_2y_2z_2$, пов'язані з зовнішньою рамкою, за умови припущення 3 матимуть вигляд:

$$K_{2X2} = J_{2X}\omega_{2X2}; \quad K_{2Y2} = J_{2Y}\omega_{2Y2}; \quad K_{2Z2} = J_{2Z}\omega_{2Z2}, \quad (2.29)$$

де J_e – екваторіальний, J – осьовий моменти інерції ротора; J_{1X}, J_{1Y}, J_{1Z} – моменти інерції внутрішньої рамки відповідно відносно осей x_1, y_1 і z_1 ; J_{2X}, J_{2Y}, J_{2Z} – моменти інерції зовнішньої рамки відповідно відносно осей x_2, y_2 і z_2 .

Підставляючи вирази (2.48) – (2.50) у (2.47), одержимо:

$$T_{\Sigma} = \frac{1}{2} [J_e(\omega_{X1}^2 + \omega_{Y1}^2) + \frac{H^2}{J} + J_{1X}\omega_{1X1}^2 + J_{1Y}\omega_{1Y1}^2 + J_{1Z}\omega_{1Z1}^2 + J_{2X}\omega_{2X2}^2 + J_{2Y}\omega_{2Y2}^2 + J_{2Z}\omega_{2Z2}^2]. \quad (2.30)$$

Кутові швидкості зовнішньої, внутрішньої рамок і ротора, очевидно, можна визначити з наступних векторних рівностей:

$$\omega_2 = \dot{\alpha}; \quad \omega_1 = \dot{\alpha} + \dot{\beta}; \quad \omega_2 = \dot{\alpha} + \dot{\beta} + \dot{\gamma}.$$

Звідси випливають вирази потрібних проекцій:

$$\begin{aligned} \omega_{2X2} &= \dot{\alpha}; & \omega_{2Y2} &= \omega_{2Z2} = 0; \\ \omega_{1X1} &= \dot{\alpha} \cos \beta; & \omega_{1Y1} &= \dot{\beta}; & \omega_{1Z1} &= \dot{\alpha} \sin \beta; \\ \omega_{X1} &= \dot{\alpha} \cos \beta; & \omega_{Y1} &= \dot{\beta}; & \omega_{Z1} &= \dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Використовуючи їх, можна перетворити вираз (2.30) кінетичної енергії ГКП до такого вигляду:

$$T_{\Sigma} = \frac{1}{2} \left[\frac{H^2}{J} + (J_1 + J_2 \cos^2 \beta) \dot{\alpha} + J_3 \dot{\beta}^2 \right]; \quad H = J(\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta),$$

де

$$J_1 = J_{2X} + J_{1Z}; \quad J_2 = J_{1X} + J_e - J_{1Z}; \quad J_3 = J_{1Y} + J_e. \quad (2.32)$$

Потенціальну енергію у розглядуваному випадку можна покласти рівною нулю, оскільки вона, через зрівноваженість ГКП, не змінюється за будь-якого руху ГКП.

Здійснюючи дії, передбачені формалізмом Лагранжа, отримаємо наступні рівняння:

$$\begin{cases} (J_1 + J_2 \cos^2 \beta) \ddot{\alpha} - 2J_2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \cos \beta + H \dot{\beta} \cos \beta = N - R \sin \beta \\ J_3 \ddot{\beta} + J_2 \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta - H \dot{\alpha} \cos \beta = L \\ \frac{dH}{dt} = R \end{cases} \quad (2.33)$$

де N – момент сил, що діє на ГКП уздовж зовнішньої осі підвісу; L – момент сил, що діє вздовж внутрішньої осі підвісу і R – момент зовнішніх сил уздовж головної осі гіроскопу.

2.4.2. Рівняння Ейлера-Ішлинського. Моменти реакцій у в'язях

У гіроскопічних пристроях з явно вираженими осями, до яких належить ГКП, питання про вибір системи осей, на які слід проєціювати векторні рівнян-

ня законів динаміки не виникає, – обрання осей продиктоване наявністю в системі матеріальних осей, що забезпечують кутову вільність відносного переміщення окремих елементів приладу, уздовж яких і направлені діючі збурювальні моменти (моменти сил тертя у підшипниках, тяжіння у струмопідводах, взаємодії роторів і статорів датчиків кутів і моментів тощо). Саме відносно цих осей необхідно складати рівняння руху. Часто ці осі не утворюють прямокутної системи, і математично коректно подібним труднощам запобігти під час складання рівнянь, застосовуючи методу Ейлера-Ішлинського. Вона полягає у тому, що закон моментів (1.100) почергово застосовують до кожного з тіл, що складають систему, а потім реакції в'язів виключаються за методикою, що запропонував О. Ю. Ішлинським. Такий підхід, окрім більш глибокого подання гри моментів, дає змогу як побічний результат визначити моменти реакцій у в'язях. Це дозволяє, з одного боку, уточнити значення моментів, що діють на гіроскоп (якщо вони залежать від реакцій у в'язях), а з другого, – виявити додаткові джерела виникнення випрямних ефектів, які спричиняють похибки гіроскопів.

Застосуємо цю методику до ГКП.

Закон моментів (1.96), застосований до кожного з трьох тіл, що складають ГКП, приводить до таких векторних рівностей

$$\frac{d\mathbf{K}_2}{dt} = \mathbf{M}_2; \quad \frac{d\mathbf{K}_1}{dt} = \mathbf{M}_1; \quad \frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{M}. \quad (2.34)$$

де \mathbf{M} – момент (відносно точки підвісу O) усіх сил, що є зовнішніми відносно ротора гіроскопа (зокрема й ті, що діють з боку внутрішньої рамки); \mathbf{M}_1 – момент сил, зовнішніх відносно внутрішньої рамки (у тому числі й ті, що діють з боку ротора і зовнішньої рамки); \mathbf{M}_2 – момент сил, зовнішніх відносно зовнішньої рамки (сюди слід віднести і сили з боку основи і внутрішньої рамки).

За О. Ю. Ішлинським поділимо моменти сил, що діють на елементи карданового підвісу, на дві групи:

– моменти сил взаємодії між елементами карданового підвісу, до яких належить також і корпус ГКП;

– сторонні моменти сил, тобто моменти сил дії на елементи карданового підвісу з боку матеріальних тіл і силових полів, що не входять у розглядувану систему.

До моментів першої групи належать: \mathbf{N} – момент сил дії корпусу гіроскопа на зовнішню рамку; \mathbf{L} – момент сил дії зовнішньої рамки на внутрішню; \mathbf{R} – момент сил дії внутрішньої рамки на ротор.

У другу групу входять: $\mathbf{M}_{2\text{ст}}$ – момент сторонніх сил, що діють на зовнішню рамку; $\mathbf{M}_{1\text{ст}}$ – момент сторонніх сил, що діють на внутрішню рамку; $\mathbf{M}_{\text{ст}}$ – момент сторонніх сил, що діють на ротор.

Тепер моменти сил, що діють на елементи підвісу, можна подати у вигляді:

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{N} - \mathbf{L} + \mathbf{M}_{2\text{ст}}; \quad \mathbf{M}_1 = \mathbf{L} - \mathbf{R} + \mathbf{M}_{1\text{ст}}; \quad \mathbf{M} = \mathbf{R} + \mathbf{M}_{\text{ст}}.$$

Використовуючи ці вирази моментів у рівняннях (2.34) після проєціювання останніх на осі систем координат $x_2y_2z_2$ і $x_1y_1z_1$, дістанемо дев'ять скалярних рівнянь:

$$\begin{aligned}
 1. \left(\frac{d\mathbf{K}_2}{dt} \right)_{X_2} &= N_{X_2} - L_{X_2} + M_{2\text{ст}X_2}; \\
 2. \left(\frac{d\mathbf{K}_2}{dt} \right)_{Y_2} &= N_{Y_2} - L_{Y_2} + M_{2\text{ст}Y_2}; \\
 3. \left(\frac{d\mathbf{K}_2}{dt} \right)_{Z_2} &= N_{Z_2} - L_{Z_2} + M_{2\text{ст}Z_2}; \\
 4. \left(\frac{d\mathbf{K}_1}{dt} \right)_{X_1} &= L_{X_1} - R_{X_1} + M_{1\text{ст}X_1}; \\
 5. \left(\frac{d\mathbf{K}_1}{dt} \right)_{Y_1} &= L_{Y_1} - R_{Y_1} + M_{1\text{ст}Y_1}; \\
 6. \left(\frac{d\mathbf{K}_1}{dt} \right)_{Z_1} &= L_{Z_1} - R_{Z_1} + M_{1\text{ст}Z_1}; \\
 7. \left(\frac{d\mathbf{K}}{dt} \right)_{X_1} &= R_{X_1} + M_{\text{ст}X_1}; \\
 8. \left(\frac{d\mathbf{K}}{dt} \right)_{Y_1} &= R_{Y_1} + M_{\text{ст}Y_1}; \\
 9. \left(\frac{d\mathbf{K}}{dt} \right)_{Z_1} &= R_{Z_1} + M_{\text{ст}Z_1}.
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

З усіх проєкцій моментів сил у правих частинах рівнянь (2.35) відомими (тобто заданими як явні функції часу, узагальнених координат і швидкостей) слід вважати:

– усі проєкції сторонніх моментів сил;

– складові моментів сил взаємодії \mathbf{N} , \mathbf{L} і \mathbf{R} , напрямлені відповідно вздовж зовнішньої, внутрішньої осей підвісу і головної осі гіроскопа, тобто моменти $N_{X_2} = N$, $L_{Y_1} = L$ і $R_{Z_1} = R$, оскільки вони являють собою моменти сил тертя в опорах відповідних осей, тяжіння струмопідводів, обертальні моменти двигунів тощо.

Решта моментів сил – це моменти реакцій в опорах підвісу, які є невідомими і мають бути визначені лише по тому, як визначиться рух ГКП у просторі. Тому для визначення трьох рівнянь руху ГКП як системи з трьома ступенями вільності, потрібно вилучити з рівнянь (2.35) моменти реакцій у в'язях.

Перше рівняння виходить одразу з дев'ятого рівняння (2.35), бо воно містить у правій частині лише відомі моменти сил:

$$\left(\frac{d\mathbf{K}}{dt} \right)_{Z_1} = R + M_{\text{ст}Z_1}. \tag{2.36}$$

Друге рівняння виходить, якщо до п'ятого рівняння (2.35) додати восьме рівняння:

$$\left(\frac{d(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K})}{dt} \right)_{Y1} = L + M_{1ctY1} + M_{ctY1}. \quad (2.37)$$

Дещо складніше отримати рівняння руху ГКП навколо зовнішньої осі підвісу. Для цього слід встановити залежність між складовими моменту \mathbf{L} , яка б дозволила вилучити складову L_{X2} з першого рівняння (2.35). Відповідно до рис. 2.9 матимемо:

$$L_{X2} = L_{X1} \cos \beta + L_{Z1} \sin \beta.$$

Тому, помноживши четверте і сьоме рівняння (2.35) на $\cos \beta$, шосте рівняння – на $\sin \beta$, і склавши їх між собою і з першим рівнянням (2.35), матимемо:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{K}_2}{dt} \right)_{X2} + \left(\frac{d(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K})}{dt} \right)_{X1} \cos \beta + \left(\frac{d\mathbf{K}_1}{dt} \right)_{Z1} \sin \beta = \\ = N - R \sin \beta + M_{2ctX2} + M_{1ctX1} \cos \beta \end{aligned} \quad (2.38)$$

Залишається розгорнути ліві частини рівнянь (2.36) – (2.38) згідно з правилом диференціювання вектора в обертовій системі координат:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{K}_2}{dt} \right)_{X2} &= \frac{dK_{2X2}}{dt} + \omega_{2Y2} K_{2Z2} - \omega_{2Z2} K_{2Y2} = J_{2X} \dot{\omega}_{2X2} + (J_{2Z} - J_{2Y}) \omega_{2Y2} \omega_{2Z2}; \\ \left(\frac{d(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K})}{dt} \right)_{X1} &= \frac{d(K_{1X1} + K_{X1})}{dt} + \omega_{1Y1} (K_{1Z1} + K_{Z1}) - \omega_{1Z1} (K_{1Y1} + K_{Y1}) = \\ &= (J_{1X} + J_e) \dot{\omega}_{1X1} - (J_{1Y} + J_e - J_{1Z}) \omega_{1Y1} \omega_{1Z1} + H \omega_{1Y1} \\ \left(\frac{d\mathbf{K}_1}{dt} \right)_{Z1} &= \frac{dK_{1Z1}}{dt} + \omega_{1X1} K_{1Y1} - \omega_{1Y1} K_{1X1} = J_{1Z} \dot{\omega}_{1Z1} + (J_{1Y} - J_{1Z}) \omega_{1X1} \omega_{1Y1}. \end{aligned}$$

Підставляючи це у ліву частину (2.38)), матимемо:

$$\begin{aligned} J_{2X} \dot{\omega}_{2X2} + (J_{1X} + J_e) \dot{\omega}_{1X1} \cos \beta + J_{1Z} \dot{\omega}_{1Z1} \sin \beta + (J_{2Z} - J_{2Y}) \omega_{2Y2} \omega_{2Z2} \\ - (J_{1Y} + J_e - J_{1Z}) \omega_{1Y1} \omega_{1Z1} \cos \beta + (J_{1Y} - J_{1Z}) \omega_{1X1} \omega_{1Y1} \sin \beta + H \omega_{1Y1} \cos \beta = \\ = N - R \sin \beta + M_{2ctX2} + M_{1ctX1} \cos \beta. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Аналогічно рівняння (2.37), з врахуванням позначень (2.32), перетвориться на таке:

$$J_3 \dot{\omega}_{1Y1} + J_2 \omega_{1X1} \omega_{1Z1} - H \omega_{1X1} = L + M_{1ctY1} + M_{ctY1}, \quad (2.40)$$

а рівняння (2.36) – на наступне

$$\frac{dH}{dt} = R + M_{ctZ1}. \quad (2.41)$$

На відміну від рівнянь (2.33), знайдені рівняння (2.39), (2.40) і (2.41) слушні за будь-якого руху основи в інерціальному просторі, тобто є значно більш загальними. У той же час неважко впевнитися, що вони збігаються з (2.33), якщо у них підставити вирази (2.31) проєкцій кутових швидкостей для нерухомої основи.

Перейдемо до визначення невідомих моментів сил реакцій у в'язях. До них належать шість величин: N_{Y2} і N_{Z2} – реакції в'язі основи з зовнішньою рамкою, L_{X1} і L_{Z1} – реакції в'язі зовнішньої рамки з внутрішньою, R_{X1} і R_{Y1} – реакції в'язі внутрішньої рамки з ротором.

З першого, другого, п'ятого і шостого рівнянь (2.35) безпосередньо випливає:

$$L_{X2} = -\left(\frac{d\mathbf{K}_2}{dt}\right)_{X2} + N + M_{2\text{ст}X2} = -J_{2X}\dot{\omega}_{2X2} - (J_{2Z} - J_{2Y})\omega_{2Y2}\omega_{2Z2} + N + M_{2\text{ст}X2};$$

$$N_{Y2} = \left(\frac{d\mathbf{K}_2}{dt}\right)_{Y2} + L - M_{2\text{ст}Y2} = J_{2Y}\dot{\omega}_{2Y2} + (J_{2X} - J_{2Z})\omega_{2X2}\omega_{2Z2} + L - M_{2\text{ст}Y2};$$

$$R_{Y1} = -\left(\frac{d\mathbf{K}_1}{dt}\right)_{Y1} + L + M_{1\text{ст}Y1} = -J_{1Y}\dot{\omega}_{1Y1} - (J_{1X} - J_{1Z})\omega_{1X1}\omega_{1Z1} + L + M_{1\text{ст}Y1};$$

$$L_{Z1} = \left(\frac{d\mathbf{K}_1}{dt}\right)_{Z1} + R - M_{1\text{ст}Z1} = J_{1Z}\dot{\omega}_{1Z1} + (J_{1Y} - J_{1X})\omega_{1X1}\omega_{1Y1} + R - M_{1\text{ст}Z1}.$$

Для визначення решти слід скористатися геометричними співвідношеннями, що пов'язують окремі проекції (рис. 2.9). Зі співвідношення

$$L_{X2} \sin \beta + L_{Z2} \cos \beta = L_{Z1}$$

можна визначити момент L_{Z2} реакції

$$L_{Z2} = \frac{L_{Z1} - L_{X2} \sin \beta}{\cos \beta},$$

а користуючись рівністю

$$L_{X1} \cos \beta + L_{Z1} \sin \beta = L_{X2}$$

– момент реакції

$$L_{X1} = \frac{L_{X2} - L_{Z1} \sin \beta}{\cos \beta}.$$

Тепер з третього рівняння (2.35) можна визначити момент сил N_{Z2} дії основи на зовнішню рамку, напрямлений вздовж перпендикуляра до площини зовнішньої рамки:

$$\begin{aligned} N_{Z2} &= \left(\frac{d\mathbf{K}_2}{dt}\right)_{Z2} + L_{Z2} - M_{2\text{ст}Z2} = \left(\frac{d\mathbf{K}_2}{dt}\right)_{Z2} + \frac{L_{Z1} - L_{X2} \sin \beta}{\cos \beta} - M_{2\text{ст}Z2} = \\ &= \left(\frac{d\mathbf{K}_2}{dt}\right)_{Z2} + \frac{1}{\cos \beta} \left[\left(\frac{d\mathbf{K}_1}{dt}\right)_{Z1} + R - M_{1\text{ст}Z1} \right] + \\ &+ \text{tg} \beta \left[\left(\frac{d\mathbf{K}_2}{dt}\right)_{X2} - N - M_{2\text{ст}X2} \right] - M_{2\text{ст}Z2} = \\ &= \left(\frac{d\mathbf{K}_2}{dt}\right)_{Z2} + \text{tg} \beta \left(\frac{d\mathbf{K}_2}{dt}\right)_{X2} + \frac{1}{\cos \beta} \left(\frac{d\mathbf{K}_1}{dt}\right)_{Z1} + \\ &+ \frac{R - N \cdot \sin \beta - M_{1\text{ст}Z1} - M_{2\text{ст}X2} \sin \beta}{\cos \beta} - M_{2\text{ст}Z2}, \end{aligned}$$

а з четвертого рівняння (2.35) – момент

$$\begin{aligned}
R_{X1} &= -\left(\frac{d\mathbf{K}_1}{dt}\right)_{X1} + L_{X1} + M_{1crX1} = -\left(\frac{d\mathbf{K}_1}{dt}\right)_{X1} + \frac{L_{X2} - L_{Z1} \sin \beta}{\cos \beta} + M_{1crX1} = \\
&= -\left(\frac{d\mathbf{K}_1}{dt}\right)_{X1} - \frac{1}{\cos \beta} \left(\frac{d\mathbf{K}_2}{dt}\right)_{X2} - \operatorname{tg} \beta \left[\left(\frac{d\mathbf{K}_1}{dt}\right)_{Z1}\right] + \\
&\quad + \frac{N - R \sin \beta + M_{2crX2} + M_{1crZ1} \sin \beta}{\cos \beta} + M_{1cmX1}.
\end{aligned}$$

Конкретизуємо величини моментів сил реакцій для випадку нерухомої основи, коли проекції кутових швидкостей визначаються виразами (2.31), і немає сторонніх моментів, за винятком $M_{ctZ1} = M_{ct}$. За цих умов матимемо:

$$\begin{aligned}
L_{X2} &= N - J_{2X} \ddot{\alpha}; & N_{Y2} &= L; \\
R_{Y1} &= L - J_{1Y} \ddot{\beta} - (J_{1X} - J_{1Z}) \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta; \\
L_{Z1} &= R + J_{1Z} \ddot{\alpha} \sin \beta + (J_{1Z} + J_{1Y} - J_{1X}) \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \beta; \\
N_{Z2} &= \frac{R - N \sin \beta}{\cos \beta} + (J_{2X} + J_{1Z}) \ddot{\alpha} \operatorname{tg} \beta + (J_{1Z} + J_{1Y} - J_{1X}) \dot{\alpha} \dot{\beta} = \\
&= \frac{R - N \sin \beta}{\cos \beta} + J_1 \ddot{\alpha} \operatorname{tg} \beta + (J_3 - J_2) \dot{\alpha} \dot{\beta};
\end{aligned} \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned}
R_{X1} &= -\left(\frac{d\mathbf{K}_1}{dt}\right)_{X1} + \frac{L_{X2} - L_{Z1} \sin \beta}{\cos \beta} + M_{1crX1} = \\
&= \frac{N - R \sin \beta - J_1 \ddot{\alpha}}{\cos \beta} + (J_{1X} - J_{1Z}) \frac{d}{dt} (\dot{\alpha} \cos \beta).
\end{aligned}$$

У випадку нерухомої основи рівняння ГКП, що впливають з рівнянь (2.39) – (2.41), набувають вигляду:

$$\left\{ \begin{aligned}
(J_1 + J_2 \cos^2 \beta) \ddot{\alpha} - 2J_2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \cos \beta + H \dot{\beta} \cos \beta &= N - R \sin \beta \\
J_3 \ddot{\beta} + J_2 \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta - H \dot{\alpha} \cos \beta &= L \\
\frac{dH}{dt} &= R + M_{ct}
\end{aligned} \right. \tag{2.43}$$

Відмінність цієї системи рівнянь від рівнянь (2.33) лише у наявності в третьому рівнянні моменту сторонніх сил.

2.5. Наближені рівняння триступневих гіроскопів і методи їх складання

Розглядаючи складені рівняння руху триступневих гіроскопів різних видів можна дійти висновку, що ці рівняння становлять систему нелінійних диференціальних рівнянь, розв'язування яких у загальному випадку неможливе. Природно, виникає потреба так перетворити ці рівняння, хоча б за через їх заміну їх на наближені, щоб одержати сукупність рівнянь, яка, з одного боку, забезпечила б якісне і кількісне зберігання основних особливостей досліджуваного руху

гіроскопу, а з іншого, дозволяла б теоретично дослідити цей рух. У випадку триступеневого гіроскопу це можливо.

Рівняння (2.21), (2.24), (2.33) і (2.43) триступневих гіроскопів мають єдину структуру. Праві частини містять моменти зовнішніх сил, що діють на гіроскоп. У лівих частинах зосереджені члени, що характеризують інерційні властивості гіроскопа і можуть бути кваліфіковані як моменти сил інерції. Ці моменти сил інерції, як випливає з розгляду рівнянь, можна розділити на три групи:

- *моменти сил інерції обертового прискорення* – це члени рівнянь, які пропорційні кутовим прискоренням; наприклад, в рівняннях (2.43) до них відносяться члени $(J_1 + J_2 \cos^2 \beta)\ddot{\alpha}$, $J_3\ddot{\beta}$;

- *гіроскопічні моменти* або моменти сил інерції коріолісова прискорення – це члени, пропорційні першому степеню кутової швидкості гіроскопа, причому як коефіцієнт пропорційності є власний кінетичний момент гіроскопа H ; до них належать члени $H\dot{\beta} \cos \beta$, $-H\dot{\alpha} \cos \beta$;

- *відцентрові моменти сил інерції* або моменти сил інерції доосьового прискорення – це члени, пропорційні другому степеню кутової швидкості; такими є члени $-2J_2\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta \cos \beta$, $J_2\dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta$.

Щоб оцінити можливості нехтування деякими членами рівняння, що складають моменти сил інерції гіроскопа, припустимо, що моменти зовнішніх сил змінюються з часом за гармонічним законом з частотою ω , внаслідок чого гіроскоп здійснює коливання, близькі до гармонічних з такою самою частотою, тобто кутові швидкості гіроскопа можна наближено описати залежностями:

$$\dot{\alpha} = a \sin(\omega t + \varepsilon); \quad \dot{\beta} = b \sin(\omega t + \varphi).$$

Тоді амплітуда змінювання моментів сил інерції обертового прискорення буде величиною порядку $J\omega a$, відцентрових моментів сил інерції – порядку $J a^2$, а гіроскопічних моментів – порядку $J\Omega a$, де Ω – кутова швидкість власного обертання гіроскопа. Порівнюючи ці амплітуди, можна зробити наступні висновки.

Якщо амплітуда змінювання кутової швидкості вимушених коливань гіроскопа a набагато менша за кутову швидкість Ω його власного обертання, то амплітуда змінювання відцентрових моментів сил інерції буде набагато меншою від амплітуди змінювання гіроскопічних моментів, і тому відцентровими моментами сил інерції можна нехтувати порівняно з гіроскопічними моментами. Рівняння, які впливають з повних рівнянь у результаті такого нехтування:

$$\begin{cases} (J_1 + J_2 \cos^2 \beta)\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} \cos \beta = N - R \sin \beta; \\ J_3\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} \cos \beta = L; \\ \frac{dH}{dt} = R + M_{cm} \end{cases}$$

називають *спрощеними рівняннями руху гіроскопа*.

Як бачимо, спрощені рівняння значно простіші за повні рівняння, але їх інтегрування у загальному вигляді також становить нерозв'язну задачу. Бажано звести їх до лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами, те-

орія розв'язання яких достатньо розроблена. У прикладній теорії гіроскопів використовують ту обставину, що триступеневий гіроскоп має підвищену опірність до зовнішніх збурень, зберігає з великою точністю положення своєї осі власного обертання у просторі, тобто кути повороту цієї осі гіроскопа у просторі мало змінюються з часом. Це дає підґрунтя замінити значення таких кутів під знаками тригонометричних функцій в рівняннях руху на постійні величини, що дорівнюють деяким середнім за розглядуваний проміжок часу значенням відповідних кутів. Така операція подальшого спрощення рівнянь називається *лінеаризацією*, а одержані внаслідок її рівняння – *лінеаризованими (технічними) рівняннями руху гіроскопа*. Для розглядуваних рівнянь руху ГКП вони мають вигляд:

$$\begin{cases} (J_1 + J_2 \cos^2 \beta_{cp}) \ddot{\alpha} + (H \cos \beta_{cp}) \dot{\beta} = N - R \sin \beta_{cp} \\ J_3 \ddot{\beta} - (H \cos \beta_{cp}) \dot{\alpha} = L \\ \frac{dH}{dt} = R + M_{ct} \end{cases} \quad (2.44)$$

Рівняння (2.44) відрізняються від спрощених рівнянь тим, що у тригонометричних функціях змінна величина β замінена на постійну величину β_{cp} , яка має зміст середнього значення куту β за термін розглядання руху. За умови, що кутова швидкість власного обертання гіроскопа технічними засобами підтримується постійною з великою точністю, власний кінетичний момент гіроскопа теж можна вважати постійною величиною і записати технічні рівняння гіроскопа у вигляді

$$\begin{cases} (J_1 + J_2 \cos^2 \beta_{cp}) \ddot{\alpha} + (H_0 \cos \beta_{cp}) \dot{\beta} = N - R \sin \beta_{cp} \\ J_3 \ddot{\beta} - (H_0 \cos \beta_{cp}) \dot{\alpha} = L \end{cases} \quad (2.45)$$

які вже є рівняннями з постійними коефіцієнтами і тому допускають загальне розв'язування у багатьох випадках зовнішніх збурень.

Порівнюючи величини моментів сил інерції можна помітити, що амплітуда змінювання моменту сил інерції обертового прискорення також може бути набагато меншою за амплітуду змінювання гіроскопічного моменту *за умови, що колова частота ω змінювання зовнішніх збурень набагато менша кутової швидкості Ω власного обертання гіроскопа*. У цьому випадку можна нехтувати й моментами сил інерції обертового прискорення. В результаті виходять рівняння вигляду

$$\begin{cases} H \dot{\beta} \cos \beta = N - R \sin \beta \\ - H \dot{\alpha} \cos \beta = L \\ \frac{dH}{dt} = R + M_{ct} \end{cases} \quad (2.46)$$

які називають *прецесійними* або *скороченими* рівняннями руху гіроскопа.

Умову припустимості застосування прецесійних рівнянь гіроскопа

$$\omega \ll \Omega$$

називають умовою низькочастотності збурень. При цьому межею, що відділяє низькочастотні збурення від високочастотних є колова частот власного обертання ротора гіроскопа. Наприклад, якщо частота власного обертання ротора гіроскопа становить 200 обертів у секунду, то такою межею є частота 200 Гц. Отже, якщо моментні збурення, що діють на гіроскоп, змінюються з частотами, що не перевищують 20 Гц, то можна користуватися для вивчення руху гіроскопа прецесійними рівняннями. Якщо ж частоти збурень порівнянні чи перевищують 200 Гц, прецесійними рівняннями користуватися не можна. Слід використовувати технічні рівняння.

2.5.1. Способи безпосереднього складання прецесійних рівнянь

Якщо заздалегідь відомо, що потрібно дослідити рух гіроскопа саме за низькочастотних збурень, нема сенсу отримувати прецесійні рівняння раніше вказаним шляхом. Значно простіше й ефективніше їх знаходити безпосередньо, не складаючи повних рівнянь. Для цього можна застосовувати як закон моментів, так і формалізм Лагранжа.

Щоб за допомогою закону моментів одразу отримати прецесійні рівняння гіроскопа необхідно і достатньо у виразі закону моментів замінити вектор повного кінетичного моменту \mathbf{K}_O^ω на вектор \mathbf{H} власного кінетичного моменту гіроскопа, якій напрямлений вздовж головної осі гіроскопа, наприклад, замість рівняння (1.100) використовувати таку наближену форму закону моментів:

$$\frac{\tilde{d}_P \mathbf{H}}{dt} + \boldsymbol{\omega}^P \times \mathbf{H} = \mathbf{M}_O - m \mathbf{p}_C \times \mathbf{w}_O.$$

Зручніше у цьому випадку обрати у якості рухомої системи координат P систему осей Резаля, одна з осей якої збігається з головною віссю гіроскопа. Позначаючи абсолютну кутову швидкість осей Резаля через $\boldsymbol{\omega}'$ ($\boldsymbol{\omega}^P = \boldsymbol{\omega}'$) і вважаючи головною віссю гіроскопа вісь z , матимемо

$$H_x = H_y \equiv 0; \quad H_z = H.$$

Тому скалярні рівняння в проекціях на осі Резаля виглядатимуть так:

$$\begin{cases} H\omega_y = M_{Ox} - m(y_C w_{Oz} - z_C w_{Oy}) \\ -H\omega_x = M_{Oy} - m(z_C w_{Ox} - x_C w_{Oz}) \\ \frac{dH}{dt} = M_{Oz} - m(x_C w_{Oy} - y_C w_{Ox}) \end{cases} \quad (2.47)$$

Тут враховано, що екваторіальні складові кутових швидкостей гіроскопа і осей Резаля є завжди однаковими, тобто $\omega_x = \omega'_x$, $\omega_y = \omega'_y$.

Щоб за допомогою формалізму Лагранжа одержати прецесійні рівняння гіроскопа необхідно і достатньо у виразі кінетичної енергії гіроскопа залишити лише ту її частину, яка визначається власним обертанням ротора гіроскопа, тобто використовувати наближений вираз кінетичної енергії

$$T = \frac{H^2}{2J}. \quad (2.48)$$

2.5.2. Опорні системи координат. Визначення положення основи

Для характеристики точності гіроприладів, призначених для автономного визначення орієнтації рухомих об'єктів відносно Землі, зручно використовувати як базову не інерціальну систему координат, а земні *опорні* системи координат, певним чином орієнтовані відносно поверхні Землі. Серед таких систем розрізняють *географічну*, *траєкторну* і *ортодромічну* системи координат.

Надалі вважатимемо початок земних опорних систем координат у кожний момент часу суміщеним з центром підвісу A досліджуваного гіроприладу. Положення точки A на поверхні Землі називатимемо «місцем» об'єкту (рис. 2.10).

Воно повністю визначається завданням двох кутів – довготи λ між площинами меридіана місця і гринвіцького меридіану та широти ϕ_Γ між лінією, що з'єднує точку A з центром Землі (вертикаллю місця) і площиною екватора (рис. 2.10). Одну з координатних осей опорних систем координат направляють уздовж вертикалі місця в зеніт. Позначатимемо цю вісь через η . Опорні системи координат розрізняються лише орієнтацією відносно поверхні Землі її горизонтальних координатних осей.

В географічній системі координат одну з горизонтальних координатних осей (ξ) направляють у площині місцевого меридіана на північ. Третя вісь ζ при цьому буде напрямлена вздовж дотичної до паралелі на схід (рис. 2.10).

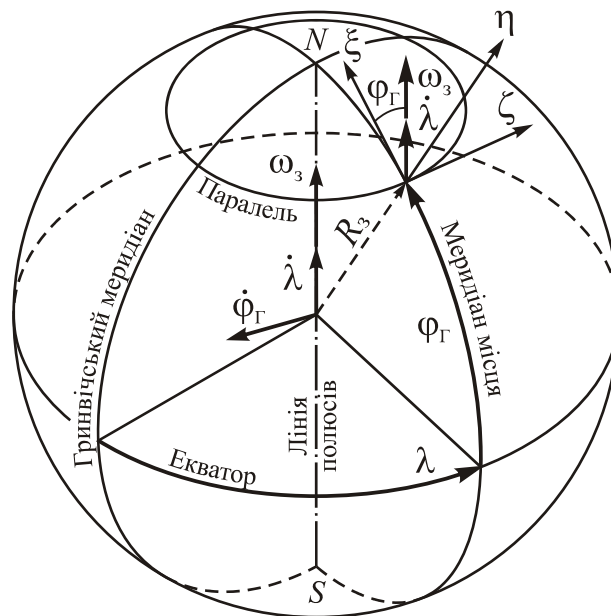


Рис. 2.10. Географічна система координат

Положення географічної системи координат в інерціальному просторі визначається, по-перше, поворотом Землі в інерціальному просторі з кутовою швидкістю ω_3 , напрямленою уздовж лінії полюсів, а по-друге, – переміщенням об'єкта (точка A) відносно Землі (з кутовими швидкостями $\dot{\lambda}$, напрямленою

також вздовж лінії полюсів, і $\dot{\phi}_\Gamma$, яка збігається з віссю ζ і напрямлена у протилежний їй бік).

Проекції кутової швидкості \mathbf{u}^Γ географічної системи координат в інерціальному просторі дорівнюють (див. рис. 2.10):

$$u_\xi^\Gamma = (\omega_3 + \dot{\lambda}) \cos \varphi_\Gamma; \quad u_\eta^\Gamma = (\omega_3 + \dot{\lambda}) \sin \varphi_\Gamma; \quad u_\zeta^\Gamma = -\dot{\phi}_\Gamma.$$

Нехай об'єкт (точка A) рухається по поверхні Землі так, що не має вертикальної складової швидкості, тобто вектор \mathbf{V} його лінійної швидкості завжди лежить у площині горизонту.

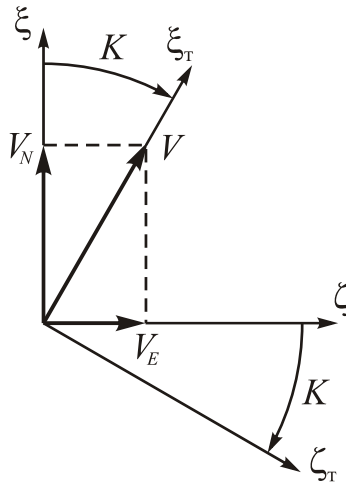


Рис. 2.11. Швидкість об'єкта у горизонтальній площині

Кутом курсу K (рис. 2.11) називатимемо кут між горизонтальним напрямком на північ і вектором \mathbf{V} лінійної швидкості об'єкта відносно поверхні Землі.

Розкладемо вектор швидкості \mathbf{V} на північну V_N і східну V_E складові (див. рис. 2.11). Отримаємо

$$V_N = V \cos K; \quad V_E = V \sin K.$$

Північна складова швидкості спричиняє, як це очевидно з рис. 2.10, змінювання широти місця і пов'язана зі швидкістю цього змінювання співвідношенням:

$$\dot{\phi}_\Gamma = \frac{V_N}{R_3} = \frac{V \cos K}{R_3}, \tag{2.49}$$

де R_3 – радіус Землі.

Східна складова швидкості спричиняє рух об'єкта по паралелі, тобто змінювання кута довготи місця. Швидкість змінювання довготи $\dot{\lambda}$ пов'язана зі східною складовою швидкості об'єкта рівністю:

$$\dot{\lambda} = \frac{V_E}{R_3 \cos \varphi_\Gamma} = \frac{V \sin K}{R_3 \cos \varphi_\Gamma}. \tag{2.50}$$

Із врахуванням співвідношень (2.49) і (2.50) проекції кутової швидкості \mathbf{u}^Γ повороту географічної системи координат на її осі можна подати у вигляді:

$$u_{\xi}^{\Gamma} = \omega_3 \cos \varphi_{\Gamma} + \frac{V}{R_3} \sin K; \quad u_{\eta}^{\Gamma} = \omega_3 \sin \varphi_{\Gamma} + \frac{V}{R_3} \sin K \operatorname{tg} \varphi_{\Gamma}; \quad u_{\zeta}^{\Gamma} = -\frac{V \cos K}{R_3}. \quad (2.51)$$

Уводячи абсолютні швидкості точки A

$$V_{a\xi} = V_{aN} = V_N = V \cos K; \quad V_{a\eta} = 0;$$

$$V_{a\zeta} = V_{aE} = V_E + \omega_3 R_3 \cos \varphi_{\Gamma} = V \sin K + \omega_3 R_3 \cos \varphi_{\Gamma},$$

можна подати проекції кутової швидкості географічної системи координат ще й у такому вигляді:

$$u_{\xi}^{\Gamma} = \frac{V_{aE}}{R_3}; \quad u_{\eta}^{\Gamma} = \frac{V_{aE}}{R_3} \operatorname{tg} \varphi_{\Gamma}; \quad u_{\zeta}^{\Gamma} = -\frac{V_{aN}}{R_3}. \quad (2.52)$$

2.5.3. Прецесійні рівняння гіроскопа у кардановому підвісі на рухомій основі

Дослідження триступеневого астатичного ГКП, встановленого на основі (об'єкті), яка здійснює заданий кутовий рух у просторі, становить практичний інтерес. При цьому передусім потрібно вирішити питання: які кутові координати необхідно використовувати як «вихідні» для гіроскопа.

У випадку нерухомої основи такими кутовими координатами є відносні кутові повороти рамок підвісу. Вони суміщають дві функції. З одного боку, вони є «фізичним виходом» приладу, тобто тими фізичними величинами, які реально і безпосередньо можуть бути виміряні шляхом, наприклад, встановлення датчиків кутів по осях підвісу. А з іншого боку, ці ж кутові координати характеризують і динамічну точність гіроскопа, оскільки несуть безпосередню інформацію про точність зберігання гіроскопом незмінного напрямку в інерціальному просторі.

У випадку довільного кутового руху основи положення змінюється. Перша функція відносних кутових координат α і β – являти собою «фізичний вихід» приладу – зберігається. Більш того, вона у цьому разі набуває більш глибокого змісту, оскільки, через вимірювання відносних кутових координат, одержують необхідну інформацію про кутове положення основи у просторі.

Що ж стосується другої функції – характеризувати динамічну точність гіроскопа – цю функцію відносні кутові координати α і β втрачають. Окрім «корисної» у цьому сенсі інформації у вигляді відхилень головної осі гіроскопа від заданого напрямку у просторі відносні повороти рамок підвісу у цьому випадку містять неабияку частку «шуму», який визначається кутами повороту основи у просторі.

Для дослідження динамічної точності зручніше ввести у розгляд спеціальні кутові координати, які описували б положення гіроскопа у тій системі координат (опорній), у якій положення головної осі гіроскопа має бути незмінним за призначенням приладу. Назвемо такі координати *опорними кутовими координатами гіроскопа*. Вони характеризуватимуть похибки виконання головної функції гіроприладу – зберігати напрямок головної осі незмінним в опорній системі координат.

Отже, для аналізу динамічної точності ГКП на рухомій основі потрібно скласти і досліджувати рівняння руху в опорних кутових координатах. За визначенням і за способом визначення ці координати мають такі корисні для теоретичного дослідження властивості:

- не залежать від кутового руху основи;
- є малими протягом усього терміну руху.

Останнє дозволяє використовувати лінеаризовані рівняння руху гіроскопа за довільних кутових рухів основи і користуватися наближеними методами пошуку розв'язків диференціальних рівнянь руху (збурень, послідовних наближень, малого параметра тощо).

Будемо припускати, що ГКП призначений для того, щоб його головна вісь зберігала незмінним своє положення в опорній системі координат $\xi\eta\zeta$, яке збігається з віссю ζ цієї системи. У цьому випадку зручно визначати положення головної осі z_1 безпосередньо в опорній системі за допомогою опорних кутових координат α° і β° (рис. 2.12).

Оскільки в разі довільного кутового руху основи система координат $x_1y_1z_1$, пов'язана з внутрішньою рамкою, може займати довільне кутове положення в опорній системі, а її вісь z_1 збігається з головною віссю гіроскопа, для визначення кутового положення внутрішньої рамки потрібно ввести кут γ° додаткового повороту навколо головної осі (рис. 2.12). Цей кут визначатиметься поворотами основи навколо головної осі гіроскопа.

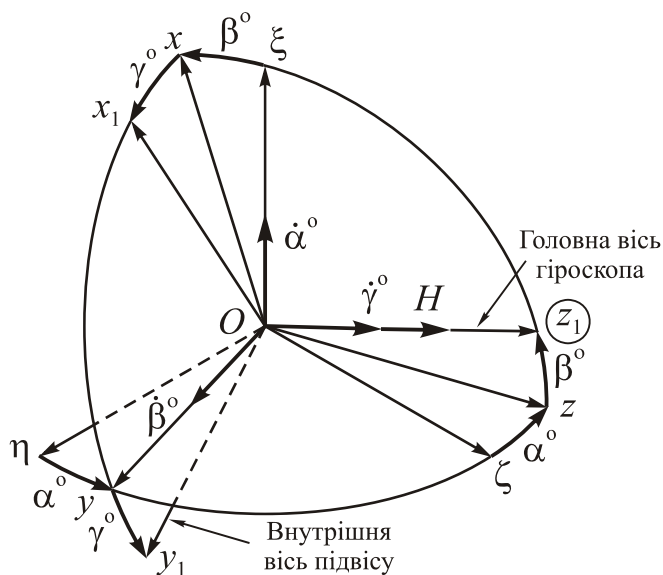


Рис. 2.12. Опорні кутові координати ГКП

Складемо прецесійні рівняння руху ГКП в опорних кутових координатах. Для цього скористаємося рівняннями (2.47), у яких відкинемо останні члени внаслідок того, що гіроскоп вважається астатичним (зрівноваженим):

$$\begin{cases} H\omega'_Y = M_{OX} \\ -H\omega'_X = M_{OY} \\ \frac{dH}{dt} = M_{OZ} \end{cases} \quad (2.53)$$

Тут ω' – вектор абсолютної кутової швидкості системи осей Резаля $xуz$ (рис. 2.12). Він складається з абсолютної кутової швидкості \mathbf{u} опорної системи координат і кутових швидкостей $\dot{\alpha}^o$ і $\dot{\beta}^o$ повороту осей Резаля відносно опорної системи:

$$\omega' = \mathbf{u} + \dot{\alpha}^o + \dot{\beta}^o. \quad (2.54)$$

Кутову швидкість \mathbf{u} опорної системи координат будемо вважати відомою своїми проекціями u_ξ , u_η і u_ζ на осі опорної системи. Знаходячи проєкції кутової швидкості (2.54), отримаємо замість рівнянь (2.53):

$$\begin{cases} H[\dot{\beta}^o + u_\eta \cos \alpha^o + u_\zeta \sin \alpha^o] = M_{OX1} \cos \gamma^o - M_{OY1} \sin \gamma^o \\ -H[(\dot{\alpha}^o + u_\xi) \cos \beta^o - (u_\zeta \cos \alpha^o - u_\eta \sin \alpha^o) \sin \beta^o] = M_{OY1} \cos \gamma^o + M_{OX1} \sin \gamma^o \\ \frac{dH}{dt} = M_{OZ} \end{cases}$$

Аналогічно можна скласти прецесійні рівняння у відносних кутових координатах. Для цього можуть прислужитися ті самі рівняння (2.47), якщо як рухому систему координат обрати систему осей $x_1y_1z_1$, жорстко пов'язану з внутрішньою рамкою. У цьому випадку ці рівняння набувають вигляду:

$$\begin{cases} H\omega_{1Y1} = M_{OX1} \\ -H\omega_{1X1} = M_{OY1} \\ \frac{dH}{dt} = M_{OZ} \end{cases} \quad (2.55)$$

Абсолютна кутова швидкість внутрішньої рамки ω_1 у цьому випадку складається з абсолютної кутової швидкості \mathbf{u}^c системи координат $x_c y_c z_c$, жорстко пов'язаної з основою, і кутових швидкостей $\dot{\alpha}$ і $\dot{\beta}$ повороту рамки відносно основи:

$$\omega_1 = \mathbf{u}^c + \dot{\alpha} + \dot{\beta}.$$

Вважатимемо, що \mathbf{u}^c задано своїми проєкціями $u_{x_c}^c$, $u_{y_c}^c$ і $u_{z_c}^c$ на осі $x_c y_c z_c$ системи координат, пов'язаної з основою. При цьому вісь x_c будемо вважати напрямленою вздовж зовнішньої осі підвісу гіроскопа (рис. 2.13).

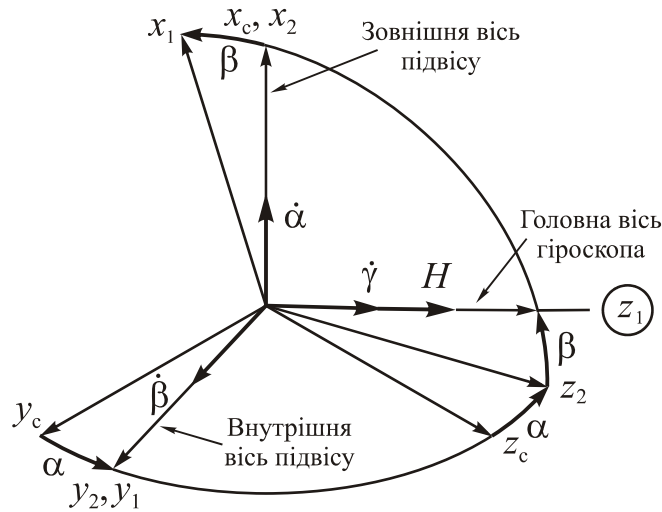


Рис. 2.13. Відносні кутові координати ГКП

Знаходячи проекції ω_1 на осі x_1 і y_1 , конкретизуємо рівняння (2.55):

$$\begin{cases} H[\dot{\beta} + u_{Yc}^c \cos \alpha + u_{Zc}^c \sin \alpha] = M_{OX1} \\ -H[(\dot{\alpha} + u_{Xc}^c) \cos \beta - (u_{Zc}^c \cos \alpha - u_{Yc}^c \sin \alpha) \sin \beta] = M_{OY1} \\ \frac{dH}{dt} = M_{OZ} \end{cases} \quad (2.56)$$

Щоб виразити складові моментів зовнішніх сил M_{OX1} , M_{OY1} і M_{OZ} через задані моменти сил по осях підвісу N , L , R і M_{cm} , порівняємо рівняння (2.56) при $u^c \equiv 0$ з рівняннями (2.46) прецесійного руху ГКП на нерухомій основі, одержаними раніше. З порівняння випливає

$$M_{OX1} = \frac{N - R \sin \beta}{\cos \beta}; \quad M_{OY1} = L; \quad M_{OZ} = R + M_{cm}.$$

Тепер можна записати у кінцевому підсумку:

1) прецесійні рівняння ГКП у відносних кутових координатах

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = -u_{Xc}^c + (u_{Zc}^c \cos \alpha - u_{Yc}^c \sin \alpha) \operatorname{tg} \beta - \frac{L}{H \cos \beta} \\ \frac{d\beta}{dt} = -(u_{Yc}^c \cos \alpha + u_{Zc}^c \sin \alpha) + \frac{N - R \sin \beta}{H \cos \beta} \\ \frac{dH}{dt} = R + M_{cm} \end{cases} \quad (2.57)$$

2) прецесійні рівняння ГКП в опорних кутових координатах

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\alpha^o}{dt} = -u_\xi + (u_\zeta \cos \alpha^o - u_\eta \sin \alpha^o) \operatorname{tg} \beta^o - \frac{L}{H \cos \beta^o} \cos \gamma^o - \frac{N - R \sin \beta}{H \cos \beta^o \cos \beta} \sin \gamma^o \\ \frac{d\beta^o}{dt} = -(u_\eta \cos \alpha^o + u_\zeta \sin \alpha^o) + \frac{N - R \sin \beta}{H \cos \beta} \cos \gamma^o - \frac{L}{H} \sin \gamma^o \\ \frac{dH}{dt} = R + M_{cm} \end{array} \right. \quad (2.58)$$

2.5.4. Гіромаятник на рухомій основі

Гіромаятником називають триступеневий гіроприлад, призначений для того, щоб його головна вісь постійно збігалася з вертикаллю місця, і центр мас якого зміщений відносно точки підвісу вздовж головної осі гіроскопа. Схему гіромаятника показано на рис. 2.14.

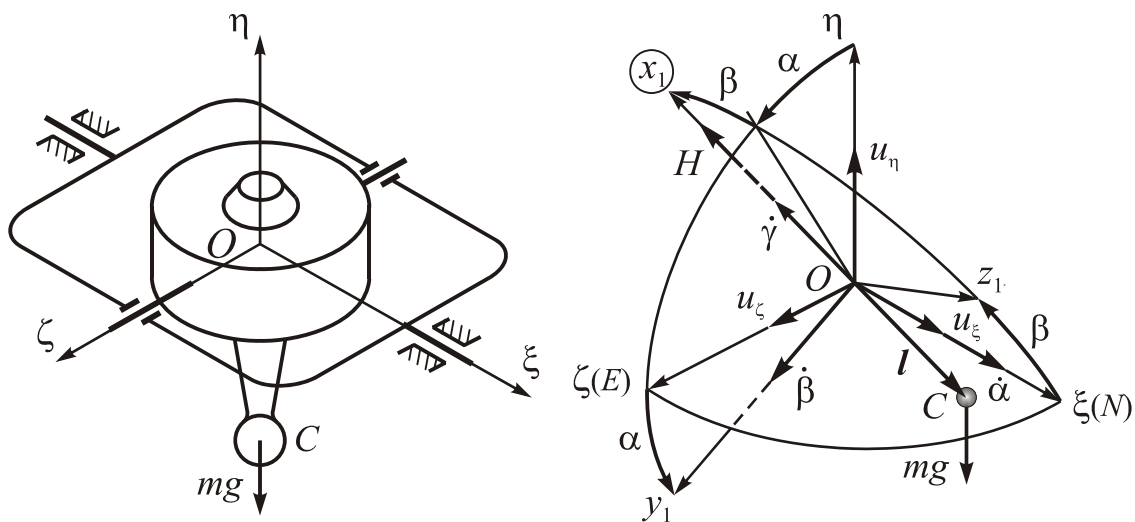


Рис. 2.14. Кінематика поворотів гіромаятника

Розглянемо географічну систему координат $\xi\eta\zeta$, вісь ξ якої напрямлено по перетину площин горизонту і місцевого меридіана, вісь η – уздовж вертикалі місця, а ось ζ – на схід по дотичній до паралелі. Як узагальнені координати зручно обрати опорні кутові координати α і β (рис. 2.14) відхилення головної осі y_1 від вертикалі. Кут α характеризує відхилення у вертикальній площині «схід-захід», а кут β – у площині «південь-північ». У цьому разі узагальнені координати будуть одночасно являти собою *похибки* гіромаятника як приладу.

Складемо прецесійні рівняння гіромаятника за допомогою формалізму Лагранжа-Жильбера. Кінетичну енергію гіромаятника у цьому випадку слід відшукувати у формі (2.48):

$$T = \frac{H^2}{2J},$$

де

$$H = J\omega_{x1} = J(\mathbf{u} + \dot{\alpha} + \dot{\beta} + \dot{\gamma})_{x1} = J[\dot{\gamma} - (\dot{\alpha} + u_{\xi}) \sin \beta + (u_{\eta} \cos \alpha + u_{\zeta} \sin \alpha) \cos \beta].$$

Потенціальна енергія гіромаятника, обумовлена незбігом центра мас C і точки підвісу O , може бути подана у такий спосіб (див. (1.103) та рис. 2.14):

$$\begin{aligned} \Pi &= m[(\mathbf{w} - \mathbf{g}) \cdot \mathbf{l}] = m[w_{\xi} l_{\xi} + (g + w_{\eta}) l_{\eta} + w_{\zeta} l_{\zeta}] = \\ &= -mgl(\cos \alpha \cos \beta + \frac{w_{\zeta}}{g} \sin \alpha \cos \beta - \frac{w_{\xi}}{g} \sin \beta). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Тут припущено, що точка підвісу гіромаятника рухається суто у площині горизонту.

Виконуючи операції згідно з формалізмом Лагранжа, дістанемо такі прецесійні рівняння гіромаятника:

– з координати α :

$$-H\dot{\beta} \cos \beta - H(u_{\zeta} \cos \alpha - u_{\eta} \sin \alpha) \cos \beta + mgl(\sin \alpha - \frac{w_{\zeta}}{g} \cos \alpha) \cos \beta = M_{\xi}$$

– з координати β :

$$\begin{aligned} &H[(\dot{\alpha} + u_{\xi}) \cos \beta + (u_{\eta} \cos \alpha + u_{\zeta} \sin \alpha) \sin \beta] + \\ &+ mgl(\cos \alpha \sin \beta + \frac{w_{\xi}}{g} \cos \beta + \frac{w_{\zeta}}{g} \sin \alpha \sin \beta) = M_{Y1}. \end{aligned}$$

Вважаючи кути α і β відхилення головної осі гіромаятника від вертикалі малими, а також малими кутові швидкості опорної (географічної) системи координат і віброперевантаження ($\frac{w_{\xi}}{g}$ і $\frac{w_{\zeta}}{g}$), і обмежуючись утриманням членів рівняння не вище за перший порядок мализни, зведемо рівняння до такої форми:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} + (\frac{mgl}{H} + u_{\eta})\beta = -u_{\xi} - \frac{mgl}{H} \frac{w_{\xi}}{g} + \frac{M_{Y1}}{H} \\ \dot{\beta} - (\frac{mgl}{H} + u_{\eta})\alpha = -u_{\zeta} - \frac{mgl}{H} \frac{w_{\zeta}}{g} - \frac{M_{\xi}}{H} \end{cases}. \quad (2.60)$$

Позначимо

$$\omega'_0 = \frac{mgl}{H} + u_{\eta}; \quad \omega_0 = \frac{mgl}{H}. \quad (2.61)$$

Урахуємо, що якщо нехтувати доосьовими прискореннями, спричиненими обертанням Землі та коріолісовими прискореннями внаслідок переміщення об'єкта по Землі, то проекції прискорень будуть пов'язані з відповідними складовими абсолютної швидкості об'єкта співвідношеннями:

$$w_{\xi} = \frac{dV_{aN}}{dt}; \quad w_{\zeta} = \frac{dV_{aE}}{dt}.$$

З врахуванням (2.52) остаточно прецесійні рівняння гіромаятника можна подати у вигляді:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} + \omega'_0 \beta = -\frac{V_{aE}}{R_3} - \omega_0 \frac{\dot{V}_{aN}}{g} + \frac{M_{Y1}}{H} \\ \dot{\beta} - \omega'_0 \alpha = \frac{V_{aN}}{R_3} - \omega_0 \frac{\dot{V}_{aE}}{g} - \frac{M_{\xi}}{H} \end{cases} \quad (2.62)$$

2.5.5. Маятниковий гірокомпас на рухомій основі

Гіроскопічні компаси - це гіроскопічні прилади, призначені для визначення точного напрямку на північний географічний полюс. У більшості з них це досягається тим, що головна вісь гіроскопа завдяки тій чи іншій властивості гіроприладу постійно витримує горизонтальний напрямок у площині місцевого меридіана. У маятниковому гірокомпасі, побудованому на застосуванні триступеневого гіроскопа, ця властивість забезпечується тим, що головна вісь гіроскопа утримується у горизонтальному положенні завдяки зміщенню центра мас відносно точки підвісу униз.

Розглянемо кінематику маятникового гірокомпаса (рис. 2. 15).

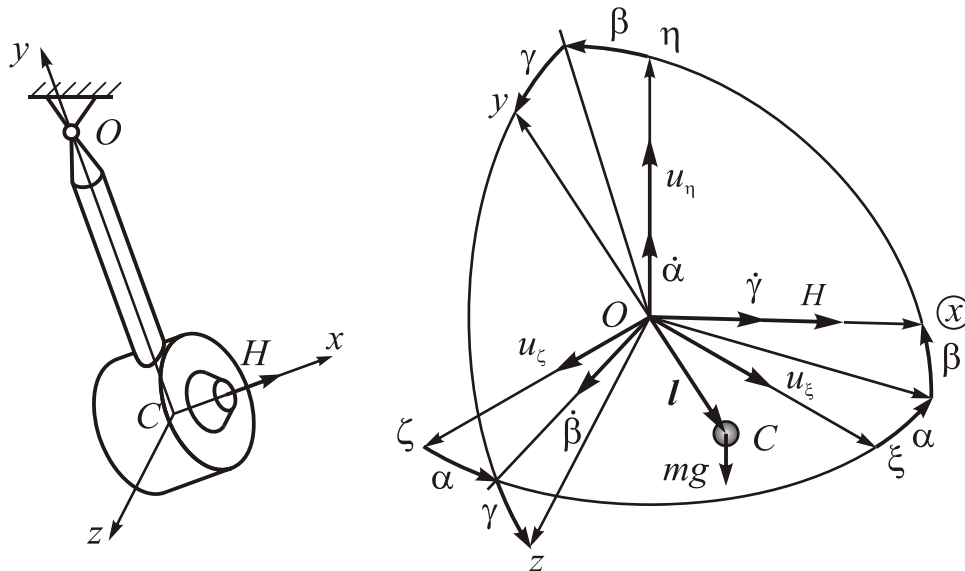


Рис. 2.15. Кінематика поворотів маятникового гірокомпаса

Нехай $\xi\eta\zeta$ – опорна географічна система координат, орієнтована так, як це було вказано у п. 2.5.2. Положення головної осі x гіроскопа визначимо двома опорними кутовими координатами α і β (див. рис. 2.15). Координата α характеризує відхилення головної осі від площини меридіану, а β – від площини горизонту. Припускаючи, що чутливий елемент гірокомпаса (це ротор гіроскопа разом з кожухом, у якому його вмонтовано) з'єднаний з корпусом приладу за допомогою сферичного шарніра, введемо ще одну кутову координату γ , яка характеризуватиме поворот чутливого елемента гірокомпаса навколо його головної осі.

Окрім цих трьох кутових координат, які визначають положення корпуса чутливого елемента, слід увести ще четверту кутову координату, що характери-

зує власне обертання ротора навколо головної осі. Отже, як бачимо, розглядувана конструкція має чотири ступеня вільності. Задля спрощення вважатимемо, що кутова швидкість власного обертання ротора підтримується (за допомогою гіродвигуна) сталою з високою точністю, через що можна вважати власний кінетичний момент гіроскопа незмінною величиною $H = H_0 = \text{const}$ і тому можна не розглядати рівняння власного обертання.

Початок систем координат сумістимо з точкою підвісу O . Систему координат xuz зв'яжемо з корпусом чутливого елемента так, щоб вісь x збігалася з головною віссю гіроскопа, а вісь u направимо вздовж прямої, яка з'єднує точку підвісу з центром мас C чутливого елемента.

Прецесійні рівняння маятникового гірокомпаса складатимемо за умови нехтування динамічними властивостями чутливого елемента в його русі навколо головної осі. Це можливо у разі, коли прискорення точки підвісу змінюється з частотою, значно меншою за частоту коливань чутливого елемента як маятника навколо головної осі, і через це можна вважати, що вісь u чутливого елемента у кожний момент часу займає положення динамічної вертикалі. За цих умов кінетичну енергію гірокомпаса можна визначити за формулою (2.48):

$$T = \frac{H^2}{2J},$$

де

$$\begin{aligned} H &= J\omega_{x1} = J(\mathbf{u} + \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \dot{\boldsymbol{\beta}} + \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \dot{\boldsymbol{\gamma}}_p)_{x1} = \\ &= J[\dot{\boldsymbol{\gamma}} + \dot{\boldsymbol{\gamma}}_p + (\dot{\boldsymbol{\alpha}} + u_\eta)\sin\beta + (u_\xi \cos\alpha - u_\zeta \sin\alpha)\cos\beta]^2 \end{aligned}$$

а $\dot{\boldsymbol{\gamma}}_p$ є кутовою швидкістю власного обертання ротора гіроскопа відносно корпусу чутливого елемента.

Потенціальну енергію гірокомпаса, обумовлену незбігом центра мас C і точки підвісу O , виразимо, користуючись співвідношенням (1.103) та рис. 2.15:

$$\begin{aligned} \Pi &= m[(\mathbf{w} - \mathbf{g}) \cdot \mathbf{l}] = m[w_\xi l_\xi + (g + w_\eta)l_\eta + w_\zeta l_\zeta] = \\ &= -mgl[\cos\gamma \cos\beta + \frac{w_\zeta}{g}(\sin\gamma \cos\alpha + \cos\gamma \sin\alpha \sin\beta) + \\ &\quad + \frac{w_\xi}{g}(\sin\gamma \sin\alpha - \cos\gamma \cos\alpha \sin\beta)]. \end{aligned}$$

Рівняння Жільбера (1.102) дозволяють отримати три наступні рівняння

1) з координати α :

$$\begin{aligned} H\dot{\beta} \cos\beta + H(u_\zeta \cos\alpha + u_\xi \sin\alpha)\cos\beta - \\ - mgl[\frac{w_\zeta}{g}(-\sin\gamma \sin\alpha + \cos\gamma \cos\alpha \sin\beta) + \\ + \frac{w_\xi}{g}(\sin\gamma \cos\alpha + \cos\gamma \sin\alpha \sin\beta)] = M_\eta, \end{aligned}$$

2) з координати β

$$\begin{aligned}
& - H[(\dot{\alpha} + u_{\eta}) \cos \beta - (u_{\xi} \cos \alpha - u_{\zeta} \sin \alpha) \sin \beta] - mgl[-\cos \gamma \sin \beta + \\
& \quad + \frac{w_{\zeta}}{g} \cos \gamma \sin \alpha \cos \beta - \frac{w_{\xi}}{g} \cos \gamma \cos \alpha \cos \beta] = M_{z1}, \quad (2.63)
\end{aligned}$$

3) з координати γ

$$\begin{aligned}
& - mgl[-\sin \gamma \cos \beta + \frac{w_{\zeta}}{g} (\cos \gamma \cos \alpha - \sin \gamma \sin \alpha \sin \beta) + \\
& \quad + \frac{w_{\xi}}{g} (\cos \gamma \sin \alpha + \sin \gamma \cos \alpha \sin \beta)] = 0.
\end{aligned}$$

Перетворюючи ці рівняння із врахуванням мализни кутів, кутових швидкостей і прискорень і залишаючи члени рівнянь не вище за другий порядок мализни, матимемо:

$$\begin{aligned}
\dot{\beta} + u_{\xi} \alpha &= -u_{\zeta} + \frac{mgl}{H} \left(\frac{w_{\zeta}}{g} \beta + \frac{w_{\xi}}{g} \gamma \right) + \frac{M_{\eta}}{H}; \\
\dot{\alpha} - \left(\frac{mgl}{H} + u_{\xi} \right) \beta &= -u_{\eta} + \frac{mgl}{H} \frac{w_{\xi}}{g} - \frac{mgl}{H} \frac{w_{\zeta}}{g} \alpha - \frac{M_{z1}}{H}; \\
\gamma &= \frac{w_{\zeta}}{g}.
\end{aligned}$$

Якщо ж врахувати також вирази (2.51) проєкцій кутової швидкості географічної системи координат, то дістанемо остаточно такі рівняння:

$$\begin{aligned}
\dot{\beta} + \left(\omega_3 \cos \varphi_r + \frac{V}{R_3} \sin K \right) \alpha &= \frac{V}{R_3} \cos K + \frac{mgl}{H} \left(\frac{w_{\zeta}}{g} \beta + \frac{w_{\xi}}{g} \gamma \right) + \frac{M_{\eta}}{H}; \\
\dot{\alpha} - \left(\frac{mgl}{H} + \omega_3 \cos \varphi_r + \frac{V}{R_3} \sin K \right) \beta &= -\omega_3 \sin \varphi_r + \frac{V}{R_3} \sin K \cdot \operatorname{tg} \varphi_r + \\
& \quad + \frac{mgl}{H} \frac{w_{\xi}}{g} - \frac{mgl}{H} \frac{w_{\zeta}}{g} \alpha - \frac{M_{z1}}{H}; \quad (2.64) \\
\gamma &= \frac{w_{\zeta}}{g}.
\end{aligned}$$

2.6. Двоступеневий гіроскоп на обертовій основі

Двоступеневим називають гіроскоп, що має лише два ступеня вільності повороту відносно основи, на якій його встановлено. Окрім ступеня вільності, який забезпечує власне обертання ротора гіроскопа (навколо головної осі гіроскопа), такий гіроскоп має можливість повертатися навколо лише однієї осі (перпендикулярній головній), яку називатимемо *вимірною*, оскільки кут повороту гіроскопа відносно основи можна виміряти безпосередньо лише навколо цієї осі (рис. 2.16).

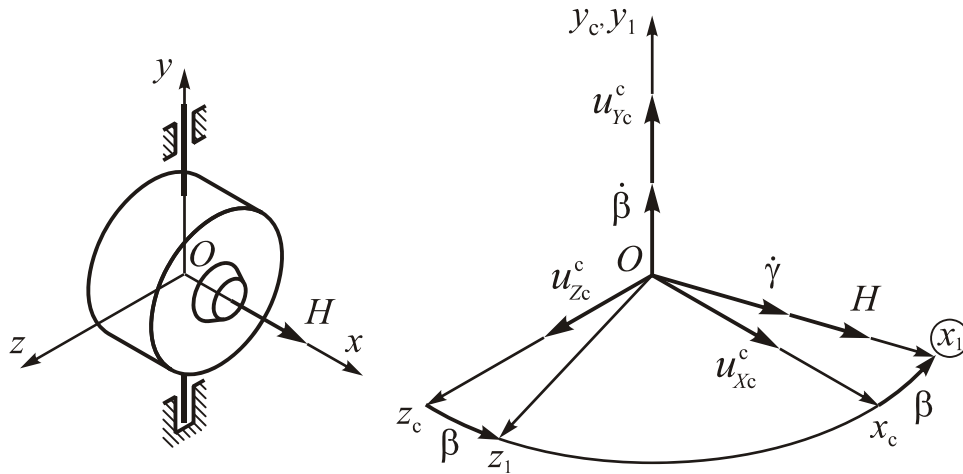


Рис. 2.16. Кінематика двоступеневого гіроскопа

Для теоретичного дослідження поведінки двоступеневого гіроскопа неможливо користуватися прецесійними (скороченими) рівняннями його руху. Слід обов'язково застосовувати повні рівняння.

Припустимо, що основа, на який встановлений гіроскоп, здійснює обертання в інерціальному просторі з кутовою швидкістю \mathbf{u}^c , заданою своїми проєкціями $u_{x_c}^c$, $u_{y_c}^c$ і $u_{z_c}^c$ на осі системи координат $x_c y_c z_c$.

Вважатимемо, що двоступеневий гіроскоп являє собою конструкцію з взаємопов'язаних двох тіл – ротора і рамки. Вимірнювальну вісь гіроскопа y_1 сумістимо з віссю y_c , а головною віссю гіроскопа вважатимемо вісь x_1 (див. рис. 2.16). Кут повороту рамки відносно основи позначимо через β .

Кінетична енергія T_Σ двоступеневого гіроскопа складається з кінетичних енергій рамки T_1 і ротора T :

$$T_\Sigma = T + T_1.$$

Гіроскоп припускаємо зрівноваженим – центри мас рамки і ротора збігаються з точкою підвісу O гіроскопа, ротор – динамічно симетричним тілом, вісь фігури якого збігається з головною віссю гіроскопа x_1 , а осі $x_1 y_1 z_1$, жорстко зв'язані з рамкою, – головними осями інерції для рамки. За таких умов потенціальну енергію можна вважати нульовою, а кінетична енергія дорівнюватиме

$$T_\Sigma = \frac{1}{2} \left[\frac{H^2}{J} + (J_e + J_{1Y}) \omega_{1Y1}^2 + (J_e + J_{1Z}) \omega_{1Z1}^2 + J_{1X} \omega_{1X1}^2 \right]; \quad H = J(\dot{\gamma} + \omega_{1X1}),$$

де ω_{1X1} , ω_{1Y1} , ω_{1Z1} – проєкції вектора $\boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{u}^c + \dot{\beta}$ кутової швидкості рамки на осі координат, пов'язані з рамкою. Відповідно до рис. 2.16 матимемо:

$$\omega_{1X1} = u_{x_c}^c \cos \beta - u_{z_c}^c \sin \beta; \quad \omega_{1Y1} = \dot{\beta} + u_{y_c}^c; \quad \omega_{1Z1} = u_{z_c}^c \cos \beta + u_{x_c}^c \sin \beta.$$

Тому кінетична енергія набуде виразу

$$T_\Sigma = \frac{1}{2} \left[\frac{H^2}{J} + (J_e + J_{1Z})(u_{z_c}^c \cos \beta + u_{x_c}^c \sin \beta)^2 + (J_e + J_{1Y})(\dot{\beta} + u_{y_c}^c)^2 + J_{1X}(u_{x_c}^c \cos \beta - u_{z_c}^c \sin \beta)^2 \right];$$

$$H = J(\dot{\gamma} + u_{Xc}^c \cos \beta - u_{Zc}^c \sin \beta).$$

Застосовуючи формалізм Лагранжа, дістанемо таке диференціальне рівняння двоступеневого гіроскопа:

$$\begin{aligned} & (J_e + J_{1Y})(\ddot{\beta} + \dot{u}_{Yc}^c) - \\ & - (J_e + J_{1Z} - J_{1Z})(u_{Zc}^c \cos \beta + u_{Xc}^c \sin \beta)(u_{Xc}^c \cos \beta - u_{Zc}^c \sin \beta) + \\ & + H(u_{Zc}^c \cos \beta + u_{Xc}^c \sin \beta) = M_{Y1}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Введемо позначення:

$$J_1 = J_e + J_{1Y}; \quad J_2 = J_e + J_{1Z} - J_{1Z}.$$

Тепер рівняння (2.65) можна записати в остаточному вигляді:

$$J_1(\ddot{\beta} + \dot{u}_{Yc}^c) + [H - J_2(u_{Xc}^c \cos \beta - u_{Zc}^c \sin \beta)](u_{Zc}^c \cos \beta + u_{Xc}^c \sin \beta) = M_{Y1}. \quad (2.66)$$

Контрольні запитання

1. Що називають триступеневим гіроскопом? Двоступеневим гіроскопом?
2. Що розуміють під зрівноваженим (астатичним) гіроскопом?
3. Що таке симетричний гіроскоп?
4. Що розуміють під гіромятником? Дзигною? Важким гіроскопом?
5. Що називають гіровертикаллю?
6. Що називають гірокомпасом?
7. Що називають рівняннями гіроскопа у формі Булгакова?
8. Що розуміють під кінетичними осями?
9. Що таке супутні осі? осі Резаля?
10. Які види наближених рівнянь гіроскопа ви знаєте?
11. Які рівняння гіроскопа називають прецесійними? За яких умов їх можна використовувати для аналізу руху гіроскопа?
12. Які рівняння гіроскопа називають спрощеними? За яких умов їх можна використовувати для аналізу руху гіроскопа?
13. Які рівняння гіроскопа називають лінеаризованими? За яких умов їх можна використовувати для аналізу руху гіроскопа?
14. Як, користуючись законом моментів, безпосередньо скласти прецесійні рівняння гіроскопа? Як це зробити, використовуючи формалізм Лагранжа?
15. Яку систему координат називають географічною?

Задачі

Задача 2.1. На основі розв'язання задачі 1.9 складіть рівняння руху СЗГ гіроскопа, застосовуючи закон моментів у проекціях на осі:

- а) нерухомої системи координат $\xi\eta\zeta$;
- б) супутньої системи координат $\xi_2\eta_2\zeta_2$;
- в) зв'язаної з тілом гіроскопа системи координат XYZ ;
- г) за допомогою рівнянь Лагранжа другого роду.

Задача 2.2. На основі розв'язку задачі 1.10 складіть рівняння руху симетричного гіромаятника (дзиги), застосовуючи закон моментів і формалізм Лагранжа.

Задача 2.3. На основі розв'язку задачі 1.11 складіть рівняння руху ГКП:

а) за допомогою метода Ейлера-Ішлінського;

б) використовуючи закон моментів;

в) застосовуючи формалізм Лагранжа.

Література

[48, ч. III, с. 29 – 316; ч. IV, с. 343 – 374]; [49, гл. 3, с. 58 – 75];

[9, гл. 4, с. 268 – 274]; [39, гл. 1, с. 7 – 23; гл. 2, с. 62 – 85];

[43, гл. 1, с. 9 – 22]; [25, Введение, с. 9 – 25]; [18, с. 8 – 32]; [47, с. 5 – 29].

Розділ 3. Методи теоретичного дослідження

Головним режимом роботи приладів і систем орієнтації і навігації, що встановлюються на рухомі об'єкти, є коливальні процеси. Тому передусім слід ознайомитися з основними поняттями, які використовуються у теорії коливань. Об'єктом вивчення теорії коливань є динамічні системи. *Динамічною системою зазвичай називають реальний об'єкт, поведження якого може бути описано із задовільною для практики точністю системою звичайних диференціальних рівнянь, аргументом яких є час.*

3.1. Вступ у теорію коливань

Під коливальним процесом (коливанням) розуміють немонотонне змінювання на деякому відрізку часу одного або кількох параметрів динамічної системи. Характерною особливістю такого процесу є багаторазове збільшення та зменшення параметрів з часом. Якщо параметри системи змінюються монотонно на відрізку часу $[t_1, t_2]$, то процес не є коливальним. Проте, часто неможливо встановити різницю між коливальним і неколивальним процесами. Тому більш загальне визначення коливального процесу можна сформулювати так: *система здійснює коливання за деяким параметром q , якщо швидкість змінювання цього параметра $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ багаторазово змінює свій знак на заданому проміжку часу.*

Динамічна система, здатна здійснювати коливання без будь-яких зовнішніх дій лише за рахунок первинно накопиченої енергії називається *коливальною системою*.

Коливальні явища надзвичайно поширені, різноманітні й можуть відбуватися у динамічних системах будь-якої природи – фізичної, хімічної, біологічної, економічної тощо. До коливальних процесів належать, наприклад, ритми головного мозку і биття серця, пульсації зірок і туманностей, акустичні та електромагнітні явища, змінюваність кількості хижаків у популяції тварин тощо.

Коливання можуть бути *сталими* чи *перехідними* від одного сталого руху до іншого. Сталий рух характеризується повторністю та стабільністю деяких характеристик коливального руху, зміст яких буде уточнено далі. Перехідні процеси характеризуються тим сталим рухом, до якого вони наближаються.

Сталі рухи динамічних систем реалізуються у вигляді або стаціонарних коливань, або станів рівноваги.

Стаціонарними на відрізку $[t_1, t_2]$ називаються коливання, в яких середнє значення, а також екстремальні (максимальні і мінімальні) значення коливальної величини, які досягаються на цьому досить великому відрізку часу, відносно мало змінюються при переміщенні цього відрізка вздовж осі часу (рис. 3.1).

Окремим випадком стаціонарних коливань є *періодичні коливання*, коли різні стани динамічної системи повторюються через рівні проміжки часу T , які називають *періодом коливань* (рис. 3.1, б).

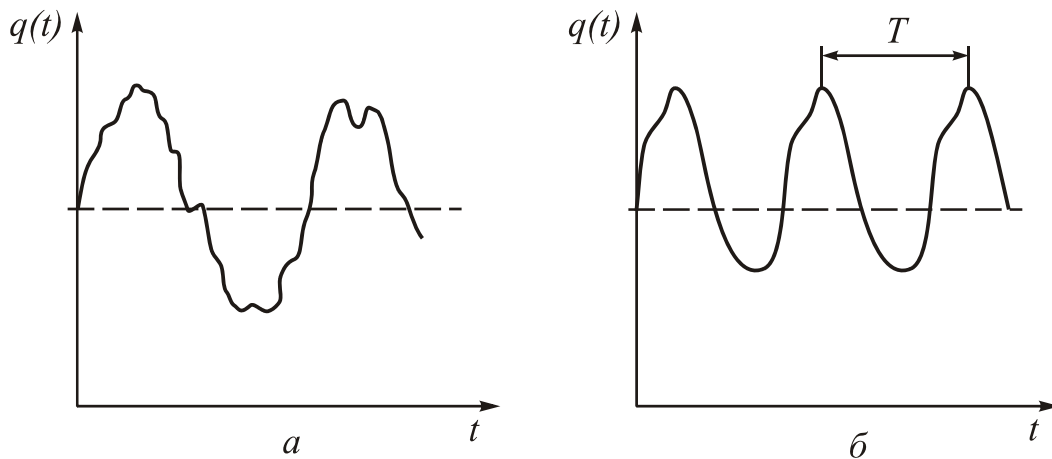


Рис. 3.1. Стаціонарні коливання

Нестаціонарні коливальні процеси є перехідними й бувають загасаючими або наростаючими. Згасаючі коливання (рис. 3.2, а) характеризуються зменшенням з часом максимальних за модулем відхилень коливної величини $q(t)$ від її середнього значення (амплітуд) на відміну від наростаючих (рис. 3.2, б) коливань, яким властиве зростання амплітуд коливань.

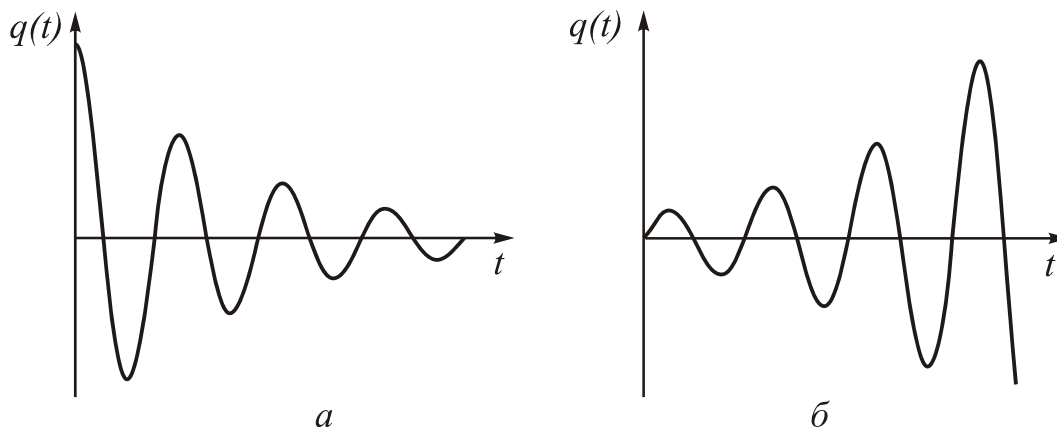


Рис. 3.2. Нестаціонарні коливання

З плином часу загасаючі коливання або перетворюються у стаціонарні з меншою, ніж раніше, амплітудою, або переходять у стан рівноваги, і тоді значення амплітуд коливних величин наближаються до нуля.

Наростаючі коливання переходять у стаціонарні з більшою амплітудою. Проте у реальних конструкціях часто система руйнується від напружень у матеріалі раніше ніж встановиться новий стаціонарний режим.

Зупинимося на кінематичних характеристиках коливальних процесів. До таких характеристик належать амплітуда, частота, період, часова форма коливань і деякі інші.

Найпростішим видом стаціонарних коливань є гармонічні коливання, коли коливна величина $q(t)$ змінюється у часі за синусоїдальним законом:

$$q(t) = a \cos(\omega t + \vartheta) = a \sin(\omega t + \varepsilon) = a_s \sin(\omega t) + a_c \cos(\omega t), \quad (3.1)$$

де a – амплітуда; ω – кутова (циклічна, колова) частота; ϑ, ε – початкові фази коливання відповідно у косинусоїдальній і синусоїдальній формах; a_s, a_c – амплітуди відповідно синусоїдальної й косинусоїдальної складових гармонічного коливання. Вказані величини пов'язані між собою очевидними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \cos \vartheta &= \sin \varepsilon; & \sin \vartheta &= -\cos \varepsilon; & \vartheta &= \varepsilon - \frac{\pi}{2}; \\ a_s &= -a \sin \vartheta = a \cos \varepsilon; & a_c &= a \cos \vartheta = a \sin \varepsilon; \\ a &= \sqrt{a_s^2 + a_c^2}; & \operatorname{tg} \vartheta &= -\frac{a_s}{a_c}; & \operatorname{tg} \varepsilon &= \frac{a_c}{a_s}. \end{aligned}$$

Такі коливання є періодичними. Період цих коливань виражається через частоту:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Частота визначає кількість повних періодів коливального процесу за час 2π . Початкова фаза характеризує початкове (при $t = 0$) значення коливної величини. Величину $\varphi = \omega t + \vartheta$ (або $\varphi_s = \omega t + \varepsilon$) називають *поточною фазою* коливної величини.

Гармонічні коливання часто зручно відобразити у вигляді суми двох комплексно спряжених величин, користуючись відомим співвідношенням:

$$\cos(\omega t + \vartheta) = \frac{1}{2}[e^{j(\omega t + \vartheta)} + e^{-j(\omega t + \vartheta)}]; \quad (j = \sqrt{-1}).$$

Тоді вираз (3.1) може бути поданий у такому вигляді:

$$q(t) = a \cos(\omega t + \vartheta) = \frac{a}{2}[e^{j(\omega t + \vartheta)} + e^{-j(\omega t + \vartheta)}]. \quad (3.2)$$

Якщо ввести у розгляд комплексну величину

$$Q_m = \frac{a}{2} e^{j\vartheta}, \quad (3.3)$$

то гармонічно змінювану величину (3.2) можна подати й так:

$$q(t) = a \cos(\omega t + \vartheta) = Q_m e^{j\omega t} + \bar{Q}_m e^{-j\omega t}. \quad (3.4)$$

Тут риска над величиною позначає комплексне спряження цієї величини.

Комплексну величину (3.3) називають комплексною амплітудою гармонічно змінюваної величини. Як видно, модуль комплексної амплітуди дорівнює половині амплітуди, а аргумент – початковій фазі гармонічного коливання, записаного у косинусоїдальній формі.

На комплексній площині $u + jv$ (рис. 3.3) кожен з доданків (3.4) зображується у вигляді вектора довжиною $a/2$. Один з них утворює із додатною піввіссю u кут φ , другий – кут $(-\varphi)$. Сума векторів у кожному мить утворює вектор $q(t)$, який лежить на дійсній осі. З плином часу вектор $\frac{a}{2} e^{j\varphi} = \frac{a}{2} e^{j(\omega t + \vartheta)}$ обертається проти годинникової стрілки з кутовою швидкістю ω , а вектор

$\frac{a}{2} e^{-j\varphi} = \frac{a}{2} e^{-j(\omega t + \vartheta)}$ – з такою самою швидкістю – у протилежному напрямку, тобто за годинниковою стрілкою. Унаслідок цього їх сума утворюватиме проекцію на уявну вісь, що дорівнює нулю, а на дійсну вісь – проекцію, яка буде змінюватися як за величиною, так і за напрямком. При цьому результуючий вектор $q(t)$ змінюватиметься за законом (3.1).

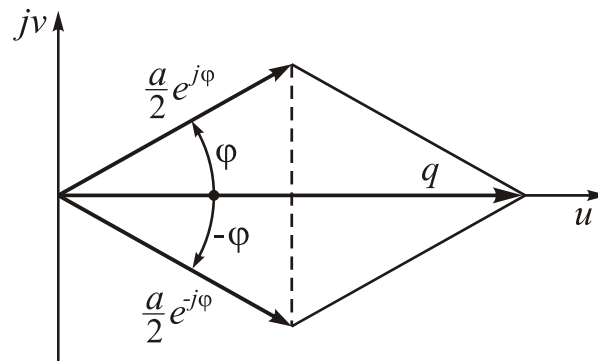


Рис. 3.3. Зображення гармонічного коливання на комплексній площині

Сума двох гармонічних коливань з однаковими частотами утворює також гармонічне коливання з тією самою частотою:

$$a_1 \cos(\omega t + \vartheta_1) + a_2 \cos(\omega t + \vartheta_2) = a \cos(\omega t + \vartheta).$$

Амплітуда і початкова фаза результуючого коливання так виражаються через амплітуди і початкові фази процесів-доданків:

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)}; \quad \vartheta = \vartheta_1 + \text{Arctg} \frac{a_2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{a_1 + a_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)}.$$

Слід зауважити, що складати гармонічні коливання однакової частоти значно простіше, якщо подавати їх у формі останнього виразу у (3.1):

$$a_{1s} \sin(\omega t) + a_{1c} \cos(\omega t) + a_{2s} \sin(\omega t) + a_{2c} \cos(\omega t) = a_s \sin(\omega t) + a_c \cos(\omega t),$$

звідки випливає:

$$a_s = a_{1s} + a_{2s}; \quad a_c = a_{1c} + a_{2c}.$$

Досить просто підсумовувати такі коливання і в комплексній формі:

$$Q_{1m} e^{j\omega t} + \bar{Q}_{1m} e^{-j\omega t} + Q_{2m} e^{j\omega t} + \bar{Q}_{2m} e^{-j\omega t} = Q_m e^{j\omega t} + \bar{Q}_m e^{-j\omega t}.$$

Порівнюючи праву і ліву частини, дістанемо основне просте співвідношення

$$Q_m = Q_{1m} + Q_{2m}.$$

Комплексна амплітуда суми гармонічних коливань однієї і тієї самої частоти дорівнює сумі комплексних амплітуд коливань-доданків.

Більш складним видом стаціонарних коливань є полігармонічні коливання, що є сумою двох чи більше гармонічних коливань з різними частотами:

$$q(t) = \sum_{k=1}^n a_k \cos(\omega_k t + \vartheta_k). \quad (3.5)$$

Сукупність частот ω_k утворює *частотний спектр*, сукупність амплітуд a_k – *амплітудний спектр*, а сукупність початкових фаз ϑ_k – *фазовий спектр* полігармонічного коливання.

Якщо частоти частотного спектра полігармонічного коливання відносяться як цілі числа до деякої найменшої частоти ω_1 (тобто для будь-якого k відношення $\omega_k / \omega_1 = m$, де m – ціле число), то коливальний процес є періодичним з періодом $T_1 = 2\pi / \omega_1$. При цьому складова з частотою ω_1 називається *основною гармонікою*. Складову з частотою $\omega = m\omega_1$ називають *m-ю гармонікою*.

Визначення складових спектрів відомого коливального процесу називають спектральним аналізом цього процесу.

У загальному випадку будь-який T -періодичний процес можна подати у вигляді нескінченного ряду Фур'є:

$$q(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t + \vartheta_k) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{kc} \cos k\omega t + a_{ks} \sin k\omega t).$$

Коефіцієнти такого розкладу визначають формулами:

$$a_{kc} = \frac{2}{T} \int_0^T q(t) \cos(k\omega t) dt; \quad a_{ks} = \frac{2}{T} \int_0^T q(t) \sin(k\omega t) dt; \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T q(t) dt. \quad (3.6)$$

Якщо функція $q(t)$ має простий вигляд і задана аналітично, то спектральний аналіз можна виконати згідно з формул (3.6). Якщо ж досліджувана T -періодична функція має складний вигляд, або задана у графічній чи табличній формі, то для спектрального аналізу використовують графічні або чисельні методи.

Полігармонічні коливання (3.5) можна подати у комплексній формі:

$$q(t) = \sum_{k=-n}^n Q_{mk} \exp(j\omega_k t),$$

де Q_{mk} – позначення комплексної амплітуди гармонічної складової з частотою ω_k , причому

$$Q_{(-m)k} = \overline{Q_{mk}}.$$

Головними характеристиками *стаціонарних коливальних процесів* є абсолютні значення максимуму і мінімуму (екстремальні, пікові значення) коливальної величини на деякому відрізку часу T :

$$q_{\max} = \left| \max q(t) \right|_{t \in T}; \quad q_{\min} = \left| \min q(t) \right|_{t \in T}.$$

а також розмах коливань

$$\Delta q = q_{\max} - q_{\min}.$$

У багатьох випадках корисно знати усереднені характеристики коливального процесу коливної величини $q(t)$ на відрізку часу $[t, t + T]$:

– *середнє значення*

$$q_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} q(t) dt;$$

– *середнє квадратичне значення*

$$q_{\text{ср.кв}} = \left(\frac{1}{T} \int_t^{t+T} q^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}};$$

– середнє квадратичне (стандартне) відхилення

$$q_{\text{с.к.в}} = \left(\frac{1}{T} \int_t^{t+T} [q(t) - q_{\text{ср}}]^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

У теорії динамічних систем сформувалася термінологія, запозичена більшою мірою з теоретичної механіки. Так, усі окремі члени диференціальних рівнянь називають силами. Члени диференціальних рівнянь, які не залежать ні від якої з узагальнених координат і їхніх похідних (вони можуть залежати лише від часу), називають «зовнішніми силами».

Позначатимемо надалі через $q(t)$ узагальнені координати (тобто ті величини, задання яких у сукупності повністю визначає поточне положення системи у просторі). Кількість узагальнених координат визначається кількістю ступенів вільності системи.

Лінійними системами називають такі динамічні системи, усі члени диференціальних рівнянь яких, окрім вільних членів (зовнішніх сил), є лінійними функціями узагальнених координат і їх похідних. Лінійна динамічна система із s ступенями вільності описується у загальному випадку такою системою лінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + \dots + a_{1s}\ddot{q}_s + b_{11}\dot{q}_1 + b_{12}\dot{q}_2 + \dots + b_{1s}\dot{q}_s + c_{11}q_1 + \dots + c_{1s}q_s = e_1(t); \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + \dots + a_{2s}\ddot{q}_s + b_{21}\dot{q}_1 + b_{22}\dot{q}_2 + \dots + b_{2s}\dot{q}_s + c_{21}q_1 + \dots + c_{2s}q_s = e_2(t); \\ \dots = \dots \\ a_{s1}\ddot{q}_1 + a_{s2}\ddot{q}_2 + \dots + a_{ss}\ddot{q}_s + b_{s1}\dot{q}_1 + b_{s2}\dot{q}_2 + \dots + b_{ss}\dot{q}_s + c_{s1}q_1 + \dots + c_{ss}q_s = e_s(t). \end{cases} \quad (3.7)$$

Якщо використати позначення матриць:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{s1} & b_{s2} & \dots & b_{ss} \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{s1} & c_{s2} & \dots & c_{ss} \end{bmatrix}; \quad q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_s \end{bmatrix}; \quad E(t) = \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ \dots \\ e_s(t) \end{bmatrix},$$

то систему лінійних диференціальних рівнянь механічної системи, подану через узагальнені координати, можна записати у такому матричному вигляді:

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = E(t). \quad (3.8)$$

Якщо реальну динамічну систему вдається задовільно для потреб теоретичного вивчення із заданою метою описати сукупністю рівнянь вигляду (3.7), то її називають лінійною динамічною системою. Якщо при цьому матриці A , B

і C системи (3.8) не змінюються з плином часу (тобто всі коефіцієнти в системі рівнянь (3.7) є сталими), то таку динамічну систему називають *лінійною стаціонарною системою*. Проте, якщо хоча б один з коефіцієнтів a_{ij} , b_{ij} або c_{ij} змінюється з плином часу, то таку динамічну систему відносять вже до *нестационарної лінійної*, або *параметрично збуджуваної*.

У загальному випадку залежності сил від узагальнених координат, швидкостей і прискорень можуть бути довільними, зокрема – нелінійними. Реальні системи, поведження яких можна задовільно описати лише використовуючи нелінійні сили, дістали назву *нелінійних динамічних систем*.

Далі зупинимося на деякій класифікації сил (тобто членів диференціальних рівнянь).

Члени диференціальних рівнянь, що є пропорційними узагальненим прискоренням, за аналогією із силами Даламбера, називають *інерційними силами*. Матриця A коефіцієнтів при узагальнених прискореннях зазвичай (внаслідок того, що кінетична енергія є квадратичною функцією узагальнених швидкостей) є симетричною.

Матриці ж B і C коефіцієнтів при узагальнених швидкостях і узагальнених координатах можуть бути довільними. Їх зручно подати у вигляді суми двох матриць, одна з яких симетрична, а друга – кососиметрична (це можна зробити завжди, для будь-якої заданої матриці):

$$B = B_d + G; \quad C = C_p + P.$$

З огляду на це, рівняння (3.23) можна подати у більш розгорнутому вигляді:

$$A\ddot{q} + B_d\dot{q} + G\dot{q} + C_p q + Pq = E(t).$$

Тут B_d і C_p – симетричні, а G і P – кососиметричні матриці.

Члени рівняння, пропорційні узагальненим швидкостям, коефіцієнти при яких утворюють у сукупності по всіх рівняннях симетричну матрицю B_d , називають *демпфірувальними*, або *дисипативними силами*. Аналогічно члени, коефіцієнти при яких утворюють кососиметричну матрицю G , називають *гіроскопічними силами*. Члени рівняння, пропорційні узагальненим координатам, коефіцієнти при яких утворюють разом по всіх рівняннях симетричну матрицю C_d , називають *потенціальними* або *консервативними силами*. Члени, коефіцієнти при яких утворюють кососиметричну матрицю P , називаються *неконсервативними силами* або *силами радіальної корекції*. Члени рівнянь, що утворюють матрицю $E(t)$, називають *зовнішніми силами*.

Якщо розглядати систему з одним ступенем вільності (тобто з однією узагальненою координатою q), то залежно від того, як і від чого залежить відповідний член диференціального рівняння, розрізняють такі сили:

– *лінійна пружна сила*, якщо вона лінійно (пропорційно) залежить від узагальненої координати і напрямлена у бік, протилежний її відхиленню від положення рівноваги q_0 :

$$Q = -c(q - q_0),$$

де $c > 0$ – коефіцієнт жорсткості;

– *лінійна демпфівальна сила або сила в'язкого тертя*, якщо вона лінійно залежить від узагальненої швидкості $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ і напрямлена у протилежний

бік:

$$Q = -f \dot{q},$$

де $f > 0$ – коефіцієнт в'язкого тертя (демпфірування);

– *нелінійна пружна (відновна) сила*, яка завжди напрямлена у бік, протилежний відхиленню від положення рівноваги q_0 :

$$Q = -F(q - q_0),$$

де $F(x)$ – функція, яка додатна при $x > 0$, дорівнює нулю при $x = 0$ і від'ємна при $x < 0$;

– *нелінійна демпфівальна сила*, яка залежить від узагальненої швидкості $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ і напрямлена у протилежний бік:

$$Q = -\Phi(\dot{q}),$$

де $\Phi(x)$ – функція, яка додатна при $x > 0$, дорівнює нулеві при $x = 0$ і від'ємна при $x < 0$; серед таких сил ще виділяють такі:

– *силу сухого тертя*, якщо її залежність від узагальненої швидкості має вигляд

$$Q = -k \cdot \frac{\dot{q}}{|\dot{q}|}, \quad (k > 0);$$

для цієї сили характерно, що її величина не залежить від *величини* узагальненої швидкості;

– *силу квадратичного (турбулентного) тертя*, залежність якої від швидкості описується співвідношенням

$$Q = -k \cdot \dot{q} |\dot{q}|, \quad (k > 0).$$

3.2. Методи теоретичного дослідження лінійних стаціонарних систем

Теорія лінійних стаціонарних систем спирається на теорію звичайних лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами, яка є найбільш розвиненою у вищій математиці і дозволяє знаходити повні розв'язки майже в усіх практично важливих випадках.

3.2.1. Теоретичне дослідження вільного руху

Розглянемо процес теоретичного досліджування на прикладі системи, що описується матричним рівнянням (3.8)

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = E(t).$$

Вільним вважається рух системи тоді, коли на неї не діють зовнішні сили. Для динамічної системи це означає, що члени диференціальних рівнянь, що не

залежать від узагальнених координат та їхніх похідних, дорівнюють нулю. Рівняння (3.23) у цьому випадку стає однорідним:

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = 0. \quad (3.9)$$

Відповідно до теорії диференціальних рівнянь, частковий розв'язок рівняння (3.30) має вигляд

$$q = De^{pt}. \quad (3.10)$$

Підставивши вираз (3.10) у рівняння (3.9) дістанемо:

$$(Ap^2 + Bp + C)De^{pt} = 0.$$

Щоб вираз (3.10) був розв'язком рівняння (3.9), це співвідношення має виконуватися за будь-якого значення часу t . Це можливо у двох випадках:

– коли стала D дорівнює нулю; це відповідає тривіальному розв'язку $q(t) \equiv 0$;

– коли сталий параметр p задовольняє матричне рівняння

$$Ap^2 + Bp + C = 0. \quad (3.11)$$

Матрицю $Ap^2 + Bp + C$ називають *характеристичною матрицею системи* диференціальних рівнянь (3.7). Матричне рівняння (3.11) має розв'язок лише за умови обертання у нуль характеристичного визначника, тобто визначника характеристичної матриці:

$$\det(Ap^2 + Bp + C) = 0. \quad (3.12)$$

Запишемо характеристичне рівняння (3.12) більш розгорнуто:

$$\begin{vmatrix} a_{11}p^2 + b_{11}p + c_{11}; & a_{12}p^2 + b_{12}p + c_{12}; & \cdots & a_{1s}p^2 + b_{1s}p + c_{1s} \\ a_{21}p^2 + b_{21}p + c_{21}; & a_{22}p^2 + b_{22}p + c_{22}; & \cdots & a_{2s}p^2 + b_{2s}p + c_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1}p^2 + b_{s1}p + c_{s1}; & a_{s2}p^2 + b_{s2}p + c_{s2}; & \cdots & a_{ss}p^2 + b_{ss}p + c_{ss} \end{vmatrix} = 0.$$

Розгортаючи визначник, отримаємо поліном порядку $2s$ за параметром p . Тому рівняння (3.12) має $n = 2s$ коренів. Якщо корені різні, загальний розв'язок однорідного рівняння (3.30) матиме вигляд:

$$q_{3.0}(t) = \sum_{k=1}^n D_k e^{p_k t}.$$

Тобто розв'язок з окремої узагальненої координати q_i можна подати так:

$$q_i(t) = \sum_{k=1}^n d_{ik} e^{p_k t}; \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

3.2.2. Теоретичне дослідження вимушених коливань. Метод комплексних амплітуд

Одним з найбільш типових режимів роботи більшості технічних об'єктів є коливальні режими, зокрема, вимушені коливання, спричинені діями сил, які змінюються періодично у часі. Тому на особливу увагу заслуговують методи, які дозволяють ефективно вивчати вимушені коливання. Розглянемо детально

один з найбільш зручних методів досліджування вимушених коливань у лінійних стаціонарних системах – метод комплексних амплітуд.

Метод комплексних амплітуд був спочатку утворений як один з варіантів символічного методу. Оскільки оператор диференціювання у комбінаціях з постійними коефіцієнтами підкорюється тим самим законам дистрибутивності, асоціативності та комутативності, що й звичайні числа, то головна ідея символічного методу полягає у заміні оператора диференціювання за часом деяким символом і формальному зведенні системи лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами до системи лінійних алгебричних рівнянь. Розв'язуючи їх, отримують символічний розв'язок, який належить потім розкрити, користуючись певною рецептурою. Наразі, завдяки фундаментальному розвитку операційного зчислення, яке зв'язало основи символічного методу з перетвореннями Лапласа і потужними методами теорії функцій комплексних змінних, метод комплексних амплітуд став ефективним засобом дослідження вимушених коливань лінійних стаціонарних систем.

Метод комплексних амплітуд тісно пов'язаний з поняттям передатних функцій, зокрема, частотних передатних функцій, які широко застосовують у теорії автоматичного керування. Тому спочатку розглянемо ці поняття на прикладі одного диференціального рівняння n -го порядку:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x, \quad (3.13)$$

де x – деяка відома функція часу, яку будемо вважати вхідною фізичною величиною; y – шукана (невідома) змінна, яку вважатимемо вихідною.

Відомо, що повний розв'язок цього рівняння можна подати як суму

$$y(t) = y_{з.о}(t) + y_{ч.н}(t)$$

двох розв'язків:

1) загального розв'язку $y_{з.о}(t)$ відповідного однорідного рівняння:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0, \quad (3.14)$$

2) частинного розв'язку $y_{ч.н}(t)$ первинного неоднорідного рівняння (3.13), який відповідає заданому закону змінювання вхідної величини $x(t)$.

Відомо також, що окремий k -й розв'язок однорідного рівняння (3.14) має вигляд

$$y_k(t) = C_k e^{p_k t}.$$

Підставивши його в рівняння (3.38), дістанемо:

$$(a_n p_k^n + a_{n-1} p_k^{n-1} + \dots + a_1 p_k + a_0) C_k e^{p_k t} = 0,$$

з чого випливає: щоб це алгебричне рівняння виконувалося у будь-який момент часу t за будь-яких початкових умов, необхідно й достатньо, щоб вираз у дужках дорівнював нулю

$$a_n p_k^n + a_{n-1} p_k^{n-1} + \dots + a_1 p_k + a_0 = 0,$$

тобто щоб значення p_k було коренем цього рівняння, яке називають характеристичним.

Загальний розв'язок однорідного рівняння, якщо корені характеристичного рівняння є різними (не кратними), являє собою суму таких частинних розв'язків, кожен з яких відповідає одному з коренів характеристичного рівняння:

$$y_{3,0}(t) = \sum_{k=1}^n C_k e^{p_k t}.$$

Примітки.

1. Якщо коефіцієнти характеристичного полінома дійсні, то корені характеристичного рівняння є або дійсними, або утворюють комплексно-спряжені пари.

2. Комплексно спряженій парі коренів $p_1 = \alpha + j\beta$ і $p_2 = \alpha - j\beta$ відповідає частинний розв'язок вигляду

$$y_{1,2}(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} = e^{\alpha t} (C_1 e^{j\beta t} + C_2 e^{-j\beta t}) = e^{\alpha t} [A_S \sin(\beta t) + A_C \cos(\beta t)],$$

де A_S і A_C – нові сталі інтегрування, які є дійсними, на відміну від початкових комплексно-спряжених C_1 і C_2 .

Припустимо тепер, що вхідна величина змінюється з плином часу за гармонічним законом

$$x(t) = X_m e^{j\omega t} = X_m \exp(j\omega t), \quad (3.15)$$

де X_m – деяка стала, у загальному випадку комплексна величина, яку називатимемо комплексною амплітудою вхідної величини. Тоді частинний розв'язок рівняння (3.36) має аналогічну залежність від часу

$$y_{ч.н}(t) = Y_m e^{j\omega t} = Y_m \exp(j\omega t). \quad (3.16)$$

Підставляючи вирази (3.15) і (3.16) у рівняння (3.13), отримаємо рівняння для визначення невідомих комплексних амплітуд Y_m вихідної величини:

$$\begin{aligned} [a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 j\omega + a_0] Y_m e^{j\omega t} = \\ = [b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 j\omega + b_0] X_m e^{j\omega t}. \end{aligned}$$

Звідси маємо

$$Y_m = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 j\omega + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 j\omega + a_0} X_m = W(j\omega) X_m,$$

де величина

$$W(j\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 j\omega + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 j\omega + a_0} = W(p) \Big|_{p=j\omega}$$

є частотною передатною функцією системи. Її визначають як передатну функцію $W(p)$ системи за Лапласом і суто уявних значень оператора p Лапласа.

Отже, частотна передатна функція являє собою відношення комплексної амплітуди гармонічних усталених коливань з частотою ω на виході системи до комплексної амплітуди коливань такої самої частоти вхідної (збудувальної) величини:

$$\frac{Y_m}{X_m} = W(j\omega). \quad (3.17)$$

Як і будь-які комплексні величини, $W(j\omega)$, X_m і Y_m можна подати у двох формах:

$$\begin{cases} W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega); \\ X_m = X_c + jX_s; \\ Y_m = Y_c + jY_s, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} W(j\omega) = W(\omega)e^{j\varepsilon}; \\ X_m = x_m e^{j\alpha}; \\ Y_m = y_m e^{j\beta}. \end{cases} \quad (3.18)$$

У першій формі величини поділено на дійсну та уявну частини:

$$U(\omega) = \operatorname{Re}[W(j\omega)]; \quad V(\omega) = \operatorname{Im}[W(j\omega)];$$

$$X_c = \operatorname{Re}[X_m]; \quad X_s = \operatorname{Im}[X_m]; \quad Y_c = \operatorname{Re}[Y_m]; \quad Y_s = \operatorname{Im}[Y_m].$$

Друга форма – експоненціальна. При цьому коефіцієнти при експонентах є модулями відповідної комплексної величини:

$$W(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}; \quad x_m = \sqrt{X_c^2 + X_s^2}; \quad y_m = \sqrt{Y_c^2 + Y_s^2},$$

а показники при уявних степенях експонент – аргументами цих комплексних величин:

$$\varepsilon = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}; \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{X_s}{X_c}; \quad \beta = \operatorname{arctg} \frac{Y_s}{Y_c},$$

тобто є кутами, які складають вектори, що зображують ці величини на комплексній площині, з додатною дійсною піввіссю (рис. 3.4).

Підставимо у (3.17) вирази (3.18) в експоненціальній формі:

$$y_m e^{j\beta} = W(\omega) x_m e^{j(\varepsilon + \alpha)},$$

тоді

$$y_m = W(\omega) x_m, \quad \beta = \alpha + \varepsilon.$$

Отже, модуль $W(\omega)$ частотної передатної функції дорівнює відношенню амплітуд гармонічних коливань вихідної і вхідної величин, а її аргумент – куту, на який повертається у комплексній площині вектор комплексної амплітуди вхідної величини, щоб дістатися вектора комплексної амплітуди вихідної величини.

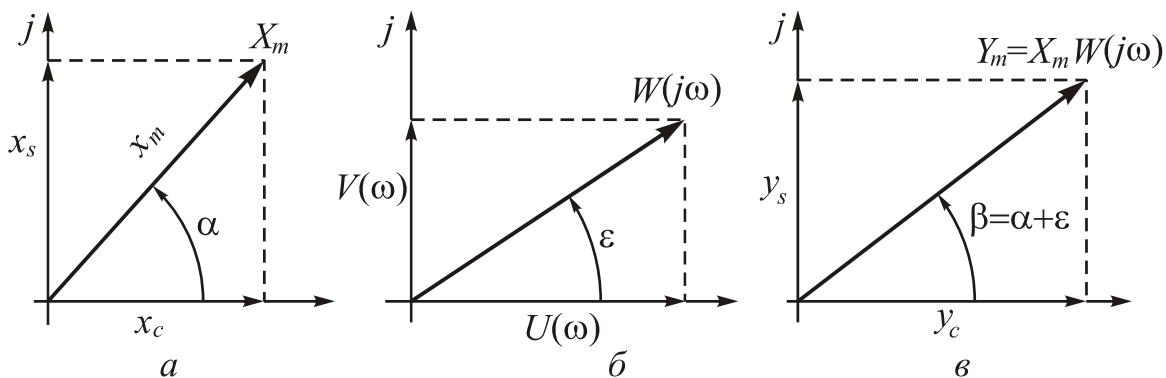


Рис. 3.4. Зображення комплексних величин на комплексній площині

Із рис. 3.4 випливає, що

$$\begin{aligned} X_c &= x_m \cos \alpha; & X_s &= x_m \sin \alpha; \\ Y_c &= y_m \cos(\alpha + \varepsilon); & Y_s &= y_m \sin(\alpha + \varepsilon). \end{aligned}$$

Припустимо тепер, що вхідна величина $x(t)$ є дійсною гармонічною функцією часу:

$$x(t) = x_m \sin(\omega t + \alpha). \quad (3.19)$$

Взаємозв'язок між дійсною (3.19) і комплексною (3.15) формами запису гармонічної величини можна подати двома способами.

За першим способом, згадуючи формулу Ейлера

$$e^{j(\omega t + \alpha)} = \cos(\omega t + \alpha) + j \sin(\omega t + \alpha)$$

і маючи на увазі, що відповідно до (3.18) комплексну форму (3.15) можна перетворити до вигляду

$$X(t) = x_m e^{j(\omega t + \alpha)}, \quad (3.20)$$

можна впевнитися, що дійсна форма запису гармонічного сигналу є уявною частиною комплексної форми (3.20). Відповідно до цього розуміння, щоб визначити усталену реакцію системи на гармонічне збурення вигляду (3.19) достатньо визначити реакцію системи на комплексне гармонічне збурення (3.20) і у знайденій комплексній величині виділити уявну частину:

$$x(t) = x_m \sin(\omega t + \alpha) = \text{Im}\{x_m e^{j(\omega t + \alpha)}\} \Rightarrow y(t) = \text{Im}\{W(j\omega)x_m e^{j(\omega t + \alpha)}\}.$$

Аналогічно, якщо на вхід системи подається косинусоїдальний сигнал, то для знаходження розв'язку, відповідного вимушеним коливанням, достатньо відокремити дійсну частину при комплексному поданні збурення:

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \alpha) = \text{Re}\{x_m e^{j(\omega t + \alpha)}\} \Rightarrow y(t) = \text{Re}\{W(j\omega)x_m e^{j(\omega t + \alpha)}\}.$$

Такий спосіб рекомендується у більшості посібників з електротехніки і теорії автоматичного регулювання.

Можливий, однак, існує й інший погляд на взаємозв'язок дійсного й комплексного подання гармонічно змінюваної величини. Так, з формули Ейлера випливає:

$$\cos(\omega t + \alpha) = \frac{1}{2}[e^{j(\omega t + \alpha)} + e^{-j(\omega t + \alpha)}]; \quad \sin(\omega t + \alpha) = \frac{1}{2j}[e^{j(\omega t + \alpha)} - e^{-j(\omega t + \alpha)}].$$

Тому реакцію системи на косинусоїдально змінювану величину можна подати як півсуму реакцій системи на два комплексні збурення – одного з частотою ω і аргументом α , а другого – з частотою $(-\omega)$ і аргументом $(-\alpha)$. Аналогічно можна знайти частинний розв'язок за синусоїдального збурення. Реакцію системи на комплексне збурення з від'ємною частотою $(-\omega)$ визначити нескладно за такою самою методикою. Необхідно лише, відшукуючи частотну передатну функцію підставити замість оператора Лапласа p не $j\omega$, а $(-j\omega)$.

Обмежимося визначенням вимушених коливань лише в разі косинусоїдальної дії. Подамо цю дію у комплексній формі:

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \alpha) = \frac{x_m}{2} e^{j\alpha} e^{j\omega t} + \frac{x_m}{2} e^{-j\alpha} e^{-j\omega t} = X_m e^{j\omega t} + \bar{X}_m e^{-j\omega t}, \quad (3.21)$$

де

$$X_m = \frac{x_m}{2} e^{j\alpha}; \quad \bar{X}_m = \frac{x_m}{2} e^{-j\alpha},$$

являють собою комплексно спряжені величини, першу з яких називатимемо комплексною амплітудою збурення. Неважко бачити, що

$$X_m = \frac{x_m}{2} (\cos \alpha + j \sin \alpha); \quad \bar{X}_m = \frac{x_m}{2} (\cos \alpha - j \sin \alpha),$$

і є дійсними наступні співвідношення:

$$\begin{aligned} X_m + \bar{X}_m &= x_m \cos \alpha; & X_m - \bar{X}_m &= jx_m \sin \alpha; \\ X_m \cdot \bar{X}_m &= \frac{x_m^2}{4}; & \frac{X_m}{\bar{X}_m} &= e^{j2\alpha}. \end{aligned}$$

Отже, відповідно до співвідношення (3.21) можна вважати, що на систему діють дві комплексні гармонічні дії: одна з комплексною амплітудою X_m і частотою ω , друга – з амплітудою \bar{X}_m і частотою $(-\omega)$. Застосовуючи метод комплексних амплітуд до першого збурення, дістанемо

$$y_1(t) = W(j\omega) X_m e^{j\omega t}.$$

Для другого збурення відповідна реакція системи матиме вигляд:

$$y_2(t) = W(-j\omega) \bar{X}_m e^{-j\omega t}.$$

У цілому реакція системи на косинусоїдальну дію дорівнює сумі цих двох розв'язків (для лінійних систем є слушним принцип суперпозиції – *реакція системи на суму кількох дій дорівнює сумі реакцій цієї системи на кожну з цих дій окремо*):

$$y_{\text{ч.н}}(t) = y_1(t) + y_2(t) = W(j\omega) X_m e^{j\omega t} + W(-j\omega) \bar{X}_m e^{-j\omega t}. \quad (3.22)$$

Зазначимо одну важливу властивість частотних передатних функцій: *частотна передатна функція для від'ємної частоти є комплексно спряженою по відносно частотної передатної функції для додатної частоти*:

$$W(-j\omega) = \bar{W}(j\omega) = U(\omega) - jV(\omega).$$

Ця властивість впливає з того, що дійсна частина $U(\omega)$ частотної передатної функції є парною функцією частоти, а уявна частина $V(\omega)$ – непарною її функцією.

Враховуючи це, запишемо (3.22) так:

$$y_{\text{ч.н}}(t) = W(j\omega) X_m e^{j\omega t} + \bar{W}(j\omega) \bar{X}_m e^{-j\omega t}.$$

Виходить розв'язок, який вельми нагадує за формою вираз (3.21). Ввівши позначення

$$Y_m = W(j\omega) X_m, \quad (3.23)$$

остаточно подамо розв'язок у наступний спосіб:

$$y_{\text{ч.н}}(t) = Y_m e^{j\omega t} + \bar{Y}_m e^{-j\omega t} = y_m \cos(\omega t + \beta),$$

причому

$$Y_m = \frac{y_m}{2} e^{j\beta}. \quad (3.24)$$

Отже, для того щоб визначити вимушені коливання лінійної системи під дією збурення типу (3.21) достатньо:

- 1) знайти частотну передатну функцію системи $W(j\omega)$;
- 2) відшукати комплексну амплітуду вихідної величини за формулою (3.23):

$$Y_m = W(j\omega)X_m = \frac{x_m}{2}W(j\omega)e^{j\alpha} = A + jB,$$

де

$$A = \frac{x_m}{2}[U(\omega)\cos\alpha - V(\omega)\sin\alpha]; \quad B = \frac{x_m}{2}[V(\omega)\cos\alpha + U(\omega)\sin\alpha].$$

- 3) записати остаточний розв'язок у вигляді

$$\begin{aligned} y_{ч.н.}(t) &= (A + jB)e^{j\omega t} + (A - jB)e^{-j\omega t} = 2A\cos\omega t + 2B\sin\omega t = \\ &= x_m[U(\omega)\cos(\omega t + \alpha) - V(\omega)\sin(\omega t + \alpha)]. \end{aligned}$$

Як видно з останнього запису, якщо вимушені коливання поділити на дві частини: одну – яка коливається синфазно зі збуренням (у розглядуваному випадку – ту, що змінюється за законом $\cos(\omega t + \alpha)$), другу – що випереджає збурення за фазою на 90° ($-\sin(\omega t + \alpha)$), то амплітуда першої складової дорівнюватиме добутку амплітуди збурення на дійсну частину частотної передатної функції, а амплітуда другої – добутку амплітуди збурення на уявну частину частотної передатної функції.

3.2.3. Вимушені коливання гіроскопа у кардановому підвісі

Як приклад застосування методу комплексних амплітуд розглянемо процес визначення вимушених коливань ГКП.

Схему конструкції ГКП наведено на рис. 2.8, кінематику поворотів – на рис. 2.9. Лінеаризовані рівняння руху ГКП (2.75) можна записати у вигляді

$$\begin{cases} A\ddot{\alpha} + H_0 \cos\beta_{cp}\dot{\beta} = N - R \sin\beta_{cp} \\ J_3\ddot{\beta} - H_0 \cos\beta_{cp}\dot{\alpha} = L \end{cases}, \quad (3.24)$$

де β_{cp} – деяке сталє середнє значення кута β , в околі якого розглядається рух гіроскопа;

$$A = J_1 + J_2 \cos^2 \beta_{cp}.$$

Як впливає з рівнянь (3.62), ГКП можна розглядати як систему, що має три «входи» і два «виходи» (рис. 3.5). Входами системи є величини моментів сил, що діють на ГКП вздовж осей його підвісу: $N(t)$ – момент сил, що діє навколо зовнішньої осі підвісу; $L(t)$ – момент, що діє навколо внутрішньої осі підвісу і $R(t)$ – момент навколо головної осі гіроскопа. Вихідними величинами будемо вважати кутові швидкості $\dot{\alpha}$ і $\dot{\beta}$ повороту ГКП навколо зовнішньої і внутрішньої осей підвісу відповідно.

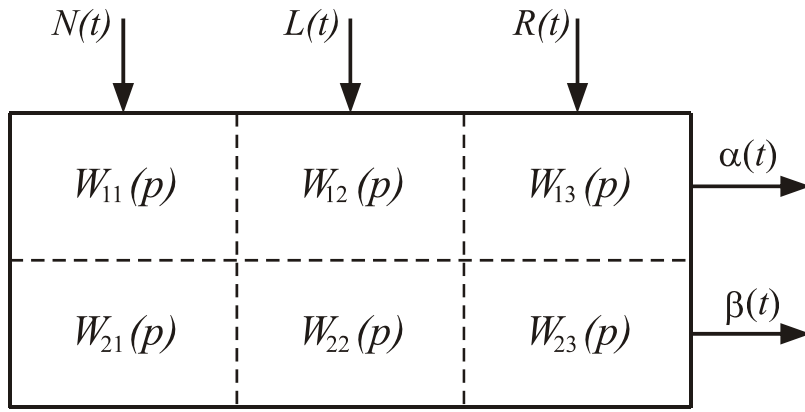


Рис. 3.5. Подання ГКП як багатовимірної системи

Така складна (багатовимірна) система характеризується шістьма передавальними функціями (кожного виходу за кожним входом). Щоб визначити їх, запишемо систему рівнянь (3.24) в операторно-матричній формі, застосувавши до обох частин перетворення Лапласа:

$$\begin{bmatrix} Ap & H_0 \cos \beta_{cp} \\ -H_0 \cos \beta_{cp} & J_3 p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}(p) \\ \dot{\beta}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} N(p) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} L(p) + \begin{bmatrix} -\sin \beta_{cp} \\ 0 \end{bmatrix} R(p).$$

Тепер передатні функції за Лапласом можна визначити за правилом Крамера – діленням на визначник основної матриці визначника матриці, яка виходить з головної внаслідок заміни стовпця, що відповідає обраній вихідній величині, на стовпець при відповідній вхідній величині. Оскільки

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} Ap & H_0 \cos \beta_{cp} \\ -H_0 \cos \beta_{cp} & J_3 p \end{vmatrix} = AJ_3 p^2 + H_0^2 \cos^2 \beta_{cp};$$

$$\Delta_{11}(p) = \begin{vmatrix} 1 & H_0 \cos \beta_{cp} \\ 0 & J_3 p \end{vmatrix} = J_3 p; \quad \Delta_{12}(p) = \begin{vmatrix} 0 & H_0 \cos \beta_{cp} \\ 1 & J_3 p \end{vmatrix} = -H_0 \cos \beta_{cp};$$

$$\Delta_{21}(p) = \begin{vmatrix} Ap & 1 \\ -H_0 \cos \beta_{cp} & 0 \end{vmatrix} = H_0 \cos \beta_{cp}; \quad \Delta_{22}(p) = \begin{vmatrix} Ap & 0 \\ -H_0 \cos \beta_{cp} & 1 \end{vmatrix} = Ap,$$

то вирази передатних функцій набудуть вигляду:

$$W_{11}(p) = \frac{\dot{\alpha}(p)}{N(p)} = \frac{J_3 p}{AJ_3 p^2 + H_0^2 \cos^2 \beta_{cp}};$$

$$W_{21}(p) = \frac{\dot{\beta}(p)}{N(p)} = \frac{H_0 \cos \beta_{cp}}{AJ_3 p^2 + H_0^2 \cos^2 \beta_{cp}};$$

$$W_{12}(p) = \frac{\dot{\alpha}(p)}{L(p)} = \frac{-H_0 \cos \beta_{cp}}{AJ_3 p^2 + H_0^2 \cos^2 \beta_{cp}};$$

$$W_{22}(p) = \frac{\dot{\beta}(p)}{L(p)} = \frac{Ap}{AJ_3 p^2 + H_0^2 \cos^2 \beta_{cp}};$$

$$W_{13}(p) = \frac{\dot{\alpha}(p)}{R(p)} = \frac{-J_3 p \sin \beta_{cp}}{AJ_3 p^2 + H_0^2 \cos^2 \beta_{cp}};$$

$$W_{23}(p) = \frac{\dot{\beta}(p)}{R(p)} = \frac{-H_0 \sin \beta_{cp} \cos \beta_{cp}}{AJ_3 p^2 + H_0^2 \cos^2 \beta_{cp}}.$$

Частотні передатні функції отримаємо, замінюючи у виразах передатних функцій за Лапасом оператор p на $j\omega$:

$$\begin{aligned} W_{11}(j\omega) &= j\sqrt{\frac{J_3}{A}} \frac{1}{H_0 \cos \beta_{cp}} \frac{v}{1-v^2}; & W_{21}(j\omega) &= \frac{1}{H_0 \cos \beta_{cp}} \frac{1}{1-v^2}; \\ W_{12}(j\omega) &= -\frac{1}{H_0 \cos \beta_{cp}} \frac{1}{1-v^2}; & W_{22}(j\omega) &= j\sqrt{\frac{A}{J_3}} \frac{1}{H_0 \cos \beta_{cp}} \frac{v}{1-v^2}; \\ W_{13}(j\omega) &= -j\sqrt{\frac{J_3}{A}} \frac{\sin \beta_{cp}}{H_0 \cos \beta_{cp}} \frac{v}{1-v^2}; & W_{23}(j\omega) &= -\frac{\sin \beta_{cp}}{H_0 \cos \beta_{cp}} \frac{1}{1-v^2}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Тут позначено

$$v = \frac{\omega}{\lambda}; \quad \lambda = \frac{H_0 \cos \beta_{cp}}{\sqrt{AJ_3}}.$$

Виділимо дійсні та уявні частини частотних передатних функцій:

$$U_{11}(\omega) = 0; \quad V_{11}(\omega) = \sqrt{\frac{J_3}{A}} \frac{1}{H_0 \cos \beta_{cp}} \frac{v}{1-v^2};$$

$$U_{12}(\omega) = -\frac{1}{H_0 \cos \beta_{cp}} \frac{1}{1-v^2}; \quad V_{12}(\omega) = 0;$$

$$U_{13}(\omega) = 0; \quad V_{13}(\omega) = -\sqrt{\frac{J_3}{A}} \frac{\sin \beta_{cp}}{H_0 \cos \beta_{cp}} \frac{v}{1-v^2};$$

$$U_{21}(\omega) = \frac{1}{H_0 \cos \beta_{cp}} \frac{1}{1-v^2}; \quad V_{21}(\omega) = 0;$$

$$U_{22}(\omega) = 0; \quad V_{22}(\omega) = \sqrt{\frac{A}{J_3}} \frac{1}{H_0 \cos \beta_{cp}} \frac{v}{1-v^2};$$

$$U_{23}(\omega) = -\frac{\sin \beta_{cp}}{H_0 \cos \beta_{cp}} \frac{1}{1-v^2}; \quad V_{23}(\omega) = 0.$$

Припустимо, що моменти сил змінюються за законом:

$$N(t) = N_s \sin \omega t + N_c \cos \omega t; \quad L(t) = L_s \sin \omega t + L_c \cos \omega t; \quad R(t) = R_m \sin \omega t. \quad (3.26)$$

Повний частинний розв'язок з кожної вихідної величини, внаслідок принципу суперпозиції, складається з трьох доданків, кожен з яких є розв'язком, що відповідає одній з вхідних величин:

$$\dot{\alpha}_{\text{ч.н.}}(t) = \dot{\alpha}_1(t) + \dot{\alpha}_2(t) + \dot{\alpha}_3(t); \quad \dot{\beta}_{\text{ч.н.}}(t) = \dot{\beta}_1(t) + \dot{\beta}_2(t) + \dot{\beta}_3(t).$$

Кожен з цих доданків визначається за правилом, сформульованим у попередньому поділі. Зокрема, матимемо:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_1(t) &= U_{11}N(t) + V_{11}N(t + \frac{\pi}{2\omega}) = \\ &= U_{11}(N_s \sin \omega t + N_c \cos \omega t) + V_{11}[N_s \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) + N_c \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})] = \\ &= U_{11}(N_s \sin \omega t + N_c \cos \omega t) + V_{11}(N_s \cos \omega t - N_c \sin \omega t) = \\ &= [U_{11}N_s - V_{11}N_c] \sin \omega t + [U_{11}N_c + V_{11}N_s] \cos \omega t = \\ &= \sqrt{\frac{J_3}{A}} \frac{1}{H_0 \cos \beta_{cp}} \frac{v}{1-v^2} (-N_c \sin \omega t + N_s \cos \omega t); \\ \dot{\alpha}_2(t) &= U_{12}L(t) + V_{12}L(t + \frac{\pi}{2\omega}) = \frac{1}{H_0 \cos \beta_{cp}} \frac{1}{1-v^2} (L_s \sin \omega t + L_c \cos \omega t); \\ \dot{\alpha}_3(t) &= U_{13}R(t) + V_{13}R(t + \frac{\pi}{2\omega}) = -\sqrt{\frac{J_3}{A}} \frac{\sin \beta_{cp}}{H_0 \cos \beta_{cp}} \frac{v}{1-v^2} R_m \cos \omega t.\end{aligned}$$

Тепер можна записати повний розв'язок з кутової швидкості $\dot{\alpha}$:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_{ч.н}(t) &= \frac{1}{H_0 \cos \beta_{cp}} \frac{1}{1-v^2} \{ [v(N_s - R_m \sin \beta_{cp}) \sqrt{\frac{J_3}{A}} - L_c] \cos \omega t - \\ &\quad - (vN_c \sqrt{\frac{J_3}{A}} + L_s) \sin \omega t \}.\end{aligned}\tag{3.27}$$

Аналогічно визначимо розв'язок з кутової швидкості $\dot{\beta}$:

$$\begin{aligned}\dot{\beta}_{ч.н}(t) &= \frac{1}{H_0 \cos \beta_{cp}} \frac{1}{1-v^2} \{ (N_c + vL_s \sqrt{\frac{A}{J_3}}) \cos \omega t + \\ &\quad + [(N_s - R_m \sin \beta_{cp}) - vL_c \sqrt{\frac{A}{J_3}}] \sin \omega t \}.\end{aligned}$$

3.3. Дослідження стійкості руху нелінійних систем

Досить часто головною метою теоретичного дослідження полягає не у розв'язуванні системи диференціальних рівнянь руху об'єкта вивчення, а у визначенні стійкості руху, що вивчається, і у з'ясуванні параметрів, які впливають на стійкість руху. Така постановка задачі має великий практичний сенс, бо, проектуючи технічну систему чи пристрій, необхідно насамперед створити таку систему або пристрій, рух якої (якого) був би у певному розумінні інваріантним, стійким до дії зовнішніх збурень. Окрім того, досліджувати стійкість набагато простіше за розв'язування рівнянь, особливо нелінійних динамічних систем.

У реальних технічних системах з розвитком техніки дедалі частіше зустрічаються випадки, коли поведінку системи неможливо описати лише лінійними диференціальними рівняннями, бо в реальній системі виникають такі суттєві особливості руху, які не притаманні лінійній стаціонарній системі. Тому в інженерній практиці великої значущості набуває теоретичне дослідження саме *нелінійних систем*, що описуються диференціальними рівняннями, в яких

трапляються члени (сили), нелінійно залежні від узагальнених координат і (або) узагальнених швидкостей.

Наприклад, розглянемо рівняння (2.72) руху гіроскопа у кардановому підвісі. Неважко впевнитися, що вихідна величина – кут β повороту рамки підвісу – входить до членів системи диференціальних рівнянь як аргумент тригонометричних функцій. Крім того, деякі члени рівнянь містять добутки цих тригонометричних функцій, добутки їх і похідних від вихідної величини і добутки похідних. У правій частині міститься добуток вхідної величини R (момент відносно головної осі гіроскопа сил, що діють на ротор) і функції від вихідної ($\sin \beta$). Джерелом нелінійностей можуть бути також моменти сил N , L , R і $M_{ст}$, які в реальних умовах, будучи моментами сил взаємодії між елементами карданового підвісу, можуть залежати або від самих кутів α , β і γ відносного повороту рамок (коли сили взаємодії мають пружний характер), або від кутових швидкостей $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ і $\dot{\gamma}$ (якщо це сили тертя), або й від тих і тих одночасно. Ці залежності можуть бути й нелінійними (наприклад, сухе чи турбулентне тертя).

Зазвичай усі нелінійності розподіляють на два великі класи, підходи до дослідження яких суттєво розрізняються. До першого класу належать *гладкі нелінійності*, які математично відображуються неперервними і диференційовними залежностями від узагальнених координат і швидкостей, до другого класу – *суттєві нелінійності*, у яких їх математична залежність від узагальнених координат чи швидкостей або має розриви першого роду, або похідна цих залежностей за аргументами (q чи \dot{q}) не є неперервною.

Нелінійні системи з гладкими нелінійностями вивчати значно простіше, оскільки при цьому можна застосовувати численні аналітичні методи й, зокрема, подання залежностей у виді степеневого ряду. Тому більшість методів дослідження нелінійних систем *розраховані саме на системи з гладкими нелінійностями*. Зокрема, до них належить *теорія дослідження стійкості за Ляпуновим*.

3.3.1. Досліджування стійкості за Ляпуновим

Будь-яку систему звичайних диференціальних рівнянь можна подати у нормальній формі Коші, тобто у вигляді системи диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно похідних:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = z_1(y_1, y_2, \dots, y_n, t) \\ \frac{dy_2}{dt} = z_2(y_1, y_2, \dots, y_n, t) \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dt} = z_n(y_1, y_2, \dots, y_n, t) \end{cases} \quad (3.28)$$

Змінні y_1, y_2, \dots, y_n , які дозволяють записати систему диференціальних рівнянь n -го порядку у вигляді (3.28), називають *змінними стану* системи, або

фазовими змінними. Кількість змінних стану збігається з порядком системи диференціальних рівнянь.

У рівняннях (3.28) z_i є заданими (у загальному випадку – нелінійними) функціями змінних y_1, y_2, \dots, y_n , а також часу t , які задовольняють умови існування і єдиності розв’язку.

Деякий, цілком визначений стаціонарний рух системи, який описується одним з частинних розв’язків системи (3.28) і досліджується на стійкість, називається *незбуреним рухом*:

$$y_1^*(t) = f_1(t), \dots, y_n^*(t) = f_n(t).$$

Цей частинний розв’язок задовольняє початкові умови: при $t = t_0$

$$y_1^*(t_0) = f_1(t_0), \dots, y_n^*(t_0) = f_n(t_0).$$

Змінимо початкові умови, надаючи початковим значенням $f_i(t)$ незначні прирости ε_i . Тобто нехай тепер

$$y_1(t_0) = f_1(t_0) + \varepsilon_1, \quad \dots, \quad y_n(t_0) = f_n(t_0) + \varepsilon_n. \quad (3.29)$$

Рух системи, який відповідає змінним початковим умовам (3.29), називають *збуреним рухом*, а величини ε_i – *збуреннями*. Визначимо різницю між значенням змінної стану в збуреному і незбуреному рухах:

$$x_i = y_i(t) - f_i(t); \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.30)$$

Нові змінні x_i називаються *відхиленнями* або *варіаціями* величин y_i . Якщо всі відхилення дорівнюють нулю, тобто

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 0; \quad \dots, \quad x_n = 0, \quad (3.31)$$

то збурений рух $y_i(t)$ збігатиметься з незбуреним рухом $f_i(t)$. Інакше кажучи, *незбуреному руху відповідають нульові значення варіацій x_i* .

Далі задля наочності вживатимемо мову геометрії.

Сукупність відхилень x_i у n -вимірному фазовому просторі (просторі станів) змінних x_i (варіацій) визначає точку M (її називають *зображувальною точкою*). У збуреному русі в разі змінювання величин x_i зображувальна точка M описуватиме деяку траєкторію у фазовому просторі. *Незбуреному руху відповідає у цьому просторі початок координат* (див. (3.74)).

Відхилення збуреного руху від незбуреного визначається величинами $x_i(t)$. Якщо всі $x_i(t)$ є малими за модулем, то є малою й сума їх квадратів:

$$x_1^2(t) + x_2^2(t) + \dots + x_n^2(t) = \sum_{i=1}^n x_i^2(t). \quad (3.32)$$

Якщо ж відхилення хоча б однієї координати буде великим, то сума (3.32) буде також великою. Тому як міру відхилення збуреного руху від незбуреного можна використати суму (3.32). Оскільки ця сума є квадратом відстані зображувальної точки M від початку координат, то ця відстань характеризує у цілому відхилення збуреного руху від незбуреного.

Згідно з визначенням збуреного руху і рівностями (3.30) і (3.29) матимемо:

$$x_i(t_0) = x_{0i} = \varepsilon_i; \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

тобто початкові значення відхилень x_i є збуреннями системи.

Визначення стійкості за Ляпуновим

Якщо для будь-якої сфери скільки завгодно малого радіуса ε можна знайти іншу сферу скінченного радіуса δ таку, що в разі розташування збурень в середині останньої сфери

$$\sum_{i=1}^n x_{0i}^2 \leq \delta^2$$

зображувальна точка M протягом усього наступного руху розміщуватиметься в середині першої сфери

$$\sum_{i=1}^n x_i^2(t) < \varepsilon^2,$$

то незбурений рух є стійким, в іншому разі – нестійким.

Стійкість незбуреного руху означає, що за досить малих збурень збурений рух буде скільки завгодно мало відрізнятись від незбуреного. Якщо ж незбурений рух нестійкий, то збурений рух буде віддалятися від нього з плином часу необмежено, якими малими не були б початкові збурення.

Якщо незбурений рух стійкий і при цьому збурений рух за досить малих початкових збурень наближається з плином часу до незбуреного, тобто

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i^2(t) = 0,$$

то незбурений рух є асимптотично стійким.

Може виявитися, що рух є стійким з одних змінних і нестійким з інших. Наприклад, можна показати, що рух штучного супутника Землі є стійким відносно його радіус-вектора (орбітальна стійкість) і нестійкий відносно кутового його положення на орбіті. Тому, кажучи про стійкість руху, необхідно завжди вказувати, відносно яких величин розглядається стійкість.

У випадках, коли рух є асимптотично стійким за будь-яких збурень (не обов'язково малих), він називається асимптотично стійким у цілому.

Іноді стійкість спостерігається не за будь-яких збурень, а за збурень, які підпорядковуються деяким умовам. Така стійкість називається умовною.

Для виведення рівнянь збуреного руху запишемо рівняння (3.28) так:

$$\frac{df_i}{dt} + \frac{dx_i}{dt} = z_i(f_1 + x_1, \dots, f_n + x_n, t).$$

Розкладемо праві частини цих рівнянь у ряд Тейлора за степенями відхилень x_i , припускаючи аналітичність функцій z_i від змінних y_i :

$$\frac{df_i}{dt} + \frac{dx_i}{dt} = z_i(f_1, \dots, f_n, t) + \left(\frac{\partial z_i}{\partial x_1} \right)_{x=0} x_1 + \dots + \left(\frac{\partial z_i}{\partial x_n} \right)_{x=0} x_n + X_i^*,$$

де X_i^* – сукупність членів, що залежать від відхилень x_i у степені, вищому, ніж першому.

Урахуємо, що у незбуреному русі функції $f_i(t)$ як частинні розв'язки задовольняють рівняння (3.71):

$$\frac{df_i}{dt} = z_i(f_1, \dots, f_n, t); \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

На підставі цього матимемо

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + X_i^*; \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3.33)$$

де

$$a_{ik} = \left(\frac{\partial z_i}{\partial x_k} \right)_{x=0}$$

у загальному випадку є функціями часу t , зокрема вони можуть бути сталими.

Рівняння (3.80) називають *диференціальними рівняннями збуреного руху*. Якщо з цих рівнянь вилучити члени X_i^* (їх називають членами вищого порядку мализни), то отримані в результаті рівняння

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n; \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

називають *рівняннями першого наближення*.

Рівняння першого наближення часто дозволяють отримати вірну відповідь на питання про стійкість руху, але також дуже часто висновок, якого можна дійти на основі цих наближених рівнянь, нічого спільного не має з розв'язком початкових рівнянь. Для визначення стійкості за рівняннями першого наближення прислуговуються такі дві теореми Ляпунова.

Теорема Ляпунова про стійкість руху за першим наближенням

Якщо дійсні частини всіх коренів характеристичного рівняння першого наближення є від'ємними, то незбурений рух є асимптотично стійким незалежно від членів вищого порядку мализни.

Теорема Ляпунова про нестійкість руху за першим наближенням

Якщо серед коренів характеристичного рівняння першого наближення є хоча б один з додатною дійсною частиною, то незбурений рух є нестійким незалежно від членів вищого порядку мализни.

Прямий метод Ляпунова. Одним з найефективніших методів дослідження стійкості руху нелінійних систем є прямий метод Ляпунова. Його часто називають також другою методою Ляпунова.

Вивчення прямого методу почнемо з розгляду деяких дійсних функцій $V(x) = V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ відхилень x_i , визначених у зоні простору

$$\sum_{i=1}^n x_{0i}^2 \leq \mu, \quad (3.34)$$

де μ – стале додатне число.

Припускаємо, що в зоні (3.34) ці функції є однозначними, неперервними і обертаються в нуль, коли всі x_1, x_2, \dots, x_n дорівнюють нулю:

$$V(0) = 0. \quad (3.35)$$

Якщо в околі початку координат функція V , окрім нуля, може набувати значення лише одного знака, то її називають *знакосталою* (відповідно *додатною* або *від'ємною*). Якщо ж знакостала функція обертається у нуль лише у випадку, коли всі x_1, x_2, \dots, x_n дорівнюють нулю, то така функція V називається *знакопечною* (відповідно *певнододатною* або *певновід'ємною*). Як неважко збагнути, знакопечна функція має екстремум при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ (мінімум – певнододатна і максимум – певновід'ємна). Знакостала ж функція екстремуму не має тому, що в околі початку координат існують точки, в яких функція V набуває нульових значень.

Уведені у такий спосіб функції $V(x)$, використовувані для дослідження стійкості руху, називають *функціями Ляпунова*.

Нехай функція $V(x)$ є неперервною разом із похідними першого порядку і крім того – знакопечною. Тоді у точці $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ вона має ізольований екстремум, а отже, усі частинні похідні першого порядку в цій точці дорівнюють нулю (необхідні умови існування екстремуму):

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right)_{x=0} = 0; \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.36)$$

Розкладемо функцію V у ряд Маклорена за степенями x_1, x_2, \dots, x_n :

$$V = V(0) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right)_{x=0} x_i + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_i} \right)_{x=0} x_k x_i + \dots,$$

де точками позначені члени вищого порядку. Враховуючи співвідношення (3.35) і (3.36), дістанемо:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n c_{ki} x_k x_i + \dots \quad (3.37)$$

Тут стали числа $c_{ki} = c_{ik}$ визначено рівностями

$$c_{ki} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_i} \right)_{x=0}.$$

Із формули (3.37) випливає, що розклад функції V у ряд за степенями x_1, x_2, \dots, x_n не має членів першого степеня.

Припустимо, що квадратична форма

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n c_{ki} x_k x_i \quad (3.38)$$

набуває додатних значень і в нуль обертається лише за умови $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Тоді, незалежно від членів вищого порядку, за достатньо малих за модулем x_i функція V набуватиме теж додатних значень і обертається у нуль лише якщо, $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Отже, якщо квадратична форма (3.38) є певнододатною, то й функція V буде певнододатною.

Розглянемо матрицю коефіцієнтів квадратичної форми (3.38):

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

і складемо з неї n головних діагональних мінорів

$$\Delta_1 = c_{11}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}; \quad \dots \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}. \quad (3.39)$$

У лінійній алгебрі доводиться такий **критерій Сільвестра**: для того, щоб квадратична форма була певнододатною, необхідно і достатньо, щоб усі головні мінори (3.39) матриці її коефіцієнтів були додатними

$$\Delta_1 > 0; \quad \Delta_2 > 0; \quad \dots \quad \Delta_n > 0. \quad (3.40)$$

Отже, виконання критерію Сільвестра (3.40) для квадратичної частини функції Ляпунова є достатньою (але не необхідною) умовою певнододатності самої функції.

Для дослідження стійкості руху прямим методом Ляпунова використовують основні теореми стійкості, які ми наведемо без доведення.

Теорема Ляпунова про стійкість руху. Якщо для диференціальних рівнянь збуреного руху можна знайти таку знакопевну функцію V відхилень, похідна $\frac{dV}{dt}$ від якої в силу цих рівнянь є знакосталою функцією протилежного знака з V , або тотожно дорівнює нулю, то незбурений рух є стійким.

Теорема Ляпунова про асимптотичну стійкість. Якщо для диференціальних рівнянь збуреного руху можна знайти таку знакопевну функцію V , похідна $\frac{dV}{dt}$ від якої внаслідок цих рівнянь була б знакопечною функцією протилежного знака з V , то незбурений рух є асимптотично стійким.

Теорема Четаєва. Якщо диференціальні рівняння збуреного руху дають змогу знайти функцію V , для якої у скільки завгодно малому околі нуля існує зона $V > 0$, і якщо похідна $\frac{dV}{dt}$ функції внаслідок цих рівнянь є певнододатною або обмеженою у зоні $V > 0$, то незбурений рух є нестійким.

Зазначимо, що ці теореми дають змогу дослідити стійкість щодо всієї сукупності змінних, які входять у рівняння збуреного руху.

Використання основних теорем прямого методу Ляпунова потребує знання (або створення, побудови) функцій, які мають певні властивості. На жаль, загальних методів побудови таких функцій немає. Однак у багатьох випадках такі функції можна сконструювати, якщо відомі інтеграли рівнянь збуреного руху.

Припустимо, що рівняння (3.33) збуреного руху допускає інтеграл

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = h = \text{const}, \quad (3.41)$$

для якого різниця $F(x) - F(0)$ є певнододатною функцією змінних x_1, x_2, \dots, x_n . Тоді як функцію Ляпунова можна прийняти функцію

$$V = F(x_1, x_2, \dots, x_n) - F(0). \quad (3.42)$$

Дійсно, похідна за часом функції V внаслідок рівнянь збуреного руху згідно з інтегралом (3.41) тотожно дорівнює нулю, а тому ця функція задовольнятиме всі умови теореми Ляпунова про стійкість руху.

Інколи диференціальні рівняння збуреного руху допускають кілька інтегралів

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = h_1; \quad \dots \quad F_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = h_m,$$

де h_1, \dots, h_m – сталі інтегрування, причому жоден з них не є певнододатною функцією. Для такого випадку М. Г. Четаєв запропонував шукати функцію V у формі зв'язки інтегралів (3.42) такого вигляду:

$$V = \lambda_1[F_1 - F_1(0)] + \dots + \lambda_m[F_m - F_m(0)] + \chi_1[F_1^2 - F_1^2(0)] + \dots + \chi_m[F_m^2 - F_m^2(0)] \quad (3.43)$$

де $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \chi_1, \dots, \chi_m$ – невизначені сталі. Якщо сталі λ, χ вдається підібрати так, що функція (3.43) буде певнододатною, то вона задовольнятиме усі умови теореми Ляпунова.

Метод Четаєва побудови функції Ляпунова за допомогою зв'язки інтегралів – дуже ефективний. При цьому слід зауважити таке:

- один з коефіцієнтів λ, χ можна обрати довільно, наприклад, покладаючи $\lambda_1 = 1$;
- часто функцію V можна побудувати за допомогою лінійної зв'язки інтегралів, покладаючи усі $\chi_i = 0$;
- члени з квадратами інтегралів слід використовувати лише в разі, якщо лінійна зв'язка недостатня;
- часто інтеграли рівнянь збуреного руху можна будувати, виходячи із загальних міркувань (наприклад, за допомогою загальних теорем механіки), не складаючи самих рівнянь; цей спосіб слід широко використовувати, уникаючи зайвих перетворень.

3.3.2. Достатня і необхідна умова стійкості дзиги (обертового снаряду)

Відомо, що дзига, яка не обертається, падає, і щоб її вісь утримувалася у вертикальному положенні, дзигі потрібно надати досить великої швидкості власного обертання. Артилеристи також знають, що довгастий снаряд, що не обертається, тобто його випущено з гладкоствольної гармати, перекидається, у той час як снаряд, якого випущено з нарізної гармати, тобто якому при пострілі надається велика кутова швидкість навколо його осі симетрії, у польоті стійкий, його вісь завжди прагне суміститися з дотичною до траєкторії.

Виникає питання: яку кутову швидкість власного обертання потрібно надати дзигі (снаряду), щоб вона не падала (снаряд не перекидався).

Оскільки обертальний рух довгастого снаряда, центр мас якого переміщується уздовж настільної траєкторії, і рух дзиги навколо вертикалі описується

однаковими диференціальними рівняннями, достатньо розглянути стійкість руху одного з них, наприклад, стійкість дзиги.

На дзигу (див. рис. 2.6), кутова швидкість власного обертання якої $\dot{\delta}_3$, діють дві зовнішні сили (силами опору нехтуємо): сила тяжіння \mathbf{P} , прикладена до центра мас C дзиги, і реакція \mathbf{R} опори O . Незбуреним рухом, стійкість якого досліджується, вважатимемо рівномірне обертання з кутовою швидкістю $\dot{\delta}_3 = n$ навколо осі симетрії x , коли та збігається з вертикаллю ξ .

У незбуреному русі виконуються співвідношення:

$$\delta_1 = \delta_2 = 0; \quad \dot{\delta}_1 = \dot{\delta}_2 = 0; \quad \dot{\delta}_3 = n = \text{const}.$$

У збуреному русі ці величини будуть змінюватися. Кінетична енергія дзиги визначатиметься виразом

$$2T = (J_e + ml^2)(\omega_Y^2 + \omega_Z^2) + J\omega_X^2,$$

де J_e – екваторіальний момент інерції дзиги відносно центра мас C ; m – маса дзиги; l – відстань від центра мас C до точки підвісу O ; $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$ – проекції абсолютної кутової швидкості дзиги на осі Резаля x, y, z (див. рис. 2.6); J – осьовий момент інерції дзиги.

Задля спрощення позначимо: $J'_e = J_e + ml^2$. З урахуванням виразів (2.39) проекцій кутової швидкості матимемо (див. (2.40)):

$$T = \frac{H^2}{2J} + \frac{1}{2} J'_e (\dot{\delta}_1^2 \cos^2 \delta_2 + \dot{\delta}_2^2), \quad H = J(\dot{\delta}_3 + \dot{\delta}_1 \sin \delta_2).$$

Потенціальна енергія визначається виразом (2.36)

$$\Pi = Pl \cos \delta_1 \cos \delta_2.$$

У розглядуваному випадку можна, не складаючи рівнянь руху, знайти три інтеграли руху.

Два інтеграли визначаються одразу – це інтеграл енергії та інтеграл моменту імпульсу дзиги відносно осі її власного обертання. Оскільки інші зовнішні сили, крім зумовлених гравітацією, на дзигу не діють, то сума кінетичної і потенціальної енергій зберігається незмінною увесь час руху: $T + \Pi = h$. Окрім того, закон моментів стверджує, що $d\mathbf{K}_O/dt = \mathbf{M}_O$, де \mathbf{K}_O – кінетичний момент, \mathbf{M}_O – момент зовнішніх сил, а навколо осі x власного обертання дзиги моменти сил не діють, тому

$$\frac{dK_x}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dH}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad H = H_0 \quad \Rightarrow \quad J(\dot{\delta}_3 + \dot{\delta}_1 \sin \delta_2) = Jn_1,$$

де $n_1 = \dot{\delta}_{30} + \dot{\delta}_{10} \sin \delta_{20}$.

Третій інтеграл – це інтеграл моменту імпульсу навколо вертикалі. Оскільки навколо вертикалі ξ сила тяжіння (єдина зовнішня сила) не утворює моменту, то

$$\frac{dK_\xi}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad K_\xi = K_{\xi 0} \quad \Rightarrow \quad K_\xi = K = \text{const}.$$

Відшукаємо K_ξ . Оскільки маємо

$$K_{\xi} = K_X \cos(x, \xi) + K_Y \cos(y, \xi) + K_Z \cos(z, \xi),$$

а $K_X = H = J(\dot{\delta}_3 + \dot{\delta}_1 \sin \delta_2)$; $K_Y = J'_e \dot{\delta}_1 \cos \delta_2$; $K_Z = J'_e \dot{\delta}_2$, то, користуючись рис. 2.6 для визначення напрямних косинусів, отримуємо:

$$K_{\xi} = J(\dot{\delta}_3 + \dot{\delta}_1 \sin \delta_2) \cos \delta_1 \cos \delta_2 + J'_e (\dot{\delta}_2 \sin \delta_1 - \dot{\delta}_1 \cos \delta_1 \sin \delta_2 \cos \delta_2) = K.$$

Далі вивчатимемо стійкість руху дзиги з величин $\delta_1, \delta_2, \dot{\delta}_1, \dot{\delta}_2, \dot{\delta}_3$. Уведемо такі позначення варіацій:

$$x_1 = \delta_1; x_2 = \dot{\delta}_1; x_3 = \delta_2; x_4 = \dot{\delta}_2; x_5 = \dot{\delta}_3 - n.$$

Тепер інтеграли збуреного руху набудуть вигляду:

$$F_1 = \frac{1}{2} J'_e (x_2^2 \cos^2 x_3 + x_4^2) + \frac{1}{2} J(n + x_5 + x_2 \sin x_3)^2 + Pl \cos x_1 \cos x_3 = h;$$

$$F_2 = n + x_5 + x_2 \sin x_3 = n_1;$$

$$F_3 = J(n + x_5 + x_2 \sin x_3) \cos x_1 \cos x_3 + J'_e (x_4 \sin x_1 - x_2 \cos x_1 \sin x_3 \cos x_3) = K.$$

Через те, що жоден з цих інтегралів не є знакопевною функцією, складемо лінійну в'язку інтегралів: $V = F_1 - F_1(0) + \mu[F_2 - F_2(0)] + \lambda[F_3 - F_3(0)]$, де μ і λ – невизначені сталі коефіцієнти. Підставимо у неї значення F_1, F_2, F_3 , розкладемо їх у ряд за степенями x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 . Після групування членів матимемо:

$$V = [J(n + \lambda) + \mu]x_5 - \frac{1}{2}(Pl + \lambda Jn)x_1^2 + \frac{1}{2}J'_e x_2^2 - \frac{1}{2}(Pl + \lambda Jn)x_3^2 + \frac{1}{2}J'_e x_4^2 + \frac{1}{2}Jx_5^2 + [J(n + \lambda) + \mu - \lambda J'_e]x_2 x_3 + \lambda J'_e x_1 x_4 + \dots,$$

де крапками позначено члени вищого (більшого від другого) порядку.

Для того, щоб функція V була знакопевною, необхідно, насамперед, забезпечити рівність нулю коефіцієнта при першому степені x_5 :

$$J(n + \lambda) + \mu = 0.$$

З врахуванням цього V набуває вигляду:

$$V = \frac{1}{2} a(x_1^2 + x_3^2) + \frac{1}{2} J'_e (x_2^2 + x_4^2) + \frac{1}{2} Jx_5^2 + \lambda J'_e (x_1 x_4 - x_2 x_3) + \dots,$$

де

$$a = -(Pl + \lambda Jn). \quad (3.44)$$

Розкладемо квадратичну частину функції V на три функції:

$$V_1 = \frac{1}{2} a x_1^2 + \frac{1}{2} J'_e x_4^2 + \lambda J'_e x_1 x_4; \quad V_2 = \frac{1}{2} a x_3^2 + \frac{1}{2} J'_e x_2^2 - \lambda J'_e x_2 x_3; \quad V_3 = \frac{1}{2} Jx_5^2.$$

Функція V_3 є певнододатною відносно x_5 , а функції V_1 і V_2 мають однакову структуру. Тому згідно із загальною теорією для забезпечення стійкості незбуреного руху дзиги відносно величин $\delta_1, \delta_2, \dot{\delta}_1, \dot{\delta}_2, \dot{\delta}_3$ достатньо визначити умову, за якої функція V_1 буде певнододатною відносно величин x_1, x_4 (за такої ж умови функція V_2 буде певнододатною відносно величин x_2, x_3).

Запишемо умову Сільвестра для функції V_1 :

$$\Delta_1 = a > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & \lambda J'_e \\ \lambda J'_e & J'_e \end{vmatrix} = J'_e(a - \lambda^2 J'_e) > 0.$$

Користуючись виразом (3.44), зведемо ці нерівності до такого виду:

$$-(Pl + \lambda Jn) > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda < -\frac{Pl}{Jn}; \quad (3.45)$$

$$(a - \lambda^2 J'_e) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(\lambda) = J'_e \lambda^2 + Jn\lambda + Pl < 0. \quad (3.46)$$

Залишилося з'ясувати умови, реалізуючи які, можна підібрати значення λ , що задовольняють умови (3.45) і (3.46).

Якщо дискримінант $D = J^2 n^2 - 4J'_e Pl$ тричлена $f(\lambda)$ додатний, то обидва корені (рис. 3.6) рівняння $f(\lambda) = 0$ будуть дійсні й різні.

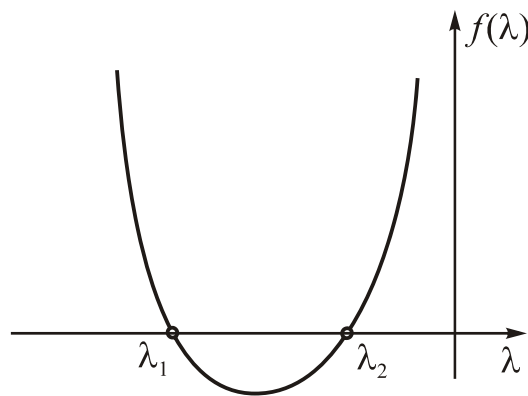


Рис. 3.6. Графік функції $f(\lambda)$

З графіка функції (рис. 3.6) видно, що для усіх λ , що задовольняють нерівності $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, функція $f(\lambda) < 0$, тобто буде виконуватися умова (3.100). Якщо $n > 0$, обидва корені є від'ємними (випадок, зображений на рис. 3.6), а якщо $n < 0$ обидва корені додатні.

Якщо другий визначник Сильвестра додатний, то, як впливає з розгляду (3.46), через те, що $J'_e = J_e + ml^2$ завжди додатний, автоматично забезпечується й додатність першого визначника Сильвестра:

$$a > J'_e \lambda^2 > 0.$$

Отже, якщо кутова швидкість власного обертання дзиги у незбуреному русі задовольняє умову $D > 0$, тобто

$$J^2 n^2 > 4J'_e Pl, \quad (3.47)$$

то для усіх λ , що містяться між λ_1 і λ_2 , функція V буде певнододатною. Її похідна за часом внаслідок рівнянь збуреного руху на основі інтегралів руху дорівнюватиме нулю. Отже, нерівність (3.47) є достатньою умовою стійкості вертикального положення дзиги відносно величин $\delta_1, \delta_2, \dot{\delta}_1, \dot{\delta}_2, \dot{\delta}_3$. Для швидкообертового снаряду в умові (3.47) потрібно замінити добуток Pl на модуль моменту перекидальної пари сил, зумовленої опором набіжного потоку повітря.

Залишається нез'ясованим питання про стійкість вертикального положення дзиги, якщо кутова швидкість власного її обертання у незбуреному русі буде менша за межову величину, що визначена нерівністю (3.47). Покажемо, що *при протилежному сенсі цієї нерівності усталений рух дзиги (обертовий рух снаряда) буде нестійким.*

Скористаємося для цього рівняннями (2.41) руху дзиги, складеними раніше. Вважатимемо, що в них усі моменти зовнішніх сил, за винятком сил тяжіння, дорівнюють нулю. З третього рівняння (2.41) випливає $H = H_0 = Jn$. Розглядаючи лише малі відхилення від вертикалі, перейдемо до лінеаризованих рівнянь руху дзиги:

$$\begin{cases} J'_e \ddot{\delta}_1 + H_0 \dot{\delta}_2 - Pl \delta_1 = 0; \\ J'_e \ddot{\delta}_2 - H_0 \dot{\delta}_1 - Pl \delta_2 = 0. \end{cases} \quad (3.48)$$

Ці рівняння є одночасно й рівняннями першого наближення у варіаціях. Складемо характеристичне рівняння для системи (3.48) рівнянь першого наближення:

$$\begin{vmatrix} J'_e p^2 - Pl & Jnp \\ -Jnp & J'_e p^2 - Pl \end{vmatrix} = 0,$$

або, більш розгорнуто:

$$J_e'^2 p^4 + (J^2 n^2 - 2J'_e Pl) p^2 + P^2 l^2 = 0. \quad (3.49)$$

Для дослідження стійкості дзиги можна використати теорему Ляпунова про нестійкість за першим наближенням. Критерій Гурвіца для рівняння (3.49) не можна застосовувати, бо кілька коефіцієнтів характеристичного рівняння дорівнюють нулю і жоден з визначників не має від'ємного значення.

Кожному кореню $p = v \pm j\mu$ рівняння (3.49) відповідає корінь $p = -v \pm j\mu$ (змінна p у рівняння входить лише у парному степені). Тому, якщо дійсна частина хоча б одного кореня не дорівнює нулю, то обов'язково знайдеться корінь, дійсна частина якого є додатною. Згідно з теоремою Ляпунова про нестійкість за першим наближенням незбурений рух у цьому випадку буде нестійким. Отже, для стійкості незбуреного руху дзиги необхідно, щоб усі корені характеристичного рівняння (3.49) були суто уявними, тобто мали вигляд $p = j\mu$, а величини квадратів коренів p^2 – дійсними від'ємними числами. Але для цього треба, щоб дискримінант D рівняння (3.49) відносно p^2 був додатним:

$$D = (J^2 n^2 - 2J'_e Pl)^2 - 4J_e'^2 P^2 l^2 = J^2 n^2 (J^2 n^2 - 4J'_e Pl) > 0.$$

Звідси видно, що у випадку протилежного змісту нерівності (3.47) дискримінант D буде від'ємним, отже, усталений рух дзиги (обертальний рух снаряду) виявляється нестійким.

3.3.3. Стійкість стаціонарних рухів

Існує великий клас механічних систем, для яких деякі узагальнені координати не входять явно ані у вираз кінетичної енергії, ані у вираз потенціальної

енергії, а узагальнені сили, що відповідають цим координатам, дорівнюють нулю. Такі координати називають *циклічними*, а решту узагальнених координат – *позиційними*, або *визначальними* (вони визначають положення (позицію) механічної системи у просторі).

Так, при розгляданні руху дзиги координата δ_3 (кут повороту дзиги навколо осі її власного обертання) є *циклічною*, а кути δ_1 і δ_2 , які визначають положення осі дзиги у просторі, – *позиційними*.

Для систем з гіроскопами *циклічними* найчастіше є кутові координати, які характеризують власне обертання роторів гіроскопів.

Нехай q_1, \dots, q_s – *позиційні*, а $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ – *циклічні* координати системи. Запишемо рівняння Лагранжа для *циклічних* координат:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_i} = Q_{\varphi_i}; \quad (i = 1, \dots, m). \quad (3.50)$$

Відповідно до визначення *циклічних* координат маємо $\frac{\partial T}{\partial \varphi_i} \equiv \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_i} \equiv Q_{\varphi_i} \equiv 0$. Отже, рівняння Лагранжа (3.50) для *циклічних* координат набувають вигляду:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} = 0; \quad (i = 1, \dots, m).$$

Ці рівняння, вочевидь, припускають перші інтеграли:

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} = c_i = \text{const}; \quad (i = 1, \dots, m), \quad (3.51)$$

де p_i – узагальнені імпульси (кінетичні моменти, моменти кількості руху), що відповідають певним *циклічним* координатам. Рівняння (3.106) показують, що узагальнені імпульси, що відповідають *циклічним* координатам, залишаються сталими протягом усього часу руху.

Перші інтеграли (3.51) можна використати для перетворення рівнянь Лагранжа для *позиційних* координат. Таке перетворення належить Раусу і носить його ім'я. Не зупиняючись на доведенні, наведемо його результати.

Ліві частини інтегралів (3.51) містять *циклічні* швидкості $\dot{\varphi}_i$ лінійно, оскільки T є квадратичною функцією швидкостей. Виразимо з m перших інтегралів (3.51) усі $\dot{\varphi}_i$ через q_k і \dot{q}_k ($k = 1, 2, \dots, s$) і внесемо їх далі у вираз для кінетичної енергії. Результат позначимо через T^* , після чого складемо *функцію Рауса* згідно з формулою:

$$R = T^* - \sum_{i=1}^m c_i \dot{\varphi}_i. \quad (3.52)$$

У вираз (3.107) замість *циклічних* швидкостей $\dot{\varphi}_i$ треба підставити їх значення, отримані з перших інтегралів (3.51). Рівняння для *позиційних* координат q_i набувають вигляду (припускається, що сили, діючи на систему, є потенціальними, у протилежному разі у праві частини потрібно додати ще й узагальнені сили Q_{qk}):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial R}{\partial q_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} = 0; \quad (k = 1, \dots, s). \quad (3.53)$$

Функція Рауса не містить циклічних координат та їх швидкостей і залежить лише від q_k і \dot{q}_k . Тому рух у позиційних координатах можна вивчати за рівняннями (3.53), ігноруючи циклічні координати (певна річ, доти, доки розглядається лише рух з позиційних координат). У зв'язку з цим рух у циклічних координатах називають прихованим рухом, самі циклічні координати – прихованими або ігнорованими, а рух з позиційних координат – явним рухом.

Приклад 1. Виконаємо перетворення Рауса для рівнянь вільного руху дзиги у кутах осциляції.

У цьому випадку всі моменти зовнішніх сил, що діють на дзигу, вважаємо рівними нулю (окрім моменту сили тяжіння). З третього рівняння (2.41) при цьому випливає, що координата δ_3 є циклічною, тому

$$p = \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{\delta}_3} = H = J(\dot{\delta}_3 + \dot{\delta}_1 \sin \delta_2) = H_0.$$

Звідси виходить $\dot{\delta}_3 = H_0 / J - \dot{\delta}_1 \sin \delta_2$. Знаходимо функцію Рауса:

$$\begin{aligned} R = \Gamma^* - H_0 \dot{\delta}_3 &= \frac{1}{2} J'_e (\dot{\delta}_1^2 \cos^2 \delta_2 + \dot{\delta}_2^2) + \frac{H_0^2}{2J} - H_0 (H_0 / J - \dot{\delta}_1 \sin \delta_2) = \\ &= -\frac{H_0^2}{2J} + H_0 \dot{\delta}_1 \sin \delta_2 + \frac{1}{2} J'_e (\dot{\delta}_1^2 \cos^2 \delta_2 + \dot{\delta}_2^2). \end{aligned}$$

Тепер, виконуючи операції відповідно до рівнянь (3.53), величину H_0 (на відміну від H у рівняннях Лагранжа) можна розглядати як не залежну від узагальнених координат і швидкостей. В результаті дійдемо таких рівнянь руху дзиги:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} [J'_e \dot{\delta}_1 \cos^2 \delta_2 + H_0 \sin \delta_2] = mgl \sin \delta_1 \cos \delta_2 \\ J'_e \ddot{\delta}_2 + J'_e \dot{\delta}_1^2 \sin \delta_2 \cos \delta_2 - H_0 \dot{\delta}_1 \cos \delta_2 = mgl \sin \delta_2 \cos \delta \end{cases}$$

Приклад 2. Виконаємо такі самі операції, використовуючи як узагальнені координати кути Ейлера (п. 2.3.2).

Кінетична енергія дзиги у цьому випадку визначається виразом (2.43), а потенціальна енергія – (2.42). Обидві енергії не залежать не тільки від кута ротації ϕ , але й від кута прецесії ψ . Тому у розглядуваному поданні маємо дві циклічні координати (за умови дії лише сили тяжіння) – ϕ і ψ . Визначальною координатою залишається лише одна – кут нутації ϑ .

Маємо два перші інтеграли:

$$p_1 = \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{\psi}} = J'_e \dot{\psi} \sin^2 \vartheta + H \cos \vartheta = K_{\xi_0} = \text{const}.$$

$$p_2 = \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{\phi}} = H = J(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \vartheta) = H_0 = \text{const}.$$

з яких визначимо циклічні кутові швидкості:

$$\dot{\psi} = \frac{K_{\xi 0} - H_0 \cos \vartheta}{J'_e \sin^2 \vartheta}; \quad \dot{\phi} = \frac{H_0}{J} - \cos \vartheta \frac{K_{\xi 0} - H_0 \cos \vartheta}{J'_e \sin^2 \vartheta}.$$

Підставимо ці співвідношення у вираз (2.43) кінетичної енергії

$$2T = \frac{H_0^2}{J} + J'_e \dot{\vartheta}^2 + \frac{(K_{\xi 0} - H_0 \cos \vartheta)^2}{J'_e \sin^2 \vartheta}.$$

і складемо функцію Рауса

$$\begin{aligned} R = T^* - H_0 \dot{\phi} - K_{\xi 0} \dot{\psi} &= \frac{H_0^2}{2J} + \frac{1}{2} J'_e \dot{\vartheta}^2 + \frac{(K_{\xi 0} - H_0 \cos \vartheta)^2}{2J'_e \sin^2 \vartheta} - \\ &- H_0 \left(\frac{H_0}{J} - \cos \vartheta \frac{K_{\xi 0} - H_0 \cos \vartheta}{J'_e \sin^2 \vartheta} \right) - K_{\xi 0} \frac{K_{\xi 0} - H_0 \cos \vartheta}{J'_e \sin^2 \vartheta} = \\ &= -\frac{H_0^2}{2J} + \frac{1}{2} J'_e \dot{\vartheta}^2 - \frac{(K_{\xi 0} - H_0 \cos \vartheta)^2}{2J'_e \sin^2 \vartheta}. \end{aligned}$$

Рівняння руху дзиги з єдиної позиційної координати ϑ відповідно до (3.53) матиме вигляд

$$J'_e \ddot{\vartheta} + \frac{(K_{\xi 0} - H_0 \cos \vartheta)(H_0 - K_{\xi 0} \cos \vartheta)}{J'_e \sin^3 \vartheta} - mgl \sin \vartheta = 0.$$

Зупинимось більш докладно на структурі функції Рауса. В ній можна виокремити три складові частини:

$$R = R_2 + R_1 + R_0,$$

де

$$R_2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^s a_{ki} \dot{q}_k \dot{q}_i \right)$$

– квадратична функція швидкостей,

$$R_1 = \sum_{i=1}^s a_i \dot{q}_i$$

– лінійна частина функції Рауса, а R_0 – частина, яка не залежить від швидкостей. У цих рівностях коефіцієнти $a_{ki} = a_{ik}$, a_i , а також R_0 – функції лише позиційних координат. Не зупиняючись на доведенні, відзначимо, що квадратична форма R_2 є певнододатною.

Із врахуванням зазначеного рівняння (3.53) можна подати так

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R_2}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial R_2}{\partial q_k} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k} + \frac{\partial R_0}{\partial q_k} - \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial R_1}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial R_1}{\partial q_k} \right\}; \quad (k = 1, \dots, s). \quad (3.54)$$

Користуючись формулою

$$\frac{\partial R_1}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\sum_{i=1}^s a_i \dot{q}_i \right) = a_k$$

і враховуючи, що a_k складним чином залежать від часу через q_1, \dots, q_s , дістаємо згідно з правилом диференціювання складних функцій:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R_1}{\partial \dot{q}_k} = \frac{d}{dt} [a_k(q_1, \dots, q_s)] = \frac{\partial a_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^s \frac{\partial a_k}{\partial q_i} \dot{q}_i.$$

Знайдемо тепер частинну похідну від R_1 за узагальненою координатою:

$$\frac{\partial R_1}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_{i=1}^s a_i \dot{q}_i \right) = \sum_{i=1}^s \frac{\partial a_i}{\partial q_k} \dot{q}_i.$$

Отже, вираз у фігурних дужках у рівняннях (3.113) можна подати так:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R_1}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial R_1}{\partial q_k} = \frac{\partial a_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial a_k}{\partial q_i} - \frac{\partial a_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_i = \frac{\partial a_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^s g_{ki} \dot{q}_i,$$

де гіроскопічні коефіцієнти g_{ki} визначено рівностями

$$g_{ki} = \frac{\partial a_k}{\partial q_i} - \frac{\partial a_i}{\partial q_k}; \quad (k, i = 1, \dots, s).$$

Тепер рівняння (3.54) зводяться до таких:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R_2}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial R_2}{\partial q_k} = -\frac{\partial a_k}{\partial t} - \frac{\partial W}{\partial q_k} - \sum_{i=1}^s g_{ki} \dot{q}_i; \quad (k = 1, \dots, s), \quad (3.55)$$

де позначено

$$W = \Pi - R_0. \quad (3.56)$$

Рівнянням (3.55) можна співвіднести деяку систему (її називають *зведеною системою*), у якій функції R_2 і W відіграють ролі кінетичної і потенціальної енергій, а узагальнені сили визначаються рівностями

$$Q_k = -\frac{\partial a_k}{\partial t} - \frac{\partial W}{\partial q_k} - \sum_{i=1}^s g_{ki} \dot{q}_i. \quad (3.57)$$

Останні члени у правій частині (3.57) називають *гіроскопічними силами*:

$$\Gamma_k = \sum_{i=1}^s g_{ki} \dot{q}_i. \quad (3.58)$$

З визначення гіроскопічних коефіцієнтів g_{ki} видно, що їх матриця G (взята по сукупності всіх s рівнянь) є кососиметричною:

$$g_{ki} = \frac{\partial a_k}{\partial q_i} - \frac{\partial a_i}{\partial q_k} = -\left(\frac{\partial a_i}{\partial q_k} - \frac{\partial a_k}{\partial q_i} \right) = -g_{ik},$$

тобто має вигляд

$$G = \begin{bmatrix} 0 & g_{12} & g_{13} & \cdots & g_{1s} \\ -g_{12} & 0 & g_{23} & \cdots & g_{2s} \\ -g_{13} & -g_{23} & 0 & \cdots & g_{3s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -g_{1s} & -g_{2s} & -g_{3s} & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Зазначимо, що за відсутності гіроскопічних сил (це, зазвичай, буває якщо $R_1 \equiv 0$) система називається *гіроскопічно незв'язаною*.

Основна властивість *гіроскопічних сил* (3.58) полягає у тому, що вони, будучи лінійними функціями узагальнених швидкостей позиційних координат,

завжди у сукупності *не виконують роботи на дійсних переміщеннях*. Цю властивість покладено в основу їх визначення Томсоном і Тетом. Гіроскопічні сили трапляються не лише у системах з циклічними координатами (окремий випадок їх – системи, що містять гіроскопи), а і в інших фізичних системах.

За деяких умов матеріальна система, яка має m циклічних і s позиційних координат, може здійснювати *стаціонарний рух*, за якого *зберігають постійні значення як усі циклічні швидкості, так і усі позиційні координати*.

Умови, за яких здійснюється стаціонарний рух, легко визначити з таких очевидних міркувань.

Згідно з визначенням у стаціонарному русі всі позиційні координати зберігають сталі значення

$$q_k(t) = q_{k0} = \text{const}; \quad (k = 1, \dots, s).$$

Це означає, що зведена система перебуває у стані спокою. Але для цього, крім того, що початкові швидкості позиційних координат мають дорівнювати нулю

$$\dot{q}_k(0) = 0; \quad (k = 1, \dots, s),$$

необхідно й достатньо, щоб усі узагальнені сили (3.117) також дорівнювали нулю, тобто

$$\left. \frac{\partial a_k}{\partial t} \right|_{q_0} = 0; \quad \left. \frac{\partial W}{\partial q_k} \right|_{q_0} = 0; \quad (k = 1, \dots, s).$$

Беручи до уваги вираз (3.56) для потенціальної енергії зведеної системи, останню умову можна трансформувати до такої:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} \right|_{q_0} = \left. \frac{\partial R_0}{\partial q_k} \right|_{q_0}; \quad (k = 1, \dots, s). \quad (3.59)$$

Отже, для здійсненності стаціонарного руху необхідно і достатньо:

- щоб система була стаціонарною, тобто всі коефіцієнти її рівнянь (параметри системи) не залежали від часу;
- щоб початкові значення швидкостей позиційних координат дорівнювали нулю;
- щоб початкові значення позиційних координат задовольняли умови (3.59).

Зазначимо, що у функцію R_0 входять сталі c_i циклічних інтегралів (3.51), тому значення q_{i0} у стаціонарному русі залежатимуть від значень циклічних швидкостей $\dot{\phi}_i$, що містяться у c_i .

Перейдемо до визначення умов стійкості стаціонарного руху, який вважаємо незбуреним рухом. Не порушуючи узагальненості, можна припустити, що у стаціонарному русі всі позиційні координати дорівнюють нулю. Тоді рівняння руху (3.55) зведеної системи будуть диференціальними рівняннями збуреного руху відносно позиційних координат q_k і їх швидкостей \dot{q}_k .

Стійкість стаціонарного руху визначають за такими теоремами.

Теорема Рауса. *Якщо у стаціонарному русі потенціальна енергія $W = \Pi - R_0$ зведеної системи має мінімум, то цей рух є стійким з позиційних*

координат q_k і їх швидкостей \dot{q}_k , в усякому разі за збурень, які не порушують циклічних інтегралів (3.51).

Доповнення Ляпунова до теореми Рауса. Якщо потенціальна енергія $W = \Pi - R_0$ зведеної системи має мінімум як за наданих $p_i = c_i$, що відповідають розглядуваному стаціонарному руху, так і за досить близьких до наданих значень $p_i = c_i + \eta_i$, де η_i – малі за модулем, причому змінні q_k , які забезпечують мінімум, є неперервними функціями величин p_i , то цей рух є стійким з позиційних координат q_k і їх швидкостей \dot{q}_k .

Примітка. Циклічні інтеграли (3.51) містять позиційні та циклічні швидкості лінійно. Тому зі стійкості стаціонарного руху з позиційних координат q_k і їх швидкостей \dot{q}_k впливає стійкість й відносно циклічних швидкостей $\dot{\phi}_i$ (але не координат ϕ_i !).

Теорема Четаєва. Якщо для ізольованого стаціонарного руху гіроскопічно незв'язаної системи за фіксованих циклічних інтегралів (3.51) потенціальна енергія W , яка припускається аналітичною функцією змінних q_k , не має мінімуму, то стаціонарний рух є нестійким.

При практичному застосуванні теореми Рауса слід мати на увазі, що за виконання її умов функція W буде певнододатною. Тому тут раціонально використовувати звичайний спосіб розкладання функції в ряд з подальшим застосуванням критерію Сильвестра.

3.3.4. Стійкість регулярної прецесії дзиги

Для дослідження стійкості регулярної прецесії дзиги скористаємося результатами прикладу 2 (п. 3.3.3). У кутах Ейлера функцію Рауса можна подати у вигляді

$$R = \frac{1}{2} J'_e \dot{\vartheta}^2 - \frac{(K_{\xi 0} - H_0 \cos \vartheta)^2}{2J'_e \sin^2 \vartheta},$$

з якої вилучено несуттєву сталу $\left(-\frac{H_0^2}{2J}\right)$. Очевидно, у розглядуваному випадку

$$R_2 = \frac{1}{2} J'_e \dot{\vartheta}^2; \quad R_1 = 0; \quad R_0 = -\frac{(K_{\xi 0} - H_0 \cos \vartheta)^2}{2J'_e \sin^2 \vartheta}.$$

Складемо потенціальну енергію зведеної системи:

$$W = \Pi - R_0 = mgl \cos \vartheta + \frac{(K_{\xi 0} - H_0 \cos \vartheta)^2}{2J'_e \sin^2 \vartheta}$$

і запишемо умову (3.59) здійсненності стаціонарного руху:

$$\left. \frac{\partial W}{\partial \vartheta} \right|_{\vartheta_0} = -mgl \sin \vartheta_0 + \frac{(K_{\xi 0} - H_0 \cos \vartheta_0)(H_0 - K_{\xi 0} \cos \vartheta_0)}{J'_e \sin^3 \vartheta_0} = 0. \quad (3.60)$$

Для визначення початкових умов, які задовольняють умову (3.60), підставимо в неї значення K_{ξ_0} , а в нього – початкові значення узагальнених координат та їхніх швидкостей. Матимемо:

$$K_{\xi_0} - H_0 \cos \vartheta_0 = J'_e \dot{\psi}_0 \sin^2 \vartheta_0 + H_0 \cos \vartheta_0 - H_0 \cos \vartheta_0 = J'_e \dot{\psi}_0 \sin^2 \vartheta_0;$$

$$\begin{aligned} H_0 - K_{\xi_0} \cos \vartheta_0 &= H_0 - (J'_e \dot{\psi}_0 \sin^2 \vartheta_0 + H_0 \cos \vartheta_0) \cos \vartheta_0 = \\ &= (H_0 - J'_e \dot{\psi}_0 \cos \vartheta_0) \sin^2 \vartheta_0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{(K_{\xi_0} - H_0 \cos \vartheta_0)(H_0 - K_{\xi_0} \cos \vartheta_0)}{J'_e \sin^3 \vartheta_0} &= \frac{J'_e \dot{\psi}_0 \sin^2 \vartheta_0 (H_0 - J'_e \dot{\psi}_0 \cos \vartheta_0) \sin^2 \vartheta_0}{J'_e \sin^3 \vartheta_0} = \\ &= \dot{\psi}_0 \sin \vartheta_0 (H_0 - J'_e \dot{\psi}_0 \cos \vartheta_0). \end{aligned}$$

Використовуючи це у співвідношенні (3.60), дійдемо:

$$-\sin \vartheta_0 (J'_e \dot{\psi}_0^2 \cos \vartheta_0 - H_0 \dot{\psi}_0 + mgl) = 0.$$

Якщо $\vartheta_0 \neq 0$, то умова стаціонарності руху матиме вигляд

$$J'_e \dot{\psi}_0^2 \cos \vartheta_0 - H_0 \dot{\psi}_0 + mgl = 0.$$

Вона визначає ті значення кутової швидкості прецесії, які забезпечують рівномірне обертання осі власного обертання дзиги навколо вертикалі по конусу з кутом розхилу ϑ_0 . Такий рух називається *регулярною прецесією*. У цілому початкові умови для здійсненості регулярної прецесії дзиги навколо вертикалі мають вигляд:

$$\vartheta(0) = \vartheta_0; \quad \dot{\vartheta}(0) = 0; \quad \dot{\gamma}(0) = \dot{\gamma}_0; \quad \psi(0) = \psi_0;$$

$$(\dot{\psi}_0)_{1,2} = \frac{H_0}{2J'_e \cos \vartheta_0} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4mglJ'_e \cos \vartheta_0}{H_0^2}} \right].$$

Дослідимо стійкість регулярної прецесії дзиги.

Для цього припустимо, що $\vartheta(0) = \vartheta_0 + x$, внесемо це у потенціальну енергію W зведеної системи замість ϑ і розкладемо функцію $W - W_0$ у ряд за степенями відхилення x :

$$W - W_0 = \left. \frac{\partial W}{\partial \vartheta} \right|_{\vartheta_0} x + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 W}{\partial \vartheta^2} \right|_{\vartheta_0} x^2 + \dots,$$

де крапками позначено члени, які містять x у степені вищому ніж другий.

Перший доданок у правій частині на підставі (3.60) дорівнює нулю.

Другий доданок у результаті перетворень можна подати у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial \vartheta^2} &= -mgl \cos \vartheta + \\ &+ \frac{1}{J'_e \sin^6 \vartheta} \left\{ \sin^3 \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} [(K_{\xi_0} - H_0 \cos \vartheta)(H_0 - K_{\xi_0} \cos \vartheta)] - \right. \\ &\quad \left. - 3 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta (K_{\xi_0} - H_0 \cos \vartheta)(H_0 - K_{\xi_0} \cos \vartheta) \right\} = \\ &= -mgl \cos \vartheta + \frac{1}{J'_e \sin^4 \vartheta} \left\{ \sin^2 \vartheta (H_0^2 + K_{\xi_0}^2 - 2H_0 K_{\xi_0} \cos \vartheta) - \right. \end{aligned}$$

$$- 3 \cos \vartheta (K_{\xi 0} - H_0 \cos \vartheta)(H_0 - K_{\xi 0} \cos \vartheta) \}.$$

У точці $\vartheta = \vartheta_0$, з урахуванням (3.60), цей вираз трансформується у такий:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 W}{\partial \vartheta^2} \right|_{\vartheta_0} &= -mgl \cos \vartheta_0 + \frac{H_0^2 + K_{\xi 0}^2 - 2H_0 K_{\xi 0} \cos \vartheta_0}{J'_e \sin^2 \vartheta_0} - \\ &\quad - \frac{3 \cos \vartheta_0}{J'_e \sin^4 \vartheta_0} (K_{\xi 0} - H_0 \cos \vartheta_0)(H_0 - K_{\xi 0} \cos \vartheta_0) = \\ &= -\frac{4 \cos \vartheta_0}{J'_e \sin^4 \vartheta_0} (K_{\xi 0} - H_0 \cos \vartheta_0)(H_0 - K_{\xi 0} \cos \vartheta_0) + \\ &\quad + \frac{H_0^2 + K_{\xi 0}^2 - 2H_0 K_{\xi 0} \cos \vartheta_0}{J'_e \sin^2 \vartheta_0} = \\ &= \frac{1}{J'_e \sin^2 \vartheta_0} \left\{ (K_{\xi 0} - H_0 \cos \vartheta_0)^2 + \frac{[H_0(1 + \cos^2 \vartheta_0) - 2K_{\xi 0} \cos \vartheta_0]^2}{\sin^2 \vartheta_0} \right\}. \end{aligned}$$

Оскільки за всіх $\vartheta_0 \neq 0$ і $\vartheta_0 \neq \pi$ коефіцієнт при x^2 є додатним, то функція W має у стаціонарному русі мінімум. Крім того, для всіх ϑ_0 за одних і тих самих умов розв'язок рівняння (3.121) неперервно залежить від сталих H_0 і $K_{\xi 0}$ інтегралів рівнянь. Тому на підставі теореми Рауса і доповнення Ляпунова *регулярна прецесія дзиги є стійкою* зі змінних ϑ , $\dot{\vartheta}$, ψ і ϕ .

3.3.5. Дослідження стійкості за структурою сил

Стійкість руху здебільшого визначається структурою сил, під якими розуміють окремі складові диференціальні рівнянь, що описують рух.

Будемо вважати, що дослідження стійкості руху з величин x_k і \dot{x}_k зводиться до аналізу диференціальних рівнянь збуреного руху, які можна звести до одного матричного рівняння виду:

$$A\ddot{X} + B_1\dot{X} + C_1X = F, \quad (3.61)$$

де $X = [x_1, x_2, \dots, x_s]^T$ — матриця-стовпець варіацій узагальнених координат системи; A, B_1, C_1 — відомі квадратні матриці порядку s зі сталими коефіцієнтами; F — матриця-стовпець $F = [f_1, f_2, \dots, f_s]^T$ з елементами f_k , які містять x_k і \dot{x}_k у степенях не нижчих від другого і обертаються у нуль, якщо всі x_k і \dot{x}_k дорівнюють нулю. Крім того, вважатимемо, що матриця A є симетричною і квадратична форма

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2} \dot{X}^T A \dot{X} &= \frac{1}{2} (a_{11} \dot{x}_1^2 + a_{22} \dot{x}_2^2 + \dots + a_{ss} \dot{x}_s^2 + \\ &\quad + 2a_{12} \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \dots + 2a_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k) = \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^s a_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k; \quad (a_{ik} = a_{ki}) \end{aligned} \quad (3.62)$$

є певнододатною.

Рівнянню (3.61) можна зіставити деяку матеріальну систему, у якій змінні x_1, x_2, \dots, x_s є координатами, їх похідні за часом $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_s$ – швидкостями, а квадратична форма (3.62) – кінетичною енергією. Часто ця квадратична форма й насправді є кінетичною енергією реальної системи, але у багатьох випадках форма (3.62) утворюється в результаті перетворень рівнянь руху, як це відбувалося при складанні рівнянь з перетворенням Рауса.

Складові матриць-стовпців у лівій і правій частинах рівняння (3.61) можна трактувати як сили, причому в деяких випадках вони є реальними силами, а в інших – лише деякими членами рівнянь.

Надалі для простоти квадратичну форму (3.62) називатимемо кінетичною енергією, змінні x_k – координатами системи, їх похідні за часом \dot{x}_k – швидкостями, матриці $A\ddot{X}$, $B_1\dot{X}$, C_1X , F і їхні елементи – силами. При цьому сили $A\ddot{X}$ називатимемо *силами інерції*, а сили F – *нелінійними силами*. Розкладемо матриці B_1 і C_1 на симетричні і кососиметричні складові:

$$B_1 = B + G; \quad C_1 = C + P,$$

де симетричні B і C і кососиметричні G і P матриці визначаються рівностями:

$$B = B^T = \frac{B_1 + B_1^T}{2}; \quad G = -G^T = \frac{B_1 - B_1^T}{2};$$

$$C = C^T = \frac{C_1 + C_1^T}{2}; \quad P = -P^T = \frac{C_1 - C_1^T}{2}.$$

Тепер рівняння (3.61) матиме вигляд

$$A\ddot{X} + B\dot{X} + G\dot{X} + CX + PX = F. \quad (3.63)$$

Сили CX , пропорційні координатам і з симетричною матрицею коефіцієнтів $C = [c_{ik}]$, називаються *потенціальними* або *консервативними*. Зазвичай вони є просто лінійними частинами реальних потенціальних сил тяжіння, пружності тощо (нелінійні частини потенціальних сил входять до матриці F). Квадратичну форму

$$\Pi = \frac{1}{2} X^T C X$$

назвемо *потенціальною енергією* системи. Насправді вона є здебільшого лише частиною реальної потенціальної енергії.

Складемо за допомогою симетричної матриці $B = [b_{ik}]$ квадратичну форму

$$\Phi = \frac{1}{2} \dot{X}^T B \dot{X}.$$

Якщо ця функція є невід'ємною, то її називають *функцією розсіювання енергії* або *дисипативною функцією Релея*, а відповідні сили $B\dot{X}$ – *дисипативними силами*. Якщо квадратична форма Φ є не просто додатною, а певнододатною, то *дисипація* називається *повною*, у противному разі – *неповною*. Якщо ж функція Φ може набувати від'ємних значень, то серед сил, що входять до матриці $B\dot{X}$, є *прискорювальні сили*. Зазвичай дисипативні сили виникають приро-

дним шляхом під час руху тіл у середовищі, яке чинить опір, в електричних колах – за наявності омичного опору тощо. Прискорювальні сили утворюються за допомогою спеціальних пристроїв.

Сили $G\dot{X}$, які лінійно залежать від швидкостей і коефіцієнти при яких утворюють косиметричну матрицю $G = [g_{ik}]$, називають *гіроскопічними силами*. Найчастіше ці сили зустрічаються у системах, що містять гіроскопи, але можуть утворюватися і в системах без гіроскопів.

Сили PX , які лінійно залежать від координат і коефіцієнти при яких утворюють косиметричну матрицю $P = [p_{ik}]$, не мають точно встановленої назви. У літературі їх називають *циркуляційними, неконсервативними, силами радіальної корекції, псевдогіроскопічними*. Називатимемо їх неконсервативними, пам'ятаючи, що термін цей не зовсім точний, бо всі сили, окрім потенціальних, не є консервативними.

Приклад. Розглянемо гіроскоп у кардановому підвісі, зображений на рис. 3.7.

Його рівняння (2.57) були виведені раніше.

Припустимо:

1) моменти сил, що діють на ротор гіроскопа навколо головної осі зрівноважені:

$$R \equiv 0;$$

2) уздовж зовнішньої і внутрішньої осей карданового підвісу діють моменти сил в'язкого тертя

$$N_1 = -f_2 \dot{\alpha}; \quad L_1 = -f_1 \dot{\beta};$$

3) уздовж зовнішньої осі підвісу діє момент сил міжрамкової корекції, пропорційний куту відхилення внутрішньої рамки (для цього, очевидно, цей кут має вимірюватися датчиком кута, а електричний сигнал з цього датчика – подаватися до входу датчика моментів на зовнішній осі підвісу, який й утворює момент сил):

$$N_2 = k\beta;$$

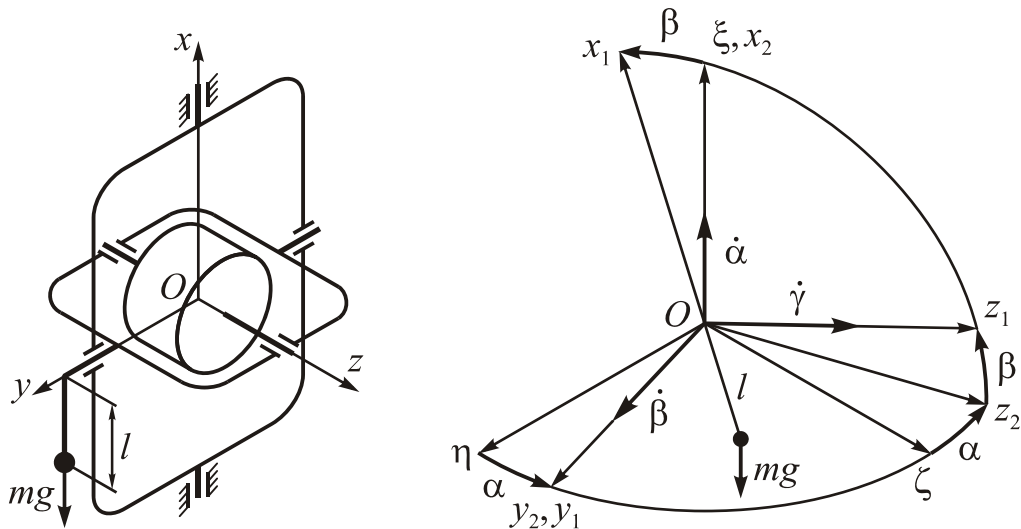


Рис. 3.7. ГКП зі зміщеним центром ваги

4) центр мас гіроскопа зміщений вздовж осі, перпендикулярній як внутрішній осі підвісу, так й головній осі гіроскопа; у результаті відносно внутрішньої осі підвісу утворюється момент сил тяжіння

$$L_2 = -mgl \sin \beta;$$

5) кути α і β є малими

$$x = \alpha; \quad y = \beta.$$

Лінеаризуємо рівняння (2.57) за заданих умов:

$$\begin{cases} (J_1 + J_2)\ddot{x} + f_2\dot{x} + H_0\dot{y} - ky = F_1(y, \dot{x}, \dot{y}) \\ J_3\ddot{y} + f_1\dot{y} - H_0\dot{x} + mgl \cdot y = F_2(y, \dot{x}, \dot{y}) \end{cases}$$

Тут $F_1(y, \dot{x}, \dot{y})$ і $F_2(y, \dot{x}, \dot{y})$ – нелінійні сили.

Подамо цю систему диференціальних рівнянь у матричній формі:

$$A\ddot{X} + B_1\dot{X} + C_1X = F(X),$$

де $A = \begin{bmatrix} J_1 + J_2 & 0 \\ 0 & J_3 \end{bmatrix}$ – симетрична матриця коефіцієнтів інерції;

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} f_2 & H_0 \\ -H_0 & f_1 \end{bmatrix}; \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & -k \\ 0 & mgl \end{bmatrix}.$$

Виокремимо сили демпфірування, гіроскопічні, потенціальні і неконсервативні:

– матриця демпфірувальних сил

$$B = \frac{1}{2}(B_1 + B_1^T) = \begin{bmatrix} f_2 & 0 \\ 0 & f_1 \end{bmatrix};$$

– матриця гіроскопічних сил

$$G = \frac{1}{2}(B_1 - B_1^T) = \begin{bmatrix} 0 & H_0 \\ -H_0 & 0 \end{bmatrix};$$

– матриця консервативних сил

$$C = \frac{1}{2}(C_1 + C_1^T) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{k}{2} \\ -\frac{k}{2} & mgl \end{bmatrix};$$

– матриця сил радіальної корекції

$$P = \frac{1}{2}(C_1 - C_1^T) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{k}{2} \\ \frac{k}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Функція Релея у цьому випадку має вигляд $\Phi = \frac{1}{2}(f_2\dot{x}^2 + f_1\dot{y}^2)$. Вона є певнододатною, і тому за її допомогою відображуються сили повної дисипації.

Перш ніж дослідити стійкість незбуреного руху ($x_k = 0$ і $\dot{x}_k = 0$), перейдемо до нових змінних $Z = [z_1, z_2, \dots, z_s]^T$ згідно з формулою

$$X = \Lambda Z,$$

де Λ – деяка квадратна неособлива матриця.

Підстановка у рівняння (3.127) дає

$$A\Lambda\ddot{Z} + B\Lambda\dot{Z} + G\Lambda\dot{Z} + C\Lambda Z + P\Lambda Z = F(\Lambda Z).$$

Помножимо зліва обидві частини цього рівняння на транспоновану матрицю Λ^T :

$$\Lambda^T A\Lambda\ddot{Z} + \Lambda^T B\Lambda\dot{Z} + \Lambda^T G\Lambda\dot{Z} + \Lambda^T C\Lambda Z + \Lambda^T P\Lambda Z = D, \quad (3.64)$$

де $D = \Lambda^T F(\Lambda Z)$ – матриця-стовпець, елементи якої містять z_k і \dot{z}_k у степені, вищому за перший.

Урахуємо, що матриці A і C є симетричними і, окрім того, матриці A відповідає певнододатна квадратична форма. Тоді, як відомо з лінійної алгебри, існує така неособлива матриця Λ , яка перетворює одночасно матрицю A в одиничну, а матрицю C – в діагональну. Нехай Λ є саме такою матрицею. Тоді матимемо:

$$\Lambda^T A\Lambda = E; \quad \Lambda^T C\Lambda = C_0,$$

де C_0 – діагональна, а E – одинична матриці.

Неважко показати, що матриця $(\Lambda^T B\Lambda)$ буде симетричною, а матриці $(\Lambda^T G\Lambda)$ і $(\Lambda^T P\Lambda)$ – кососиметричними. Дійсно, на підставі правила транспонування добутку матриць маємо:

$$(\Lambda^T B\Lambda)^T = (B\Lambda)^T (\Lambda^T)^T = \Lambda^T B^T \Lambda.$$

Оскільки матриця B симетрична, то $B^T = B$, і отже, $(\Lambda^T B\Lambda)^T = \Lambda^T B\Lambda$, що і доводить симетричність матриці $\Lambda^T B\Lambda$. Аналогічно можна довести, що матриці $(\Lambda^T G\Lambda)$ і $(\Lambda^T P\Lambda)$ є кососиметричними, спираючись на відому кососиметричність матриць G і P .

Ураховуючи це і беручи до уваги, що $E\ddot{Z} = \ddot{Z}$, рівняння (3.64) можна записати так:

$$\ddot{Z} + B\dot{Z} + G\dot{Z} + C_0 Z + PZ = D, \quad (3.65)$$

де для простоти симетрична матриця $\Lambda^T B\Lambda$ і кососиметричні матриці $\Lambda^T G\Lambda$ та $\Lambda^T P\Lambda$ позначено тими самими літерами B , G і P відповідно.

Можна, проте, підібрати таку матрицю Λ , яка перетворить матрицю A в одиничну, а матрицю B – у діагональну, або, залишаючи матрицю A симетричною, перетворити одночасно матриці B і C у діагональні (у разі повної дисипації це можливо). Тоді матимемо ще дві форми рівняння (3.64)

$$\ddot{Z} + B_0\dot{Z} + G\dot{Z} + CZ + PZ = D; \quad (3.66)$$

$$A\ddot{Z} + B_0\dot{Z} + G\dot{Z} + C_0 Z + PZ = D, \quad (3.67)$$

де C_0 і B_0 – діагональні матриці з дійсними елементами:

$$C_0 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_s \end{bmatrix}; \quad B_0 = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_s \end{bmatrix}.$$

Отже, за допомогою перетворення $X = \Lambda Z$ рівняння (3.63) можна звести до однієї з трьох дійсних форм (3.65), (3.66) або (3.67), причому потенціальні, дисипативні, гіроскопічні та неконсервативні сили перетворюються у сили тієї самої структури.

Очевидно, що зі стійкості (нестійкості) відносно координат z_k і швидкостей \dot{z}_k впливає стійкість (нестійкість) відносно координат x_k і швидкостей \dot{x}_k і навпаки.

Між початковими матрицями B і C і отриманими з них матрицями B_0 і C_0 існують співвідношення:

$$\begin{aligned} \det(B_0) &= b_1 b_2 \dots b_s = \Delta^2 \det(B); \\ \det(C_0) &= c_1 c_2 \dots c_s = \Delta^2 \det(C), \end{aligned} \quad (3.68)$$

де $\Delta = \det(\Lambda)$ – визначник матриці перетворення.

При відсутності прискорювальних сил серед елементів матриці B немає від'ємних, а в разі повної дисипації усі b_k додатні. Якщо ж прискорювальні сили існують, то серед елементів b_k є від'ємні. За мінімуму потенціальної енергії Π усі коефіцієнти c_i додатні, а за максимуму Π серед них є від'ємні.

Припустимо, що на систему діють лише потенціальні сили CX , і не діють інші сили ($B = G = P = F = 0$). Тоді, користуючись формою (3.65), рівняння збуреного руху можна подати у такому вигляді:

$$\ddot{Z} + C_0 Z = 0.$$

Це матричне рівняння є еквівалентним s скалярним рівнянням

$$\begin{cases} \ddot{z}_1 + c_1 z_1 = 0; \\ \dots \\ \ddot{z}_s + c_s z_s = 0. \end{cases} \quad (3.69)$$

Координати z_i , рівняння збуреного руху за яких мають вигляд рівнянь (3.69), називають *нормальними координатами*.

Рівняння (3.69) не зв'язані одне з одним і інтегруються незалежно одне від одного. Маємо:

1) якщо $c_k > 0$, то розв'язок має вигляд

$$z_k = A_k \sin(\mu_k t + \varepsilon_k); \quad (\mu_k = \sqrt{c_k});$$

2) якщо $c_k < 0$, то

$$z_k = A_k e^{v_k t} + B_k e^{-v_k t}; \quad (v_k = \sqrt{-c_k}).$$

З рівнянь (3.69) видно, що якщо всі числа c_k додатні, то незбурений рух $z_k = 0$, $\dot{z}_k = 0$ є стійким з нормальних координат z_k і швидкостей \dot{z}_k (а отже, й відносно x_i і \dot{x}_i). Кожному від'ємному числу c_k відповідає нестійка координа-

та z_k , і отже, незбурений рух за наявності $c_k < 0$ буде нестійким (причому за будь-яких нелінійних сил D). У зв'язку з цим числа c_k називаються *коефіцієнтами стійкості системи*, а кількість від'ємних c_k – *ступенем нестійкості*.

Значущими є не кількість від'ємних c_k , а її парність. Очевидно, відповідно до другої рівності (3.68) можна визначити парність ступеня нестійкості системи не вдаючись безпосередньо до переходу до нормальних координат. *Якщо визначник C потенціальних сил первинних рівнянь збуреного руху додатний, то ступінь нестійкості системи є парним, якщо ж $\det C < 0$, – то непарним.*

Приклад. Розглянемо ГКП зі зміщеним центром мас і радіальною корекцією (див. приклад на початку поділу).

Матриця потенціальних сил для цього випадку має вигляд:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{k}{2} \\ -\frac{k}{2} & mgl \end{bmatrix}.$$

Її визначник $\det C = -k^2/4$ – від'ємний, що означає, що ГКП з міжрамковою корекцією:

- 1) є нестійким (якщо відсутні як гіроскопічні, так і дисипативні, неконсервативні і нелінійні сили);
- 2) ступінь його нестійкості є непарним.

Вплив дисипативних і гіроскопічних сил на стійкість руху потенціальної системи. Далі без доведення наведемо теореми, які стосуються стійкості систем. Доведення деяких з них можна знайти у [40].

Перша теорема Томсона і Тета. *Якщо нестійкість незбуреного руху потенціальної системи має непарний ступінь, то стабілізувати рух не можна ніякими гіроскопічними силами.*

Примітки.

1. Теорема залишається вірною і за врахування нелінійних сил, оскільки нестійкість системи не залежить від членів, які містять z_k і \dot{z}_k у степені, вищому за перший (тобто від нелінійних сил, див. другу теорему Ляпунова).

2. Якщо ступінь нестійкості парний, то введенням гіроскопічних сил можна зробити систему стійкою, якщо ці сили досить великі.

Друга теорема Томсона і Тета. *Якщо незбурений рух $Z = 0$, $\dot{Z} = 0$ потенціальної системи є стійким, то з додаванням довільних гіроскопічних та дисипативних сил (останні не обов'язково повної дисипації) стійкість руху зберігається.*

Третя теорема Томсона і Тета. *Якщо незбурений рух $Z = 0$, $\dot{Z} = 0$ є стійким за самих потенціальних сил, то він стає асимптотично стійким з додаванням довільних гіроскопічних та дисипативних сил, якщо останні є силами повної дисипації.*

Четверта теорема Томсона і Тета. *Незбурений рух $Z = 0$, $\dot{Z} = 0$, нестійкий під дією потенціальних сил, залишається нестійким у разі додавання*

довільних гіроскопічних та дисипативних сил, якщо останні є силами повної дисипації.

З останньої теореми випливає, що якщо нестійку потенціальну систему стабілізувати гіроскопічними силами, то навіть малі дисипативні сили з повною дисипацією (вони завжди існують) з часом зруйнують досягнуту стійкість. У зв'язку з цим стійкість, яку забезпечено за рахунок лише потенціальних сил, Томсон і Тет запропонували називати *віковою стійкістю*, а стійкість, досягнуту гіроскопічною стабілізацією – *тимчасовою стійкістю*.

Примітка. Якщо, крім дисипативних сил діють прискорювальні сили (функція Релея може сягати від'ємних значень), то гіроскопічна стабілізація нестійкої потенційної системи є можливою.

Приклад 1. Стійкість дзиги. Визначаючи положення осі власного обертання дзиги у просторі кутами осциляції (див п. 2.3.1), можна описати її рух в малому околі вертикалі рівняннями

$$\begin{cases} J'_e \ddot{\delta}_1 + H_0 \dot{\delta}_2 - mgl \delta_1 = 0 \\ J'_e \ddot{\delta}_2 - H_0 \dot{\delta}_1 - mgl \delta_2 = 0 \end{cases} \quad (3.70)$$

Ці рівняння можна розглядати як результат накладання на нестійку потенціальну систему

$$\begin{cases} J'_e \ddot{\delta}_1 - mgl \delta_1 = 0 \\ J'_e \ddot{\delta}_2 - mgl \delta_2 = 0 \end{cases}$$

гіроскопічних сил $H_0 \dot{\delta}_2$ і $-H_0 \dot{\delta}_1$ відповідно.

Запишемо рівняння (3.139) у вигляді:

$$\begin{cases} \ddot{\delta}_1 + h \dot{\delta}_2 - c \delta_1 = 0 \\ \ddot{\delta}_2 - h \dot{\delta}_1 - c \delta_2 = 0 \end{cases}$$

де

$$h = \frac{H_0}{J'_e}; \quad c = \frac{mgl}{J'_e}. \quad (3.71)$$

Шукатимемо розв'язок рівняння у звичайній формі

$$\delta_1 = Ae^{\lambda t}; \quad \delta_2 = Be^{\lambda t}$$

і складемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - c & g\lambda \\ -g\lambda & \lambda^2 - c \end{vmatrix} = \lambda^4 + (h^2 - 2c)\lambda^2 + c^2 = 0.$$

Для того, щоб корені цього рівняння мали від'ємні дійсні частини, необхідно й достатньо, щоб коефіцієнти характеристичного рівняння задовольняли такі умови:

$$c^2 > 0; \quad h^2 - 2c > 0; \quad (h^2 - 2c)^2 - 4c^2 > 0.$$

Ці три нерівності легко зводяться до однієї умови (пригадаємо, що згідно з припущенням $c > 0$):

$$|h| > 2\sqrt{c}.$$

З врахуванням (3.71) умова гіроскопічної стабілізації набуває вигляду

$$|H_0| > 2\sqrt{J'_e mgl}.$$

Цю умову було отримано раніше (див. п. 3.3.2, формула (3.47)) у нелінійній постановці задачі.

Якщо центр ваги C нижчий за точку опори O (випадок гіроскопічного маятника), то обидві координати δ_1 і δ_2 будуть стійкими. Згідно з другою теоремою Томсона і Тета у цьому випадку стійкість досягатиметься при будь-якій швидкості власного обертання дзиги. На підставі четвертої теореми Томсона і Тета стійкість дзиги є тимчасовою, а стійкість гіромаятника – віковою.

Приклад 2. Гіроскопічний однорейковий вагон. У першій чверті ХХ ст. з'явилися дослідні зразки однорейкового вагона і двоколісного автомобіля, центр ваги яких був вищим за рейку (дорогу). Схему одного з них – вагона Шилловського – зображено на рис. 3.8.

Вертикальне положення самого вагона (автомобіля) нестійке, і для його стабілізації використовувався гіроскоп з вертикальною віссю власного обертання, вісь обертання кожуха гіродвигуна якого закріплювалася на корпусі вагона.

Центр ваги C вагона міститься вище за рейку, тому кут, який визначає відхилення вагона від вертикалі, є нестійкою координатою. Згідно з першою теоремою Томсона і Тета гіроскопічної стабілізації можна досягти лише при парній кількості нестійких координат. З цього випливає, що друга координата системи ϑ (кут повороту гіроскопа відносно вагона (вісь NN) має бути також нестійкою. Для цього до верхньої частини гіроскопа прикріплювався вантаж масою m (рис. 3.8), який утворював перекидальний момент сил тяжіння відносно осі NN . В результаті система набувала двох нестійких координат ψ і ϑ . Урахуємо тепер сили опору, які виникають при хитанні вагону і рамки з гіроскопом (ці сили виникають за рахунок опору середовища і тертя в опорах). Згідно з четвертою теоремою Томсона і Тета ці сили руйнують гіроскопічну стабілізацію (бо без гіроскопа система є нестійкою). Тому для стабілізації потрібно ввести сили іншої природи. Для цього на осі обертання NN встановлювали спеціальний електромагнітний пристрій (на рисунку не показаний), який утворював прискорювальний момент $k_2\dot{\vartheta}$, що діяв навколо осі NN («від'ємне» тертя).

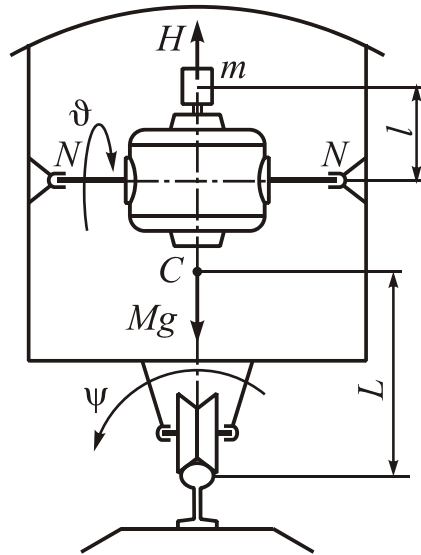


Рис. 3.8. Однорейковий вагон Шиловського

З'ясувавши за допомогою теорем Томсона і Тета характер сил, які мають забезпечити стійкість однорейкового гіроскопічного вагона, перейдемо до кількісного аналізу. Для цього скористаємося диференціальними рівняннями збуреного руху у формі:

$$\begin{cases} A_1 \ddot{\psi} + k_1 \dot{\psi} - H \dot{\vartheta} - c_1 \psi = Q_\psi \\ A_2 \ddot{\vartheta} - k_2 \dot{\vartheta} + H \dot{\psi} - c_2 \vartheta = Q_\vartheta \end{cases} \quad (3.72)$$

де A_1 – момент інерції усієї системи (вагон і гіроскоп) відносно осі рейки; A_2 – момент інерції гіроскопа разом з його рамкою відносно осі NN ; H – власний кінетичний момент гіроскопа; k_1 – коефіцієнт в'язкого тертя системи навколо осі рейки; $c_1 = MgL$ – опорний маятниковий момент системи відносно осі рейки; M – маса усієї системи (вагон і гіроскоп); L – відстань між центром мас усієї системи і віссю рейки; $c_2 = mgl$ – опорний маятниковий момент гіроскопа з його рамкою відносно осі NN ; m – маса гіроскопа з рамкою; l – відстань між центром мас гіроскопа з рамкою і віссю NN ; Q_ψ і Q_ϑ – нелінійні члени.

Рівняння (3.72) можна розглядати як результат накладання на нестійку потенціальну систему

$$\begin{cases} A_1 \ddot{\psi} - c_1 \psi = 0 \\ A_2 \ddot{\vartheta} - c_2 \vartheta = 0 \end{cases}$$

гіроскопічних сил $-H \dot{\vartheta}$ і $H \dot{\psi}$, дисипативної сили $k_1 \dot{\psi}$, прискорювальної сили $-k_2 \dot{\vartheta}$ і нелінійних сил Q_ψ і Q_ϑ відповідно.

Складемо характеристичне рівняння згідно з рівняннями першого наближення (останні виходять з рівнянь (3.72) відкиданням нелінійних членів):

$$\begin{vmatrix} A_1 p^2 + k_1 p - c_1 & -Hp \\ Hp & A_2 p^2 - k_2 p - c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи його і групуючи члени, дістаємо:

$$a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0, \quad (3.73)$$

де

$$\begin{aligned} a_0 &= A_1 A_2; & a_1 &= k_1 A_2 - k_2 A_1; & a_2 &= H^2 - c_1 A_2 - c_2 A_1 - k_1 k_2; \\ & & a_3 &= c_1 k_2 - c_2 k_1; & a_4 &= c_1 c_2. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Критерій Гурвіца для системи четвертого порядку (3.73) зводиться до нерівностей ($a_0 > 0$):

$$a_1 > 0; \quad a_2 > 0; \quad a_3 > 0; \quad a_4 > 0; \quad \Delta_3 = a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_4 a_1^2 > 0.$$

У розглядуваному випадку умови $a_0 > 0$ і $a_4 > 0$ виконуються «автоматично». З першої і третьої умов випливають межі для величини «крутості» k_2 характеристики пристрою, який утворює прискорювальний момент:

$$\frac{c_2}{c_1} k_1 < k_2 < \frac{A_2}{A_1} k_1; \quad (3.75)$$

$$H^2 > c_1 A_2 + c_2 A_1 + k_1 k_2 + \frac{A_2 A_1 (c_1 k_2 - c_2 k_1)^2 + c_1 c_2 (k_1 A_2 - k_2 A_1)^2}{(c_1 k_2 - c_2 k_1)(k_1 A_2 - k_2 A_1)}.$$

Друга умова визначає нижню межу величини кінетичного моменту гіроскопа. Вона впливає з останньої умови ($\Delta_3 > 0$).

Оскільки в разі виконання умови (3.75) усі корені характеристичного рівняння (згідно критерію Гурвіца) матимуть від'ємні дійсні частини, то на підставі теореми Ляпунова про стійкість руху згідно з першим наближенням рух однорейкового вагону Шиловського навколо вертикалі є асимптотично стійким незалежно від членів вищого порядку (Q_ψ і Q_θ). З формул (3.74) видно, що при $k_2 < 0$ (замість прискорювального моменту сил діє звичайний момент сил тертя) коефіцієнт a_3 буде від'ємним, і система відповідно до четвертої теореми Томсона і Тета стане нестійкою.

Стійкість руху під дією лише гіроскопічних і дисипативних сил. Досі розглядалися системи, в яких дисипативні та гіроскопічні сили діяли разом з потенціальними. Така ситуація характерна, зокрема, для позиційних гіроскопічних приладів (на які діють моменти сил тяжіння через незбіжність центра мас і точки підвісу, а також моменти пружних сил). Тим часом, часто у практиці трапляються такі системи (так звані «астатичні»), в яких немає потенціальних сил.

Розглянемо спочатку випадок, коли на систему діють лише гіроскопічні сили, вважаючи, що рівняння збуреного руху доведено до форми:

$$\ddot{Z} + G\dot{Z} = 0. \quad (3.76)$$

Теорема 1. Незбурений рух $Z = 0$, $\dot{Z} = 0$ системи, на яку діють лише гіроскопічні сили, завжди є стійким зі швидкостей.

Примітка. Теорема є слушною і для лінійної неавтономної системи (коли матриця G явно залежить від часу) і для нелінійної системи.

Теорема 2. Для того щоб незбурений рух лінійної неавтономної системи, на яку діють лише гіроскопічні сили, був стійким й по координатах, необхідно й достатньо, щоб визначник матриці гіроскопічних сил не дорівнював нулю.

Наслідок. Якщо на систему діють лише гіроскопічні сили і вона має непарну кількість визначальних координат, то незбурений рух такої системи завжди є нестійким (якщо s – непарне число, то $\det G$ тотожно дорівнює нулю).

Примітка 1. Оскільки незбурений рух стійкий з швидкостей за будь-якого значення $\det G$, то з доказу нестійкості системи випливає, що при $\det G = 0$ система втрачає стійкість лише з координат.

Примітка 2. Якщо (3.76) є рівнянням першого наближення нелінійної системи, на яку діють лише гіроскопічні сили, то з умови $\det G \neq 0$ не випливає стійкість початкової нелінійної системи.

Теорема 3. Якщо на систему окрім гіроскопічних сил діють сили повної дисипації, то незбурений рух є асимптотично стійким з швидкостей і просто стійким з координат.

Вплив на стійкість руху неконсервативних сил

Теорема 1. Незбурений рух $Z = 0, \dot{Z} = 0$ системи, на яку діють лише неконсервативні сили ($\ddot{Z} + PZ = 0$), завжди є нестійким незалежно від членів вищого порядку.

За наявності ще й потенціальних сил ($\ddot{Z} + PZ + CZ = 0$) є слушними такі теореми.

Теорема 2. При відсутності нелінійних членів ($F = 0$) асимптотична стійкість не може бути досягнута без дисипативних сил.

Теорема 3. Якщо визначник матриці з коефіцієнтів за сил, пропорційних визначальним координатам, є від'ємним ($\det(P + C) < 0$), то система є нестійкою за будь-яких гіроскопічних, дисипативних, прискорювальних і неконсервативних сил.

Теорема 4. Якщо система не має консервативних сил ($C = 0$) і відсутні нелінійні члени ($F = 0$), то:

1) у разі непарної кількості визначальних координат асимптотична стійкість не може бути досягнута ні за яких гіроскопічних, дисипативних, прискорювальних і неконсервативних сил;

2) у разі парної кількості визначальних координат для забезпечення асимптотичної стійкості необхідно, окрім дисипативних сил, додати гіроскопічні сили.

Теорема 5. Якщо потенціальна енергія збуреного руху має максимум, то:

1) у разі непарної кількості визначальних координат і будь-яких нелінійних сил систему не можна стабілізувати ніякими гіроскопічними, дисипативними, прискорювальними і неконсервативними силами;

2) у разі парної кількості визначальних координат і за умови, що на систему діють сили повної дисипації, для стабілізації системи необхідно додати одночасно гіроскопічні та неконсервативні сили (незалежно від нелінійних членів).

3.4. Наближені методи дослідження нелінійних і нестационарних систем

Загальних методів розв'язування нелінійних (і навіть лінійних, але зі змінними коефіцієнтами) диференціальних рівнянь немає. Тобто математика не надає інженерам загальних засобів теоретичного досліджування нелінійних і нестационарних систем. Лише деякі теоретичні дослідження таких систем закінчуються точним розв'язуванням диференціальних рівнянь. Зазвичай інженерні дослідження проводять із застосуванням наближених методів теоретичного дослідження.

Справа дещо полегшується завдяки тому, що здебільшого інженера цікавить не загальний рух, а лише деякі характеристики можливих стаціонарних коливальних режимів розглядуваної системи. Тому серед наближених методів особливого розвитку набули методи, що пристосовані для визначення параметрів так званих *стаціонарних коливань*, які характерні незмінністю своїх основних характеристик (середнього значення, амплітуди, спектрального складу, фаз тощо). Усі ці методи у свою чергу можна згрупувати у кілька великих груп, серед яких виокремлюють дві найбільш важливі в інженерній практиці.

До першої групи належать *методи лінеаризації*, в яких замість дослідження первинної нелінійної системи вивчають деяку лінійну стаціонарну систему, яка описується лінійними диференціальними рівняннями зі сталими коефіцієнтами і є у деякому розумінні еквівалентною первинній нелінійній системі. Методи лінеаризації розрізняють залежно від того, який зміст вкладається у поняття такої еквівалентності. Отже, суть методів лінеаризації полягає у попередній заміні всіх нелінійних сил (членів диференціальних рівнянь) наближеними лінійними функціями від узагальнених координат і швидкостей. Далі у заданих умовах знаходять усталений розв'язок отриманих лінійних («лінеаризованих») диференціальних рівнянь, і згідно з одержаним розв'язком роблять висновки про рух початкової нелінійної системи.

З описаної схеми стає очевидним, що методи лінеаризації є математично некоректними. Немає ніякого математичного обґрунтування того, що поведіння початкової нелінійної і відповідної їй лінеаризованої системи мають хоч щось загальне. Таке обґрунтування можливе тільки виходячи із зовсім інших, не математичних міркувань, наприклад, фізичного змісту, теоретичних знань і практичного досвіду про поведіння таких систем тощо. Зате коли заздалегідь відомо, що реальний досліджуваний процес являє собою стаціонарні коливання, застосування методів лінеаризації є цілком справджуваним і слушним.

Іншою великою групою методів теоретичного дослідження нелінійних коливальних систем є *методи малого параметру*. Загальним для них є те, що вони застосовуються лише до таких систем, диференціальні рівняння яких, хоча й є нелінійними, але містять при нелінійних членах деякий множник так, що при нульовому його значенні вони перетворюються у лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами, причому вважається, що у досліджуваному випадку цей множник є достатньо *малим* за величиною. Такі системи дістали

назву *квазілінійних*. Поняття *мализни* параметра-множника досить невизначене. Воно ґрунтується на припущенні, що розв'язок початкової нелінійної системи якісно й кількісно незначно відрізняється від розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь, у яку перетворюється початкова система нелінійних диференціальних рівнянь, якщо прийняти малий параметр рівним нулю, і яку називають *породжуючою системою рівнянь*.

До методів малого параметра належать:

1) теорія (методи) збурень, розроблена для вивчення руху планет, і різні її варіанти (наприклад, метод Пуассона), та сучасні модифікації, такі як метод Остроградського-Ляпунова, метод О. М. Крилова та ін.;

2) метод Пуанкаре;

3) асимптотичні методи (зокрема, метод Н. М. Крилова і М. М. Боголюбова);

4) метод усереднення.

Перші два методи призначені для визначення періодичних розв'язків нелінійних систем. Інші два методи (асимптотичний й усереднення) пристосовані не лише для знаходження періодичних розв'язків, але й дослідження перехідних процесів, що робить їх ефективними засобами аналізу нелінійних коливальних систем.

3.4.1. Методи лінеаризації

Основою методу лінеаризації як методу знаходження періодичних розв'язків нелінійної системи диференціальних рівнянь є *лінеаризація нелінійностей*, тобто попередня заміна всіх нелінійних членів диференціальних рівнянь на деякі лінійні, у деякому сенсі близькі до первинних нелінійних. Далі аналізують (знаходять розв'язки) вже нові (наближені) лінійні (лінеаризовані) рівняння, на основі чого робляться висновки про рух первинної нелінійної системи.

Зосередимося передусім на різних способах лінеаризації нелінійностей.

«Класична» лінеаризація. Знайомство з лінеаризацією нелінійностей зручно почати зі способу, який будемо називати «класичною» лінеаризацією, і який поширений в теорії автоматичного керування для дослідження стійкості нелінійних систем. Полягає він у розкладанні нелінійної функції узагальнених координат та швидкостей у ряд Тейлора в околі деякого положення рівноваги і у збереженні у цьому розкладі лише членів, що лінійно залежать від координат і швидкостей:

$$f(q, \dot{q}) \Rightarrow f(q_0, 0) + \left. \frac{\partial f}{\partial q} \right|_{q_0, 0} (q - q_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{q}} \right|_{q_0, 0} \dot{q},$$

де q_0 – значення узагальненої координати у положенні рівноваги.

Геометричний зміст такої лінеаризації особливо простий. Класична лінеаризація є еквівалентною заміні початкової гіперповерхні, яка зображує залежність нелінійної сили від узагальнених координат і швидкостей, на гіперплощині, дотичну до цієї гіперповерхні у точці рівноваги.

Недоліки способу класичної лінеаризації очевидні. Він може бути застосований лише до *гладких нелінійностей*. Цілий практично значущий для інженерів клас суттєвих нелінійностей (із розривами) не можна досліджувати цим способом. Іншим недоліком способу є та обставина, що «коефіцієнти лінеаризації», під якими розуміють зазвичай тангенс кутів α і β (рис. 3.9) нахилу дотичних до відповідних координатних осей, залишаються такими самими у разі збільшення чи зменшення амплітуд можливих (досліджуваних) коливань координат q або \dot{q} . Але з рис. 3.9 легко впевнитися, що дотичну пряму можна вважати досить близькою до нелінійної кривої лише в разі дуже малих відхиленнях від положення рівноваги. Із зростанням амплітуди коливань «середня» пряма, близька до відповідного відрізка кривої, має змінювати своє положення у відповідності до виду й характеру кривої. Так, на рис. 3.9, а зі зростанням амплітуди середня пряма, що замінює відрізок кривої, має підніматися вище відносно дотичної, а на рис. 3.9, б – повертатися навколо початку координат, утворюючи все більший кут з віссю \dot{q} .

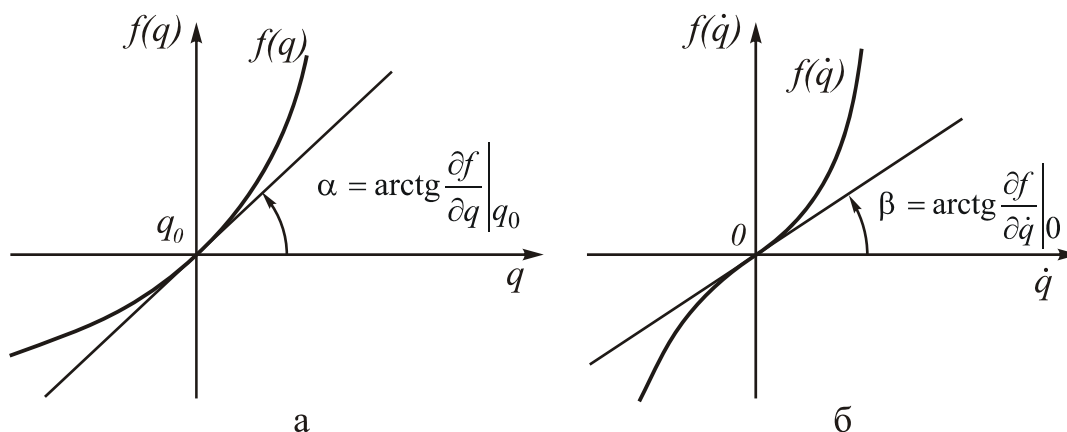


Рис. 3.9. Класична лінеаризація

Цей недолік призводить до того, що метод класичної лінеаризації не дозволяє виявити ніяких специфічних для нелінійних систем особливостей їх поведінки. Зокрема, методом класичної лінеаризації неможливо виявити *неізохронність* власних коливань (тобто залежність періоду власних коливань від їхньої амплітуди), виникнення «зривів» коливань (тобто стрибкоподібних змін амплітуди вимушених коливань) тощо. Інакше кажучи, класична лінеаризація «надто добре» лінеаризує нелінійну залежність, настільки «добре», що нелінійна система за такого перетворення повністю втрачає всі свої нелінійні властивості і стає в усіх відношеннях звичайною лінійною системою з усіма її характерними особливостями.

Саме тому класична лінеаризація практично не застосовується для відшукування розв'язків нелінійних систем. Її використовують лише для вивчення стійкості руху нелінійної системи.

Лінеаризація «по кінцях». Лінеаризацію по кінцях не відображено в літературі. Але вона є найбільш природна і проста за змістом. У багатьох випадках цей спосіб лінеаризації дає задовільні результати. Як і розглянуті далі спо-

соби прямої лінеаризації, лінеаризація по кінцях пристосована лише до нелінійної функції однієї змінної (або узагальненої координати, або узагальненої швидкості). Найлегше усвідомити її зміст, вдаючись до геометричної інтерпретації (рис. 3.10).

Лінеаризація полягає у заміні відрізка кривої $f(q)$ між значеннями a_1 і a_2 аргументу q на пряму

$$f_e(q) = s_e + c_e q, \quad (3.77)$$

що проходить через кінці цього відрізка (див. рис. 3.10), тобто через точки $(a_1, f(a_1))$ і $(a_2, f(a_2))$. Неважко зрозуміти, що коефіцієнти лінеаризації s_e і c_e у цьому випадку визначаються формулами:

$$s_e = \frac{a_2 f(a_1) - a_1 f(a_2)}{a_2 - a_1}; \quad c_e = \frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1}. \quad (3.78)$$

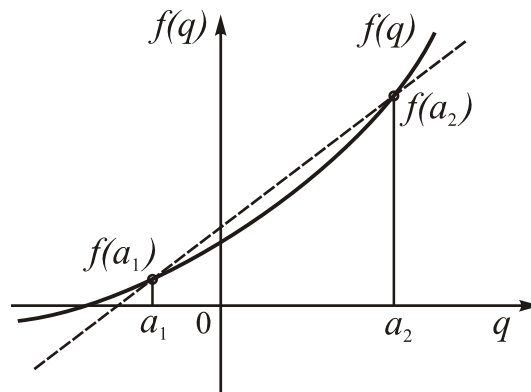


Рис. 3.10. Лінеаризація «по кінцях»

Більш зручно виражати коефіцієнти лінеаризації через середнє значення аргументу a_0 та амплітуду a змінювання аргументу, які визначимо формулами:

$$a_0 = \frac{a_2 + a_1}{2}; \quad a = \frac{a_2 - a_1}{2}.$$

Тепер формули (3.77) визначення коефіцієнтів лінеаризації можна подати у вигляді:

$$s_e = \frac{(a_0 + a)f(a_0 - a) - (a_0 - a)f(a_0 + a)}{2a}; \quad c_e = \frac{f(a_0 + a) - f(a_0 - a)}{2a}. \quad (3.79)$$

За будь-якого способу лінеаризації коефіцієнти лінеаризації набувають вигляду функцій середнього значення і амплітуди змінювання узагальненої координати. Тому ці коефіцієнти утворюють лінійні члени диференціальних рівнянь тільки у випадку, коли і середнє значення, і амплітуда коливань з часом не змінюються, тобто у випадку стаціонарних коливань. З цього випливає, що методи лінеаризації придатні для знаходження лише параметрів стаціонарних (усталених) коливань нелінійних систем.

Формули (3.79) суттєво спрощуються, якщо заздалегідь відомо, що в нелінійній системі усталяться *центровані коливання*, тобто такі коливання, серед-

не відхилення яких від положення рівноваги дорівнює нулю. Тоді покладаючи $a_0 = 0$, отримаємо з (3.79):

$$s_e = \frac{f(a) + f(-a)}{2}; \quad c_e = \frac{f(a) - f(-a)}{2a}.$$

Пряма лінеаризація. Сутність способу прямої лінеаризації полягає у тому, що відрізок нелінійної кривої $f(q)$, обмежений розмахом коливань, апроксимується прямою, інтегральне середнє квадратичне відхилення від якої заданого відрізка кривої є мінімально можливим. Саме з цієї умови визначаються параметри апроксимуючої прямої.

Уведемо поняття «відхилення» r , під яким (рис. 3.11) розумітимемо різницю між поточним значенням нелінійної сили $f(q)$ і значенням «лінеаризованої» сили (3.77) за того самого значення аргументу q :

$$r = f(q) - f_e(q) = f(q) - s_e - c_e q. \quad (3.80)$$

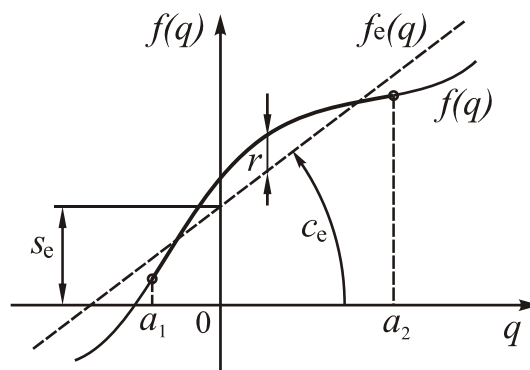


Рис. 3.11. Пряма лінеаризація

Як міру інтегрального відхилення прямої $f_e(q)$ від кривої $f(q)$ на відрізку $a_1 < q < a_2$ візьмемо інтеграл

$$\Phi = \int_{a_1}^{a_2} r^2(q) dq = \int_{a_0-a}^{a_0+a} r^2(q) dq.$$

З врахуванням (3.80) маємо

$$\Phi = \int_{a_0-a}^{a_0+a} \{f(q) - s_e - c_e q\}^2 dq = \Phi(s_e, c_e, a, a_0). \quad (3.81)$$

Потрібно так підібрати шукані величини s_e і c_e , щоб функціонал (3.81) за цих значень здобув мінімальне значення. Умови екстремуму визначають шляхом прирівнювання нулю часткових похідних від функціоналу (3.81) по шуканих величинах s_e і c_e :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial s_e} &= \frac{\partial}{\partial s_e} \left(\int_{a_0-a}^{a_0+a} (f(q) - s_e - c_e q)^2 dq \right) = \int_{a_0-a}^{a_0+a} \frac{\partial}{\partial s_e} \{(f(q) - s_e - c_e q)^2\} dq = \\ &= 2 \int_{a_0-a}^{a_0+a} (f(q) - s_e - c_e q)(-1) dq = 0; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c_e} = 2 \int_{a_0-a}^{a_0+a} (f(q) - s_e - c_e q)(-q) dq = 0.$$

Звідси випливає система двох алгебричних рівнянь з двох невідомих s_e і c_e :

$$\begin{cases} s_e \int_{a_0-a}^{a_0+a} dq + c_e \int_{a_0-a}^{a_0+a} q dq = \int_{a_0-a}^{a_0+a} f(q) dq; \\ s_e \int_{a_0-a}^{a_0+a} q dq + c_e \int_{a_0-a}^{a_0+a} q^2 dq = \int_{a_0-a}^{a_0+a} f(q) q dq. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, дістанемо:

$$\begin{cases} c_e = \frac{3}{2a^3} (B - a_0 A); \\ s_e = \frac{1}{2a} \left\{ \left[1 + 3 \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 \right] A - \frac{3a_0}{a^2} B \right\}, \end{cases}$$

де

$$A = \int_{a_0-a}^{a_0+a} f(q) dq; \quad B = \int_{a_0-a}^{a_0+a} f(q) q dq.$$

За умови, що шукані коливання центровані, отримуємо:

$$\begin{cases} c_e = \frac{3}{2a^3} B \\ s_e = \frac{1}{2a} A \end{cases}; \quad A = \int_{-a}^a f(q) dq; \quad B = \int_{-a}^a f(q) q dq.$$

Гармонічна лінеаризація. Один з найпоширеніших (передусім у теорії автоматичного керування) способів лінеаризації – *гармонічна лінеаризація*, яка полягає у заміні змінної нелінійної сили $f(q, \dot{q})$ за гармонічного закону змінювання узагальненої координати ($q = a_0 + a \cos \omega t$; $\dot{q} = -a \omega \sin \omega t$) на лінійну силу

$$f_e(q) = s_e + c_e q + k_e \dot{q} \quad (3.82)$$

у такий спосіб, щоб амплітуди «нульової» і першої гармонік у розкладі нелінійної сили у ряд Фур'є збігалися з відповідними амплітудами лінеаризованої сили.

Розкладемо нелінійну силу в ряд Фур'є (це є можливим тому, що згідно з умовою $f(q, \dot{q})$ є періодичною функцією часу):

$$f(q, \dot{q}) = f(a_0 + a \cos \omega t, -a \omega \sin \omega t) = f_0 + f_c \cos \omega t + f_s \sin \omega t + \dots, \quad (3.83)$$

де крапками позначено члени з гармоніками, вищими за першу. Три коефіцієнти розкладу визначаються формулами:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a_0 + a \cos \vartheta; -a \omega \sin \vartheta) d\vartheta;$$

$$f_c = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a_0 + a \cos \vartheta; -a\omega \sin \vartheta) \cos \vartheta d\vartheta;$$

$$f_s = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a_0 + a \cos \vartheta; -a\omega \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta; \quad (\vartheta = \omega t). \quad (3.84)$$

Лінеаризовану силу можна подати за тих самих умов у вигляді:

$$f_e(q) = s_e + c_e \cdot q + k_e \dot{q} = s_e + c_e (a_0 + a \cos \omega t) + k_e (-a\omega \sin \omega t) =$$

$$= (s_e + c_e \cdot a_0) + c_e a \cos \omega t - k_e a \omega \sin \omega t. \quad (3.85)$$

Прирівнюючи амплітуди нульової і першої гармонік у виразах (3.83) і (3.85) з врахуванням (3.84), дістанемо формули для обчислення коефіцієнтів лінеаризації:

$$c_e = \frac{f_c}{a} = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a_0 + a \cos \vartheta; -a\omega \sin \vartheta) \cos \vartheta d\vartheta;$$

$$k_e = -\frac{f_s}{a\omega} = -\frac{1}{\pi a\omega} \int_0^{2\pi} f(a_0 + a \cos \vartheta; -a\omega \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta;$$

$$s_e = f_0 - c_e a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a_0 + a \cos \vartheta; -a\omega \sin \vartheta) d\vartheta - c_e a_0.$$

Якщо коливання узагальненої координати є центрованими, формули дещо спрощуються:

$$c_e = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \vartheta; -a\omega \sin \vartheta) \cos \vartheta d\vartheta;$$

$$k_e = -\frac{1}{\pi a\omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \vartheta; -a\omega \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta;$$

$$s_e = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \vartheta; -a\omega \sin \vartheta) d\vartheta.$$

Як приклади проведемо лінеаризацію розглянутими способами кількох типових найбільш поширених в інженерній практиці нелінійностей. Задля простоти лінеаризацію виконаємо у припущенні, що очікувані коливання будуть центровані, тобто за спрощеними формулами.

Результати наведено у табл. 3.1. З розгляду цієї таблиці можна зробити такі висновки:

1) різні способи лінеаризації призводять до різних коефіцієнтів лінеаризації нелінійної залежності;

2) коефіцієнти лінеаризації, отримані різними способами, тим не менше приблизно однаково залежать від амплітуди і середнього значення коливної величини; різниця полягає лише у значеннях коефіцієнтів в цій залежності; хоча всі вони є близькими за значеннями, різниця між ними може сягати 40%.

Зазначимо деякі головні особливості методів лінеаризації.

1. Методи лінеаризації можна застосовувати лише для визначення стаціонарних періодичних режимів у нелінійних системах, бо тільки тоді коефіцієнти лінеаризації, які є функціями амплітуди й середнього значення коливної вели-

чини, будуть незмінними у часі. Інакше кажучи, за допомогою методів лінеаризації можна лише дослідити:

- рух автономних нелінійних систем (без надходження енергії) без дисипативних сил (тобто й без втрат енергії);
- усталені вимушені коливання нелінійних систем, які відбуваються під дією періодично змінюваної сили.

Таблиця 3.1. Коефіцієнти лінеаризації типових нелінійностей

$f(q)$	s_e			c_e		
	По кінцях	Пряма	Гармонічна	По кінцях	Пряма	Гармонічна
$q/ q $	0	0	0	$1/a$	$3/(2a)$	$4/(\pi a)$
$q \cdot q $	0	0	0	a	$3a/4$	$8a/(3\pi)$
q^2	a^2	$2a^2/3$	$a^2/2$	0	0	0
q^3	0	0	0	a^2	$3a^2/5$	$3a^2/4$
$\sin q$	0	0	0	$\frac{\sin a}{a}$	$3 \frac{(\sin a - a \cos a)}{a^3}$	-

2. Усі методи лінеаризації (окрім класичної, яку застосовують для дослідження стійкості руху) не є коректними у математичному сенсі. Існування періодичного розв’язку лінеаризованої системи рівнянь зовсім не означає, що йому обов’язково відповідає аналогічний періодичний рух реальної нелінійної системи. Іноді буває так, що у початковій нелінійній системі такі періодичні рухи неможливі, незважаючи на те, що періодичний розв’язок відповідної лінеаризованої системи існує. Проблема існування періодичних усталених рухів початкової нелінійної системи не може бути вирішена застосуванням методів лінеаризації. Припущення про існування періодичного руху має бути додатково обґрунтоване іншими методами і міркуваннями (зокрема, фізичними). Власне кажучи, саме математичною некоректністю пояснюється наявність значної кількості методів лінеаризації. Некоректність зумовлено тим, що немає однозначного критерію близькості прямої до відрізка кривої. Ця близькість не може бути близькістю у кожній точці, а інтегральна близькість на інтервалі – поняття неоднозначне.

3. Оскільки у лінійній стаціонарній системі, яка зазнає дії зовнішньої періодичної сили, можливе усталення лише коливань, які мають такої самий період (період змущувальної сили), то методи лінеаризації дають змогу досліджувати лише періодичні режими з частотою збурення і не дозволяють досліджувати нелінійні резонанси (тобто рухи нелінійної системи, які здійснюються з періодом у кілька разів більшим або меншим за період збурення).

4. Методи лінеаризації не дозволяють досліджувати ані стійкість періодичних режимів, ані процеси усталювання цих періодичних режимів. Зокрема, їх

не можна застосовувати для дослідження вільних загасаючих коливань нелінійних систем.

5. Оскільки в лінійній стаціонарній системі в разі дії на неї центрованих (середнє значення яких дорівнює нулю) збурювальних зовнішніх сил, усталюються лише центровані ж коливання, методи лінеаризації не дозволяють виявити і дослідити *випрямні ефекти* (виникнення сталих складових вихідних величин за дії центрованих збурень).

6. Методи лінеаризації не дозволяють дослідити часову форму власних коливань нелінійної системи, тобто їх спектральний склад.

Вимушені коливання нелінійної системи. Як приклад розглянемо лінеаризоване рівняння руху нелінійної одномасової коливальної системи з одним ступенем вільності:

$$m\ddot{x} + k_e(a)\dot{x} + c_e(a)x = -mA(\omega)\cos(\omega t + \varphi),$$

де x – переміщення маси відносно основи; $A(\omega)$ – амплітуда віброприскорення основи; ω – частота вібрації основи; m – маса; $k_e(a)$ і $c_e(a)$ – коефіцієнти лінеаризації нелінійної сили з боку пружно-демпфірувального елемента, який пов'язує основу з масою.

Уведемо позначення:

$$\lambda_e(a) = \sqrt{\frac{c_e(a)}{m}}; \quad \zeta_e(a) = \frac{k_e(a)}{2\sqrt{mc_e(a)}}.$$

Перша величина має сенс частоти власних коливань нелінійної системи, друга – відносного коефіцієнта загасання цих коливань.

З урахуванням цього початкове лінеаризоване рівняння можна подати так:

$$\ddot{x} + 2\zeta_e(a)\lambda_e(a)\dot{x} + \lambda_e^2(a)x = -A(\omega)\cos(\omega t + \varphi). \quad (3.86)$$

Розглянемо три випадки залежності амплітуди $A(\omega)$ віброприскорення основи від частоти вібрації: а) $A(\omega)$ не залежить від частоти; б) змінюється пропорційно частоті $A(\omega) = A_1\omega$ (тоді в усьому діапазоні частот вібрації незмінною залишається амплітуда A_1 віброшвидкості); 3) змінюється пропорційно квадрату частоти $A(\omega) = A_2\omega^2$ (при змінюванні частоти зберігається незмінною амплітуда A_2 вібропереміщення основи).

Усталений рух будемо шукати у формі:

$$x = a \cos(\omega t). \quad (3.87)$$

При цьому вважається що невідомий зсув фаз між збуренням і коливаннями маси дорівнює φ . Підставляючи вираз (3.87) у рівняння (3.86), отримаємо такі два алгебричні рівняння для знаходження двох невідомих – амплітуди переміщення a і зсуву фаз φ :

$$\begin{cases} a[\lambda_e^2(a) - \omega^2] = -A(\omega)\cos\varphi; \\ 2\zeta_e(a)\lambda_e(a)\omega = A(\omega)\sin\varphi. \end{cases}$$

Вилучивши фазу φ , дістанемо рівняння, що пов'язує між собою шукану амплітуду коливань з частотою вібрації основи:

$$[\lambda_e^2(a) - \omega^2]^2 + 4\zeta_e^2(a)\lambda_e^2(a)\omega^2 = \left(\frac{A(\omega)}{a}\right)^2.$$

Оскільки λ_e і ζ_e є складними функціями невідомої амплітуди, то у загальному випадку рівняння (3.167) виявляються нерозв'язними відносно амплітуди. Однак, якщо задачу обернути, тобто розв'язувати рівняння відносно частоти, то вона стає однозначно розв'язною за довільних залежностей $\lambda_e(a)$ і $\zeta_e(a)$. Для трьох зазначених вище випадків змінювання амплітуди вібрації основи з її частотою залежність частоти вимушених коливань від їх амплітуди визначиться такими формулами:

– за незалежної від частоти збурення амплітуди A віброприскорення основи

$$\omega = \lambda_e(a) \sqrt{1 - 2\zeta_e^2(a) \pm \sqrt{\left(\frac{A}{a\lambda_e^2(a)}\right)^2 - 4\zeta_e^2(a)[1 - \zeta_e^2(a)]}}; \quad (3.88)$$

- за незалежної від частоти збурення амплітуди A_1 віброшвидкості основи

$$\omega = \lambda_e \sqrt{1 - 2\zeta_e^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{A_1}{a\lambda_e}\right)^2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left[\left(\frac{A_1}{a\lambda_e}\right)^2 - 4\zeta_e^2\right] \left[\left(\frac{A_1}{a\lambda_e}\right)^2 + 4(1 - \zeta_e^2)\right]}};$$

- за незалежної від частоти збурення амплітуді A_2 вібропереміщення основи

$$\omega = \frac{\lambda_e(a)}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_2}{a}\right)^2}} \sqrt{1 - 2\zeta_e^2(a) \pm \sqrt{\left(\frac{A_2}{a}\right)^2 \left[2 - \left(\frac{A_2}{a}\right)^2\right] - 4\zeta_e^2(a)[1 - \zeta_e^2(a)]}}.$$

Ці співвідношення дозволяють побудувати графіки амплітудно-частотних характеристик (АЧХ) нелінійної (точніше – лінеаризованої) системи, тобто залежності амплітуди вимушених коливань нелінійної одномасової коливальної системи від частоти змінювання змушувальної сили за заданого значення амплітуди коливань основи (A , або A_1 , або A_2). Але спосіб побудови таких графіків дещо незвичний. Потрібно задатися значенням шуканої амплітуди a і обчислити відповідні значення частоти ω . Очевидно, кожному значенню амплітуди a може відповідати або два значення ω_1 і ω_2 (якщо значення внутрішнього підрадикального виразу виявиться додатним, а обидва значення зовнішнього підрадикального виразу – теж додатними), або одне значення ω (якщо значення внутрішнього підрадикального виразу виявиться додатним, одне значення зовнішнього підрадикального виразу – додатним, а друге – від'ємним), або жодного (якщо значення внутрішнього підрадикального виразу виявиться від'ємним). Ці випадки відповідають горизонтальним прямим 1-1, 2-2 і 3-3 на рис. 3.12.

Максимуму (або мінімуму) АЧХ відповідає обернення у нуль внутрішнього підрадикального виразу. Наприклад, у разі незмінності амплітуди віброприскорення екстремальні амплітуди a^* визначаються шляхом розв'язування нелінійного алгебричного рівняння (див. (3.88)):

$$\left(\frac{A}{a^* \lambda_e^2(a^*)} \right)^2 = 4\zeta_e^2(a^*)[1 - \zeta_e^2(a^*)].$$

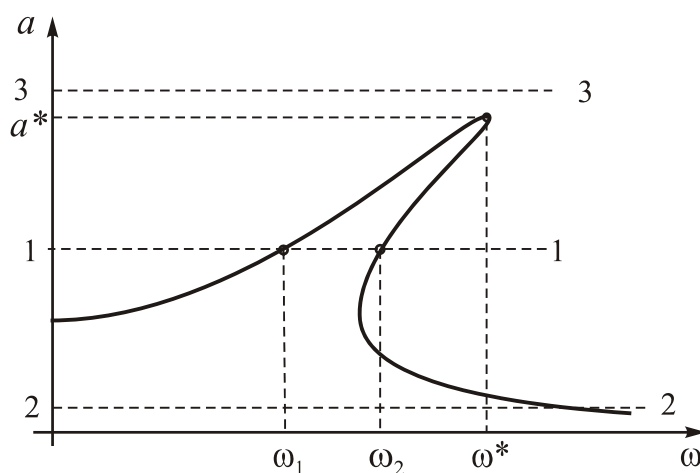


Рис. 3.12. АЧХ нелінійної системи

Графік залежності частоти власних коливань $\lambda_e(a)$ від їх амплітуди a називають *скелетною кривою*, оскільки ця крива являє собою ніби скелет кривої АЧХ нелінійної системи, навколо якого групуються точки АЧХ.

Розглянемо більш детально випадок, коли нелінійною є тільки пружина, що з'єднує масу з основою. При цьому нехай нелінійна залежність пружної сили від її деформації x буде наступною

$$F(x) = c(x + \gamma x^3).$$

Обмежимося випадком незмінної амплітуди віброприскорення, тоді рівняння (3.86) можна подати у вигляді

$$x'' + 2\zeta x' + (1 + sa^2)x = a_0 \cos(\nu t + \varphi). \quad (3.89)$$

Тут використані припущення, що тертя між масою і основою є в'язким, амплітуда віброприскорення подана у вигляді $A = a_0 \omega_0^2$, а також введені такі

позначення: частота малих власних коливань $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} = \lambda_e(0)$; безрозмірний

час $\tau = \omega_0 t$; відносний коефіцієнт загасання $\zeta = \frac{k}{2\sqrt{mc}}$; відносна частота вібра-

ції основи $\nu = \frac{\omega}{\omega_0}$; x' і x'' – перша і друга похідні від x за безрозмірним часом;

k – коефіцієнт в'язкого тертя.

Значення постійного коефіцієнта s при квадраті амплітуди у виразі лінеаризованої пружної сили зв'язане з коефіцієнтом γ залежністю

$$s = \alpha\gamma,$$

де α – сталий коефіцієнт, значення якого залежить від застосованого методу лінеаризації. Відповідно до даних табл. 3.1, $\alpha = 1$ для лінеаризації по кінцях, $\alpha = 0,6$ – при прямій лінеаризації і $\alpha = 0,75$ – у випадку гармонічної лінеаризації.

Зроблені припущення і позначення дозволяють вираз (3.88) подати у виді:

$$v = \sqrt{1 + sa^2 - 2\zeta^2 \pm \sqrt{\left(\frac{a_0}{a}\right)^2 - 4\zeta^2(1 + sa^2 - \zeta^2)}}; \quad (3.90)$$

Нижче наведений текст програми мовою Matlab, яка здійснює розрахунки за формулами (3.90):

```
% ACH_NS1
clc, clear all, S=0.75; % S=-0.01
StrS=sprintf('s = %g;',S);
dz=0.12; dz2=dz^2;          StrD=sprintf(' \lzeta = %g',dz);
a0M=[0.2 1 1.8];          Str1=sprintf('a_0 = %g',a0M(1));
Str2=sprintf('a_0 = %g',a0M(2)); Str3=sprintf('a_0 = %g',a0M(3));
SSS=['*k','.k','-k'];
for m=1:3
    a0=a0M(m);    k1=0;    k2=0;
    for a=0.1:0.01:3; %9.9
        k=k1+1;    al(k)=a; nue=1+S*a^2-2*dz2; lambda(k)=sqrt(nue);
        Dsc=(a0/a)^2-4*dz2*(nue+dz2);
        if Dsc>=0
            SqDs=sqrt(Dsc);
            k1=k1+1;    a1(k1)=a;    nu1(k1)=sqrt(nue+SqDs);
            if (nue-SqDs)>=0
                k2=k2+1;    a2(k2)=a;    nu2(k2)=sqrt(nue-SqDs);
            end
        else
            %break
        end
    end
    hold on,    plot(nu1,a1,SSS(2*m-1:2*m),nu2,a2,SSS(2*m-1:2*m));
end
nus=2.5; a1s= 0.35; a2s=2.78;
plot(lambda,al,'—');    plot(nus,a1s,'s',nus,a2s,'s')
grid
set(gca,'fontname','MS Sans Serif','fontsize',16)
title(['АЧХ нелінійної системи (' ,StrS,StrD,')'])
xlabel('Відносна частота '), ylabel('Амплітуда вимушених коливань a')
legend(Str1,',Str2,',Str3,',\lambda_e(a)',0)
```

Родину з трьох АЧХ, які відповідають значенням амплітуди збурення $a_0 = 0,2; 1; 1,8$, наведено на рис. 3.13. При цьому відносний коефіцієнт загасання прийнятий рівним $\zeta = 0,12$, а коефіцієнт нелінійності $s = 0,75$. Аналогічні АЧХ, але для від'ємного значення $s = -0,01$ коефіцієнта нелінійності, показано на рис. 3.14.

Як видно з рис. 3.13 і 3.14, АЧХ нелінійних систем мають значні відмінності від АЧХ лінійних систем.

По-перше, на відміну від АЧХ лінійних систем, АЧХ нелінійної системи може «нахилятися» вправо (у бік великих частот) чи вліво (у бік малих частот),

прямуючи вздовж скелетної кривої. Якщо зі збільшенням відхилення від положення рівноваги коефіцієнт жорсткості пружної нелінійної сили теж збільшується (тоді скелетна крива на АЧХ відхиляється вправо), то нелінійна система має «жорстку» пружну характеристику (рис 3.13). Якщо зі збільшенням відхилення жорсткість системи зменшується, то говорять про нелінійну систему з «м'якою» пружною характеристикою (рис. 3.14). Нагадаймо, що в лінійній стаціонарній системі скелетна крива має вигляд вертикальної прямої (жорсткість системи залишається незмінною за будь-яких амплітуд коливань).

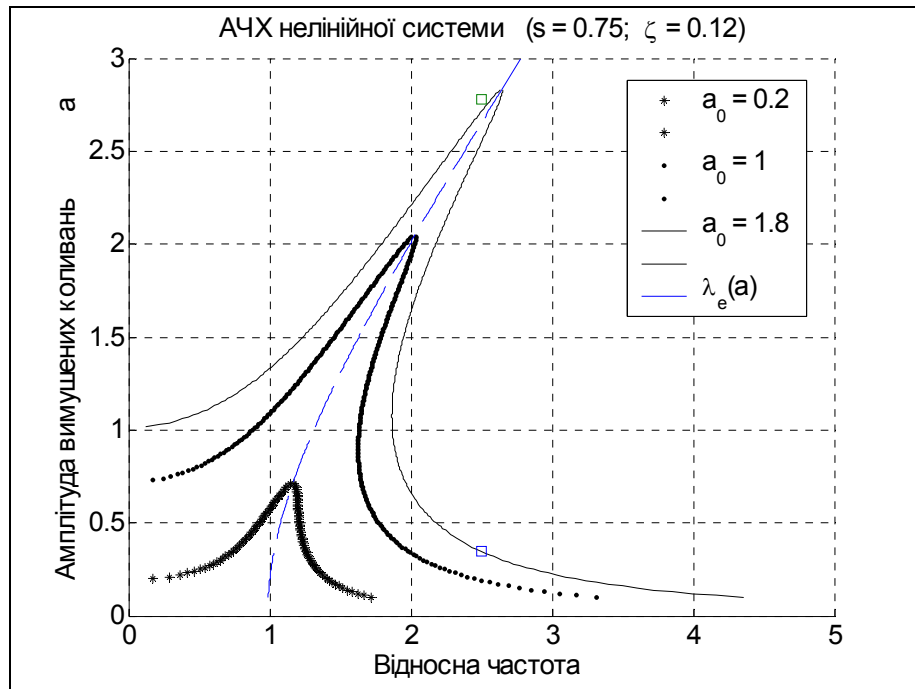


Рис. 3.13. АЧХ нелінійної системи з жорсткою характеристикою

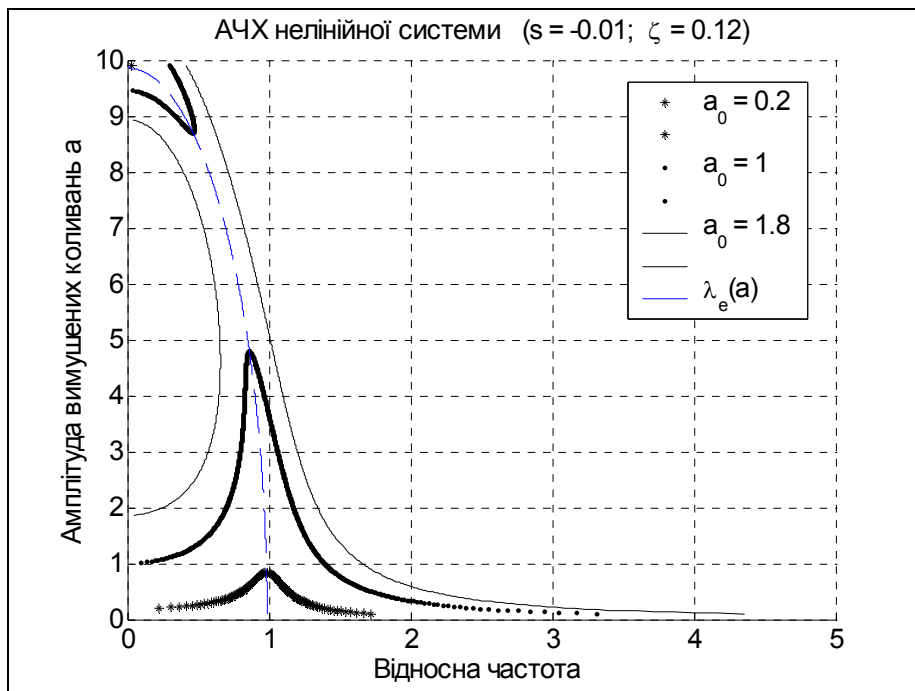


Рис. 3.14. АЧХ нелінійної системи з м'якою характеристикою

По-друге, завдяки саме першій особливості нелінійні системи набувають властивості, яка не є притаманною лінійним стаціонарним системам: за деяких частот збурення можливе встановлення кількох усталених вимушених коливань з різними амплітудами. Наприклад, відповідно до рис. 3.13, за частоти вібрації основи $\nu = 2,5$ і амплітуди збурення $a_0 = 1,8$ можливе усталення коливань 1) з амплітудою $a = 0,3$; 2) з амплітудою $a = 2,6$; 3) з амплітудою $a = 2,75$. З цих трьох усталених режимів стійкими є, як можна довести, лише першій і третій. Другий режим (з амплітудою $a = 2,6$) нестійкий і на практиці його неможливо спостерігати.

Щоб підтвердити можливість існування кількох усталених режимів на тій самій частоті збурення, складемо програму чисельного інтегрування рівняння

$$x'' + 2\zeta x' + x + \gamma x^3 = a_0 \cos(\nu\tau + \varphi). \quad (3.91)$$

Її текст наведений нижче:

```
% NelSys_upr
clc, clear all
global a0 nu dz gamma
a0=1.8; Sa0=sprintf('a_0 = %g;',a0);
nu=2.5; Snu=sprintf(' \nu = %g;',nu);
dz=0.12; Sdz=sprintf(' \zeta = %g;',dz);
gamma=1; Sga=sprintf(' \gamma = %g;',gamma);
y0(1)=2.5; y0(2)=6.25; Sx=sprintf('x(0) = %g;',y0(1));
Sxt=sprintf(' x»(0) = %g',y0(2)); TSPAN=[0 50];
[t,y]=ode45('NelSys',TSPAN,y0);
plot(t,y(:,1),'.-'), grid
set(gca,'fontname','MS Sans Serif','fontsize',16)
title('Інтегрування рівняння x» + 2\zetax» + x + \gammax^3 = a_0cos(\nut)')
xlabel([Sx,Sxt,' t'])
ylabel([Sa0,Snu,Sdz,Sga,' x(t)']%,'fontname','arial')
```

```
function z=NelSys(t,y)
global nu a0 dz gamma
z(1)=y(2);
z(2)=a0*cos(nu*t)-2*dz*y(2)-y(1)-gamma*y(1)^3;
z=z';
```

Чисельне інтегрування в цій програмі здійснюється вбудованою процедурою *ode45* системи Matlab, яка у свою чергу спирається на виклик процедури *NelSys*. Остання обчислює значення правих частин диференціального рівняння (3.91), зведеного до форми Коші.

Результати чисельного інтегрування показано на рис. 3.15 та 3.16. Параметри системи прийняті такими: $\zeta = 0,12$; $\gamma = 1$, параметри збурення: $a_0 = 1,8$; $\nu = 2,5$.

Як бачимо, за нульових початкових умов у системі встановлюються коливання з амплітудою приблизно 0,35, але за інших початкових умов (рис. 3.16) амплітуда усталених коливань дорівнює 2,78. Результати, отримані інтегруванням нелінійного рівняння подані й на рис. 3.13 у вигляді двох квадратних маркерів. Як неважко впевнитися, ці маркери майже точно лежать на відповідній гілці АЧХ.

Ще один висновок, який можна зробити з порівняння результатів аналізу за допомогою лінеаризованого рівняння (3.89) із результатами чисельного інте-

грування «точного» нелінійного рівняння (3.91): у розглядуваному випадку найліпша узгодженість досягається гармонічною лінеаризацією ($s = \alpha\gamma = \frac{3}{4}\gamma$). Значенню $\gamma = 1$ відповідає значення $s = 0,75$, які й використані у наведених експериментах.

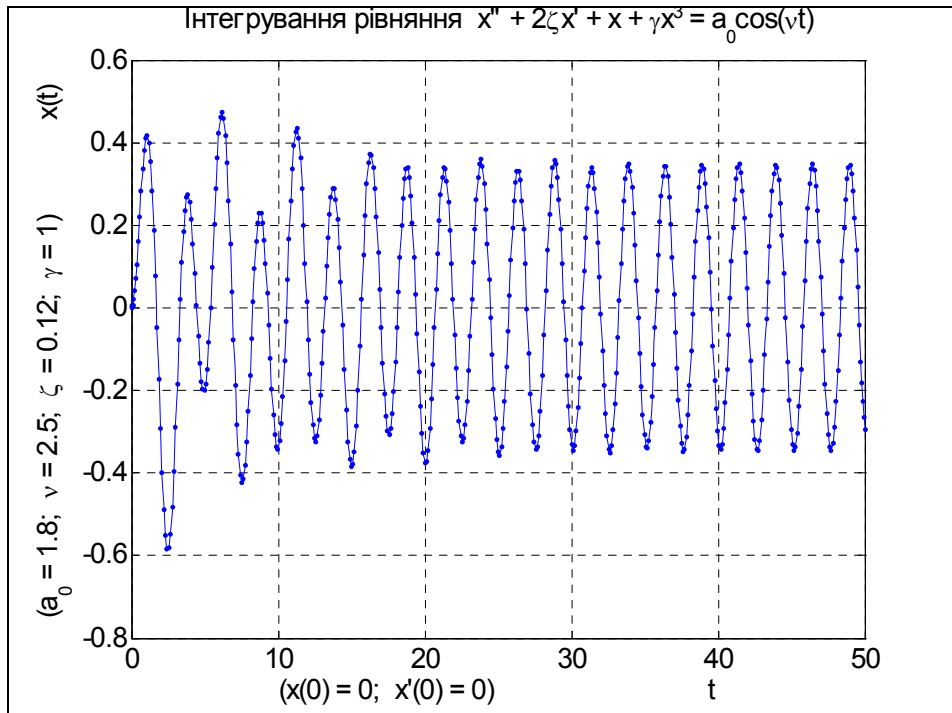


Рис. 3.15. Процес усталення вимушених коливань нелінійної системи (початкові умови $x(0) = 0$; $x'(0) = 0$)

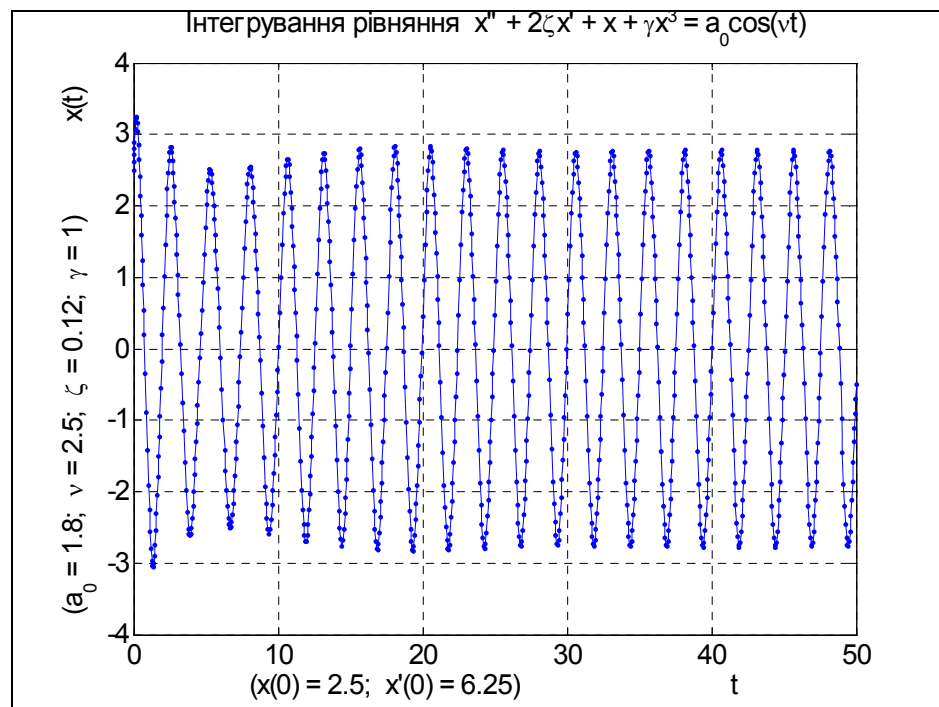


Рис. 3.16. Процес усталення вимушених коливань нелінійної системи (початкові умови $x(0) = 2,5$; $x'(0) = 6,25$)

3.4.2. Метод збурень

Сутність цього методу полягає у тому, що розв'язок нелінійної (точніше – квазілінійної) системи рівнянь (тобто системи диференціальних рівнянь з малим параметром μ як множником при усіх нелінійних членах рівнянь) відшукується у вигляді розкладу у ряд по степенях цього малого параметра.

Метод Пуассона. Викладемо цей метод на прикладі задачі про власні нелінійні коливання маятника. Нехай потрібно знайти розв'язок квазілінійного рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \mu f(x, \dot{x}), \quad (3.92)$$

де ω_0 — частота власних коливань маятника при $\mu = 0$; $f(x, \dot{x})$ — нелінійна функція узагальненої координати x і узагальненої швидкості \dot{x} .

Розв'язок, що задовольняє рівняння з точністю до величин порядку мализни μ^{n+1} , шукають у вигляді n -ї часткової суми ряду:

$$x(t) = x_{(0)}(t) + \mu x_{(1)}(t) + \mu^2 x_{(2)}(t) + \dots + \mu^n x_{(n)}(t) + \dots, \quad (3.93)$$

де $x_{(i)}(t)$; ($i = 0, 1, 2, \dots$) — шукані функції часу, що є розв'язками рівняння i -того наближення.

Підставляючи вираз (3.93) у праву і ліву частину рівняння (3.92), розкладають результат підставляння за степенями μ , причому вилучають члени, що містять μ у степені, вищому за n . Після цього прирівнюють коефіцієнти при однакових степенях параметра μ у правій і лівій частинах рівняння. У результаті отримують рівнянь відповідного (до степеня малого параметра) наближення. Далі послідовно розв'язують ці рівняння, починаючи з нульового наближення, потім першого і так далі. Унаслідок послідовного використання розв'язків рівнянь попередніх наближень у рівняннях наступних наближень дістають послідовність рівнянь, кожне з яких є лінійним рівнянням зі сталими коефіцієнтами і з відомими як функції часу зовнішніми силами. Ці рівняння розв'язують послідовно методами інтегрування лінійних стаціонарних систем.

Розкладемо нелінійну функцію $f(x, \dot{x})$ у ряд за степенями μ в околі нульових наближень $x_{(0)}$, $\dot{x}_{(0)}$:

$$f(x, \dot{x}) = f(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)}) + \mu \left. \frac{\partial f}{\partial \mu} \right|_{\mu=0} + \frac{\mu^2}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2} \right|_{\mu=0} + \dots + \frac{\mu^n}{n!} \left. \frac{\partial^n f}{\partial \mu^n} \right|_{\mu=0} + \dots \quad (3.94)$$

Неважко впевнитися у тому, що

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mu} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \mu}; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2} &= \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\partial f}{\partial \mu} = \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \mu} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \mu} \right) \frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \mu} \right) \frac{\partial \dot{x}}{\partial \mu} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \mu^2} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \frac{\partial^2 \dot{x}}{\partial \mu^2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \mu} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \mu} \frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^2} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \mu} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \mu^2} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \frac{\partial^2 \dot{x}}{\partial \mu^2},$$

причому

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \mu} &= x_{(1)} + 2\mu x_{(2)} + \dots + n\mu^{n-1} x_{(n)}; & \frac{\partial \dot{x}}{\partial \mu} &= \dot{x}_{(1)} + 2\mu \dot{x}_{(2)} + \dots + n\mu^{n-1} \dot{x}_{(n)}; \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \mu^2} &= 2x_{(2)} + 6\mu x_{(3)} \dots + n(n-1)\mu^{n-2} x_{(n)}; \\ \frac{\partial^2 \dot{x}}{\partial \mu^2} &= 2\dot{x}_{(2)} + 6\mu \dot{x}_{(3)} \dots + n(n-1)\mu^{n-2} \dot{x}_{(n)}. \quad \dots \end{aligned} \quad (3.95)$$

У разі $\mu = 0$ одержуємо:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial \mu} \right|_{\mu=0} &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, \dot{x}_0} x_{(1)} + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_{x_0, \dot{x}_0} \dot{x}_{(1)} = f'_x(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)}) x_{(1)} + f'_{\dot{x}}(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)}) \dot{x}_{(1)}; \\ \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2} \right|_{\mu=0} &= f''_{x,x}(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)}) x_{(1)}^2 + 2f''_{x,\dot{x}}(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)}) x_{(1)} \dot{x}_{(1)} + f''_{\dot{x},\dot{x}}(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)}) \dot{x}_{(1)}^2 + \\ &\quad + 2f'_x(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)}) x_{(2)} + 2f'_{\dot{x}}(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)}) \dot{x}_{(2)}. \end{aligned}$$

Використовуючи це у виразах (3.94), а потім – у рівнянні (3.93) і групуючи члени з однаковими степенями малого параметра, дійдемо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{(0)} + \omega_0^2 x_{(0)} &= 0; \\ \ddot{x}_{(1)} + \omega_0^2 x_{(1)} &= f(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)}); \\ \ddot{x}_{(2)} + \omega_0^2 x_{(2)} &= f'_x(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)}) x_{(1)} + f'_{\dot{x}}(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)}) \dot{x}_{(1)}; \\ \ddot{x}_{(3)} + \omega_0^2 x_{(3)} &= f''_{x,x}(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)}) x_{(1)}^2 + 2f''_{x,\dot{x}}(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)}) x_{(1)} \dot{x}_{(1)} + \\ &\quad + f''_{\dot{x},\dot{x}}(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)}) \dot{x}_{(1)}^2 + 2f'_x(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)}) x_{(2)} + 2f'_{\dot{x}}(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)}) \dot{x}_{(2)}. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Розв'язуючи послідовно рівняння (3.96), можна знайти розв'язок (3.90) первинної нелінійної системи (3.97) з довільною (потрібною) точністю.

Покажемо, що застосування цього методу до автономної консервативної коливальної системи (без демпфірування) може привести до появи у розв'язку так званих «секулярних» (або «вікових») членів, тобто членів вигляду $t^m \sin kt$; $t^m \cos kt$, до яких час t входить як множник при гармонічних членах.

Дійсно, нехай

$$f(x, \dot{x}) = -\gamma x^3,$$

тобто рівняння (3.92) набуває вигляду:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \gamma x^3 = 0, \quad (3.97)$$

Утворимо наближений розв'язок з точністю до величин другого порядку мализни, вважаючи малим параметром величину γ , тобто покладемо

$$x(t) = x_{(0)}(t) + \mu x_{(1)}(t) = x_{(0)}(t) + \gamma x_{(1)}(t).$$

Тоді рівняння нульового і першого наближень набудуть вигляду:

$$\ddot{x}_{(0)} + \omega_0^2 x_{(0)} = 0; \quad \ddot{x}_{(1)} + \omega_0^2 x_{(1)} = -x_{(0)}^3.$$

З першого рівняння знаходимо розв'язок породжувального рівняння

$$x_{(0)} = a \cos(\omega_0 t + \vartheta), \quad (3.98)$$

де величини амплітуди a і фази ϑ визначаються початковими умовами. Підставимо цей розв'язок у праву частину рівняння першого наближення:

$$\ddot{x}_{(1)} + \omega_0^2 x_{(1)} = -\frac{a^3}{4} [3 \cos(\omega_0 t + \vartheta) + \cos 3(\omega_0 t + \vartheta)]. \quad (3.99)$$

Оскільки вимушувальна сила $-\frac{3a^3}{4} \cos(\omega_0 t + \vartheta)$ змінюється частотою ω_0 власних коливань і діє вона на недемпфіровану систему, то в останній відповідності до (3.99) спостерігається резонанс, який полягає у необмеженому зростанні амплітуди коливань. Тому розв'язок рівняння (3.99) слід шукати у формі:

$$x_{(1)} = At \sin(\omega_0 t + \vartheta) + B \cos 3(\omega_0 t + \vartheta). \quad (3.100)$$

Підставляння (3.100) у рівняння (3.99) дає змогу знайти невідомі величини. В результаті розв'язок рівняння (3.99) набуває такого вигляду:

$$x_{(1)} = -\frac{3a^3}{8\omega_0} t \sin(\omega_0 t + \vartheta) + \frac{a^3}{32\omega_0^2} \cos 3(\omega_0 t + \vartheta)].$$

Загальний розв'язок рівняння (3.97) можна тепер подати так:

$$x = a \cos(\omega_0 t + \vartheta) - \frac{3\gamma a^3}{8\omega_0} t \sin(\omega_0 t + \vartheta) + \frac{\gamma a^3}{32\omega_0^2} \cos 3(\omega_0 t + \vartheta)]. \quad (3.101)$$

У знайденому наближеному розв'язку є *секулярний* член, і тому коливання, репрезентовані формулою (3.101), мають зростати з плином часу за амплітудою (маятник – розгойдуватися) необмежено, що явно суперечить реально спостережуваному руху системи, описуваному рівнянням (3.97), який є коливаннями зі сталою скінченною амплітудою.

Дійсно, якщо рівняння (3.97) помножити на dx і проінтегрувати, то можна знайти перший інтеграл:

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 x^2 + \frac{1}{4} \gamma x^4 = E,$$

який ілюструє закон збереження енергії. Звідси випливає, що амплітуда змінювання x не може перевищувати значення початкової амплітуди (при $\dot{x} = 0$) і залишається незмінною протягом усього руху.

Виявлена суперечність свідчить про органічний недолік обраного методу розв'язання рівняння. Він полягає у використанні неявного (і невірною у загальному випадку) припущення, що періодичний розв'язок нелінійного рівняння має той самий період, що й розв'язок породжуючої системи.

Припустимо тепер, що це не так, і частота розв'язку рівняння (3.97) насправді відрізняється на малу величину μ . Тоді, розкладаючи $\sin(\omega_0 + \mu)t$ у ряд, матимемо:

$$\sin(\omega_0 + \mu)t = \sin \omega_0 t + \mu t \cos \omega_0 t - \frac{\mu^2 t^2}{2} \cos \omega_0 t - \dots,$$

який містить секулярні члени. Розглядаючи праву частину цього виразу, важко встановити її періодичність ($T = 2\pi/(\omega_0 + \mu)$) у зв'язку з наявністю секулярних членів. Такий самий характер має згадана трудність появи вікових членів у теорії збурень.

Більш досконалі методи дозволяють побудувати розклад розв'язку у такий спосіб, щоб уникнути появи в останньому секулярних членів.

Метод О. М. Крилова. Одним з найпростіших методів, що дозволяє виключити з розв'язку секулярні члени, є метод О. М. Крилова. Він полягає у побудові розв'язку на основі сумісного і одночасного розкладу у ряд за степенями малого параметра як розв'язку, так і квадрата частоти шуканого розв'язку. Метод можна застосовувати для коливальних систем з одним ступенем вільності.

Розглянемо цей метод на прикладі вільних коливань нелінійного маятника. Шукатимемо розв'язок у виді (3.93). Окрім того, шукатимемо невідому частоту k цього періодичного розв'язку також у вигляді ряду

$$k^2 = \omega_0^2 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + \dots, \quad (3.102)$$

де h_1, h_2, \dots – невідомі коефіцієнти, значення яких потрібно визначити.

Із виразу (3.102) випливає

$$\omega_0^2 = k^2 - \mu h_1 - \mu^2 h_2 + \dots. \quad (3.103)$$

Підставимо (3.93) і (3.103) у первинне рівняння (3.97):

$$\ddot{x}_{(0)} + \mu \ddot{x}_{(1)} + (k^2 - \mu h_1)(x_{(0)} + \mu x_{(1)}) + \mu(x_{(0)} + \mu x_{(1)})^3 = 0.$$

З цього випливають такі рівняння нульового й першого наближення:

$$\ddot{x}_{(0)} + k^2 x_{(0)} = 0; \quad \ddot{x}_{(1)} + k^2 x_{(1)} = h_1 x_{(0)} - x_{(0)}^3.$$

Тепер породжувальне рівняння (нульового наближення) має розв'язок (порівняйте з (3.98))

$$x_{(0)} = a \cos(kt + \vartheta), \quad (3.104)$$

де невідомі сталі інтегрування a і ϑ визначаються початковими умовами для породжувального рівняння.

Використаємо розв'язок (3.104) у рівнянні першого наближення

$$\ddot{x}_{(1)} + k^2 x_{(1)} = (h_1 a - \frac{3}{4} a^3) \cos(kt + \vartheta) - \frac{a^3}{4} \cos 3(kt + \vartheta).$$

Наявність додаткової невідомої сталої h_1 дає змогу підібрати її значення таким, щоб коефіцієнт при $\cos(kt + \vartheta)$ у правій частині цього рівняння дорівнював нулю

$$h_1 = \frac{3}{4} a^2, \quad (3.105)$$

і таким чином уникнути появи секулярного члена у розв'язку рівняння першого наближення. За умови виконання (3.105) цей розв'язок матиме вигляд

$$x_{(1)} = A \cos(kt + \vartheta) + B \sin(kt + \vartheta) + \frac{a^3}{32k^2} \cos 3(kt + \vartheta),$$

де A і B – сталі інтегрування, що визначаються початковими умовами для рівняння першого наближення.

Визначаючи сталі інтегрування, зазвичай користуються наступним правилом. Початкові умови для первинної системи рівнянь використовують для знаходження сталих інтегрування тільки у розв'язку породжувального рівняння. Сталі інтегрування у рівняннях наступних наближень визначають з умови нульових початкових умов:

$$\begin{cases} x_{(0)}(0) = x_0 \\ \dot{x}_{(0)}(0) = \dot{x}_0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{(i)}(0) = 0 \\ \dot{x}_{(i)}(0) = 0 \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Виходячи з цього сталі інтегрування A і B рівняння першого наближення дорівнюватимуть:

$$A = -\frac{a^3}{32k^2}; \quad B = 0.$$

Отже, остаточно розв'язок рівняння (3.97) з точністю до членів другого порядку виглядає так:

$$x(t) = a\left(1 - \frac{\gamma a^3}{32k^2}\right) \cos(kt + \vartheta) + \frac{\gamma a^3}{32k^2} \cos 3(kt + \vartheta), \quad (3.106)$$

причому частота усталених коливань визначається з (3.102) з урахуванням (3.104)

$$k = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{3}{4} \gamma a^2}. \quad (3.107)$$

Аналогічно виходять розв'язки рівнянь другого й подальших наближень.

Отже, коливання нелінійної системи з нелінійною пружною силою здійснюються з частотою, відмінною від частоти ω_0 власних коливань породжувальної системи, причому період коливань залежить від їх амплітуди. Такий висновок був зроблений раніше завдяки застосуванню метода лінеаризації. Знайдена за допомогою методу О. М. Крилова залежність власної частоти від амплітуди власних коливань повністю збігається з отриманою методом гармонічної лінеаризації (див. табл. 3.1). Інакше кажучи, подання частоти власних коливань у вигляді розкладу за степенями малого параметра дозволяє не тільки усунути з розв'язків секулярні члени, які не відповідають природі явища, а й виявити одну з найважливіших реальних властивостей нелінійних систем – неізохронність власних (вільних) коливань.

Методи малого параметра, на відміну від методів лінеаризації, дають змогу досліджувати реальну часову форму власних коливань нелінійних систем, які складаються зазвичай з низки гармонік. У розглянутому випадку у спектрі власних коливань маятника, окрім основної (першої гармоніки) спостерігається наявність третьої гармоніки (див. (3.106)), завдяки чому хвиля коливання набуває сплющеної форми хвилі в околі екстремумів.

З цього випливає також можливість досліджувати методами малого параметра періодичні коливання, які відбуваються не тільки з періодом збурення (вимушених коливань), а й з частотами, кратними частоті збурення (параметричні коливання, нелінійні – субгармонічні й ультрагармонічні – резонанси тощо).

Метод Остроградського-Ляпунова. Сутність цього методу полягає у перетворенні рівнянь автономної системи до так званого «власного часу», у

якому одиницею є шуканий період власних коливань системи. Останній при такому поданні виявляється нібито заздалегідь відомим, що дає змогу оперувати з автономними системами так само, як з неавтономними. Перехід до власного часу τ здійснюють за формулою:

$$\tau = \frac{2\pi}{T_0(1+\alpha)} t, \quad (3.108)$$

де T_0 – період породжувального розв'язку; α – залежний від малого параметра μ поправковий коефіцієнт

$$\alpha = \mu h_1 + \mu^2 h_2 + \dots. \quad (3.109)$$

Використаємо цей метод для визначення розв'язку рівняння (3.97).

Очевидно, що

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega_0}{1+\alpha} \frac{dx}{d\tau} = \frac{\omega_0}{1+\alpha} x'; \quad \ddot{x} = \frac{\omega_0^2}{(1+\alpha)^2} x'',$$

тому рівняння (3.97) перетворюється на таке:

$$x'' + (1+\alpha)^2 x \left(1 + \frac{\gamma}{\omega_0^2} x^2\right) = 0.$$

Якщо використати тут розклади розв'язку (3.937) і (3.109), дістанемо рівнянь

$$\ddot{x}_{(0)} + x_{(0)} = 0; \quad \ddot{x}_{(1)} + x_{(1)} = -2h_1 x_{(0)} - \frac{1}{\omega_0^2} x_{(0)}^3.$$

Розв'язок першого (породжувального) рівняння має вид

$$x_{(0)} = a \cos(\tau + \vartheta).$$

Використаємо його у правій частині другого рівняння (першого наближення). Умова відсутності секулярного члена у розв'язку цього рівняння визначає значення коефіцієнта h_1 :

$$h_1 = -\frac{3a^2}{8\omega_0^2},$$

тому розв'язок другого рівняння можна подати так

$$x_{(1)} = A \cos(\tau + \vartheta) + B \sin(\tau + \vartheta) + \frac{a^3}{32\omega_0^2} \cos 3(\tau + \vartheta).$$

Остаточно розв'язок рівняння (3.97) приймає форму

$$x(\tau) = a \left(1 - \frac{\gamma a^2}{32\omega_0^2}\right) \cos(\tau + \vartheta) + \frac{\gamma a^3}{32\omega_0^2} \cos 3(\tau + \vartheta),$$

що повністю збігається з раніше отриманим (3.106).

Щодо частоти k цих коливань, то її можна визначити з (3.108):

$$k = \frac{\omega_0}{1+\alpha} \approx \frac{\omega_0}{1+\gamma h_1} = \frac{\omega_0}{1 - \frac{3\gamma a^2}{8\omega_0^2}} \approx \omega_0 \left(1 + \frac{3\gamma a^2}{8\omega_0^2}\right) \approx \omega_0 \sqrt{1 + \frac{3\gamma a^2}{4\omega_0^2}}.$$

Як бачимо, результат збігається з (3.107).

Дослідження випрямного ефекту. Дрейф Магнуса. Ще однією позитивною особливістю методу збурень є можливість за його допомогою досліджувати так звані *випрямні ефекти*. Під випрямним ефектом зазвичай розуміють явище *виникнення сталих складових коливань вихідних величин системи у разі зовнішніх дій, що є центрованими функціями часу*. Таке явище неможливе у лінійних стаціонарних системах. Його можна спостерігати лише у нелінійних або нестаціонарних системах. Методи лінеаризації не дозволяють досліджувати випрямні ефекти через саму їхню сутність: вони замінюють дослідження нелінійної системи на дослідження деякої лінійної стаціонарної системи, у якій випрямний ефект неможливий.

Проілюструємо застосування методу збурень для вивчення випрямного ефекту на прикладі виявлення систематичного дрейфу ГКП навколо його зовнішньої осі підвісу при вільних (нутаційних) його коливаннях. Цей дрейф у гіроскопічній літературі називають «дрейф Магнуса».

Рух вільного ГКП описується рівняннями (2.57), в яких усі моменти зовнішніх сил слід покласти рівними нулю:

$$\begin{cases} (J_1 + J_2 \cos^2 \beta) \ddot{\alpha} - 2J_2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \cos \beta + H_0 \dot{\beta} \cos \beta = 0 \\ J_3 \ddot{\beta} + J_2 \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta - H_0 \dot{\alpha} \cos \beta = 0 \end{cases} \quad (3.110)$$

Відповідно до методу збурень шукатимемо розв'язок рівнянь (3.110) у вигляді:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \alpha_{(0)}(t) + \mu \alpha_{(1)}(t) + \mu^2 \alpha_{(2)}(t) + \dots, \\ \beta(t) &= \beta_{(0)}(t) + \mu \beta_{(1)}(t) + \mu^2 \beta_{(2)}(t) + \dots. \end{aligned}$$

З фізичних міркувань випливає, що коли на гіроскоп не діють моменти сил, головна його вісь зберігає свій напрямок в інерціальному просторі. Тобто у грубому (нульовому) наближенні можна припустити, що гіроскоп (його головна вісь) є нерухомим, а його кути повороту α і β – незмінні у часі:

$$\alpha_{(0)}(t) \equiv \alpha^* = \text{const}; \quad \beta_{(0)}(t) \equiv \beta^* = \text{const}.$$

Тому швидкості $\dot{\alpha}$ і $\dot{\beta}$ можна подати у вигляді:

$$\dot{\alpha}(t) = \mu \dot{\alpha}_{(1)}(t) + \mu^2 \dot{\alpha}_{(2)}(t) + \dots; \quad \dot{\beta}(t) = \mu \dot{\beta}_{(1)}(t) + \mu^2 \dot{\beta}_{(2)}(t) + \dots.$$

Підставляючи ці ряди у члени рівнянь (3.110) і обмежуючись утриманням членів не вище за другий порядок мализни відносно малого параметра μ , матимемо:

$$\begin{aligned} J_1 + J_2 \cos^2 \beta &\approx J_1 + J_2 \cos^2 \beta^* - \mu(2J_2 \sin \beta^* \cos \beta^*) \beta_{(1)} + \mu^2 \dots \\ \sin \beta \cos \beta &= \sin \beta^* \cos \beta^* + \mu \dots; \quad \cos \beta = \cos \beta^* - \mu \sin \beta^* \beta_{(1)} + \mu^2 \dots \end{aligned}$$

Підставимо ці ряди у рівняння (3.110) і згрупуємо члени з множником μ у першому степені. Отримаємо рівняння першого наближення – лінеаризовані рівняння руху ГКП:

$$\begin{cases} A \ddot{\alpha}_{(1)} + H_0 \cos \beta^* \dot{\beta}_{(1)} = 0 \\ J_3 \ddot{\beta}_{(1)} - H_0 \cos \beta^* \dot{\alpha}_{(1)} = 0 \end{cases} \quad (3.111)$$

де

$$A = J_1 + J_2 \cos^2 \beta^* . \quad (3.112)$$

Збираючи члени з μ^2 , приходимо до рівнянь другого наближення:

$$\begin{cases} A\ddot{\alpha}_{(2)} + H_0 \cos \beta^* \dot{\beta}_{(2)} = 2J_2 \sin \beta^* \cos \beta^* (\ddot{\alpha}_{(1)}\beta_{(1)} + \dot{\alpha}_{(1)}\dot{\beta}_{(1)}) + H_0 \sin \beta^* (\dot{\beta}_{(1)}\beta_{(1)}) \\ J_3\ddot{\beta}_{(2)} - H_0 \cos \beta^* \dot{\alpha}_{(2)} = -J_2 \sin \beta^* \cos \beta^* \dot{\alpha}_{(1)}^2 - H_0 \sin \beta^* (\dot{\alpha}_{(1)}\beta_{(1)}) \end{cases} .$$

Їх ще можна подати у вигляді

$$\begin{cases} A\ddot{\alpha}_{(2)} + H_0 \cos \beta^* \dot{\beta}_{(2)} = 2J_2 \sin \beta^* \cos \beta^* \frac{d}{dt}(\dot{\alpha}_{(1)}\beta_{(1)}) + \frac{1}{2}H_0 \sin \beta^* \frac{d}{dt}(\beta_{(1)}^2) \\ J_3\ddot{\beta}_{(2)} - H_0 \cos \beta^* \dot{\alpha}_{(2)} = -J_2 \sin \beta^* \cos \beta^* \dot{\alpha}_{(1)}^2 - H_0 \sin \beta^* (\dot{\alpha}_{(1)}\beta_{(1)}) \end{cases} . \quad (3.113)$$

Розв'язок лінеаризованих рівнянь (3.111) має вид:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_{(1)} = a \sin(\lambda t + \varepsilon) \\ \dot{\beta}_{(1)} = -\sqrt{\frac{A}{J_3}} a \cos(\lambda t + \varepsilon) \end{cases} \quad \left(\lambda = \frac{H_0 \cos \beta^*}{\sqrt{AJ_3}} \right) . \quad (3.114)$$

З першого з рівнянь (3.111) випливає

$$\dot{\beta}_{(1)} = -\frac{A}{H_0 \cos \beta^*} \ddot{\alpha}_{(1)} , \quad (3.115)$$

Можна точно довести, що рух з куту β буде періодичним. Тому надалі вважатимемо, що β^* є середнім значенням цього кута за період. Тоді з (3.115), інтегруючи за часом, можна висновити

$$\beta_{(1)} = -\frac{A}{H_0 \cos \beta^*} \dot{\alpha}_{(1)} .$$

Із врахуванням цього рівняння (3.113) можна перетворити до такої форми:

$$\begin{cases} A\ddot{\alpha}_{(2)} + H_0 \cos \beta^* \dot{\beta}_{(2)} = 2J_2 \sin \beta^* \cos \beta^* \frac{d}{dt}(\dot{\alpha}_{(1)}\beta_{(1)}) + \frac{1}{2}H_0 \sin \beta^* \frac{d}{dt}(\beta_{(1)}^2) \\ J_3\ddot{\beta}_{(2)} - H_0 \cos \beta^* \dot{\alpha}_{(2)} = \frac{J_1 \sin \beta^*}{\cos \beta^*} \dot{\alpha}_{(1)}^2 \end{cases} . \quad (3.116)$$

Така форма рівнянь другого наближення дозволяє без їх розв'язання одразу визначити сталі складові кутових швидкостей гіроскопа. Для цього застосуємо до правих і лівих частин рівнянь (3.116) операцію усереднення за часом протягом періоду $T = 2\pi/\lambda$ нутаційних коливань:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt .$$

При цьому вважатимемо, що

$$\langle \ddot{\alpha}_{(2)} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \ddot{\alpha}_{(2)}(t) dt = 0 ; \quad \langle \ddot{\beta}_{(2)} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \ddot{\beta}_{(2)}(t) dt = 0 ,$$

і врахуємо, що за вказаних умов (див. (3.114))

$$\left\langle \frac{d}{dt} (\dot{\alpha}_{(1)} \beta_{(1)}) \right\rangle = \left\langle \frac{d}{dt} (\beta_{(1)}^2) \right\rangle = 0; \quad \langle \dot{\alpha}_{(1)}^2 \rangle = \frac{a^2}{2}.$$

Тому з (3.116) матимемо остаточно:

$$\langle \dot{\beta} \rangle = \langle \dot{\beta}_{(2)} \rangle = 0; \quad \langle \dot{\alpha} \rangle = \langle \dot{\alpha}_{(2)} \rangle = -\frac{J_1 \sin \beta^*}{2H_0 \cos^2 \beta^*} a^2. \quad (3.117)$$

Формула Магнуса (3.117) фіксує той факт, що *вільні коливання гіроскопа у кардановому підвісі супроводжуються обертанням з постійною кутовою швидкістю навколо зовнішньої осі підвісу центра цих коливань*, і визначає залежність цієї кутової швидкості від параметрів гіроскопа і нутаційних коливань.

3.4.3. Метод усереднення

Метод усереднення – один з найефективніших засобів наближеного теоретичного дослідження нелінійних систем з малою нелінійністю, тобто систем, рух яких за зменшенням значення малого параметра до нуля наближається до руху деякої лінійної стаціонарної системи (рух таких систем описується квазілінійними диференціальними рівняннями).

На відміну від більшості розглянутих методів метод усереднення дає змогу не лише визначати параметри стаціонарних (усталених) коливань, а й досліджувати стійкість цих коливань, вивчати процес усталення коливань (тобто досліджувати й нестационарні процеси). Окрім того, метод усереднення можна успішно застосовувати для дослідження таких нелінійних ефектів, як нелінійні резонанси (стаціонарні коливання, що здійснюються з частотою, відмінною від частоти вимушуючої сили). Ці безперечні переваги дозволили методу усереднення зайняти одне з провідних місць серед сучасних методів теоретичного аналізу нелінійних систем і забезпечили йому бурхливий розвиток.

Головна ідея методу усереднення полягає у наступному.

Спочатку порвинна система диференціальних рівнянь нелінійної системи (у квазілінійній формі) перетворюється до *стандартної форми*, тобто до вигляду системи диференціальних рівнянь у нормальній формі Коші (сукупності диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно перших похідних), у правих частинах яких містяться лише малі нелінійні члени:

$$\frac{dy_i}{dt} = \mu Z_i(y_1, y_2, \dots, y_n, t); \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3.118)$$

де n – порядок системи диференціальних рівнянь; μ – малий параметр; y_i – фазові координати; $Z_i(y_1, y_2, \dots, y_n, t)$ – деякі нелінійні функції фазових координат і часу.

Оскільки швидкості змінювання фазових координат відповідності до (3.118) є малими, то самі фазові координати y_i можна вважати майже сталими протягом деякого характерного проміжку часу T (наприклад, періоду шуканих коливань), причому цей висновок, очевидно, тим достовірніший, чим менший малий параметр μ . Отже, можна подати кожен з цих фазових координат у вигляді

$$y_i = \bar{y}_i + \tilde{y}_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3.119)$$

де

$$\bar{y}_i = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} y_i(t) dt$$

є середнім значенням координати на проміжку часу T , а \tilde{y}_i – мала коливна центрована (тобто середнє значення якої дорівнює нулю) частка.

Усереднимо протягом вказаного проміжку обидві частини (3.118). Оскільки

$$\left\langle \frac{dy_i}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{dy_i}{dt} dt = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{T} \int_t^{t+T} y_i(t) dt \right) = \frac{d\bar{y}_i}{dt},$$

то

$$\frac{d\bar{y}_i}{dt} = \mu \frac{1}{T} \int_t^{t+T} Z_i(y_1, y_2, \dots, y_n, t) dt; \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.120)$$

Усереднені рівняння (3.120), як і початкові рівняння (3.118) є точними (бо ніяких спрощуючих процедур щодо них не було застосовано, і вони повністю еквівалентні первинним рівнянням). Розв’язування усереднених рівнянь не простіше, ніж первинних, оскільки у правих частинах під інтегралом містяться невідомі функції часу $y_i(t)$.

Проте, відповідно до раніше зазначеного, величини y_i мало змінюються, тобто у першому грубому наближенні у виразах (3.119) можна знехтувати малими флуктуаційними членами \tilde{y}_i і оперувати при інтегруванні у правих частинах (3.120) величинами y_i як сталими \bar{y}_i ($y_i \approx \bar{y}_i$). У цьому і полягає головна суть методу усереднення. Отже, згідно з методом усереднення замість рівнянь (3.118) розглядаються наближені усереднені рівняння:

$$\frac{d\bar{y}_i}{dt} = \mu \frac{1}{T} \int_t^{t+T} Z_i(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n, t) dt; \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.121)$$

Якщо у правих частинах рівнянь (3.118) явні залежності від часу є періодичними функціями з періодом T , то праві частини усереднених рівнянь (3.121), очевидно, від часу не залежатимуть, і рівняння (3.121) можна подати у вигляді

$$\frac{d\bar{y}_i}{dt} = \mu \bar{Z}_i(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n); \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3.122)$$

причому

$$\bar{Z}_i(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Z_i(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n, \psi) d\psi; \quad (\psi = \omega t + \vartheta; \omega = \frac{2\pi}{T}). \quad (3.123)$$

Отже, метод усереднення дає змогу від точних рівнянь (3.118) перейти до наближених рівнянь (3.122), які значно простіші вже тому, що в їх праві частини не входить явно час. Окрім того, обчислюючи інтеграли (3.123), з величинами \bar{y}_i можна поводитися як зі сталими. Рівняння (3.122) при цьому стають рів-

няннями деякої автономної системи, де усереднені величини \bar{y}_i є вже змінними. Ці обставини й зумовлюють значні можливості методу усереднення.

Під час практичного застосування методу усереднення однією з найбільш трудомістких і відповідальних операцій є зведення початкових рівнянь нелінійної системи до стандартної форми (3.118). Процес ускладнюється тим, що процедура такого зведення залежить не лише від вигляду первинних нелінійних рівнянь. Вона значною мірою визначається метою дослідження, зокрема, – видом (і, передусім, – частотою) періодичних коливань, які потрібно вивчити. Зведення рівнянь до стандартної форми є неоднозначною і неформалізованою процедурою і значною мірою залежить від кваліфікації та досвіду дослідника у застосуванні методу усереднення. Маючи це на увазі, недаремно кажуть, що застосування методу усереднення – це швидше мистецтво, аніж наука.

Вільні нелінійні коливання. Розглянемо вільні коливання нелінійної системи з нелінійною позиційною силою, описувану рівнянням (3.97).

Перш ніж звести рівняння (3.97) до стандартної форми, зведемо їх до нормальної форми Коші. Для цього введемо позначення:

$$x_1 = x; \quad x_2 = \dot{x}.$$

Тепер можна записати початкове рівняння (3.97) у вигляді системи з двох диференціальних рівнянь першого порядку такого виду:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = -\omega_0^2 x_1 - \gamma x_1^3. \quad (3.124)$$

Щоб перейти до стандартної форми, перш за все *потрібно передусім віднайти таку породжувальну систему рівнянь, розв'язок якої максимально наближався б до шуканого виду усталених коливань нелінійної системи, потім визначити її розв'язок. Якщо тепер як нові фазові змінні використати сталі інтегрування у знайденому розв'язку породжувальної системи, то нові рівняння будуть мати стандартну форму.*

У розглядуваному випадку породжувальну систему отримаємо, відкинувши малий нелінійний член рівняння γx_1^3 . Тоді:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = -\omega_0^2 x_1.$$

Розв'язок цієї породжувальної системи рівнянь має вигляд:

$$x_1 = a \cos \psi; \quad x_2 = -a\omega_0 \sin \psi; \quad (\psi = \omega_0 t + \vartheta). \quad (3.125)$$

Тут амплітуда a коливань і зсув фаз ϑ є сталими інтегрування, що визначаються початковими умовами руху.

Переходячи знову до нелінійних рівнянь (3.124), припустимемо, що й їх розв'язок має таку саму форму (3.125), але тепер і амплітуда a , і фаза ϑ уже не постійні, а деякі, поки що невідомі функції часу.

Тому будемо розглядати (3.125) як заміну колишніх змінних x_1 і x_2 на нові змінні a і ϑ (або ψ). Підставляючи (3.125) у рівняння (3.124), дістанемо таку систему диференціальних рівнянь у стандартній формі:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da}{dt} = \frac{\gamma}{\omega_0} F(a, \psi) \sin \psi; \\ \frac{d\psi}{dt} = \omega_0 + \frac{\gamma}{a\omega_0} F(a, \psi) \cos \psi, \end{array} \right.$$

де позначено

$$F(a, \psi) = a^3 \cos^3 \psi.$$

До отриманої системи рівнянь у стандартній формі можна застосовувати операцію усереднення. Проведемо таке усереднення за невідомим фазовим кутом ψ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{\gamma}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} F(\bar{a}, \psi) \sin \psi \, d\psi; \\ \frac{d\bar{\psi}}{dt} = \omega_0 + \frac{\gamma}{2\pi a\omega_0} \int_0^{2\pi} F(\bar{a}, \psi) \cos \psi \, d\psi. \end{array} \right. \quad (3.126)$$

Оскільки під інтегралом містяться усереднені за період коливань значення амплітуди, то рівняння (3.126) є вже наближеними, аналогічними (3.122).

Через те що

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} F(\bar{a}, \psi) \cdot \sin \psi \cdot d\psi &= \int_0^{2\pi} \bar{a}^3 \cos^3 \psi \cdot \sin \psi \cdot d\psi = \\ &= -\bar{a}^3 \int_0^{2\pi} \cos^3 \psi \cdot d \cos \psi = -\bar{a}^3 \frac{\cos^4 \psi}{4} \Big|_0^{2\pi} = 0; \\ \int_0^{2\pi} F(\bar{a}, \psi) \cdot \cos \psi \cdot d\psi &= \bar{a}^3 \int_0^{2\pi} \cos^4 \psi \cdot d\psi = \frac{\bar{a}^3}{4} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\psi)^2 \cdot d\psi = \\ &= \frac{\bar{a}^3}{4} \int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos 2\psi + \cos^2 2\psi) \cdot d\psi = \\ &= \frac{\bar{a}^3}{4} \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} + 2 \cos 2\psi + \frac{1}{2} \cos 4\psi \right) \cdot d\psi = \frac{\bar{a}^3 \pi}{4}, \end{aligned}$$

то

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{a}}{dt} = 0 \\ \frac{d\bar{\psi}}{dt} = \omega_0 + \frac{3\gamma\bar{a}^2}{8\omega_0} \end{array} \right.$$

Інтегрування цих рівнянь дозволяє дістати такі розв'язків:

$$\bar{a} = a = const; \quad \bar{\psi} = \omega_0 \left(1 + \frac{3\gamma a^2}{8\omega_0^2} \right) t + \vartheta,$$

відповідно до чого розв'язок початкового нелінійного рівняння (3.97) можна остаточно звести (з точністю до членів другого порядку мализни відносно малого параметра) до вигляду:

$$x(t) = a \cos[\omega_0(1 + \frac{3\gamma a^2}{8\omega_0^2})t + \vartheta]; \quad \dot{x}(t) = -a\omega_0 \sin[\omega_0(1 + \frac{3\gamma a^2}{8\omega_0^2})t + \vartheta].$$

Як бачимо, розв'язування рівняння (3.97) за допомогою методу усереднення приводить до тих самих результатів, що й метод гармонічної лінеаризації і метод збурень. Однак, ці результати одержані дещо складнішим шляхом, а висновки навіть менші за метод збурень. Тому цю задачу доцільніше розв'язувати методом лінеаризації (що значно простіше, а виходить той самий результат), або методом О. М. Крилова (розв'язок відшукується дещо складніше, але виходить ще й інформація про спектральний склад вільних коливань).

Вимушені коливання нелінійної системи. Розглянемо докладніше ті особливості АЧХ, які зумовлені нелінійністю пружної сили. Для спрощення вважатимемо, що демпфірування у системі є лінійним (в'язке тертя), і розгляда-тимемо рівняння

$$m\ddot{x} + f\dot{x} + cx + c\gamma x^3 = mA \cos \omega t.$$

Для зручності подання розв'язку перетворимо це рівняння до безрозмірної форми

$$x'' + 2\zeta x' + x(1 + \gamma x^2) = A_0 \cos \nu \tau, \quad (3.127)$$

де

$$\zeta = \frac{f}{2\sqrt{mc}}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}; \quad \nu = \frac{\omega}{\omega_0}; \quad A_0 = \frac{A}{\omega_0^2}.$$

Тут штрихом позначені похідні за безрозмірним часом $\tau = \omega_0 t$.

Визначимо стаціонарні (усталені) вимушені коливання, що здійснюються з періодом $T = 2\pi/\omega$ збурюючої сили. Застосуємо для цього метод усереднення. Подамо рівняння (3.221) у дещо іншому вигляді:

$$x'' + \nu^2 x = A_0 \cos \nu \tau - 2\zeta x' + x(\nu^2 - 1) - \gamma x^3. \quad (3.128)$$

Позначимо праву частину рівняння

$$\mu f(x, x', \tau) = A_0 \cos \nu \tau - 2\zeta x' + \Delta \nu^2 x - \gamma x^3, \quad (3.129)$$

де величина

$$\Delta \nu^2 = \nu^2 - 1$$

називається «розладом» частоти і припускається малою.

Користуючись попередніми позначеннями, перетворимо рівняння (3.128) до нормальної форми Коші:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = -\nu^2 x_1 + \mu f(x_1, x_2, \tau), \quad (3.130)$$

причому, відповідно до (3.129)

$$\mu f(x_1, x_2, \tau) = A_0 \cos \nu \tau - 2\zeta x_2 + \Delta \nu^2 x_1 - \gamma x_1^3.$$

Породжувальну систему одержимо, покладаючи у (3.130) малий параметр рівним нулю:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = -\nu^2 x_1.$$

Знаходимо розв'язок породжувальної системи

$$x_1 = a \cos(vt + \varphi); \quad x_2 = -av \sin(vt + \varphi),$$

де величини a і φ – сталі інтегрування і визначаються початковими умовами.

Надалі зручніше використати дещо іншу форму подання розв'язку, а саме – комплексну:

$$x_1 = Ce^{jv\tau} + De^{-jv\tau}; \quad x_2 = jv(Ce^{jv\tau} - De^{-jv\tau}). \quad (3.131)$$

Зв'язок між комплексними величинами C , D і дійсними амплітудою a і фазою φ визначається очевидними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} C &= \frac{a}{2} e^{j\varphi}; & D &= \frac{a}{2} e^{-j\varphi}; & a^2 &= 4CD; \\ C + D &= a \cos \varphi; & C - D &= ja \sin \varphi. \end{aligned} \quad (3.132)$$

Для породжувальної системи величини C і D також є сталими інтегрування. Розглядатимемо їх як нові змінні, а (3.131) – як формули перетворення. Підставимо (3.131) у рівняння (3.130). Після перетворень зведемо одержані рівняння до вигляду:

$$\begin{cases} \frac{dC}{dt} = \frac{1}{2jv} \mu f(C, D, \tau) \cdot e^{-jv\tau} \\ \frac{dD}{dt} = -\frac{1}{2jv} \mu f(C, D, \tau) \cdot e^{jv\tau} \end{cases}. \quad (3.133)$$

Це й є стандартна форма початкових рівнянь. У правих частинах міститься функція

$$\begin{aligned} \mu f(C, D, \tau) &= \frac{A_0}{2} (e^{jv\tau} + e^{-jv\tau}) - j2\zeta v (Ce^{jv\tau} - De^{-jv\tau}) + \\ &+ \Delta v^2 (Ce^{jv\tau} + De^{-jv\tau}) - \gamma (Ce^{jv\tau} + De^{-jv\tau})^3 = \\ &= \left[\frac{A_0}{2} + (\Delta v^2 - 3\gamma CD - j2\zeta v) C \right] e^{j\psi} + \\ &+ \left[\frac{A_0}{2} + (\Delta v^2 - 3\gamma CD + j2\zeta v) D \right] e^{-j\psi} - \\ &- \gamma \cdot C^3 e^{j3\psi} - \gamma D^3 e^{-j3\psi} = \mu f(C, D, \psi); \quad (\psi = v\tau). \end{aligned}$$

У нових позначеннях аргумента рівняння (3.133) набувають виду

$$\begin{cases} \frac{dC}{d\psi} = \frac{1}{2jv^2} \mu f(C, D, \psi) e^{-j\psi} \\ \frac{dD}{d\psi} = -\frac{1}{2jv^2} \mu f(C, D, \psi) e^{j\psi} \end{cases}. \quad (3.134)$$

Відповідно до методу усереднення усереднимо за аргументом ψ обидві частини рівнянь (3.134). При цьому C і D слід припускати незалежними від аргументу і рівними їх середнім значенням \bar{C} і \bar{D} відповідно. Позначимо:

$$\begin{aligned} R_1(\bar{C}, \bar{D}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu f(\bar{C}, \bar{D}, \psi) e^{-j\psi} d\psi = \frac{A_0}{2} + (\Delta v^2 - 3\gamma \bar{C}\bar{D} - j2\zeta v) \bar{C}; \\ R_2(\bar{C}, \bar{D}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu f(\bar{C}, \bar{D}, \psi) e^{j\psi} d\psi = \frac{A_0}{2} + (\Delta v^2 - 3\gamma \bar{C}\bar{D} + j2\zeta v) \bar{D}. \end{aligned} \quad (3.135)$$

Тепер усереднені наближені рівняння можна подати у вигляді

$$\frac{d\bar{C}}{d\psi} = \frac{1}{2j\nu^2} R_1(\bar{C}, \bar{D}); \quad \frac{d\bar{D}}{d\psi} = -\frac{1}{2j\nu^2} R_2(\bar{C}, \bar{D}). \quad (3.136)$$

Ці рівняння, на відміну від вихідних рівнянь (3.134), вже не містять аргумента ψ у правих частинах, що суттєво спрощує їх вивчення.

Шуканим стаціонарним коливанням відповідають сталі значення C_0 і D_0 комплексних амплітуд C і D (а отже, й усереднених їхніх значень \bar{C} і \bar{D} відповідно). Тому для їх визначення достатньо покласти у (3.136) швидкості змінювання цих параметрів рівними нулю, що є рівносильним розв'язку системи двох алгебричних рівнянь $R_1(C_0, D_0) = 0$ і $R_2(C_0, D_0) = 0$ із двома невідомими C_0 і D_0 . Ураховуючи (3.135), запишемо їх у явному вигляді:

$$(\Delta\nu^2 - 3\gamma C_0 D_0 - j2\zeta\nu)C_0 = -\frac{A_0}{2}; \quad (\Delta\nu^2 - 3\gamma C_0 D_0 + j2\zeta\nu)D_0 = -\frac{A_0}{2}.$$

Найзручніше розв'язати систему, перемноженням правих і лівих частин цих двох рівнянь. В результаті виходить

$$[(\Delta\nu^2 - 3\gamma C_0 D_0)^2 + 4\zeta^2 \nu^2] C_0 D_0 = \frac{A_0^2}{4}.$$

Якщо згадати співвідношення (3.132), то знайдене співвідношення дає змогу встановити залежність між усталеною амплітудою a_0 вимушених коливань і частотою ν збурювальної сили:

$$\left(1 + \frac{3}{4}\gamma a_0^2 - \nu^2\right)^2 + 4\zeta^2 \nu^2 = \frac{A_0^2}{a_0^2},$$

звідки випливає

$$\nu = \sqrt{1 + \frac{3}{4}\gamma a_0^2 - 2\zeta^2 \pm \sqrt{\frac{A_0^2}{a_0^2} - 4\zeta^2 \left(1 + \frac{3}{4}\gamma a_0^2 - \zeta^2\right)}}, \quad (3.137)$$

що повністю відповідає виразу (3.90), визначеному методом гармонічної лінеаризації. Отже, вираз (3.137) можна отримати й більш раціональним шляхом. Метод усереднення у цьому сенсі не дає якихось помітних переваг.

Проте, на відміну від методів лінеаризації, метод усереднення дає змогу не лише визначати параметри стаціонарних коливань, а й досліджувати стійкість цих коливання. Для цього варто знову скористатися рівняннями (3.136).

Припустимо, що комплексні амплітуди \bar{C} і \bar{D} набули деяких приростів (флуктуацій, відхилень) δC і δD відносно до своїх стаціонарних значень: $\bar{C} = C_0 + \delta C$ і $\bar{D} = D_0 + \delta D$. Підставимо їх у (3.135) і врахуємо, що вирази $R_1(\bar{C}, \bar{D})$ і $R_2(\bar{C}, \bar{D})$ можна розкласти у ряд Тейлора за степенями малих приростів в околі стаціонарних значень

$$R_1(\bar{C}, \bar{D}) = R_1(C_0, D_0) + \left. \frac{\partial R_1}{\partial C} \right|_{C_0, D_0} \delta C + \left. \frac{\partial R_1}{\partial D} \right|_{C_0, D_0} \delta D + \dots$$

$$R_2(\bar{C}, \bar{D}) = R_2(C_0, D_0) + \left. \frac{\partial R_2}{\partial C} \right|_{C_0, D_0} \delta C + \left. \frac{\partial R_2}{\partial D} \right|_{C_0, D_0} \delta D + \dots$$

і обмежитися для вивчення стійкості утриманням лише членів не вище за перший порядок мализни. В результаті дістанемо рівняння у варіаціях:

$$\frac{d(\delta C)}{d\psi} - \frac{1}{2jv^2} \frac{\partial R_1}{\partial C} \delta C - \frac{1}{2jv^2} \frac{\partial R_1}{\partial D} \delta D = 0;$$

$$\frac{d(\delta D)}{d\psi} + \frac{1}{2jv^2} \frac{\partial R_2}{\partial C} \delta C + \frac{1}{2jv^2} \frac{\partial R_2}{\partial D} \delta D = 0.$$

Характеристичне рівняння цієї системи диференціальних рівнянь можна подати у такий спосіб:

$$\begin{vmatrix} p - \frac{1}{2jv^2} \frac{\partial R_1}{\partial C} & -\frac{1}{2jv^2} \frac{\partial R_1}{\partial D} \\ \frac{1}{2jv^2} \frac{\partial R_2}{\partial C} & p + \frac{1}{2jv^2} \frac{\partial R_2}{\partial D} \end{vmatrix} =$$

$$= p^2 + p \frac{1}{2jv^2} \left(\frac{\partial R_2}{\partial D} - \frac{\partial R_1}{\partial C} \right) + \frac{1}{4v^2} \left(\frac{\partial R_1}{\partial C} \frac{\partial R_2}{\partial D} - \frac{\partial R_1}{\partial D} \frac{\partial R_2}{\partial C} \right) = 0.$$

Відповідно до критерію Гурвіца незбурений рух (вимушені коливання) буде стійким, якщо коефіцієнти характеристичного рівняння додатні, тобто виконуються умови:

$$\frac{1}{2jv^2} \left(\frac{\partial R_2}{\partial D} - \frac{\partial R_1}{\partial C} \right) > 0; \quad \frac{1}{4v^2} \left(\frac{\partial R_1}{\partial C} \frac{\partial R_2}{\partial D} - \frac{\partial R_1}{\partial D} \frac{\partial R_2}{\partial C} \right) > 0.$$

Очевидно, що

$$\frac{\partial R_1}{\partial C} = \Delta v^2 - 6\gamma C_0 D_0 - j2\zeta v; \quad \frac{\partial R_1}{\partial D} = -3\gamma C_0^2;$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial C} = -3\gamma D_0^2; \quad \frac{\partial R_2}{\partial D} = \Delta v^2 - 6\gamma C_0 D_0 + j2\zeta v.$$

Тому умови стійкості матимуть вид:

$$\frac{1}{2jv^2} \left(\frac{\partial R_2}{\partial D} - \frac{\partial R_1}{\partial C} \right) = \frac{1}{2jv^2} 4j\zeta v = \frac{2\zeta}{v} > 0; \quad (3.138)$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial C} \frac{\partial R_2}{\partial D} - \frac{\partial R_1}{\partial D} \frac{\partial R_2}{\partial C} = (\Delta v^2 - 6\gamma C_0 D_0)^2 + 4\zeta^2 v^2 - 9\gamma^2 (C_0 D_0)^2 > 0.$$

За наявності тертя у системі перша умова (3.138) завжди виконується.

Позначимо через a_{10}^2 і a_{20}^2 корені рівняння

$$\left(\Delta v^2 - \frac{3}{2} \gamma a_0^2 \right)^2 + 4\zeta^2 v^2 - \frac{9}{16} \gamma^2 a_0^4 = 0. \quad (3.139)$$

Тоді другу умову (3.138) можна подати так:

$$\frac{27}{16} \gamma^2 (a_0^2 - a_{10}^2)(a_0^2 - a_{20}^2) > 0. \quad (3.140)$$

Вираз (3.140) буде додатним у двох випадках:

1) коли амплітуда a_0 вимушених коливань менша за найменший з коренів a_{10} і a_{20} ;

2) коли ця амплітуда більша за найбільший з коренів.

Якщо ж амплітуда a_0 міститиметься між значеннями a_{10} і a_{20} коренів рівняння (3.139), то відповідний до цієї амплітуди режим стаціонарних вимушених коливань буде нестійким.

Неважко показати, що корені a_{10} і a_{20} рівняння (3.139) відповідають точкам АЧХ, дотичні в яких є паралельними до осі амплітуд. Дійсно, криві АЧХ описуються формулою (3.137), яку можна перетворити на таку:

$$a_0^2 \left[\left(1 + \frac{3}{4} \gamma a_0^2 - v^2 \right)^2 + 4\zeta^2 v^2 \right] - A_0^2 = F(v^2, a_0^2) = 0.$$

Знайдемо похідну $\frac{dv^2}{da_0^2}$, припускаючи, що залежність частоти від амплітуди визначається неявною функцією $F(v^2, a_0^2) = 0$:

$$\frac{dv^2}{da_0^2} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial a_0^2}}{\frac{\partial F}{\partial v^2}}.$$

Визначимо точки АЧХ, у яких ця похідна дорівнює нулю (очевидно, у цих точках дотична до АЧХ буде паралельною до осі амплітуд). Для цього достатньо дорівняти до нуля частинну похідну від функції $F(v^2, a_0^2)$ за квадратом амплітуди.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial a_0^2} &= \left(1 + \frac{3}{4} \gamma a_0^2 - v^2 \right)^2 + 4\zeta^2 v^2 + 2 \left(1 + \frac{3}{4} \gamma a_0^2 - v^2 \right) \frac{3}{4} \gamma a_0^2 = \\ &= \left(1 + \frac{3}{4} \gamma a_0^2 - v^2 \right)^2 + 2 \left(1 + \frac{3}{4} \gamma a_0^2 - v^2 \right) \frac{3}{4} \gamma a_0^2 + \\ &+ \left(\frac{3}{4} \gamma a_0^2 \right)^2 + 4\zeta^2 v^2 - \left(\frac{3}{4} \gamma a_0^2 \right)^2 = \\ &= \left(1 + \frac{3}{4} \gamma a_0^2 - v^2 + \frac{3}{4} \gamma a_0^2 \right)^2 + 4\zeta^2 v^2 - \left(\frac{3}{4} \gamma a_0^2 \right)^2 = \\ &= \left(1 + \frac{3}{2} \gamma a_0^2 - v^2 \right)^2 + 4\zeta^2 v^2 - \frac{9}{16} \gamma^2 a_0^4 = 0. \end{aligned}$$

В результаті вийшло рівняння (3.139), що й доводить зроблене припущення.

Отже в нелінійних системах можливі нестійкі стаціонарні вимушені коливання. Для нелінійної системи, що описується рівнянням (3.89), як було виявлено, існує особлива зона, що міститься між двома кривими, які визначаються коренями рівняння (3.139) і складаються з точок АЧХ, що відповідають різним значенням амплітуди A_0 збурювальної сили, у яких дотичні до АЧХ є па-

паралельними до осі амплітуд. Всередині цієї зони точки АЧХ відповідають нестійким коливанням. Це означає, що найменше відхилення амплітуди коливання від значення, відповідного точкам АЧХ, що містяться всередині зони нестійких коливань (рис. 3.17), зумовлює швидке або збільшення амплітуди до значення, яке відповідає верхній гілці АЧХ, або зменшення амплітуди до значення, що відповідає нижній гілці АЧХ за такого ж значення частоти (частоти збурювальної сили).

Якщо коефіцієнт нелінійності γ додатний, скелетна крива, що описується співвідношенням $\lambda_e = \sqrt{1 + \frac{3}{4}\gamma a^2}$, відхиляється зі збільшенням амплітуди праворуч, тобто у бік збільшення частоти. У той же бік «нахиляється» і АЧХ нелінійної системи. При цьому можлива поява ділянок нестійких коливань. Якщо повільно збільшувати частоту ν вимушувальної сили, то, як показано на рис. 3.17, амплітуда коливань буде змінюватися спочатку згідно з кривою af АЧХ. У точці b відбувається «зрив» – раптове різке зменшення амплітуди до значення, що відповідає точці c , а за подальшого збільшення частоти амплітуда змінюється згідно з частиною cd АЧХ.

У разі зменшення частоти збурення амплітуда вимушених коливань спочатку змінюється відповідно до частини dce АЧХ. У точці e спостерігається різке раптове збільшення амплітуди до значення, визначуваного точкою f АЧХ, і подальше змінювання амплітуди відповідатиме ділянці fa АЧХ. Ділянка eb АЧХ при цьому неначе «обминається» за будь-якого змінювання частоти, і тому за реальних вимірювань АЧХ ця ділянка залишається «невидимою», і за експериментального визначення АЧХ нелінійної системи мають вигляд, зображений на рис. 3.17 потовщеними лініями.

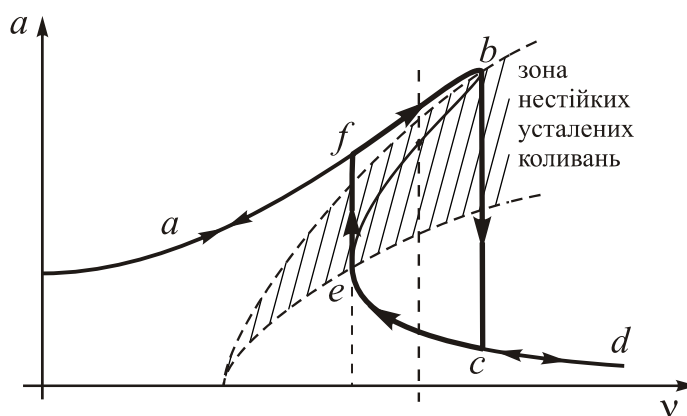


Рис. 3.17. Зони нестійких коливань нелінійних систем

Параметричні коливання. Параметричними коливаннями називають специфічний вид коливань нестационарної системи, який виникає внаслідок збурювальних коливань значень одного з параметрів системи (маси, коефіцієнта жорсткості пружини тощо).

Найбільш наочним прикладом параметричних коливань є коливання маятника, зумовлені інтенсивною вертикальною вібрацією точки її підвісу.

Розглянемо рух маятника за суто вертикальної вібрації основи на основі раніше виведених рівнянь (2.8):

$$J_Z \ddot{\gamma} + R\dot{\gamma} + mgl(1 + n_\eta) \sin \gamma = M_{OZ}, \quad (3.141)$$

де $n_\eta(t)$ – перевантаження основи у вертикальному напрямку, яке й відіграє роль параметричного збудження цієї нестационарної системи.

Задля узагальненості припустимо, що маятник з'єднаний з основою пружиною, яка при повороті маятника накладає на нього відновлюючий позиційний момент сил $M_{OZ} = -c\gamma - d\gamma^3$. Вивчатимемо лише рух маятника з малими відхиленнями від вертикалі $\gamma \ll 1$ і тому замінимо у рівнянні (3.141)

$\sin \gamma \approx \gamma - \frac{1}{6}\gamma^3$. Тоді, відкидаючи член з $n_\eta(t)\gamma^3$ як мало суттєвий, дійдемо рівняння, яке й оберемо за первинне:

$$\gamma'' + 2\zeta\gamma' + \gamma + s\gamma^3 + b\gamma n_\eta(\tau) = 0, \quad (3.142)$$

де використано безрозмірний час $\tau = \omega_0 t$ і позначено:

$$\zeta = \frac{R}{2\sqrt{(c + mgl)J_Z}}; \quad s = \frac{d - \frac{1}{6}mgl}{c + mgl}; \quad b = \frac{mgl}{c + mgl}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c + mgl}{J_Z}}.$$

Надалі вважатимемо, що основа здійснює гармонічні коливання у вертикальному напрямку віброперевантаженням, що змінюється за законом

$$n_\eta(t) = n_m \cos \omega t = n_\eta(\tau) = n_m \cos \nu \tau; \quad (\nu = \frac{\omega}{\omega_0}).$$

Систему, що описується рівнянням (3.142), називають системою з параметричним збудженням завдяки наявності члена $b\gamma n_\eta(\tau)$, який можна розглядати як відновлювальну силу $\tilde{c}\gamma$ з періодично змінюваною жорсткістю $\tilde{c} = bn_m \cos \nu \tau$. Така система має цікаві особливості, однією з яких є можливість усталення коливань з частотою, у два рази меншою за частоту параметричного збудження ν , тобто параметричних коливань.

Для вивчення параметричних коливань подамо рівняння (3.142) у вигляді:

$$\gamma'' + k^2 \gamma = \Delta \nu^2 \gamma - 2\zeta\gamma' - s\gamma^3 - b\gamma n_\eta(\tau), \quad (3.143)$$

де величина k являє собою невідому частоту шуканих усталених коливань, а $\Delta \nu^2 = k^2 - 1$ зветься «розладом» частоти і є мірою незбігу частоти усталених коливань з частотою власних малих коливань маятника.

Позначаючи

$$f(\gamma, \gamma', \tau) = \Delta \nu^2 \gamma - 2\zeta\gamma' - s\gamma^3 - b\gamma n_\eta(\tau),$$

запишемо рівняння (3.241) у формі Коші

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = x_2 \\ \frac{dx_2}{d\tau} = -k^2 x_1 + f(x_1, x_2, \tau) \end{cases}, \quad (3.144)$$

де

$$x_1 = \gamma; \quad x_2 = \gamma' = \frac{d\gamma}{d\tau};$$

$$f(x_1, x_2, \tau) = \Delta v^2 x_1 - 2\zeta x_2 - s x_1^3 - (bn_m \cos v\tau) x_1.$$

Вважаючи нелінійний доданок $f(x_1, x_2, \tau)$ у рівняннях (3.144) маємо, знаходимо відповідно до методу усереднення, розв'язок породжувальної системи

$$\frac{dx_1}{d\tau} = x_2; \quad \frac{dx_2}{d\tau} = -k^2 x_1.$$

Він, очевидно, має вигляд

$$x_1 = Ce^{jk\tau} + De^{-jk\tau}; \quad x_2 = jk(Ce^{jk\tau} - De^{-jk\tau}). \quad (3.145)$$

Повертаючись до нелінійних рівнянь (3.144), шукатимемо їх розв'язок у формі (3.145), вважаючи тепер, однак, величини C і D деякими невідомим функціями часу, які належить визначити. Зробимо заміну змінних x_1 і x_2 на нові змінні C і D згідно з (3.145). Отримаємо:

$$\begin{cases} \frac{dC}{d\psi} = \frac{1}{2jk^2} f(C, D, \psi) e^{-j\psi}; \\ \frac{dD}{d\psi} = -\frac{1}{2jk^2} f(C, D, \psi) e^{j\psi}, \end{cases} \quad (3.146)$$

де

$$f(C, D, \psi) = \Delta v^2 (Ce^{j\psi} + De^{-j\psi}) - j2\zeta k (Ce^{j\psi} - De^{-j\psi}) - s (Ce^{j\psi} + De^{-j\psi})^3 - \frac{bn_m}{2} (e^{j\frac{v}{k}\psi} + e^{-j\frac{v}{k}\psi}) (Ce^{j\psi} + De^{-j\psi}); \quad (\psi = k\tau). \quad (3.147)$$

Шукатимемо коливання, що здійснюються з частотою k , у два рази меншою за частоту збудження v :

$$v = 2k.$$

За цієї умови вираз (3.147) набуває вигляду

$$\begin{aligned} f(C, D, \psi) = & [(\Delta v^2 - j2\zeta k)C - 3sC^2D - \frac{bn_m}{2}D]e^{j\psi} + \\ & + [(\Delta v^2 + j2\zeta k)D - 3sCD^2 - \frac{bn_m}{2}C]e^{-j\psi} + \\ & - C(\frac{bn_m}{2} + C^2)e^{j3\psi} - D(\frac{bn_m}{2} + D^2)e^{-j3\psi}. \end{aligned}$$

Усереднимо обидві частини рівнянь (3.146) за період коливань $T = 2\pi/k$:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{C}}{d\psi} = \frac{1}{2jk^2} [(\Delta v^2 - j2\zeta k)\bar{C} - 3s\bar{C}^2\bar{D} - \frac{bn_m}{2}\bar{D}]; \\ \frac{d\bar{D}}{d\psi} = -\frac{1}{2jk^2} [(\Delta v^2 + j2\zeta k)\bar{D} - 3s\bar{C}\bar{D}^2 - \frac{bn_m}{2}\bar{C}]. \end{cases} \quad (3.148)$$

Стаціонарним коливанням відповідатимуть нульові значення швидкостей змінювання комплексних амплітуд. Тому амплітуди C_0 і D_0 стаціонарних коливань знайдемо, прирівнюючи нулю праві частини рівнянь (3.148):

$$\begin{cases} (\Delta v^2 - j2\zeta k - 3sC_0D_0)C_0 = \frac{bn_m}{2}D_0; \\ (\Delta v^2 + j2\zeta k - 3sC_0D_0)D_0 = \frac{bn_m}{2}C_0. \end{cases}$$

Перемножуючи праві й ліві частини цих двох рівнянь, матимемо співвідношення

$$[(\Delta v^2 - 3sC_0D_0)^2 + 4\zeta^2 k^2]C_0D_0 = \frac{b^2 n_m^2}{4}C_0D_0,$$

яке, з урахуванням зв'язку комплексних амплітуд з амплітудою a коливань з кута γ

$$\gamma = a \cos(k\tau + \varepsilon),$$

перетвориться у наступне:

$$a^2[(\Delta v^2 - \frac{3}{4}sa^2)^2 + 4\zeta^2 k^2 - \frac{b^2 n_m^2}{4}] = 0. \quad (3.149)$$

Це рівняння припускає два розв'язки з амплітуди:

- 1) $a = 0$; $\Rightarrow C_0 = 0$; $D_0 = 0$;
- 2) $a = \text{const} \neq 0$; $\Rightarrow C_0 = \text{const} \neq 0$; $D_0 = \text{const} \neq 0$.

Для можливості виникнення коливального процесу зі сталими амплітудами, необхідно, щоб умова 2 відповідала стійким коливанням, а умова 1 – нестійким.

Умова нестійкості коливань з нульовою амплітудою (тобто положення рівноваги маятника) називають умовою збудження коливань. Вона необхідна (але не достатня) для здійсненості режимів коливань зі сталими амплітудами (параметричних коливань).

Дослідимо докладніше умову нестійкості положення рівноваги. Для цього скористаємося умовами (3.138) стійкості стаціонарних коливань, доведеними раніше. У розглядуваному випадку

$$R_1(C, D) = (\Delta v^2 - j2\zeta k)C - 3sC^2D - \frac{bn_m}{2}D;$$

$$R_2(C, D) = (\Delta v^2 + j2\zeta k)D - 3sCD^2 - \frac{bn_m}{2}C.$$

Звідси випливає:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_1}{\partial C} &= \Delta v^2 - j2\zeta k - 6sCD; & \frac{\partial R_1}{\partial D} &= -3sC^2 - \frac{bn_m}{2}; \\ \frac{\partial R_2}{\partial D} &= \Delta v^2 + j2\zeta k - 6sCD; & \frac{\partial R_2}{\partial C} &= -3sD^2 - \frac{bn_m}{2}, \end{aligned}$$

і тому

$$\frac{1}{2jk^2} \left(\frac{\partial R_2}{\partial D} - \frac{\partial R_1}{\partial C} \right) = \frac{2\zeta}{k} > 0; \quad (3.150)$$

$$\frac{1}{4k^2} \left(\frac{\partial R_1}{\partial C} \frac{\partial R_2}{\partial D} - \frac{\partial R_1}{\partial D} \frac{\partial R_2}{\partial C} \right) = \quad (3.151)$$

$$= \frac{1}{4k^2} [(\Delta v^2 - 6sCD)^2 + 4\zeta^2 k^2 - (3sC^2 + \frac{bn_m}{2})(3sD^2 + \frac{bn_m}{2})] > 0$$

Перша умова стійкості положення рівноваги (3.150) завжди виконується при наявності демпфірування ($\zeta > 0$). Щодо другої умови, то оскільки досліджується стійкість положення рівноваги, у вираз (3.151) слід підставити характерні для цього стану маятника нульові амплітуди ($C_0 = D_0 = 0$). Тоді друга умова стійкості положення рівноваги матиме вигляд:

$$(\Delta v^2)^2 + 4\zeta^2 k^2 - (\frac{bn_m}{2})^2 > 0,$$

або

$$bn_m < 2\sqrt{(1-k^2)^2 + 4\zeta^2 k^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(4-v^2)^2 + 16\zeta^2 v^2}.$$

Отже, якщо амплітуда вертикального віброперевантаження є меншою за $\frac{2}{b}\sqrt{(1-k^2)^2 + 4\zeta^2 k^2}$, то маятник за довільних початкових умов здійснюватиме загасаючі коливання навколо нижнього положення рівноваги і з плином часу зупиниться у цьому положення рівноваги. Якщо ж віброперевантаження перевищує цю величину, то нижнє положення рівноваги стає нестійким, і у системі можливе встановлення параметричних коливань.

Введемо позначення

$$\beta = bn_m; \quad \beta^* = \frac{1}{2}\sqrt{(4-v^2)^2 + 16\zeta^2 v^2}. \quad (3.152)$$

Величина $\beta = \frac{n_m mgl}{c + mgl}$ характеризує відносну величину сили параметричного збудження порівняно з відновлювальною силою і називається «глибиною пульсації» чи «глибиною модуляції». Величину ж β^* можна розглядати як деяку межу глибини модуляції, яка відділяє стійке положення рівноваги від режиму параметричних коливань. Як впливає з (3.152), найменшого значення ця межа набуває за умови $v = 2$, коли частота параметричного збудження (вертикальної вібрації основи) у два рази перевищує частоту вільних малих коливань маятника. При цьому найменше значення межі становить $\beta_{\min}^* = 4\zeta$. З цього випливає, що наявність чи відсутність параметричних коливань маятника визначається балансом між інтенсивністю вертикальної вібрації основи і демпфіруванням у системі, а збільшення тертя є ефективним засобом боротьби з небажаними параметричними коливаннями.

Амплітуда стаціонарних параметричних коливань визначається з співвідношення (3.149), якщо припустити $a \neq 0$:

$$(\Delta v^2 - \frac{3}{4}sa^2)^2 + 4\zeta^2 k^2 - \frac{\beta^2}{4} = 0.$$

Отриманий вираз можна подати у двох формах:

- як функцію квадрата амплітуди від розладу частоти:

$$a^2 = \frac{4}{3s} (\Delta v^2 \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - 4\zeta^2(1 + \Delta v^2)}); \quad (3.153)$$

- як функцію розладу частоти від квадрата амплітуди :

$$\Delta v^2 = \frac{3}{4} sa^2 - 2\zeta^2 \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - 4\zeta^2(1 + \frac{3}{4} sa^2 - \zeta^2)}. \quad (3.154)$$

Аналіз отриманих результатів. Амплітудно-частотну характеристику параметричних коливань найзручніше вивчати у площині «квадрат амплітуди – розлад частоти». Оскільки в обох формулах (3.153) і (3.154) знаки « \pm » **свідчать** про двозначність функцій, то слід очікувати, що АЧХ матимуть дві гілки: одна з них відповідає верхньому знаку, друга – нижньому.

Відповідно до виразу (3.154) дві гілки розтміщено по обидва боки від прямої EC , яка проходить через точку E з координатами $(\Delta v^2 = -2\zeta^2; a^2 = 0)$ під кутом з кутовим коефіцієнтом $\frac{3}{4}s$ відносно осі амплітуд (рис. 3.18). Точки перетинання АЧХ з віссю частот визначаються формулою:

$$(\Delta v^2)_{1,2} = -2\zeta^2 \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - 4\zeta^2(1 - \zeta^2)},$$

дійсні значення якої можливі лише за умови

$$\beta > 4\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}. \quad (3.155)$$

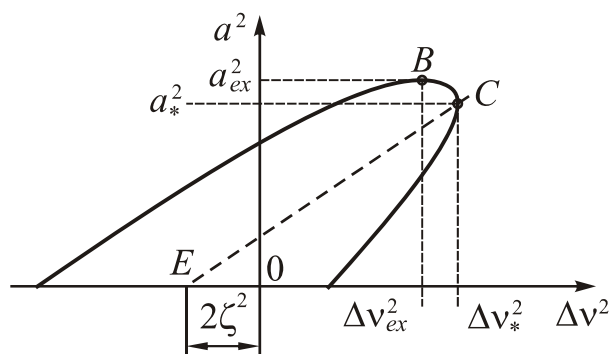


Рис. 3.18. АЧХ параметричних коливань

Отже, якщо глибина модуляції менша за значення, визначуване правою частиною (3.258) і $\zeta > 0$ (у системі є тертя), то АЧХ не має жодної точки в діапазоні дійсних амплітуд, тобто параметричні коливання не збуджуються. Умовою збудження є співвідношення (3.155).

Надалі припускатимемо, що умову (3.155) виконано. Із (3.153) випливає, що дві гілки АЧХ (рис. 3.18) змикаються за амплітудою (тобто мають дотичну до АЧХ, паралельну осі амплітуд), якщо

$$\Delta v_*^2 = \left(\frac{\beta}{4\zeta}\right)^2 - 1.$$

Подамо вираз (3.153) через Δv_*^2 :

$$a^2 = \frac{4}{3s} (\Delta v^2 \pm 2\zeta \sqrt{\Delta v_*^2 - \Delta v^2}).$$

З розгляду цього виразу можна зробити такі висновки:

– правіше Δv_*^2 точок АЧХ не існує;

– точці C з частотою Δv_*^2 відповідає амплітуда

$$a_*^2 = \frac{4}{3s} \Delta v_*^2 = \frac{4}{3s} \left[\left(\frac{\beta}{4\zeta} \right)^2 - 1 \right].$$

Користуючись формулою (3.154) висновуємо, що змикання гілок АЧХ за частотою відбувається у точці B , в якій спостерігається екстремум АЧХ (дотична стає паралельною осі частот). Екстремальне значення амплітуди при цьому дорівнює

$$a_{ex}^2 = \frac{4}{3s} (\Delta v_*^2 + \zeta^2). \quad (3.156)$$

Цій точці B відповідає значення частоти

$$\Delta v_{ex}^2 = \Delta v_*^2 - \zeta^2.$$

Неважко впевнитися, що виконання умови (3.155) можливості виникнення параметричних коливань забезпечує додатність величини $(\Delta v_*^2 + \zeta^2)$. Тому для «жорсткої» системи ($s > 0$) АЧХ параметричних коливань матиме максимум (у цьому випадку a_{ex}^2 відповідно до (3.259) є додатним, отже йому відповідає дійсне значення амплітуди). Для «м'якої» ж системи такого максимуму немає. Дві гілки АЧХ у цьому разі зникають за мінімального (від'ємного) значенні a_{ex}^2 ; це означає, що насправді коливань, що відповідають цій точці, немає, бо амплітуда набуває уявного значення. Умова збудження (3.155) показує, що точка B (рис. 3.18) екстремуму АЧХ завжди розміщена правіше від точки E .

Можливі форми АЧХ параметричних коливань для «жорсткої», «м'якої» і лінійної коливальної систем зображені на рис. 3.19 і 3.20 відповідно.

Проведений аналіз дозволяє зробити такі основні висновки.

1. Параметричні коливання здійснюються з частотою, близькою до частоти вільних коливань системи, і виникають у разі параметричного збудження з частотою, більшою у два рази.

2. Параметричні коливання виникають лише за глибини модуляції, більшій за деяку визначену величину, яка залежить від демпфірування в системі.

3. Ширина зони розладу частоти, в якій здійснюються параметричні коливання, є пропорційною до різниці між глибиною модуляції і граничним її значенням, яке відповідає умові збудження параметричних коливань і визначається лише демпфіруванням у системі. Чим більша глибина модуляції, тим ширша смуга частоти, в середині якої можливі параметричні коливання. Зовні цієї смуги параметричні коливання не виникають на відміну від АЧХ вимушених коливань, які існують в усій смузі частот від нуля до нескінченності.

4. У лінійній коливальній системі за будь-якої частоти збудження всередині діапазону частот збудження параметричних коливань спостерігається

необмежене збільшення їх амплітуди з часом, тобто *параметричний резонанс*. Цей висновок слушний і за наявності демпфірування. Інакше кажучи, будь-яке збільшення демпфірування у лінійній системі не обмежує рівня параметричних коливань (не усуває параметричного резонансу). Воно позначається лише на звуженні смуги частот можливого збудження резонансу. У цьому сенсі параметричні коливання суттєво відрізняються від звичайних вимушених коливань, а параметричний резонанс небезпечніший від звичайного.

5. Нелінійність пружної сили зумовлює обмеження параметричних коливань за амплітудою, при цьому смуга частот збудження може поширюватися за рахунок коливань з великою амплітудою

6. АЧХ системи з «жорсткою» характеристикою пружної сили при деякому значенні частоти мають максимум амплітуди. Він тим більший, чим більша глибина модуляції й тим менший, чим більша нелінійність (величина s). Отже, можна зробити висновок, що введення нелінійності – один з ефективних засобів боротьби з параметричними резонансами.

Далі наведені результати розрахунків АЧХ параметричних коливань згідно з формулою (3.154) за програмою ACH_PS1, текст якої подано нижче.

```
% ACH_PS1
clc, clear all
S=1; StrS=sprintf('s = %g',S);
dz=0.17; dz2=dz^2; StrD=sprintf(' \zeta = %g',dz);
Bt=[0.8 1. 1.2];
Str1=sprintf('\beta = %g',Bt(1));
Str2=sprintf('\beta = %g',Bt(2));
Str3=sprintf('\beta = %g',Bt(3));
for m=1:3
    bt=Bt(m); k1=0; k2=0; btdz=(bt/2)^2 -4*dz2*(1-dz2);
    for a=0:0.01:2 %for a=sqrt(2)-0.01:-0.01:0.0
        k=k1+1; al(m,k)=a; nue=3/4*S*a^2-2*dz2; Dsc=btdz-3*S*a^2*dz2;
        if Dsc>=0
            SqDs=sqrt(Dsc);
            k1=k1+1; a1(m,k1)=a; nu1(m,k1)=2*sqrt(nue+SqDs+1);
            k2=k2+1; a2(m,k2)=a; nu2(m,k2)=2*sqrt(nue-SqDs+1);
        else
            break
        end
    end
end
end
% nus=[1.6 1.8, 2.0, 2.2 2.4 2.6 2.8];
% as=[0.05 0.472 0.68 0.845 1.0 1.13 1256];
plot(nu1(1,:),a1(1,:),'k',nu2(1,:),a2(1,:),'k',...
     nu1(2,:),a1(2,:),'*k',nu2(2,:),a2(2,:),'*k',...
     nu1(3,:),a1(3,:),'ok',nu2(3,:),a2(3,:),'ok')
% hold on, plot(nus,as,'s')
grid, set(gca,'fontname','MS Sans Serif','fontsize',16)
axis([1,4,0,2]) %axis([0.1,3,0,2])
title(['АЧХ параметричної системи (' ,StrS,StrD,')'])
xlabel('Частота збурення \nu')
ylabel('Амплітуда параметричних коливань a')
legend(Str1,Str1,Str2,Str2,Str3,Str3,0)
```

Результати розрахунків для нелінійності $s = 1$ з жорсткою характеристикою пружної сили і трьох значень глибини модуляції $\beta = 0,8; 1; 1,2$ показано на рис. 3.19 (АЧХ для значення $\zeta = 0,17$ відносного коефіцієнта загасання – на

рис. 3.19, а, а для $\zeta = 0,2$ – на рис. 3.19, б). З рисунків видно наявність максимумів АЧХ, їх суттєва залежність від глибини модуляції і величини тертя.

На рис. 3.20 наведені результати розрахунків для нелінійності з м'якою характеристикою пружної сили при $s = -1$ і трьох значеннях глибини модуляції $\beta = 0,8; 1; 1,2$ (АЧХ для значення $\zeta = 0,1$ відносного коефіцієнта загасання – на рис. 3.20, а, а для $\zeta = 0,3$ – на рис. 3.20, б). З рисунків видно відсутність максимумів АЧХ, можливість існування мінімумів, їх суттєва залежність від глибини модуляції і величини тертя. Більш глибоке дослідження стійкості коливань, поданих АЧХ, показує, що стійкими є лише коливання, яким відповідає верхня гілка АЧХ

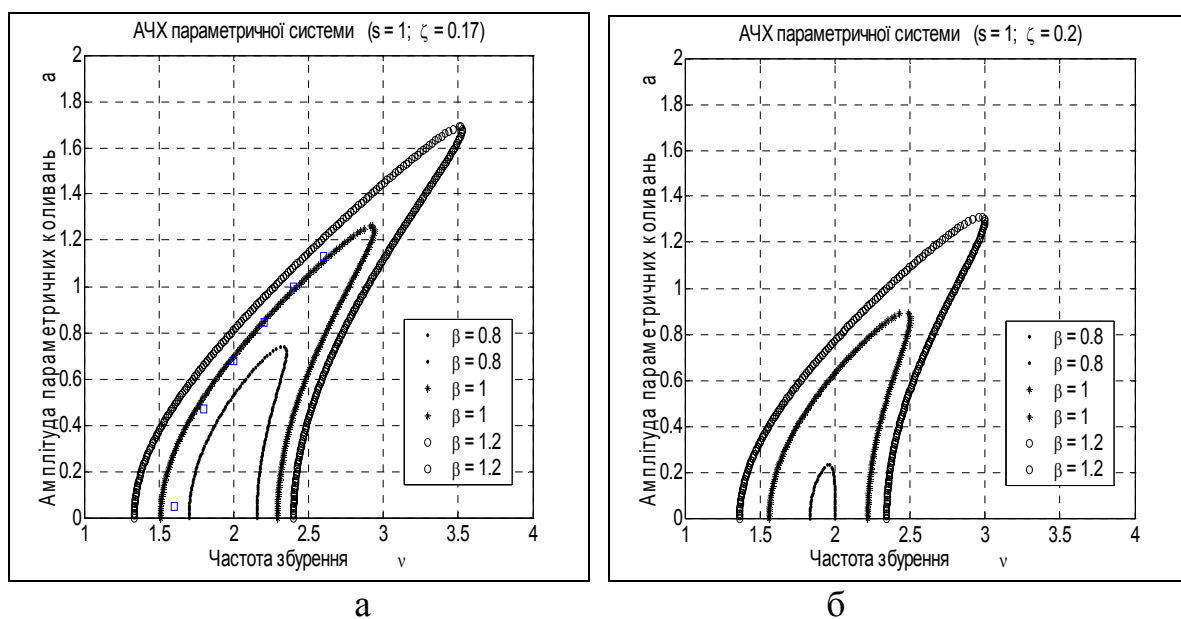


Рис. 3.19. АЧХ параметричних коливань для жорсткої системи

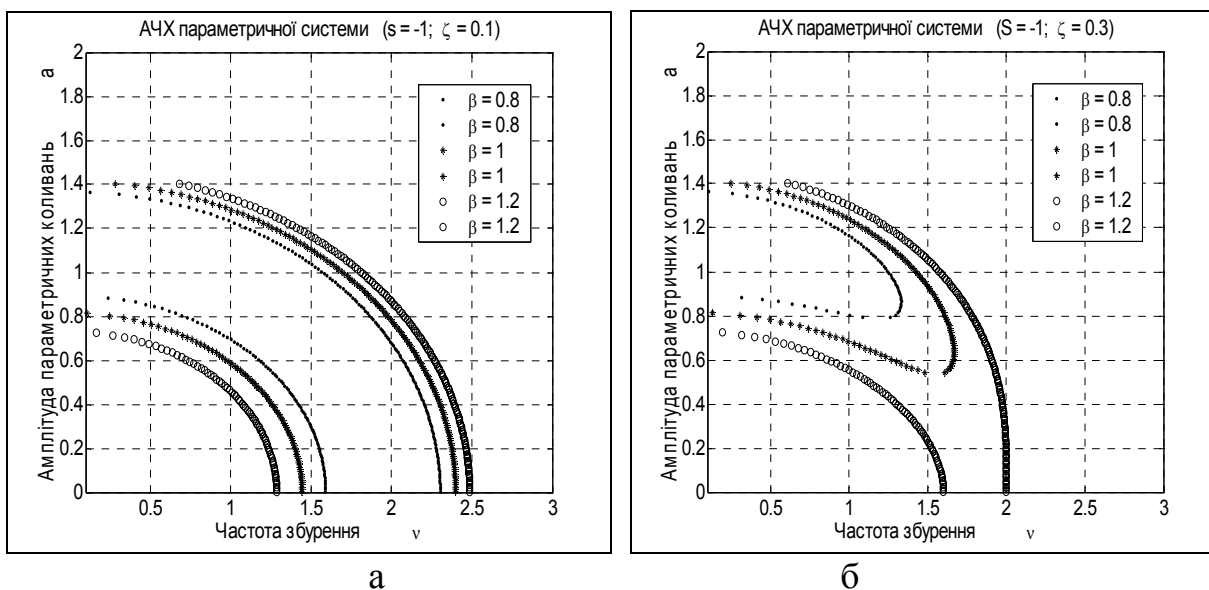


Рис. 3.20. АЧХ параметричних коливань для м'якої системи

Щоб перевірити слушність проведених наближених теоретичних досліджень, складемо програму ParSys_upr.m, яка здійснює безпосереднє чисельне інтегрування первинного рівняння (3.239) параметрично збуджуваної системи

$$\gamma'' + 2\zeta\gamma' + \gamma + s\gamma^3 + \beta\gamma \cos(\nu\tau) = 0.$$

```
% ParSys_upr
clc, clear all
global nu Bt dz S
Bt=1.0; Sa0=sprintf('\beta = %g;',Bt);
nu=2.6; Snu=sprintf(' \nu = %g;',nu);
dz=0.17; Sdz=sprintf(' \zeta = %g;',dz);
S=1; Sga=sprintf(' s = %g',S);
y0(1)=0.00; y0(2)=-5.1;
Sx=sprintf(' x(0) = %g;',y0(1));Sxt=sprintf(' x'(0) = %g',y0(2));
TSPAN=[0 100];
[t,y]=ode45('ParSys',TSPAN,y0); plot(t,y(:,1),'.-'), grid
set(gca,'fontname','MS Sans Serif','fontsize',16)
title('Інтегрування рівняння x'' + 2\zeta x' + [1+\betacos(\nut)]*x + sx^3 = 0')
xlabel([Sx,Sxt,' t']), ylabel([Sa0,Snu,Sdz,Sga,' x(t)'])

function z=parSys(t,y)
global nu Bt dz S
z(1)=y(2);
z(2)=-Bt*y(1)*cos(nu*t)-2*dz*y(2)-y(1)-S*y(1)^3;
z=z';
```

Як і у програмі NelSys_upr, головні дії з чисельного інтегрування здійснює вбудована процедура ode45, а інтегрує вона рівняння, праві частини яких обчислюються у процедурі ParSys, наведеній вище.

Результати моделювання поведінки параметрично збуджуваної системи за зазначеною програмою ParSys_upr за наступних значень параметрів: $\beta = 1$; $s = 1$; $\zeta = 0,17$ наведені на рис. 3.21 і 3.22. На рис. 3.21 показане збудження параметричних коливань за частоти збудження $\nu = 1,8$, а на рис. 3.22 – виникнення параметричних коливань за збуджування з частотою $\nu = 2,8$.

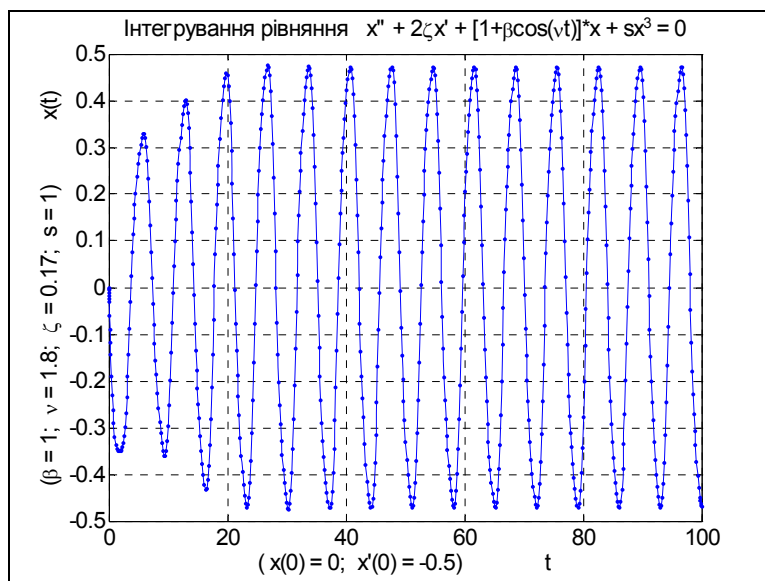


Рис. 3.21. Параметричні коливання при $\nu = 1,8$

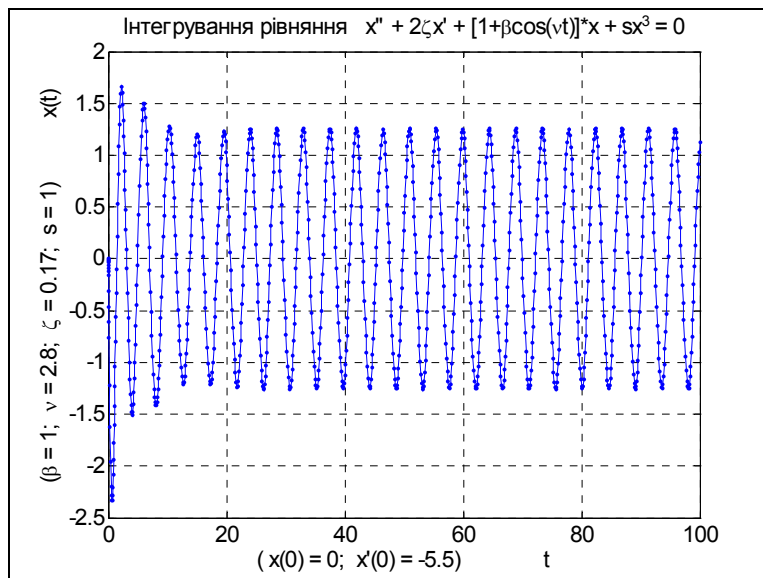


Рис. 3.22. Параметричні коливання при $\nu = 2,8$

За допомогою програми ParSys були проведені експерименти з визначення амплітуд параметричних коливань за умов $s = 1$; $\zeta = 0,17$; $\beta = 1$, але ще при п'яти значеннях частоти збуджування. Результати відображені на рис. 3.19, а у вигляді квадратних маркерів. Можна зробити висновок, що проведене наближене (методом усереднення) теоретичне дослідження дає результати, які і якісно і кількісно достатньо близькі до точних (отриманих чисельним інтегруванням на ЕОМ первинних диференціальних рівнянь).

Як показують експерименти на ЕОМ, параметричні коливання навіть за певних достатніх умов їх існування збуджуються не за довільних початкових умов, а лише за деяких. Слід зауважити, що параметричні коливання не виникають при нульових початкових умовах ($\gamma(0) = 0$ і $\gamma'(0) = 0$). Це впливає з початкових рівнянь. Щоб виникли коливання, наведені на рис. 3.21 і 3.22, початкові умови мають надто розрізнятися і належати різним зонам змінювання, які не перетинаються одна з одною.

Контрольні запитання

1. Дайте визначення стійкості руху за Ляпуновим.
2. Чим відрізняється визначення стійкості нелінійних систем від стійкості лінійних стаціонарних систем?
3. Що таке незбурений рух? збурений рух? варіації? відхилення?
4. Дайте визначення поняттям: асимптотична стійкість; стійкість у цілому; умовна стійкість.
5. Що розуміють під поняттям рівнянь збуреного руху? рівнянь першого наближення? автономної системи?
6. Що розуміють під другою методою Ляпунова? першою методою Ляпунова?
7. Дайте визначення поняттям: знакосталої функції; знакопечної функції; функції Ляпунова.
8. Сформулюйте критерій Сильвестра.

9. Якою є необхідна і достатня умова стійкості дзиги? обертового снаряду?
10. За яких умов узагальнені координати називають: циклічними? позиційними?
11. Який рух називають: прихованим? явним?
12. Що називають функцією Рауса? лінійною частиною функції Рауса? зведеною системою? гіроскопічними силами?
13. Що в теорії динамічних систем розуміють під поняттям сили? які сили називають: силами інерції? нелінійними силами? потенціальними силами? дисипативними силами? гіроскопічними силами? циркуляційними силами? зовнішніми силами?
14. Що розуміють під нормальними координатами?
15. Що таке степінь нестійкості системи?
16. Що називають тимчасовою стійкістю? віковою стійкістю системи?
17. Опишіть головну ідею методів лінеаризації.
18. Охарактеризуйте головну сутність методів малого параметра. Що таке квазілінійна система? породжуюча система?
19. Охарактеризуйте головну ідею методу збурень.
20. Що розуміють під секулярними членами? якому реальному явищу відповідають секулярні члени?
21. Чи можна позбутися появи секулярних членів і як?
22. Що називають параметричними коливаннями? в яких системах вони виникають? які характерні особливості вони мають? якими наближеними методами їх можна досліджувати?
23. Що таке випрямний ефект? в яких системах він виникає? якими наближеними методами його можна досліджувати?
24. Якими наближеними методами можна дослідити:
- неізохронність власних коливань нелінійної системи?
 - амплітудно-частотні характеристики нелінійних систем?

Література

[41]; [50]; [31]; [32]; [40]

Частина 2. Деякі застосування теорії

Одним з часто застосовуваних елементів у приладах і системах орієнтації, навігації і керування рухом у просторі є маятник. Хоча його рідко використовують як самостійний чутливий елемент, але важко собі уявити більшість систем орієнтації без маятника як однієї з найважливіших її частин. Тому теорія поводження маятника є необхідною умовою побудови теорії чутливих елементів.

Більшість приладів і систем орієнтації на рухомих транспортних засобах працюють в умовах інтенсивної вібрації місця їхнього установа. Постає завдання побудови систем віброзахисту для зменшення шкідливого впливу вібрації на функціонування приладів. Теорія побудови систем пасивного віброзахисту є важливою частиною проектування приладів.

Аналіз поводження систем автоматичного керування з суттєво нелінійними елементами (так званих релейних систем) має деякі суттєві особливості, що потребують специфічного підходу і математичного апарату. Ці особливості розглянуто у розділі 6.

Наведені теоретичні дослідження показують, з одного боку, методику використання певних методів досліджування, а з другого, надають можливість вивчити деякі маловідомі, але важливі властивості відомих пристроїв.

Розділ 4. Нелінійні властивості маятника

Багато нелінійних властивостей фізичного маятника (ФМ) можна вивчити за математичною моделлю, що описується диференціальним рівнянням (2.3) другого порядку.

Теоретичне дослідження зручно проводити за дещо перетвореними рівняннями, передусім, зведеними до безрозмірного вигляду. Для цього слід ввести у розгляд безрозмірний час τ , наприклад, за формулою:

$$\tau = \omega_0 t,$$

де

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J_Z}}$$

– частота власних малих коливань маятника.

Тепер рівняння (2.3) можна подати у наступному виді:

$$\gamma'' + 2\zeta\gamma' + [1 + n_\eta(\tau)]\sin\gamma = -n_\xi(\tau)\cos\gamma + 2\zeta\varphi' + \mu(\tau). \quad (4.1)$$

Тут $\zeta = R/(2 \cdot \sqrt{mgl \cdot J_Z})$ – відносний коефіцієнт загасання; $\gamma' = d\gamma/d\tau$ – безрозмірна кутова швидкість маятника; $\gamma'' = d^2\gamma/d\tau^2$ – його безрозмірне кутове прискорення; $\varphi' = \dot{\varphi}/\omega_0$ – безрозмірна кутова швидкість основи; $\mu(\tau) = M_{OZ}/mgl$ – безрозмірний момент сил, що діють на маятник, окрім сил тяжіння і тертя.

Для деяких випадків диференціальні рівняння доцільно подавати у нормальній формі Коші, тобто у вигляді сукупності диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно похідних. Щодо рівняння (4.1), це можна здійснити, наприклад, введенням наступних нових змінних

$$y_1 = \gamma; \quad y_2 = \gamma'.$$

Тоді рівняння (4.1) можна подати у вигляді системи з двох рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{d\tau} = y_2; \\ \frac{dy_2}{d\tau} = -2\zeta[y_2 - \varphi'(\tau)] - [1 + n_y(\tau)] \sin y_1 - n_x(\tau) \cos y_1 + \mu(\tau). \end{cases} \quad (4.2)$$

Головні висновки про нелінійні особливості поведінки ФМ можна зробити, аналізуючи рівняння (4.1) або (4.2).

4.1. Точне дослідження власних коливань. Неізохронність власних коливань

З досвіду відомо, що період коливань гойдалки залежить від її розмаху: якщо амплітуда розгойдування наближається до 180° , період коливань помітно збільшується. Таку властивість мають лише нелінійні системи (у лінійних стаціонарних системах, поведінка яких можна описати лінійними диференціальними рівняннями зі сталими коефіцієнтами, частоти власних коливань залишаються такими самими за будь-яких значень амплітуди цих коливань). Її називають *неізохронністю власних коливань*.

Щоб вивчити теоретично цю властивість, розглянемо вільні незгасаючі коливання ФМ, коли точка його підвісу нерухома, а коефіцієнт демпфірування дорівнює нулю. У цих умовах рівняння (4.1) маятника набуде вигляду

$$\gamma'' + \sin \gamma = 0. \quad (4.3)$$

Для знаходження *точного розв'язку нелінійного рівняння* (4.6) помножимо його на $d\gamma$ і проінтегруємо:

$$\int_0^\tau \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\gamma}{d\tau} \right) \cdot d\gamma + \int_0^\tau \sin \gamma \cdot d\gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} [(\gamma')^2 - (\gamma'_0)^2] - [\cos \gamma - \cos \gamma_0] = 0. \quad (4.4)$$

Останнє співвідношення описує відомий результат – *сума кінетичної і потенціальної енергій залишається незмінною протягом усього руху маятника*.

Припустимо, що в початковий момент часу початкова швидкість маятника дорівнює нулю $\gamma'_0 = 0$, а початкове відхилення – деякій величині a ($\gamma_0 = a$). Тоді рівняння (4.4) можна перетворити до такого

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \mp \sqrt{2(\cos \gamma - \cos a)},$$

яке дозволяє поділити змінні:

$$\tau = \mp \int_a^\gamma \frac{d\gamma}{\sqrt{2(\cos \gamma - \cos a)}}. \quad (4.5)$$

Власне вираз (4.5) і є шуканим точним розв'язком рівняння (4.3), тільки записаний у незвичній формі (розв'язаний відносно часу, а не відносно шуканої змінної γ). Знак « $-$ » слід використовувати в разі зменшення кута γ від a до $-a$, а знак « $+$ » – у разі збільшення куту від $-a$ до a .

Позначимо

$$k = \sin \frac{a}{2}; \quad \sin z = \frac{1}{k} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

В цих позначеннях матимемо

$$\begin{aligned} \sqrt{2(\cos \gamma - \cos a)} &= \sqrt{2(1 - 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} - 1 + 2 \sin^2 \frac{a}{2})} = \\ &= \sqrt{4 \sin^2 \frac{a}{2} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\gamma}{2}}{\sin^2 \frac{a}{2}}\right)} = 2k \cos z. \end{aligned}$$

Диференціюючи другий вираз (4.9), дістанемо

$$\frac{1}{2} \cos \frac{\gamma}{2} d\gamma = k \cos z dz,$$

звідки

$$d\gamma = \frac{2k \cos z}{\cos \frac{\gamma}{2}} dz = \frac{2k \cos z}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 z}} dz.$$

Тепер розв'язок (4.5) можна подати у вигляді

$$\tau = \mp \int_{\pi/2}^z \frac{dz}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 z}}. \quad (4.6)$$

Функція $\tau(z)$ є багатозначною. Певному значенню величини z відповідає безліч різних моментів часу τ . Щоразу, коли кут γ сягає максимального або мінімального значення, знак перед інтегралом у виразі (4.6) змінюється на протилежний. Наприклад, на першому проміжку, коли кут γ змінюється від свого максимального значення a , зменшуючись і наближаючись до нуля, залежність (4.6) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \tau &= - \int_{\pi/2}^z \frac{dz}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 z}} = \int_z^{\pi/2} \frac{dz}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 z}} = \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{dz}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 z}} - \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 z}} = K(k) - F(k, z). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Тут використані відомі позначення $F(k, z)$ – еліптичного інтегралу першого роду у лежандрівій формі $F(k, z) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 z}}$; $K(k) = F(k, \frac{\pi}{2})$ – повний еліптичний інтеграл першого роду.

Визначимо період T_0 власних незгасаючих коливань маятника.

Щоб визначити проміжок часу, протягом якого маятник опускається від найвищого свого положення до вертикалі, достатньо у виразі (4.7) покласти $z = 0$. Цей проміжок, очевидно, дорівнює четвертій частині шуканого періоду. Тому

$$T_o = 4K(k) = 4K\left(\sin\left(\frac{a}{2}\right)\right). \quad (4.8)$$

Звідси випливає точна формула для частоти власних незгасаючих коливань маятника як функції їх амплітуди

$$\lambda(a) = \frac{2\pi}{T_o} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{K\left(\sin\left(\frac{a}{2}\right)\right)}. \quad (4.9)$$

Побудуємо графік точної скелетної кривої за допомогою вбудованої функції *ellipke*, яка обчислює величину еліптичного інтегралу:

```
% Hronos
% Програма побудови скелетних кривих ФМ
a=pi/1000:pi/180:pi;
[K,E]=ellipke((sin(a/2)).^2); lam1=sqrt(sin(a)./a); lam=pi./(2*K);
x=0:0.01:1; y=pi*ones(length(x))*180/pi; a2=pi/1000:pi/100:4.5;
lam2=sqrt(3*(sin(a2)-a2.*cos(a2))./a2.^3);
plot(lam,a*180/pi,'.k',lam1,a*180/pi,'*k',lam2,a2*180/pi,'ok',x,y,'-k'), grid,
set(gca,'Fontname','MS Sans Serif','FontSize',16)
title('Залежність частоти власних коливань ФМ від їх амплітуди')
xlabel('Відносна частота власних коливань')
ylabel('Амплітуда, град.')
legend('точна','лінеаризація по кінцях','пряма лінеаризація',0)
```

Цей графік подано на рис. 4.1 пунктирною лінією.

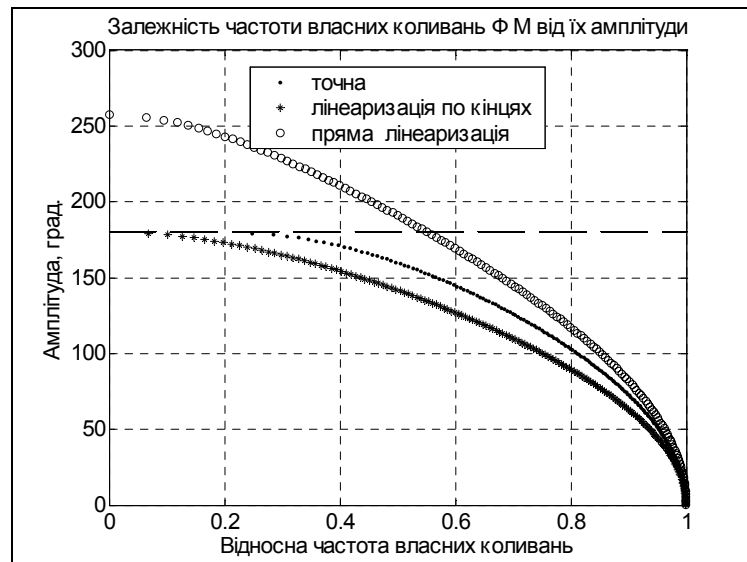


Рис. 4.1. Скелетні криві фізичного маятника

Отже, частота власних коливань маятника залежить від амплітуди цих коливань. Таку властивість нелінійних систем називають *неізохронністю* власних коливань. При збільшенні амплітуди до 180° частота власних коливань маятника зменшується до нуля (період власних коливань збільшується до нескінченності).

Результати чисельного інтегрування у середовищі Matlab рівняння (4.6) за програмою *FizMayatnU.m* (див. Додаток 1) показано на рис. 4.2. Отримано графік залежності кута відхилення маятника від вертикалі від часу і фазовий портрет маятника за умови, що початкове відхилення маятника (а отже, і амплітуда його вільних коливань) дорівнює $179,9^\circ$.

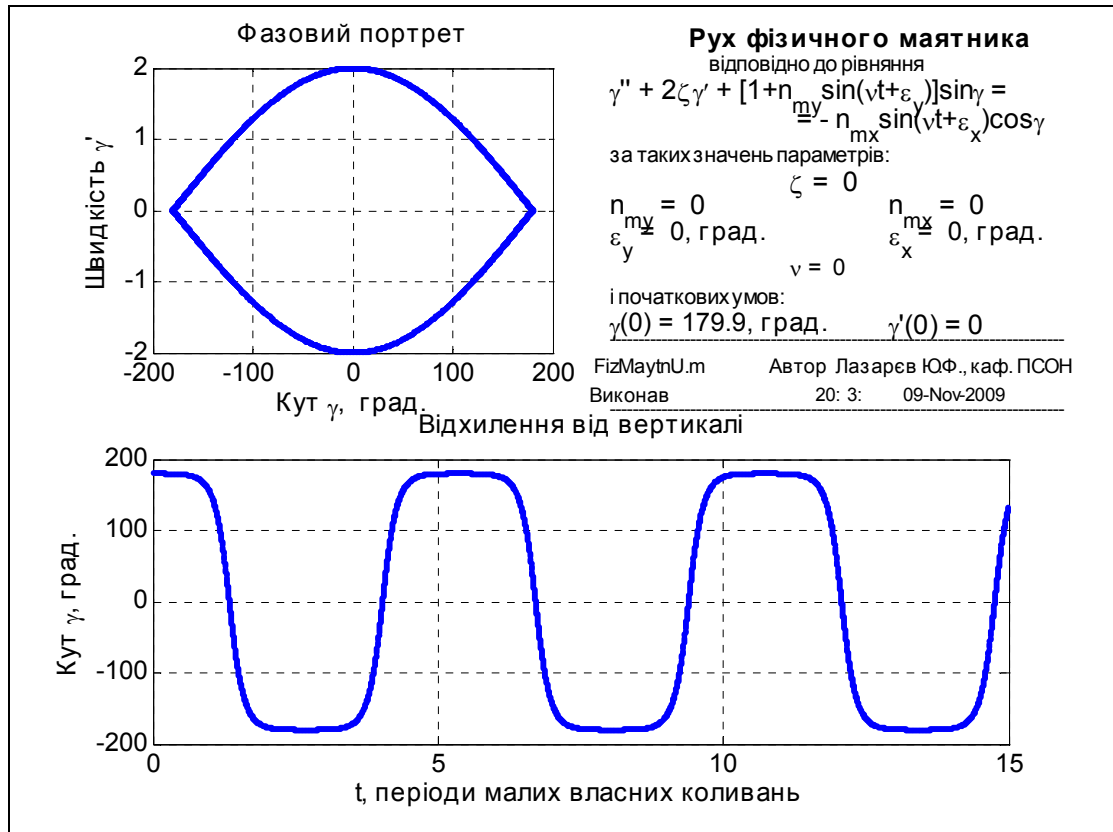


Рис. 4.2. Результати чисельного моделювання вільного руху ФМ

З графіків випливає, що за вказаних умов форма власних коливань суттєво відрізняється від гармонічних, період коливань у 5,366 разів більший за період малих коливань, тобто частота власних коливань становить 0,1864 від частоти коливань за вельми малої амплітуди. Це повністю узгоджується з результатами розрахунків за формулами (4.12), (4.13).

4.2. Дослідження власних коливань методами лінеаризації

Точну залежність частоти власних коливань від їх амплітуди далеко не завжди вдається встановити. Наближено таку залежність можна відшукати, якщо застосувати, наприклад один з методів лінеаризації.

Згідно з методами лінеаризації, припускаючи, що ФМ в умовах вільного руху здійснює симетричні відносно вертикалі незгасаючі коливання зі сталою амплітудою a , наближено замінимо нелінійний член $\sin \gamma$ на лінійний

$$\sin \gamma \Rightarrow \sigma(a)\gamma.$$

Величина $\sigma(a)$ у загальному випадку є функцією амплітуди a коливань. Конкретний вигляд цієї функції визначається особливостями обраного методу лінеаризації. Якщо розглядувані коливання стаціонарні (тобто їх амплітуда не змінюється з часом), то $\sigma(a)$ є сталою величиною, і відповідне лінеаризоване рівняння

$$\gamma'' + \sigma(a)\gamma = 0$$

стає рівнянням зі сталими коефіцієнтами, розв'язок якого такий:

$$\gamma(\tau) = a \cos(\sqrt{\sigma(a)}\tau + \varepsilon). \quad (4.10)$$

Значення амплітуди a і початкової фази ε власних коливань визначаються (як сталі інтегрування) початковими умовами. Не зменшуючи узагальненості результатів, задля спрощення вважатимемо, що у початковий момент часу кут швидкість $\gamma'(0)$ дорівнює нулю, тобто маятник відхилено на початковий кут a від вертикалі і відпущено без поштовху. Тоді розв'язок (4.10) дещо спрощується

$$\gamma(\tau) = a \cos(\sqrt{\sigma(a)}\tau), \quad (4.11)$$

причому амплітуда a тепер дорівнює початковому відхиленню маятника.

Величина

$$\lambda(a) = \sqrt{\sigma(a)} \quad (4.12)$$

має зміст частоти власних коливань. Точніше, урахувавши безрозмірну форму первинного рівняння, – відношення частоти власних коливань маятника до значення тієї ж частоти при прагненні амплітуди коливань до нуля (малих власних коливань).

Конкретизуємо залежність (4.12).

Спочатку використаємо *лінеаризацію по кінцях*. Згідно з нею, відрізок нелінійної залежності $y = f(x)$, що міститься всередині інтервалу $[-a, a]$, замінюємо на пряму, що проходить крізь точки цього відрізка на кінцях інтервалу (тобто через точки $[-a, f(-a)]$ і $[a, f(a)]$). Тому коефіцієнт лінеаризації $\sigma(a)$, який визначає тангенс кута нахилу прямої до осі абсцис, дорівнюватиме

$$\sigma_1(a) = \frac{f(a) - f(-a)}{2a} = \frac{\sin(a) - \sin(-a)}{2a} = \frac{\sin(a)}{a}. \quad (4.13)$$

Більш складною виявляється аналогічна формула за *прямої лінеаризації*:

$$\sigma_2(a) = \frac{3}{2a^3} \int_{-a}^a xf(x)dx.$$

Через інтегрування частинами цей вираз для розглядуваної нелінійності $\sin x$ приводить до результату

$$\sigma_2(a) = \frac{3}{a^3} [\sin(a) - a \cdot \cos(a)].$$

У теорії нелінійних коливань *графік залежності частоти власних коливань від амплітуди*, побудований так, що амплітуду відкладено уздовж осі ординат, а частоту – вздовж осі абсцис, називають *скелетною кривою*.

Результат розрахунку скелетних кривих наведено на рис. 4.1. Крива із зірочок відповідає лінеаризації по кінцях, а з кіл – прямій лінеаризації.

Аналіз кривих дозволяє зробити висновок, що за великих амплітуд ($a > 1$ рад.) криві значно розрізняються. Але якщо амплітуди є малими ($a \ll 1$ рад.) обидва види лінеаризації приводять до близьких значень. Упевнімося в цьому.

За малих амплітуд вираз (4.13) набуває наближеного вигляду

$$\sigma_1(a) = \frac{\sin(a)}{a} \approx \frac{1}{a} \left(a - \frac{a^3}{6} \right) = 1 - \frac{a^2}{6}.$$

Аналогічно знайдемо

$$\sigma_2(a) = \frac{3}{a^3} [\sin(a) - a \cos(a)] \approx \frac{3}{a^3} \left[a - \frac{a^3}{6} - a \left(1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24} \right) \right] = 1 - \frac{a^2}{8}.$$

Як бачимо, залежності від амплітуди є однотипними (квадратичними). Розрізняються вони лише значеннями коефіцієнтів.

Переходячи до виразів власної частоти, матимемо

$$\lambda_1(a) \approx \sqrt{\sigma_1(a)} \approx \sqrt{1 - \frac{a^2}{6}} \approx 1 - \frac{a^2}{12}; \quad \lambda_2(a) \approx \sqrt{\sigma_2(a)} \approx \sqrt{1 - \frac{a^2}{8}} \approx 1 - \frac{a^2}{16}.$$

Згідно методу *гармонічної лінеаризації*, якщо розв'язок рівняння має вигляд (4.11), відповідний кутовий коефіцієнт лінеаризації визначається співвідношенням

$$\sigma_3(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \vartheta) \cos \vartheta d\vartheta. \quad (4.14)$$

Безпосереднє застосування формули (4.14) до нелінійності $\sin x$ приводить до інтегралу

$$\sigma_3(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \sin(a \cos \vartheta) \cos \vartheta d\vartheta,$$

якого немає серед табличних інтегралів. Тому обмежимося лише випадком малих коливань, розглядаючи замість $\sin \gamma$ його наближений розклад у ряд Маклорена $\gamma - \frac{\gamma^3}{6}$. Застосовуючи формулу (4.14) для цієї нелінійності, матимемо

$$\sigma_3(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \left[a \cos \vartheta - \frac{(a \cos \vartheta)^3}{6} \right] \cos \vartheta d\vartheta = 1 - \frac{a^2}{8}.$$

Отже, за малих амплітуд метод гармонічної лінеаризації приводить до тих самих результатів, що й метод прямої лінеаризації.

4.3. Амплітудно-частотні характеристики вимушених коливань

Тепер розглянемо випадок дії на маятник моменту зовнішніх сил. Рівняння (4.1) у цьому разі набуває вигляду

$$\gamma'' + 2\zeta\gamma' + \sin \gamma = \mu(\tau).$$

Припустимо, що момент змінюється з часом за законом

$$\mu(\tau) = \mu_m \cos(\nu\tau + \alpha),$$

де $\nu = \frac{\omega}{\omega_0}$ – відносна частота вібрації, тобто відношення частоти вібрації ω до частоти ω_0 власних малих коливань маятника; μ_m – амплітуда змінювання безрозмірного моменту; α – початкова фаза вібрації.

Вивчатимемо вимушений рух цієї нелінійної системи за допомогою *методу лінеаризації*. Для цього лінеаризуємо нелінійність $\sin \gamma$, вважаючи, що шуканий розв'язок має вигляд

$$\gamma(\tau) = a \cos \nu \tau, \quad (4.15)$$

що відповідає вимушеним усталеним коливанням маятника з частотою ν зовнішньої дії. У результаті матимемо лінійне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\gamma'' + 2\zeta\gamma' + \lambda^2(a)\gamma = \mu_m \cos(\nu\tau + \alpha). \quad (4.16)$$

Тут амплітуда a і фаза α є шуканими величинами.

Підставляючи розв'язок (4.15) у рівняння (4.16) і прирівнюючи коефіцієнти при $\cos \nu\tau$ та $\sin \nu\tau$, отримаємо два алгебричних рівняння відносно двох невідомих a і α :

$$\begin{cases} (\lambda^2(a) - \nu^2)a = \mu_m \cos \alpha; \\ -2\zeta\nu a = -\mu_m \sin \alpha. \end{cases}$$

Вилучаючи з цих рівнянь невідому фазу, дістанемо рівняння лише відносно амплітуди

$$(\lambda^2(a) - \nu^2)^2 + 4\zeta^2\nu^2 = \mu_m^2 / a^2.$$

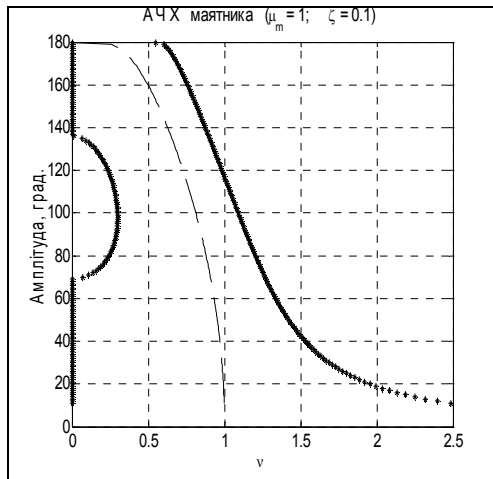
Розв'яжемо це рівняння з частоти ν вимушених коливань (вона же є частотою збурювальної сили):

$$\nu = \sqrt{\lambda^2(a) - 2\zeta^2 \pm \sqrt{\frac{\mu_m^2}{a^2} - 4\zeta^2(\lambda^2(a) - \zeta^2)}}. \quad (4.17)$$

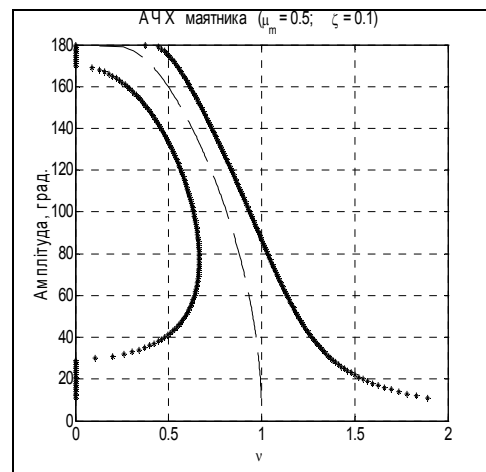
Тепер можна побудувати АЧХ, якщо відомі коефіцієнт лінеаризації $\sigma(a)$ як функція амплітуди, параметри маятника і амплітуда μ_m зовнішньої дії. Для цього потрібно задавати певні значення амплітуди a коливань маятника і розраховувати на основі (4.17) відповідні до них значення частоти зовнішньої дії ν .

Зауважимо, що значення частоти ν , розраховані за виразом (4.17), групуються відносно значень скелетної кривої $\lambda(a)$ як навколо «скелета», чим і обумовлено назву скелетної кривої.

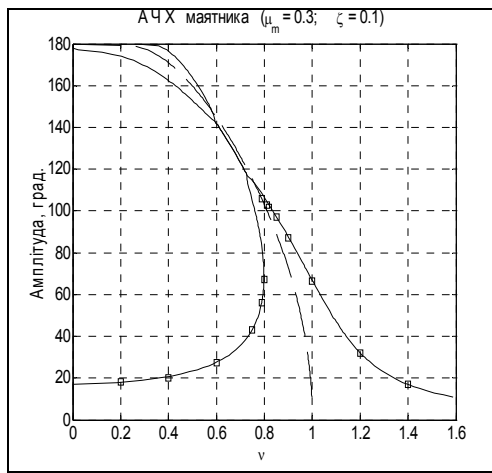
Складемо програму у середовищі Matlab для обчислення значень АЧХ маятника, використовуючи як частоту власних коливань лінеаризованої моделі знайдений раніше (4.13) точний вираз частоти власних коливань:



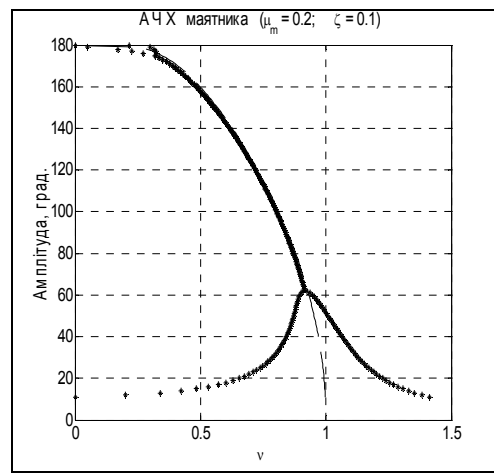
а



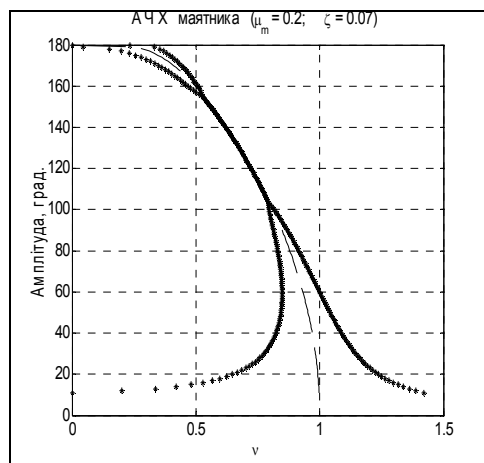
б



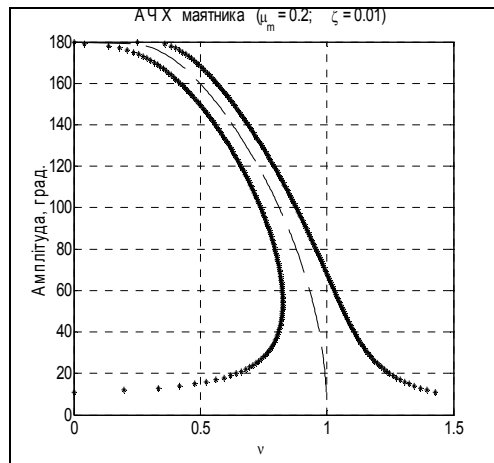
в



г



д



е

Рис. 4.3. АЧХ маятника за різних умов

```

% АСН_ФМ
% Програма побудови графіків АЧХ ФМ
dz=0.1; dz2=dz^2; nxm=0.3; % Параметри маятника і зовнішньої дії
str1=sprintf(' \mu_m = %g; ',nxm); str2=sprintf(' \zeta = %g) ',dz);
s=1; da=pi/180; k=0; kn=10; a=kn*da; % Параметри для розрахунків
% Розрахунок АЧХ
for k=1:(180-kn)

```

```

a=a+da; [K,E]=ellipke((sin(a/2)).^2);
Lam(k)=pi/(2*K); lam2=(Lam(k))^2;
s=(nxm/a)^2-4*dz2*(lam2-dz2); A(k)=a*180/pi; d=sqrt(s);
Nu1(k)=sqrt(lam2-2*dz2-d); Nu2(k)=sqrt(lam2-2*dz2+d);
end
% Побудова графіка
plot(Lam,A,'--k',Nu1,A,'.k',Nu2,A,'.k')
% nus=[0.2 0.4 0.6 0.75 0.79 0.79 0.8 0.81 0.82 0.85 0.9 1 1.2 1.4];
% as=[18.3 20. 27.5 43. 56. 106. 67.3 103. 101.5 97. 87. 66.5 32. 17];
% hold on, plot(nus,as,'sk'), grid,
set(gca,'Fontname','MS Sans Serif','FontSize', 16)
title(['A Ч X маятника',str1,str2])
xlabel('\nu '), ylabel('Амплітуда, град.')

```

На рис. 4.3, а, б, в, г подані АЧХ, побудовані для значення відносного коефіцієнта згасання $\zeta = 0,1$ і значеннях амплітуди моменту сил через вібрацію $\mu_m = 1; 0,5; 0,3$ і $0,2$ відповідно. На рис. 4.3, д і 4.3, е подано АЧХ за амплітуд дії $\mu_m = 0,2$ і $\zeta = 0,07$ і $0,01$.

Безпосереднє інтегрування диференціального рівняння (4.23) при $\mu_m = 0,3$ і $\zeta = 0,1$ (програма *FizMayatnU*, див. Додаток 1) дає наступні результати:

ν	0,2	0,4	0,6	0,75	0,79	0,8	0,79
a , градуси	18,3	20	27,5	43	56	67,3	106
ν	0,81	0,82	0,85	0,9	1	1,2	1,4
a , градуси	103	101,5	97	87	66,5	32	17

Відповідні точки нанесено на рис. 4.3, в у вигляді квадратних маркерів. Неважко впевнитися, що результати моделювання досить добре збігаються з результатами теоретичного дослідження.

4.4. Випрямний ефект фізичного маятника за вібрації точки його підвісу

При вібрації точки підвісу маятника одночасно у горизонтальному і вертикальному напрямках, спостерігається ще одне цікаве нелінійне явище: *середнє положення маятника за усталених вимушених його коливань буде відхилятися від положення вертикалі у той чи іншій бік*. Таке явище є притаманним лише для нелінійних, або лінійних нестационарних систем. В спеціальній літературі з гіроскопії його прийнято називати *випрямним ефектом*. Розглянемо його теоретично, користуючись *методом збурень*.

Для цього скористаємося рівнянням (4.1), у якому вважатимемо основу необертовою, момент сил нульовим, а поступальна вібрація основи здійснюється за законами:

$$n_{\eta}(\tau) = n_{ym} \sin(\nu\tau + \varepsilon), \quad n_{\xi}(\tau) = n_{xm} \sin(\nu\tau),$$

тобто припускається, що точка підвісу маятника здійснює гармонійні коливання в вертикальному і горизонтальному напрямках з однією і тою самою частотою, але з різними амплітудами і фазами.

Із врахуванням цього рівняння (4.1) набуде вигляду

$$\gamma'' + 2\zeta\gamma' + [1 + n_{ym} \sin(v\tau + \varepsilon)] \sin \gamma = -n_{xm} \sin(v\tau) \cos \gamma. \quad (4.18)$$

Відповідно до методу збурень будемо знаходити розв'язок цього рівняння у вигляді ряду

$$\gamma(\tau) = \mu\gamma_{(1)}(\tau) + \mu^2\gamma_{(2)}(\tau) + \dots, \quad (4.19)$$

де μ – деякий малий параметр, $\gamma_{(1)}(\tau)$ і $\gamma_{(2)}(\tau)$ – розв'язки рівнянь першого і другого наближень відповідно.

Рівняння першого і другого наближень утворюються групуванням членів рівняння, що містять як множник малий параметр μ у першому або другому степені відповідно. Для цього *вважатимемо, що амплітуди вібрації основи малі*, тому замінимо у рівнянні (4.18) їх на величини

$$n_{ym} \Rightarrow \mu n_{ym}; \quad n_{xm} \Rightarrow \mu n_{xm}. \quad (4.20)$$

Тепер підставимо вирази (4.20) і (4.19) у (4.18) і згрупуємо коефіцієнти при членах рівняння, що мають як множник малий параметр у першому степені. Отримаємо *рівняння першого наближення*:

$$\gamma''_{(1)} + 2\zeta\gamma'_{(1)} + \gamma_{(1)} = -n_{xm} \sin(v\tau). \quad (4.21)$$

Аналогічно, групуючи члени з множником μ^2 , одержимо *рівняння другого наближення*:

$$\gamma''_{(2)} + 2\zeta\gamma'_{(2)} + \gamma_{(2)} = -n_{ym}\gamma_{(1)} \sin(v\tau + \varepsilon). \quad (4.22)$$

Якщо обмежитися знаходженням лише усталених коливань, то розв'язок рівняння (4.21) матиме вигляд:

$$\gamma_{(1)}(\tau) = \gamma_s \sin v\tau + \gamma_c \cos v\tau, \quad (4.23)$$

де

$$\gamma_s = -\frac{(1-v^2)}{(1-v^2)^2 + 4\zeta^2 v^2} n_{xm}; \quad \gamma_c = \frac{2\zeta v}{(1-v^2)^2 + 4\zeta^2 v^2} n_{xm}.$$

Використаємо розв'язок (4.23) для конкретизації правої частини рівняння (4.22) другого наближення:

$$\begin{aligned} \gamma''_{(2)} + 2\zeta\gamma'_{(2)} + \gamma_{(2)} &= -n_{ym}(\gamma_s \sin v\tau + \gamma_c \cos v\tau) \sin(v\tau + \varepsilon) = \\ &= -\frac{n_{xm}n_{ym}}{2[(1-v^2)^2 + 4\zeta^2 v^2]} \left\{ [(1-v^2) \cos \varepsilon - 2\zeta v \sin \varepsilon] + \right. \\ &\quad \left. + [(1-v^2) \sin \varepsilon - 2\zeta v \cos \varepsilon] \sin 2v\tau - [(1-v^2) \cos \varepsilon + 2\zeta v \sin \varepsilon] \right\}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Обмежимося пошуком не повного розв'язку рівняння другого наближення, а лише його сталої складової, значення якої, вочевидь, визначається сталою складовою у правій частині рівняння (4.24). Маємо:

$$\langle \gamma(\tau) \rangle = \langle \gamma_{(2)}(\tau) \rangle = \frac{n_{xm} \cdot n_{ym}}{2} \frac{(1-v^2) \cos \varepsilon - 2\zeta v \sin \varepsilon}{(1-v^2)^2 + 4\zeta^2 v^2},$$

або

$$\langle \gamma(\tau) \rangle = \frac{n_{xm} \cdot n_{ym}}{2} \frac{\cos(\varepsilon + \Delta)}{\sqrt{(1-v^2)^2 + 4\zeta^2 v^2}}, \quad (4.25)$$

де

$$\operatorname{tg}\Delta = \frac{2\zeta\nu}{1-\nu^2}.$$

Отже, теоретичний аналіз підтверджує можливість виникнення випрямного ефекту.

Проаналізуємо вираз (4.25). Привертає до себе увагу значна залежність сталої складової кута відхилення маятника від зсуву фаз ε між вібраціями у вертикальному і горизонтальному напрямках точки підвісу маятника. Залежно від цього зсуву фаз стала складова відхилення може дорівнювати нулю (якщо $\varepsilon = -\Delta \pm (2k+1)\pi/2$), може бути максимальною за величиною і додатною (при $\varepsilon = -\Delta \pm 2k\pi$), або максимальною за величиною і від'ємною ($\varepsilon = -\Delta \pm (2k+1)\pi$).

Як випливає з (4.25), найбільше значення відхилення становить

$$|\langle \gamma(\tau) \rangle|_{\max} = \frac{n_{xm} n_{ym}}{2} \frac{1}{\sqrt{(1-\nu^2)^2 + 4\zeta^2 \nu^2}}. \quad (4.26)$$

Результати моделювання [1, с.112...122] шляхом чисельного інтегрування рівняння (4.18) наведені на рис. 4.4 (за таких значень параметрів: $\zeta = 0.1$, $n_{xm} = n_{ym} = 2$, $\nu = 4$). Як бачимо, у системі встановлюються усталені вимушені коливання між крайніми значеннями від $(-13,8^\circ)$ до $-0,7^\circ$. Середнє значення кута відхилення маятника від вертикалі дорівнює $-6,6^\circ$. Розрахунок за формулою (4.26) дає значення $7,6^\circ$.

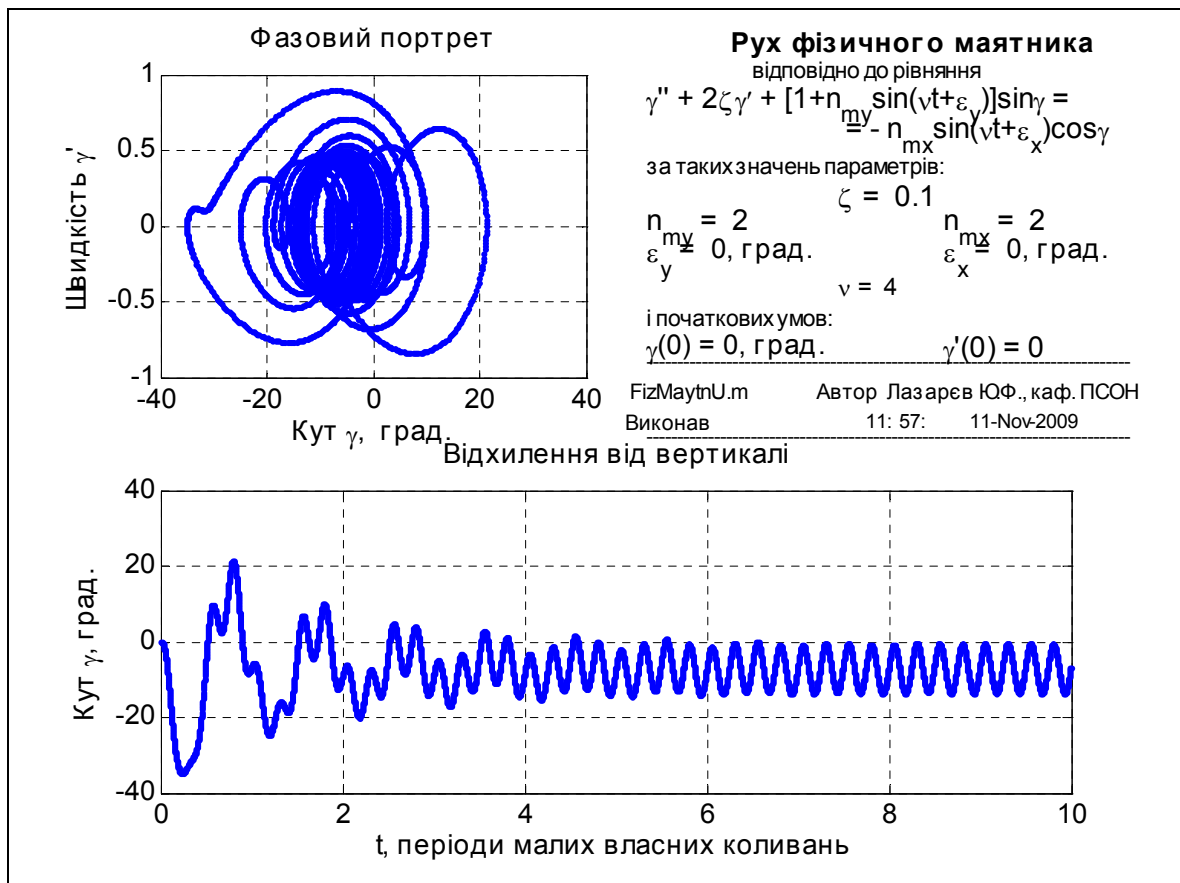


Рис. 4.4. Результати чисельного інтегрування рівнянь ФМ при «навскісній» вібрації

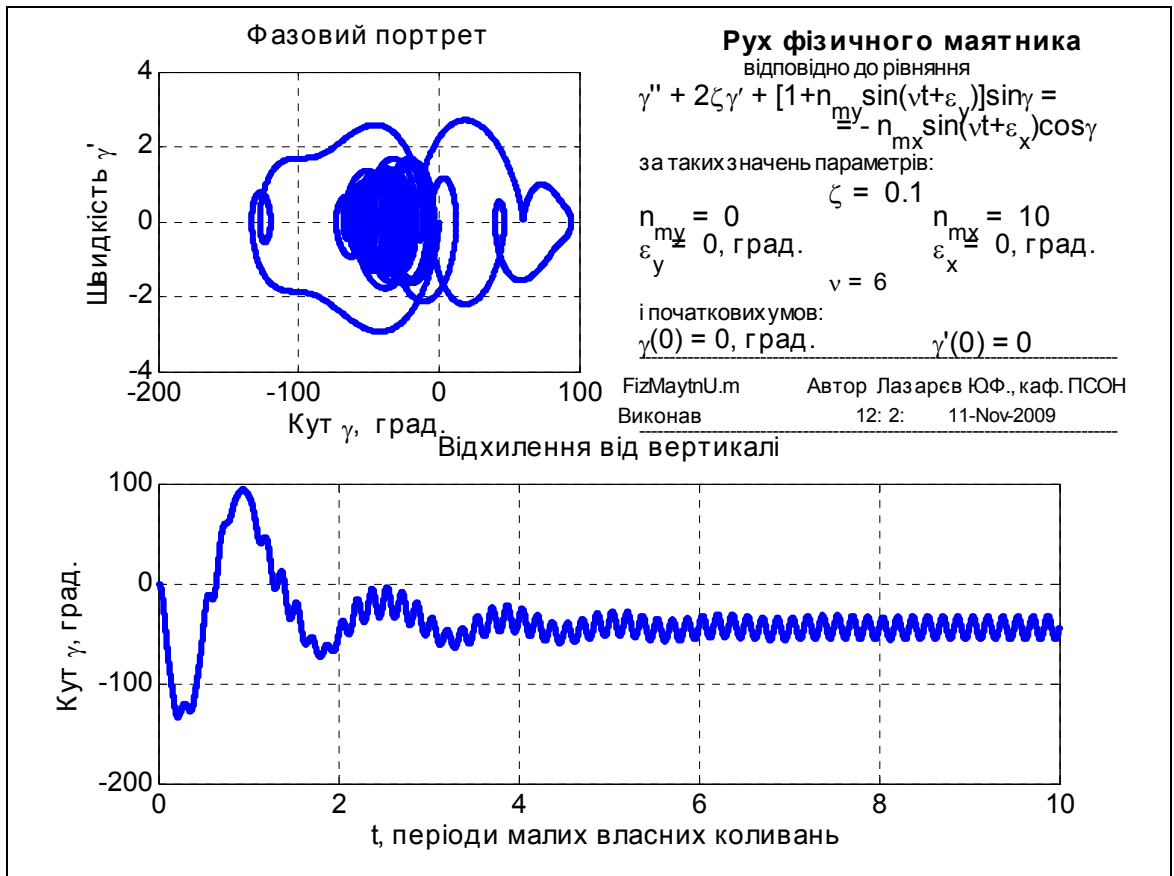


Рис. 4.5. Випрямний ефект за горизонтальної вібрації

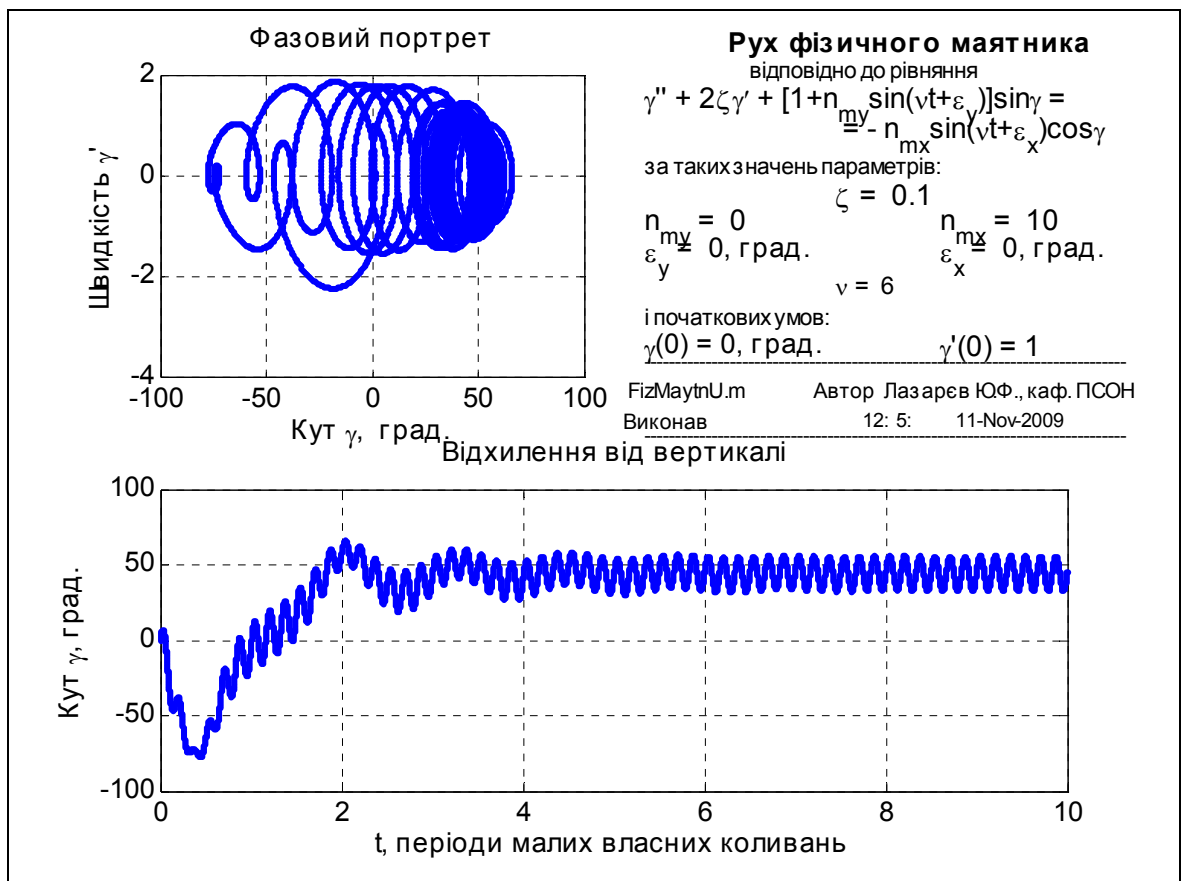


Рис. 4.6. Випрямний ефект за горизонтальної вібрації (інші початкові умови)

Цікаве явище, яке ще не описано в літературі з нелінійних коливань, виявлено через чисельне моделювання за тою самою програмною моделлю. Дуже значний *випрямний ефект може спостерігатися при суто горизонтальній інтенсивній вібрації основи*. Для прикладу на рис. 4.5 і 4.6 наведені результати моделювання руху маятника за таких умов: $\zeta = 0.1$; $n_{xm} = 10$; $n_{ym} = 0$; $\nu = 6$. На рис. 4.5 відображено рух маятника за нульових початкових умов ($\gamma(0) = \gamma'(0) = 0$). З нього можна впевнитися, що середнє відхилення маятника від вертикалі дорівнює близько (-45°). Початкові умови для рис. 4.6 обрані іншими: $\gamma(0) = 0$; $\gamma'(0) = 1$. Тепер середнє відхилення ($+45^\circ$) має протилежний напрямок.

Розглядання графіків приводить до таких досить несподіваних висновків, які не збігаються з висновками попереднього теоретичного дослідження:

1) випрямний ефект (і вельми значний) може спостерігатися не тільки за навкисній вібрації основи, але й за суто горизонтальної її вібрації;

2) середнє положення маятника може відхилитися від вертикалі у тому чи протилежному напрямку; у якому саме – залежить від початкових умов.

Теоретичного опису цього явища досі немає у відомій літературі.

4.5. Параметричні коливання фізичного маятника при вертикальній вібрації

Якщо точка підвісу маятника вібує лише у вертикальному напрямку, за малої інтенсивності вібрації поведження маятника майже не відрізняється від поведження його на нерухомій основі: якщо відхилити маятник від вертикалі, то від здійснюватиме загасаючі коливання навколо нижнього положення рівноваги. Але за інтенсивної вертикальної вібрації замість загасання коливань може спостерігатися *усталення коливань, частота яких у два рази менша за частоту вібрації основи*. Такі усталені коливання одержали назву параметричних коливань.

Теоретичне дослідження досить складне. Застосуємо для цього метод усереднення.

Припустимо, що вертикальна вібрація здійснюється за законом

$$n_{\eta}(\tau) = n_{ym} \sin \nu \tau.$$

Обмежимося випадком, коли відхилення маятника від нижнього положення рівноваги є досить малими (наприклад, не більшими за 30°). Розкладаючи $\sin \gamma$ в ряд Маклорена і залишаючи в ньому лише перші два члени, можна подати рівняння (4.1) у вигляді

$$\gamma'' + 2\zeta\gamma' + [1 + n_{ym} \sin(\nu\tau)]\left(\gamma - \frac{\gamma^3}{6}\right) = 0. \quad (4.27)$$

Мета дослідження – вивчення можливості виникнення в системі, що описується цим рівнянням, стаціонарних (з незмінною амплітудою і частотою) коливань, які називають параметричними. Оскільки заздалегідь невідомо, якою

буде частота цих коливань, поки вважатимемо, що вони здійснюються за гармонічним законом з деякою невідомою частотою ν_p :

$$\gamma(\tau) = a \sin(\nu_p \tau + \varepsilon) = Ce^{j\nu_p \tau} + De^{-j\nu_p \tau}, \quad (4.28)$$

де a – амплітуда; ε – фаза; C і D – комплексно-спряжені величини, що характеризують амплітуду і фазу

$$C = \frac{a}{2} e^{j\varepsilon}; \quad D = \frac{a}{2} e^{-j\varepsilon}. \quad (4.29)$$

Приведемо рівняння (4.27) до нормальної форми Коші. Для цього позначимо:

$$y_1 = \gamma; \quad y_2 = \gamma'.$$

Тоді рівняння (4.27) набуде вигляду системи з двох рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{d\tau} = y_2; \\ \frac{dy_2}{d\tau} = -y_1 - 2\zeta \cdot y_2 - (n_{ym} \sin \nu \tau) y_1 + \frac{y_1^3}{6}. \end{cases}$$

Перетворимо цю систему на таку

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{d\tau} = y_2; \\ \frac{dy_2}{d\tau} = -\nu_p^2 y_1 + \mu[-(1 - \nu_p^2) y_1 - 2\zeta y_2 - (n_{ym} \sin \nu \tau) y_1 + \frac{y_1^3}{6}], \end{cases} \quad (4.30)$$

в якій виділено малі члени (із множником μ) так, щоб решта (не малих) членів утворили лінійну стаціонарну систему з розв'язком вигляду (4.28):

$$y_1(\tau) = \gamma(\tau) = Ce^{j\nu_p \tau} + De^{-j\nu_p \tau}; \quad y_2(\tau) = y_1'(\tau) = j\nu_p (Ce^{j\nu_p \tau} - De^{-j\nu_p \tau}). \quad (4.31)$$

Відповідно до методу усереднення розв'язки (4.30) слід розглядати як заміну змінних y_1 і y_2 на нові змінні C і D . Роблячи таку заміну в системі (4.30) і позначаючи

$$\psi = \nu_p \tau;$$

$$\begin{aligned} \mu f(C, D, \psi) = \mu[-(1 - \nu_p^2)(Ce^{j\psi} + De^{-j\psi}) - j2\zeta\nu_p (Ce^{j\psi} + De^{-j\psi}) - \\ - n_m \sin \nu \tau (Ce^{j\psi} + De^{-j\psi}) + \frac{1}{6}(Ce^{j\psi} + De^{-j\psi})^3], \end{aligned} \quad (4.32)$$

отримаємо рівняння відносно нових змінних

$$\begin{cases} \frac{dC}{d\psi} = \frac{1}{j2\nu_p^2} \mu f(C, D, \psi) \cdot e^{-j\psi} \\ \frac{dD}{d\psi} = -\frac{1}{j2\nu_p^2} \mu f(C, D, \psi) \cdot e^{j\psi} \end{cases} \quad (4.33)$$

Рівняння (4.33), так само, як і первинні рівняння (4.30) є «точними» (не наближеними). Застосуємо до них операцію усереднення за поточною фазою ψ . Уведемо позначення \bar{C} і \bar{D} для усереднених значень комплексних амплітуд C і D :

$$\bar{C} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C(\psi) d\psi; \quad \bar{D} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D(\psi) d\psi. \quad (4.34)$$

Тоді рівняння (4.33) можна замінити такими

$$\begin{cases} \frac{d\bar{C}}{d\psi} = \frac{1}{j2v_p^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu f(\bar{C}, \bar{D}, \psi) \cdot e^{-j\psi} \cdot d\psi \\ \frac{d\bar{D}}{d\psi} = -\frac{1}{j2v_p^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu f(\bar{C}, \bar{D}, \psi) \cdot e^{j\psi} \cdot d\psi \end{cases}. \quad (4.35)$$

Суть методу усереднення полягає не тільки в тому, що замість первісних квазілінійних рівнянь розглядаються еквівалентні їм усереднені рівняння у формі Коші з малими правими частинами (так звані «рівняння у стандартній формі диференціальних рівнянь»). Відмінною особливістю є те, що точне інтегрування за фазою у правих частинах рівнянь (4.35) замінюють на наближене, припускаючи при інтегруванні усереднені комплексні амплітуди (4.34) незмінними (тобто незалежними від фази). Це припущення є можливим, оскільки праві частини рівнянь (4.35) за побудовою малі (містять малий множник μ), тобто швидкості змінювання усереднених комплексних амплітуд також малі.

Враховуючи, що $\sin(v\tau) = \frac{j}{2}(e^{-jv\tau} - e^{jv\tau})$, можна перетворити вираз (4.32)

до такого

$$\begin{aligned} f(\bar{C}, \bar{D}, \psi) = & \{[-(1 - v_p^2) - j2\zeta v_p] \bar{C} + \frac{1}{2} \bar{C}^2 \bar{D}\} e^{j\psi} + \\ & + \{[-(1 - v_p^2) + j2\zeta v_p] \bar{D} + \frac{1}{2} \bar{C} \bar{D}^2\} e^{-j\psi} + \frac{1}{6} \bar{C}^3 e^{j3\psi} + \frac{1}{6} \bar{D}^3 e^{-j3\psi} - \\ & - \frac{j \cdot n_m}{2} \{ \bar{C} e^{j(\psi - v\tau)} - \bar{D} e^{-j(\psi - v\tau)} - \bar{C} e^{j(\psi + v\tau)} + \bar{D} e^{-j(\psi + v\tau)} \}. \end{aligned}$$

Використаємо отриманий вираз у (4.35) і усереднимо праві частини. Якщо при цьому врахувати, що

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\pm jk\psi} \cdot d\psi = 0; \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

то рівняння (4.35) можна звести до вигляду

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{C}}{d\psi} = & \frac{1}{j2v_p^2} \{[-(1 - v_p^2) - j2\zeta v_p + \frac{1}{2} \bar{C} \bar{D}] \bar{C} - \\ & - j \frac{n_{ym}}{2} [\bar{C} \frac{1}{2\pi} (\int_0^{2\pi} e^{-jv\tau} d\psi - \int_0^{2\pi} e^{jv\tau} d\psi) - \bar{D} \frac{1}{2\pi} (\int_0^{2\pi} e^{-j(2\psi - v\tau)} d\psi - \int_0^{2\pi} e^{j(2\psi + v\tau)} d\psi)]\}; \quad (4.36) \\ \frac{d\bar{D}}{d\psi} = & -\frac{1}{j2v_p^2} \{[-(1 - v_p^2) + j2\zeta v_p + \frac{1}{2} \bar{C} \bar{D}] \bar{D} - \\ & - j \frac{n_{ym}}{2} [\bar{D} \frac{1}{2\pi} (\int_0^{2\pi} e^{-jv\tau} d\psi - \int_0^{2\pi} e^{jv\tau} d\psi) + \bar{C} \frac{1}{2\pi} (\int_0^{2\pi} e^{-j(2\psi - v\tau)} d\psi - \int_0^{2\pi} e^{j(2\psi + v\tau)} d\psi)]\}. \end{aligned}$$

Надалі розглядатимемо лише можливість установаження у системі *стаціонарних коливань*, яким відповідають нульові швидкості змінювання комплексних усереднених амплітуд:

$$\frac{d\bar{C}_o}{d\psi} = 0; \quad \frac{d\bar{D}_o}{d\psi} = 0, \quad (4.37)$$

де \bar{C}_o і \bar{D}_o – «амплітуди» шуканих стаціонарних коливань.

Із рівнянь (4.36) випливає, що для забезпечення виконання умов (4.37) (якщо \bar{C}_o і \bar{D}_o не дорівнюють нулю) мають дорівнювати нулю праві частини цих рівнянь.

Припустимо, що

$$v\tau = m\psi,$$

де m – ціле число. Тоді:

- інтеграли у перших круглих дужках дорівнюватимуть нулю;
- інтеграли у других круглих дужках не дорівнюватимуть нулю лише за умов

$$v\tau = 2\psi \Rightarrow v\tau = 2v_p\tau \Rightarrow v_p = \frac{v}{2}, \quad (4.38)$$

тобто коли частота параметричних коливань маятника у два рази менша за частоту параметричного збудження (частоту вібрації основи).

Виконання умов (4.53) і (4.51) приводить рівняння (4.50) до рівностей

$$\begin{cases} [-(1 - v_p^2) - j2\zeta v_p + \frac{1}{2}\bar{C}_o\bar{D}_o]\bar{C}_o + j\frac{n_{ym}}{2}\bar{D}_o = 0 \\ [-(1 - v_p^2) + j2\zeta v_p + \frac{1}{2}\bar{C}_o\bar{D}_o]\bar{D}_o - j\frac{n_{ym}}{2}\bar{C}_o = 0 \end{cases}$$

Це алгебричні рівняння для визначення комплексних усереднених амплітуд параметричних коливань маятника. Перемножуючи їх і враховуючи (4.29), можна дістати рівняння для визначення дійсної амплітуди параметричних коливань:

$$a = 2\sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{v^2}{4} \pm \sqrt{\frac{n_{ym}^2}{4} - \zeta^2 v^2}}. \quad (4.39)$$

Користуючись виразом (4.54), побудуємо графіки амплітудно-частотних характеристик параметричних коливань. Зробимо це у середовищі Matlab:

```
% ParamKoleb
% Програма побудови АЧХ параметричних коливань фізичного маятника
clear all, clc, nu=0:0.01:3; n=length(nu);
nym =0.5; strn=sprintf('n_y_m = %g',nym);
dz=0.01; str1=sprintf('\zeta = %g',dz);
a1=2*sqrt(2*(1-nu.^2/4-sqrt((nym/2)^2-dz^2.*nu.^2))*180/pi;
a2=2*sqrt(2*(1-nu.^2/4+sqrt((nym/2)^2-dz^2.*nu.^2))*180/pi;
for k=1:n
    if imag(a1(k))~=0, a1(k)=0; end
    if imag(a2(k))~=0, a2(k)=0; end
end
dz=0.12; str2=sprintf('\zeta = %g',dz);
a3=2*sqrt(2*(1-nu.^2/4-sqrt((nym/2)^2-dz^2.*nu.^2))*180/pi;
a4=2*sqrt(2*(1-nu.^2/4+sqrt((nym/2)^2-dz^2.*nu.^2))*180/pi;
```

```

for k=1:n
    if imag(a3(k))~=0,          a3(k)=0;          end
    if imag(a4(k))~=0,          a4(k)=0;          end
end
dz=0.15;  str3=sprintf('\zeta = %g',dz);
a5=2*sqrt(2*(1-nu.^2/4-sqrt((nym/2)^2-dz^2.*nu.^2)))*180/pi;
a6=2*sqrt(2*(1-nu.^2/4+sqrt((nym/2)^2-dz^2.*nu.^2)))*180/pi;
for k=1:n
    if imag(a5(k))~=0,          a5(k)=0;          end
    if imag(a6(k))~=0,          a6(k)=0;          end
end
plot(nu,a1,'k',nu,a2,'k',nu,a3,'k.',nu,a4,'k.',nu,a5,'k*',nu,a6,'k**')% ,2,100,'ks',2.3,48,'ks'),
grid, set(gca,'Fontname','MS Sans Serif','fontSize', 16)
title(['АЧХ параметричних коливань (' ,strn,')']),xlabel('Відносна частота збурення \nu')
ylabel('Амплітуда, град. '), legend(str1,str1,str2,str2,str3,0)

```

Графіки АЧХ параметричних коливань для інтенсивності вертикальної вібрації $n_{ym}=0,5$ і для трьох значень відносного коефіцієнта згасання $\zeta=0,01$; $0,12$ і $0,15$ показано на рис. 4.7, аналогічні графіки для $n_{ym}=1$ і $\zeta=0,1$; $0,25$ і $0,4$ – на рис. 4.8.

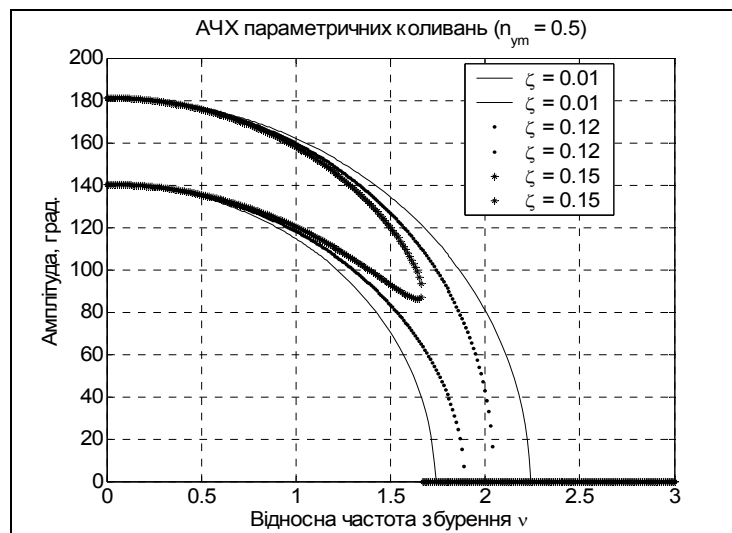


Рис. 4.7. АЧХ параметричних коливань при $n_{ym} = 0,5$

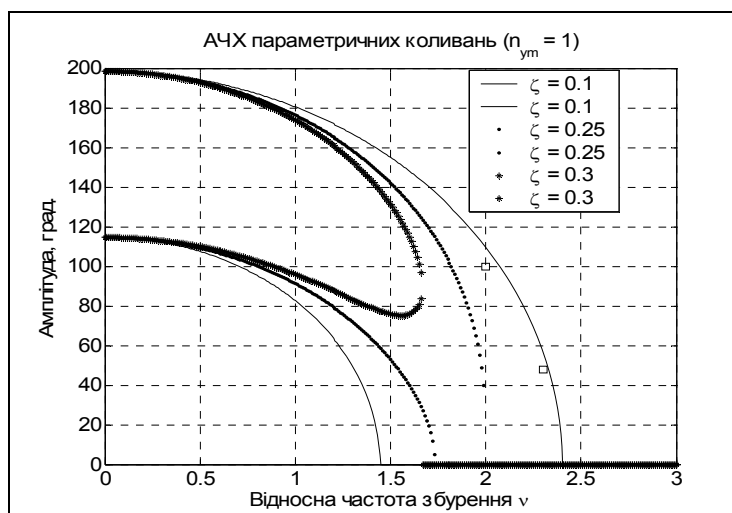


Рис. 4.8. АЧХ параметричних коливань при $n_{ym} = 1$

Як видно з графіків, зона існування малих параметричних коливань зменшується зі збільшенням демпфірування. За досить великих значень відносного коефіцієнта загасання вона може зовсім зникнути, тобто ні за яких значень частоти вертикальної вібрації маятника не здійснює параметричні усталені коливання. Збільшення ж інтенсивності вібрації приводить також до збільшення зони частот, в середині якої збуджуються параметричні коливання.

Як бачимо, властивості АЧХ параметричних коливань дуже відрізняються від АЧХ вимушених коливань.

Результати моделювання (чисельного інтегрування рівняння (4.18) при суто вертикальній вібрації) при $n_{ym} = 1$ і $\zeta = 0.1$ подані на рис. 4.9 і 4.10 для двох значень частоти вертикальної вібрації $\nu = 2.3$ і $\nu = 2$.

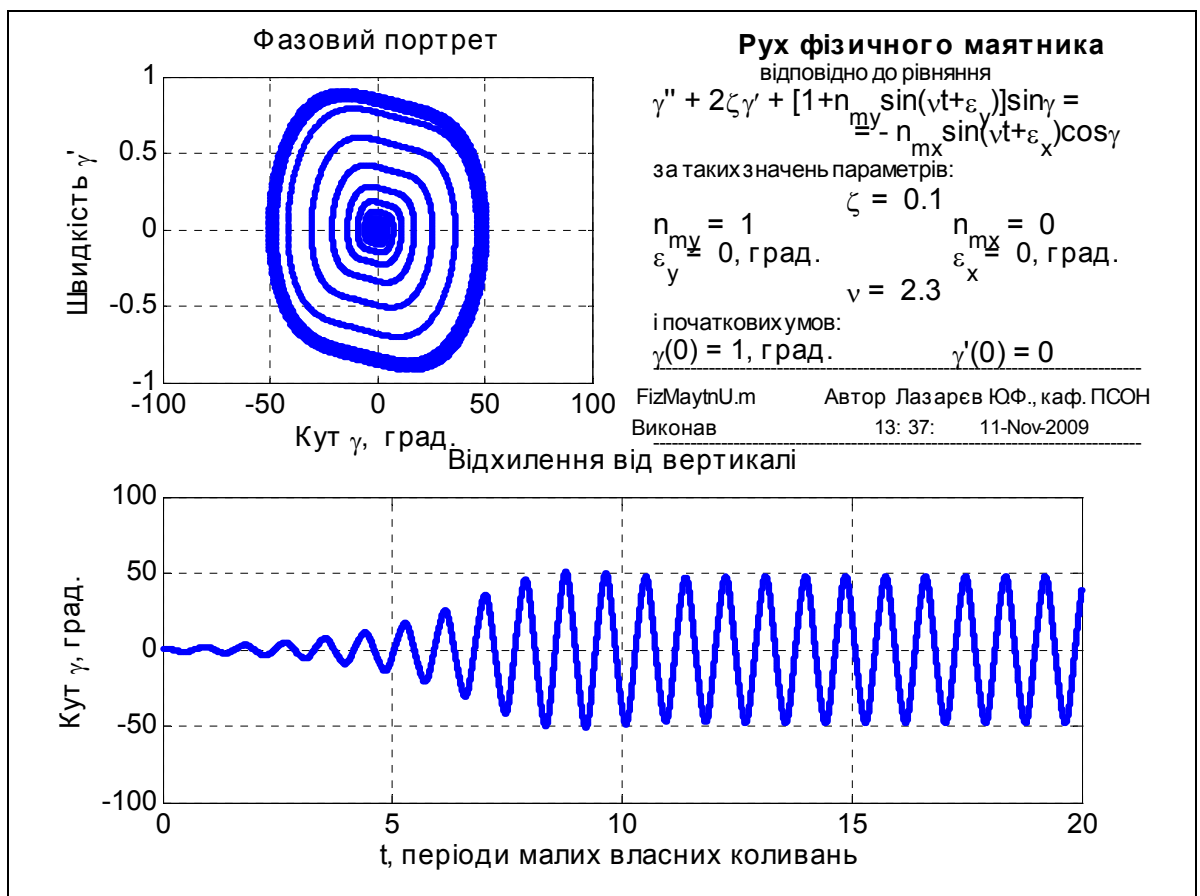


Рис. 4.9. Параметричні коливання ФМ при $\nu = 2,3$

В обох випадках частоти усталених коливань, як можна впевнитися у два рази менші за частоту збурення і складають величину близьку до частоти вільних малих коливань маятника. Амплітуди усталених (параметричних) коливань близькі до тих, що впливають з теоретичного дослідження. На графіки рис. 4.8 нанесені результати останніх двох моделювань параметричних коливань маятника у вигляді двох квадратних маркерів. Як бачимо, ці результати досить добре узгоджуються з результатами теоретичного передбачення.

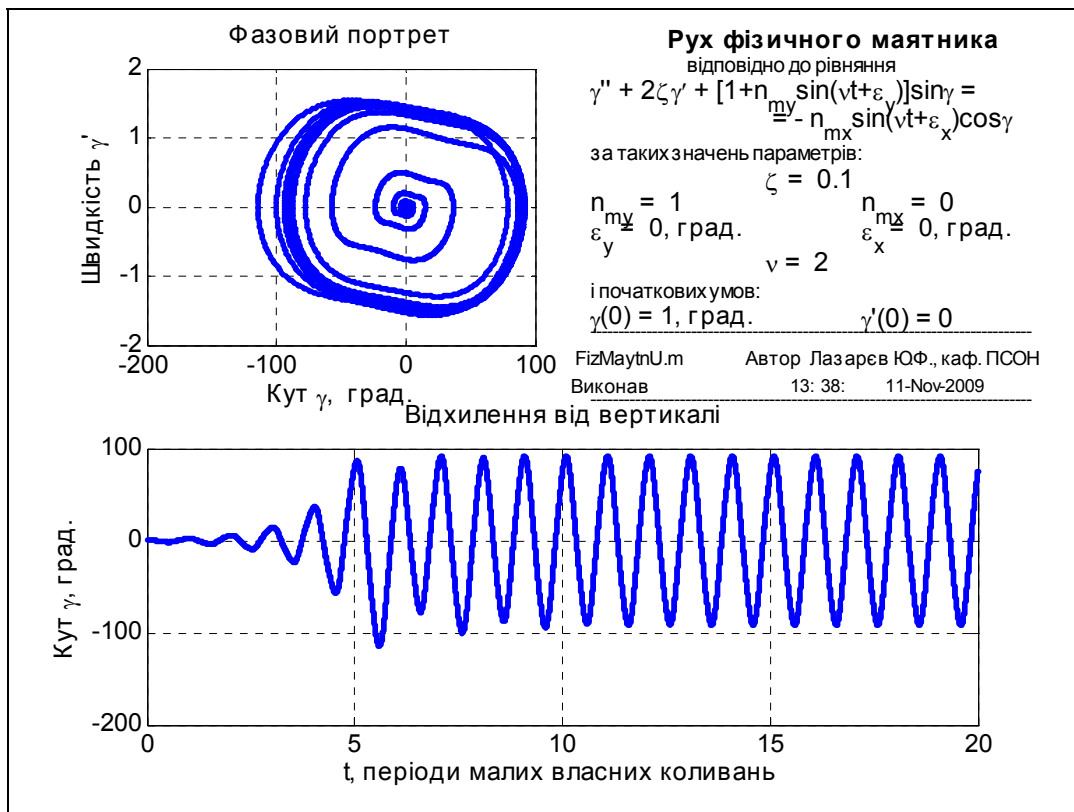


Рис. 4.10. Параметричні коливання ФМ при $v = 2$

Окрім параметричних коливань, при інтенсивній вертикальній вібрації основи можливе виникнення ще одного незвичного явища – перетворення верхнього положення рівноваги з нестійкого у стійке.

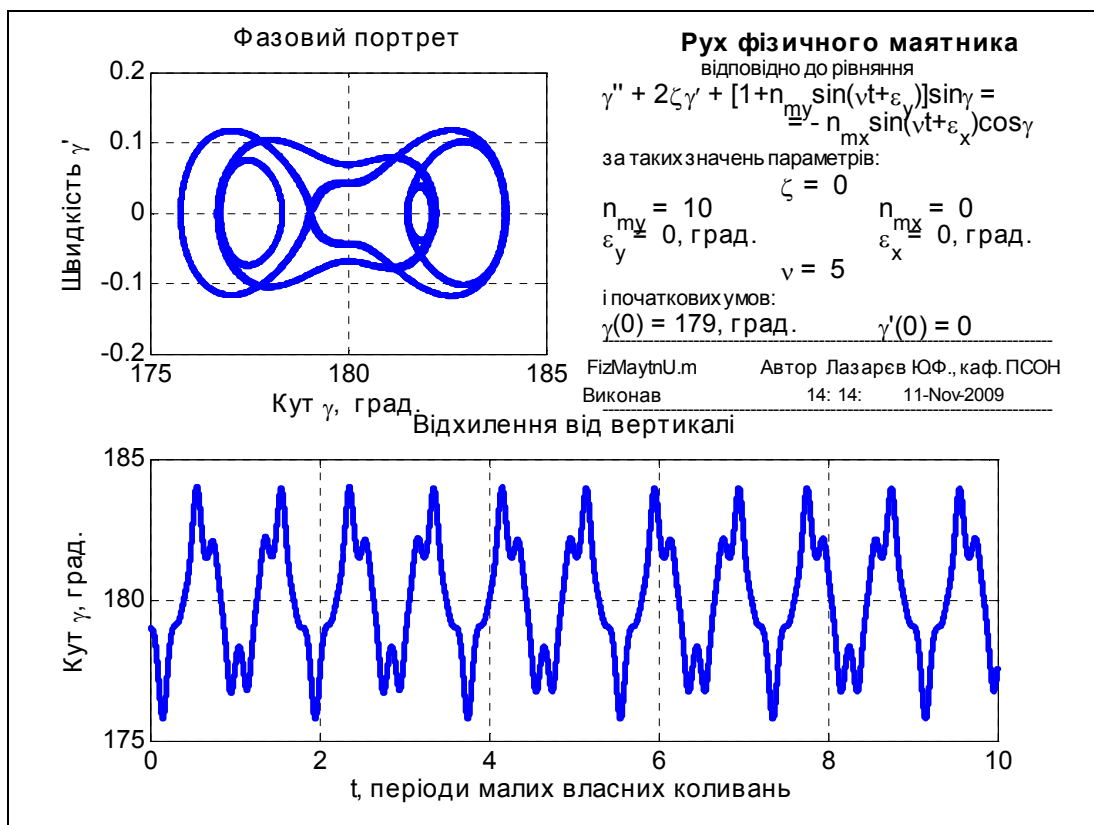


Рис. 4.11. Коливання маятника навколо верхнього положення рівноваги

Це явище продемонстровано на рис. 4.11 і 4.12, які одержані шляхом чисельного інтегрування диференціальних рівнянь руху маятника при наступних значеннях параметрів вібрації: $n_{ym} = 10$; $\nu = 5$. Рис. 4.11 відображує незгасаючі коливання маятника навколо верхнього положення рівноваги при відсутності демпфірування ($\zeta = 0$). Амплітуда цих коливань визначається початковими умовами. Якщо ж ввести демпфірування, то, як показано на рис. 4.12, ці коливання стають загасаючими, і з плином часу маятник встановлюється точно у верхнє положення.

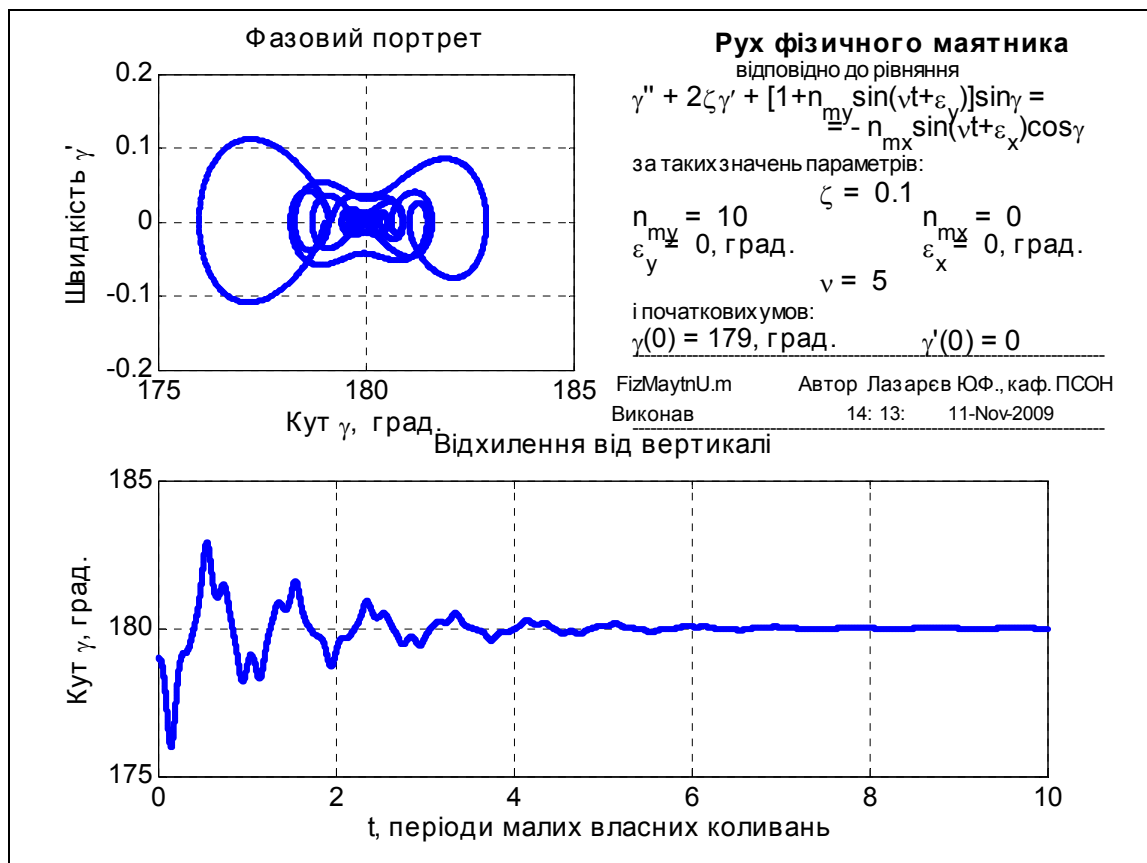


Рис. 4.12. Стійкість верхнього положення рівноваги

Завдання

На основі комплексу програм моделювання поведінки фізичного маятника *FizMayatnU.m* (див. Додаток 1. До глави 4) виконати наступні завдання.

Завдання 4.1. Дослідження залежності частоти власних коливань фізичного маятника від їхньої амплітуди

1. Побудувати графіки експериментальної (за експериментами на програмній моделі) і теоретичних скелетних кривих.
2. Порівняти їх одну з одною і зробити висновки.
3. Відповісти на запитання:
 - Що таке «ізохронність» коливань? Чим обумовлено таку назву?

- Чи є власні незгасаючі коливання маятника гармонічними?
- Чим є характерною часова форма коливань маятника?
- Які особливості має залежність частоти власних коливань маятника від їх амплітуди?
- Що таке «точна скелетна крива»?
- Чи збігається експериментальна скелетна крива з точною?
- Що називають «скелетною кривою»? Чому її так називають? Який з видів методу лінеаризації приводить до скелетної кривої, найбільш наближеної до точної?

Завдання 4.2. Дослідження амплітудно-частотних характеристик вимушених коливань фізичного маятника при горизонтальній вібрації точки його підвісу

1. За експериментами із заданою програмною моделлю «виміряти» амплітуду вимушених коливань ФМ залежно від частоти горизонтальної вібрації точки його підвісу для заданих викладачем значень амплітуди горизонтального перевантаження і відносного коефіцієнта загасання.

2. Побудувати на одному графіку експериментальну і теоретичну АЧХ.

3. Порівняти отримані АЧХ і зробити висновки про їхню адекватність реальним АЧХ фізичного маятника і причин неадекватності, якщо така спостерігається.

4. Відповісти на запитання:

- Які коливання нелінійної системи називають вимушеними?
- Які особливості мають АЧХ нелінійних систем у порівнянні з АЧХ лінійної стаціонарної системи?
- Які особливості мають АЧХ маятника?
- Яку роль на графіку АЧХ відіграє скелетна крива?
- За яких умов АЧХ нелінійної системи наближається до скелетної кривої?
- За якими формулами і за яким алгоритмом обчислені побудовані теоретичні АЧХ вимушених коливань маятника? Яку при цьому обрано залежність частоти власних коливань від їхньої амплітуди?
- У чому полягає сутність методу лінеаризації відшукування розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь?

Завдання 4.3. Дослідження випрямного ефекту фізичного маятника за вібрації точки його підвісу

1. Для заданих викладачем значень амплітуд горизонтального і вертикального перевантажень і частоти вібрації точки підвісу експериментально (за заданою програмною моделлю)

- 1) встановити залежність сталої складової куту відхилення маятника від вертикалі від зсуву фаз між коливаннями основи у двох напрямках;

- 2) варіюючи амплітудами перевантаження і частотою вібрації встановити залежність випрямного ефекту від цих параметрів зовнішньої дії;
 - 3) розрахувати за теоретичними формулами сталу складову кута за одних і тих самих умов і порівняти з результатами експериментів; зробити висновки.
2. Відповісти на запитання:
- Що називають «випрямним ефектом»? У яких системах можливе виникнення випрямного ефекту?
 - Чи може існувати випрямний ефект у лінійній стаціонарній системі?
 - За яких умов може спостерігатися випрямний ефект у маятнику? У чому він проявляється?
 - Від яких параметрів суттєво залежить випрямний ефект маятника при вібрації точки його підвісу і як?
 - Як можна позбутися випрямного ефекту?
 - Які коливання супроводжують випрямний ефект (якої частоти)? Чи можна, спостерігаючи усталені коливання, встановити за їх параметрами величину випрямного ефекту маятника?
 - Чи можливий випрямний ефект за суто горизонтальної вібрації точки підвісу маятника?
 - Які особливості випрямного ефекту за горизонтальної вібрації?
 - У чому полягає сутність методу збурень визначення розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь?
 - Чи можна теоретично дослідити випрямні ефекти, користуючись методами лінеаризації? Методами теорії збурень? Методом усереднення? Чому?

Завдання 4.4. Дослідження параметричних коливань фізичного маятника за вертикальної вібрації точки його підвісу

1. Для заданих викладачем значень амплітуди вертикального перевантаження і відносного коефіцієнта загасання експериментально (за заданою програмною моделлю) установити залежність амплітуди параметричних коливань маятника від частоти вібрації основи.
2. Побудувати графіки експериментальної і теоретичної АЧХ параметричних коливань за такими самими параметрами вібрації основи. Порівняти їх. Зробити висновки.
3. Відповісти на запитання:
 - Які коливання називають параметричними? Чим обумовлено їх назву? У яких системах їх можна спостерігати?
 - За якою характерною особливістю можна вирізнити під час експерименту параметричні коливання? Доведіть, що ця особливість спостерігалася у проведених вами експериментах.

- Від яких параметрів суттєво залежать параметричні коливання і як?
- Які характерні відмінності АЧХ параметричних коливань від АЧХ вимушених коливань?
- Чим відрізняється параметричний резонанс від параметричних коливань? У яких системах його можна спостерігати?
- Як залежать параметричні коливання від інтенсивності вібрації?
- Як залежать параметричні коливання від демпфірування?
- За якою формулою побудовані теоретичні АЧХ параметричних коливань? Поясніть використаний алгоритм розрахунків.
- Яку форму рівнянь називають стандартною?
- У чому полягає сутність метода усереднення?
- Чи можна використати для теоретичного аналізу параметричних коливань методи лінеаризації? Методи теорії збурень? Чому?

Контрольні запитання

1. Що розуміють під неізохронністю коливань?
2. За яких умов виникає випрямний ефект у фізичного маятника? у чому він полягає?
3. За яких умов виникають параметричні коливання фізичного маятника? які характерні особливості цих коливань?
4. За яких умов нижнє положення рівноваги маятника стає нестійким? верхнє положення рівноваги стає стійким?
5. Чи може спостерігатися випрямний ефект маятника при суто горизонтальній вібрації його точки? якщо може, то за яких умов?
6. Як залежить випрямний ефект маятника від амплітуди вібрацій точки підвісу? від зсуву фази між коливаннями основи в вертикальному і горизонтальному напрямках?
7. Як впливає збільшення тертя в підшипниках маятника на виникнення його параметричних коливань?
8. Які характерні особливості мають амплітудно-частотні характеристики маятника?
9. Що називають скелетними кривими? чим обумовлена їхня назва?

Література

[33, уроки 1,2, с. 13 – 122]; [32, Лекція 11, 13]; [21]; [22]; [, с. 23-28].

Розділ 5. Теорія пасивного віброзахисту

Розглянемо задачу, що становить практичний інтерес для інженерів, які проєктують прилади і обладнання, призначені працювати в умовах інтенсивної вібрації основи, – задачу пасивного віброзахисту, що полягає у мінімізації шкідливого впливу вібрації основи на працездатність проєктованого пристрою (у випадку приладу – на точність) за рахунок установа між основою і пристроєм пружно-демпфівального елемента (амортизатора).

5.1. Постановка задачі віброзахисту

Вирішуватимемо задачу віброзахисту на прикладі одномасової коливальної системи з одним ступенем вільності.

Амортизований об'єкт (АО) масою m з'єднано за допомогою амортизатора, який складається з пружини П і демпфера Д, з основою, що здійснює рух уздовж осі X (рис. 5.1).

Позначимо: $\xi_0(t)$ – абсолютне (тобто відносно інерціального простору) переміщення основи; $\xi(t)$ – абсолютне переміщення центру мас АО; $x = \xi - \xi_0$ – переміщення АО відносно основи; $P(x, \dot{x})$ – сила, що діє на АО з боку амортизатора.

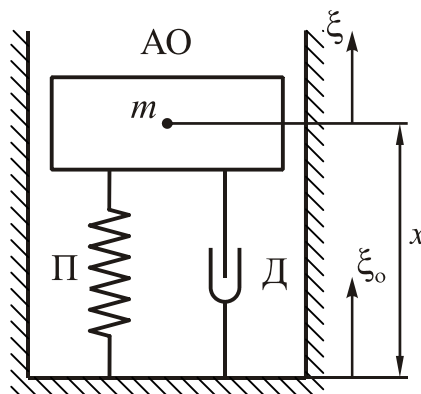


Рис. 5.1. Схема одномасової системи пасивного віброзахисту

Оскільки амортизатор (пружину й демпфер) надалі вважатимемо безінерційним носієм пружних й дисипативних властивостей, що визначаються лише відносним переміщенням x і відносною швидкістю \dot{x} , називатимемо його пружно-демпфівальним елементом (ПДЕ).

Призначення системи віброзахисту – зменшення силової дії на АО з боку амортизатора при вібрації основи, по відношенню до дії на нього при абсолютно жорсткому з'єднанні АО з основою.

Рівняння руху розглядуваної коливальної системи має вигляд

$$m\ddot{\xi} + P(x, \dot{x}) = 0. \quad (5.1)$$

Це рівняння можна записати й так:

$$m\ddot{x} + P(x, \dot{x}) = -m\ddot{\xi}_0. \quad (5.2)$$

У випадку абсолютно жорсткого з'єднання АО з основою відносно переміщення x дорівнює нулю, бо АО переміщується у просторі разом з основою як одне ціле. Водночас, очевидно, дорівнює нулю і відносна швидкість АО і його відносне прискорення. Тому з рівняння (5.2) можна знайти реакцію амортизатора при абсолютно жорсткому з'єднанні АО з основою:

$$P_{\text{аб.ж}} = -m\ddot{\xi}_0.$$

Силу інерції, що дорівнює добутку маси АО на прискорення основи, вважаємо збурювальною силою.

Неважко побачити, що головним призначенням уведення пружно-демпфірувального елемента (амортизатора) між основою і АО є зменшення силової дії ПДЕ на АО порівняно з цією збурювальною силою. Ступінь цього зменшення будемо характеризувати *коефіцієнтом віброзахисту*, під яким розумітимемо відношення максимального значення сили реакції амортизатора до максимального значення збурюючої сили:

$$k_B = \frac{|P(x, \dot{x})|_{\max}}{|P_{\text{аб.ж}}|_{\max}} = \frac{|m\ddot{\xi}(t)|_{\max}}{|m\ddot{\xi}_0(t)|_{\max}} = \frac{|\ddot{\xi}(t)|_{\max}}{|\ddot{\xi}_0(t)|_{\max}}. \quad (5.3)$$

Очевидно, що для абсолютно жорсткого з'єднання коефіцієнт віброзахисту дорівнюватиме одиниці. Якщо $k_B > 1$, то система амортизації збільшує силову дію на АО, і, отже, вона не тільки не виконує свого призначення, а, навпаки, робить АО менш захищеним, тобто шкодить. Система віброзахисту виконує своє призначення лише тоді, коли її коефіцієнт віброзахисту менший за одиницю.

5.2. Теорія лінійної амортизації

Лінійним будемо називати амортизатор, сила реакції якого лінійно (пропорційно) залежить від відносного переміщення і його швидкості:

$$P(x, \dot{x}) = cx + f\dot{x}, \quad (5.4)$$

де c – жорсткість пружини і f – коефіцієнт демпфірування демпфера з в'язким тертям є сталими величинами.

Визначимо коефіцієнт віброзахисту лінійного амортизатора за гармонічної вібрації основи. Розглядаючи систему амортизації як лінійну стаціонарну, на вхід якої подається гармонічний сигнал $\xi_0(t)$, робимо висновок, що усталений відгук $\xi(t)$ має являти собою також гармонічно змінювану у часі з тим самим періодом величину. Але для гармонічно змінюваних величин відношення прискорень дорівнює відношенню самих величин, тому з виразу (5.4) матимемо:

$$k_B = \frac{\ddot{\xi}_m}{\ddot{\xi}_{0m}} = \frac{\xi_m}{\xi_{0m}}. \quad (5.5)$$

де $\ddot{\xi}_m$ і $\ddot{\xi}_{0m}$ – амплітуди віброприскорень АО і основи відповідно, а ξ_m і ξ_{0m} – відповідні амплітуди **їх** абсолютних переміщень.

Отже, щоб знайти коефіцієнт віброзахисту, достатньо визначити відношення амплітуд коливань абсолютних переміщень АО (вхід) і основи (вихід). Але відношення амплітуд виходу і входу дорівнює модулю частотної передатної функції між цими входом й виходом:

$$\frac{\xi_m}{\xi_{om}} = \left| W_{\xi_o, \xi}(p) \right|_{p=j\omega} = \left| W_{\xi_o, \xi}(j\omega) \right|,$$

де ω – частота вібрації основи.

Запишемо рівняння (5.1) через абсолютні переміщення:

$$m\ddot{\xi} + f\dot{\xi} + c\xi = f\dot{\xi}_o + c\xi_o.$$

Звідси визначимо частотну передатну функцію з абсолютних переміщень:

$$W_{\xi_o, \xi}(j\omega) = \left. \frac{pf + c}{mp^2 + fp + c} \right|_{p=j\omega} = \frac{c + j\omega f}{c - m\omega^2 + j\omega f},$$

а отже

$$k_B = \left| W_{\xi_o, \xi}(j\omega) \right| = \sqrt{\frac{c^2 + \omega^2 f^2}{(c - m\omega^2)^2 + \omega^2 f^2}}. \quad (5.6)$$

Введемо у розгляд такі поняття: ω_0 – частота власних незгасаючих коливань системи амортизації; ν – відносна частота вібрації основи; ζ – відносний коефіцієнт загасання системи амортизації, які визначаються співвідношеннями:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}; \quad \nu = \frac{\omega}{\omega_0}; \quad \zeta = \frac{f}{2\sqrt{cm}}.$$

Тепер коефіцієнт віброзахисту можна виразити через безрозмірні величини:

$$k_B = \sqrt{\frac{1 + 4\zeta^2 \nu^2}{(1 - \nu^2)^2 + 4\zeta^2 \nu^2}}. \quad (5.7)$$

Проаналізуємо отриманий вираз.

Передусім зазначимо, що за будь-якого значення ζ коефіцієнт віброзахисту дорівнює одиниці, якщо частота вібрації основи дорівнює нулю і якщо відносна частота вібрації $\nu = \sqrt{2}$.

Частотні характеристики коефіцієнта віброзахисту за трьох значень відносного коефіцієнта загасання $\zeta = 0; 0,1; 0,5$ зображено на рис. 5.2.

З аналізу цих характеристик випливає, що коефіцієнт віброзахисту менший за одиницю (система амортизації ослаблює силову дію вібрації на АО) лише у діапазоні частот, більших за $\omega_0\sqrt{2}$ ($\nu > \sqrt{2}$). Чим більше демпфірування, тим менше максимальне (і більше одиниці) значення коефіцієнта віброзахисту у резонансній смузі частот ($\nu \approx 1$), але тим більший цей коефіцієнт у зарезонансній смузі ($\nu \gg 1$).

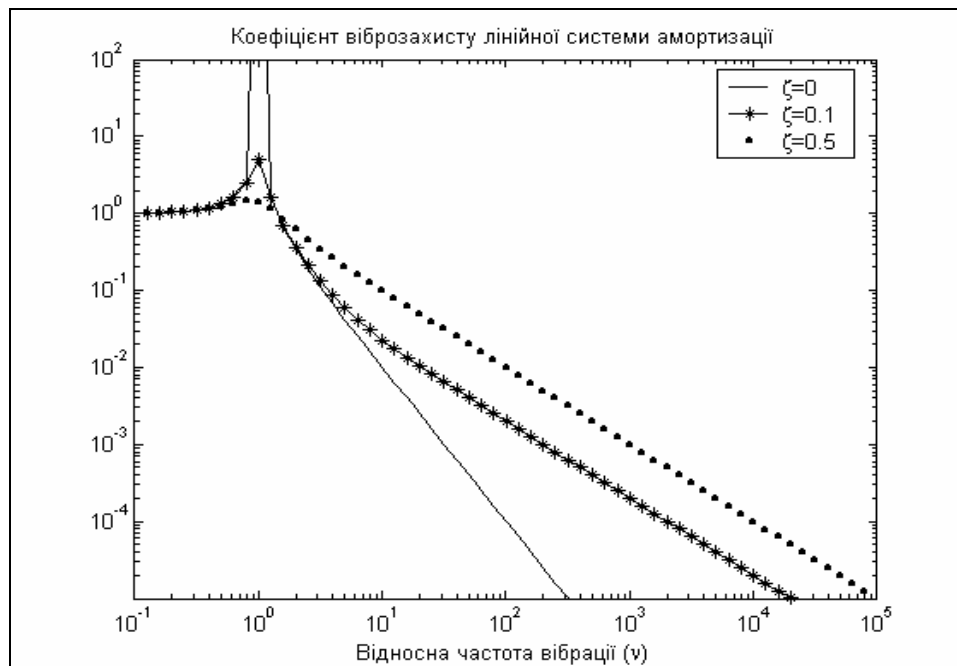


Рис. 5.2. Коефіцієнт віброзахисту лінійної системи

З цього випливають такі основні рекомендації лінійної теорії віброзахисту.

1. Для забезпечення захисту АО від вібрації ($k_b < 1$) необхідно жорсткість амортизатора зменшити до такого значення, щоб частота власних коливань ω_0 системи амортизації була хоча б у $\sqrt{2}$ разів меншою за найменшу з можливих частот вібрації основи.

2. Чим менша жорсткість амортизатора, тим ефективнішим є віброзахист.

3. Для поліпшення віброзахисту в зарезонансній зоні частот вібрації потрібно зменшувати демпфірування в системі. Найкращі віброзахисні властивості має недемпфірована ($\zeta = 0$) система амортизації. Проте необхідно пам'ятати, що при цьому резонансний пік зростає до нескінченності.

5.3. Дія удару на лінійну систему амортизації

Другий клас змушувальних сил, розглядуваних у теорії віброзахисних систем, утворюють ударні дії. Класичним прикладом ударної дії може бути силовий імпульс – дія нескінченно великої сили протягом нескінченно малого проміжку часу, яка викликає змінення кількості руху на скінченну величину (тобто змінення швидкостей усіх матеріальних точок системи на скінченну величину). Такий «миттєвий» удар є, зрозуміло, ідеалізацією, яка далеко не завжди є придатною для опису реальних дій. У теорії віброзахисту поняття «удар» має ширший зміст: ударом зазвичай називають короточасну дію порівняно великих зовнішніх сил, які зумовлюють скінченного змінення швидкостей матеріальних точок системи.

Ударна дія характеризується законом змінювання у часі змушувальної сили:

$$F(t) = -m\ddot{\xi}_0(t).$$

Деякі можливі форми цієї залежності зображено на рис. 5.3. В усіх випадках виконуються умови:

$$\begin{cases} F(t) = 0, & \text{якщо } t < 0; \\ F(t) \neq 0, & \text{якщо } 0 < t \leq \tau; \\ F(t) = 0, & \text{якщо } t > \tau. \end{cases}$$

Інтервал τ часу, протягом якого ударна дія прикладається до системи, називають *тривалістю удару*. Залежність $F(t)$ часто називають *формою удару*.

При ударній дії зазвичай досліджують рух системи за нульових початкових умов, тобто коли

$$x(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = 0, \quad (5.8)$$

що відповідає початковій нерухомості АО у положенні рівноваги.

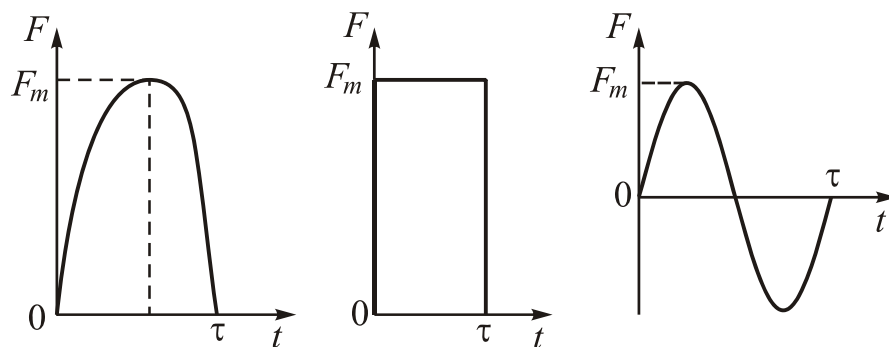


Рис. 5.3. Форми ударних імпульсів

Якість віброзахисної системи при заданій ударній дії можна оцінити коефіцієнтом ударозахисту k_y , який дорівнює відношенню максимальної сили реакції амортизатора $P(x, \dot{x})$ до максимальної збурювальної сили:

$$k_y = \frac{|P(x, \dot{x})|_{\max}}{|P_{\text{аб.ж}}|_{\max}} = \frac{|P(x, \dot{x})|_{\max}}{m|\ddot{\xi}_0(t)|_{\max}}.$$

Рівняння, за яким можна вивчити реакцію системи на ударну дію, виразимо через відносну координату x (див. рівняння (5.2)):

$$m\ddot{x} + f\dot{x} + cx = F(t).$$

Визначимо коефіцієнт ударозахисту для випадку удару «прямокутної» форми (див. рис. 5.3), який описується виразом

$$\begin{cases} F(t) = 0, & \text{якщо } t < 0; \\ F(t) = F_m, & \text{якщо } 0 < t \leq \tau; \\ F(t) = 0, & \text{якщо } t > \tau/ \end{cases}$$

Розглянемо два етапи руху. Перший етап ($0 < t \leq \tau$) характеризується дією на систему постійної сили F_m за нульових початкових умов (5.8). На другому етапі ($t > \tau$) сили на систему не діють, але початкові умови визначаються кінцевими значеннями переміщення й відносної швидкості першого етапу.

На першому етапі рух відносний рух визначається, згідно з рівняннями (5.1) і початковими умовами (5.8), співвідношенням:

$$x(t) = \frac{F_m}{c} \left[1 - e^{-ht} \left(\cos \omega_{01} t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_{01} t \right) \right];$$

$$\dot{x}(t) = \frac{F_m}{c} \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-ht} \sin \omega_{01} t,$$

де

$$h = \frac{f}{2m}; \quad \omega_{01} = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}; \quad \zeta = \frac{h}{\omega_0}.$$

Сила реакції на першому етапі визначиться виразом:

$$P(x, \dot{x}) = cx + f\dot{x} = F_m \left[1 - e^{-ht} \left(\cos \omega_{01} t - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_{01} t \right) \right]. \quad (5.9)$$

На другому етапі початкові умови є кінцевими для першого етапу, тобто такими:

$$x(\tau) = \frac{F_m}{c} \left[1 - e^{-h\tau} \left(\cos \omega_{01} \tau + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_{01} \tau \right) \right];$$

$$\dot{x}(\tau) = \frac{F_m}{c} \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-h\tau} \sin \omega_{01} \tau,$$

а зовнішні дії відсутні. Тому переміщення і відносна швидкість на цьому етапі матимуть такі залежності від часу:

$$x(t) = e^{-h(t-\tau)} [A_S \sin \omega_{01}(t-\tau) + A_C \cos \omega_{01}(t-\tau)];$$

$$\dot{x}(t) = e^{-h(t-\tau)} [(-hA_S - \omega_{01}A_C) \sin \omega_{01}(t-\tau) + (-hA_C + \omega_{01}A_S) \cos \omega_{01}(t-\tau)],$$

де

$$A_C = \frac{F_m}{c} \left[1 - e^{-h\tau} \left(\cos \omega_{01} \tau + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_{01} \tau \right) \right];$$

$$A_S = \frac{F_m}{c} \left[\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} - e^{-h\tau} \left(\sin \omega_{01} \tau - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos \omega_{01} \tau \right) \right].$$

Сила реакції, відповідна до цього розв'язку, набуде вигляду:

$$P(x, \dot{x}) = F_m \left\{ e^{-h(t-\tau)} \left[\cos \omega_{01}(t-\tau) - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_{01}(t-\tau) \right] - \right.$$

$$\left. - e^{-ht} \left(\cos \omega_{01} t - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_{01} t \right) \right\}. \quad (5.10)$$

Перші максимуми сили реакції на кожному з двох етапів будуть найнебезпечнішими, бо відповідно до (5.9) і (5.10) з часом такі максимуми будуть зменшуватися.

На першому етапі руху максимум може бути досягнутий лише за досить великої тривалості удару (рис. 5.4):

$$\tau > t_1 = \frac{1}{\omega_{01}} \left(\pi - \operatorname{arctg} \frac{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}{1-2\zeta^2} \right),$$

де t_1 – момент часу, в який сила реакції сягає першого максимуму:

$$P_{\max} = F_m \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left(\pi - \operatorname{arctg} \frac{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}{1-2\zeta^2} \right) \right] \right\}.$$

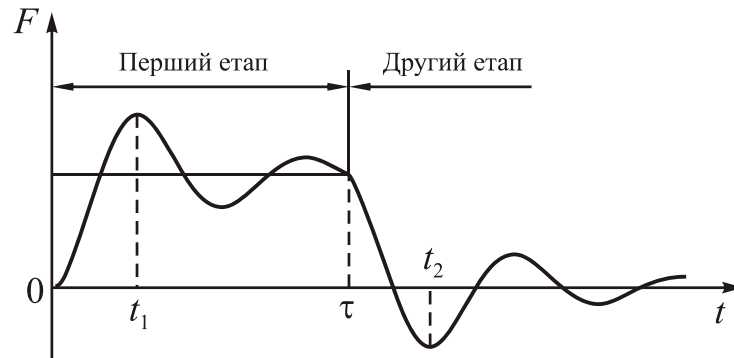


Рис. 5.4. Залежність сили реакції від часу при $\tau > t_1$

Для малих значень відносного коефіцієнта згасання ($\zeta \ll 1$) можна користуватися наближеним виразом $P_{\max} \approx F_m (2 - \zeta\pi)$.

Якщо амортизатор не має демпфірувальних властивостей ($\zeta = 0$), максимальна сила реакції у 2 рази перевищує максимальну силу удару, тобто $k_y = 2$ при $\tau > \frac{\pi}{\omega_{01}}$.

Якщо тривалість удару менша за півперіод власних коливань ($\tau < \pi / \omega_{01}$), то у проміжку часу дії удару сила реакції максимуму не досягає. Максимального значення сила реакції досягає після припинення дії удару (рис. 5.5).

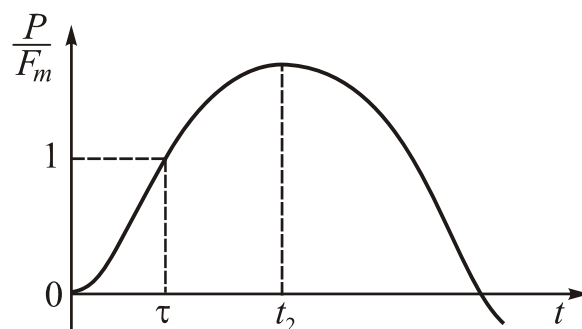


Рис. 5.5. Залежність сили реакції від часу при $\tau < t_1$

Для простоти обмежимося розглядом недемпфірованого амортизатора. За цієї умови сила реакції на другому етапі визначатиметься виразом (див. (5.10)):

$$P(x, \dot{x}) = F_m [\cos \omega_{01}(t - \tau) - \cos \omega_{01}t] = 2F_m \sin\left(\frac{\omega_0}{2} \tau\right) \sin \omega_0 \left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

Ця реакція досягає максимуму за першого перетворення величини $\omega_0(t - \frac{\tau}{2})$ в одиницю, тобто при $t_2 = \frac{\pi}{2\omega_0} + \frac{\tau}{2}$. При цьому максимум сили реакції дорівнюватиме

$$P_{\max} = 2F_m \sin\left(\frac{\omega_0}{2} \tau\right).$$

Тому коефіцієнт ударозахисту у випадку, коли тривалість удару менша за півперіод власних коливань системи амортизації визначається формулою:

$$k_y = 2 \sin\left(\frac{\omega_0}{2} \tau\right); \quad \left(\tau < \frac{\pi}{\omega_0}\right). \quad (5.11)$$

Щоб амортизатор зменшував силу удару, необхідно, щоб $k_{уд}$ був меншим за одиницю, а це забезпечується за такої умови:

$$\omega_0 < \frac{\pi}{3\tau},$$

Яку можна виконати, якщо жорсткість пружини амортизатора зробити меншою від певної величини, тобто забезпечити виконання нерівності

$$c < m \frac{\pi^2}{9\tau^2}. \quad (5.12)$$

Аналіз поведінки лінійної системи амортизації у разі вібраційної і ударної дій дозволяє зробити наступні висновки.

1. Зменшення жорсткості амортизатора (а отже, і власної частоти системи амортизації) зумовлює підвищення віброзахисних і ударозахисних властивостей системи амортизації. Щоб лінійна система захищала від вібрації, має виконуватися умова

$$\omega_0 < \frac{\omega_{\min}}{\sqrt{2}}; \quad \Rightarrow \quad c < m \frac{\omega_{\min}^2}{2}, \quad (5.13)$$

де ω_{\min} – найменша з частот гармонічних компонент, з яких складається спектр вібрації основи.

Для захисту від удару достатньо, щоб виконувалися умова (5.12).

2. Якщо виконано умову (5.13), збільшення демпфірування може лише погіршити віброзахисні властивості системи. З цього погляду вводити додаткове демпфірування небажано. Проте з погляду ударозахисту введення демпфірування є доцільним, бо цим забезпечується зменшення максимуму сили реакції через загасаючий характер коливань.

Здавалося б, лінійна теорія пропонує універсальний засіб ефективного захисту від вібрації і ударів – необхідно створювати якомога м'якші лінійні системи амортизації зі слабким демпфіруванням. Однак дослід проектування й експлуатації реальних віброзахисних систем довів, що у більшості випадків це не дає бажаних результатів.

Обмеженість застосування лінійних амортизаторів зумовлено передусім вимушеною обмеженістю розмірів віброзахисних пристроїв. Будь-який реальний

амортизатор може мати лінійну пружну характеристику лише у деякій обмеженій зоні деформацій пружини, яку зазвичай називають зоною лінійності. У будь-якій реальній віброзахисній системі мають бути передбачені обмежувачі ходу, які встановлюють гранично допустимі розміри зони лінійності. Однак, утриматися у цих заданих межах АО не може навіть при деяких допустимих зовнішніх діях.

Приклад. Нехай необхідно захистити об'єкт від удару, спричиненого рухом основи з прискоренням $\ddot{\xi}_0 = 150 \text{ м/с}^2$ протягом часу $\tau = 0,05 \text{ с}$. Максимальне прискорення об'єкта, яке дорівнює відношенню P_{\max} / m , згідно з вимогами замовника не повинно перевищувати 50 м/с^2 . Спробуємо використати для захисту лінійну систему амортизації. Оскільки у розглядуваному випадку коефіцієнт ударозахисту має не перевищувати значення

$$k_y = \frac{P_{\max}}{m\ddot{\xi}_0} = \frac{\ddot{\xi}}{\ddot{\xi}_0} = \frac{50 \text{ м/с}^2}{150 \text{ м/с}^2} = \frac{1}{3},$$

то власна частота системи амортизації має не перевищувати величини (див. (5.11)):

$$\omega_0 = \frac{2}{\tau} \arcsin\left(\frac{k_y}{2}\right) = \frac{2}{0,05} \arcsin\left(\frac{1}{6}\right) = 6,6 \text{ с}^{-1}.$$

Знайдемо максимальну деформацію такого амортизатора за заданого удару:

$$x_{\max} = \frac{P_{\max}}{c} = \frac{m\ddot{\xi}}{c} = \frac{\ddot{\xi}}{\omega_0^2} = \frac{50 \text{ м/с}^2}{43,2 \text{ с}^{-2}} \approx 1,15 \text{ м}.$$

Така величина вільного ходу, зрозуміло, є практично неприйнятною. Поставлена задача виявилася нездійсненною, принаймні, за рахунок використання лінійних амортизаторів.

5.4. Внутрішнє тертя у матеріалі при деформаціях пружних елементів

В умовах циклічних навантажень пружних тіл, які становлять зазвичай основу систем амортизації, навіть за малих напружень у матеріалі спостерігається деяке порушення закону Гука, яке відображується у появі петлі гістерезису у залежності сили опору від деформації. Петлю гістерезису в осях координат сила опору P – відносно переміщення (деформація) x показано на рис. 5.6.

Площа петлі гістерезису визначає енергію, яка розсіюється (перетворюється у тепло) протягом одного циклу деформації (коливань).

Численні експериментальні дослідження довели, що *площа петлі гістерезису* більшості конструкційних матеріалів *не залежить від швидкості деформування*, тобто *від частоти коливального процесу*. Це основна властивість *внутрішнього тертя*, тобто тертя, зумовленого необоротними втратами (розсіюванням) енергії у матеріалі пружного елемента, які виникають за його деформації, і *конструкційного тертя*, зумовленого втратами енергії у нерухомих зчленуваннях окремих елементів конструкції. Саме цією властивістю ці види тертя принципово відрізняються від інших, зокрема лінійного, в'язкого або квадратичного тертя то-

що. Як свідчать досліди, ця властивість внутрішнього тертя з великою точністю зберігається майже в усьому частотному діапазоні реально діючих механічних збурень – від десятих часток герца до кількох кілогерців.

Для пружних систем, демпфірувальні властивості яких не залежать від частоти деформування, найзручніше характеризувати демпфірувальні властивості коефіцієнтом поглинання (або коефіцієнтом розсіювання) енергії. Його визначають як відношення площі петлі гістерезису до максимального (амплітудного) значення потенціальної енергії за циклічного деформування. На рис. 5.6. штрихуванням зображено площу петлі гістерезису і площу трикутника, яка відповідає максимуму потенціальної енергії.

Математично площу Φ петлі гістерезису можна визначити як контурний інтеграл уздовж кривої деформування за повний цикл:

$$\Phi = \oint P(x, \dot{x}) dx = \int_{-a}^a \vec{P}(x, \dot{x}) dx + \int_a^{-a} \bar{P}(x, \dot{x}) dx,$$

де $\vec{P}(x, \dot{x})$ – залежність сили опору від деформації та її швидкості в разі збільшення деформації (тобто в разі деформуванні від $-a$ до a); $\bar{P}(x, \dot{x})$ – залежність цієї сили в разі зменшення деформації (деформування від a до $-a$); a – амплітуда деформації.

Як випливає з цього визначення, петля гістерезису виникає завдяки тому, що сила реакції пружного елемента описується різними залежностями від деформації та її швидкості при навантажуванні (від $-a$ до a) і розвантажуванні (від a до $-a$) пружно-демпфірувального елемента.

Для частотно-незалежного тертя, яким є внутрішнє тертя, форма петлі гістерезису, тобто обох її гілок, не залежить від швидкості \dot{x} деформування, тобто є функцією лише величини деформації x , а також її амплітуди:

$$\Phi = \int_{-a}^a \vec{P}(x) dx + \int_a^{-a} \bar{P}(x) dx. \quad (5.14)$$

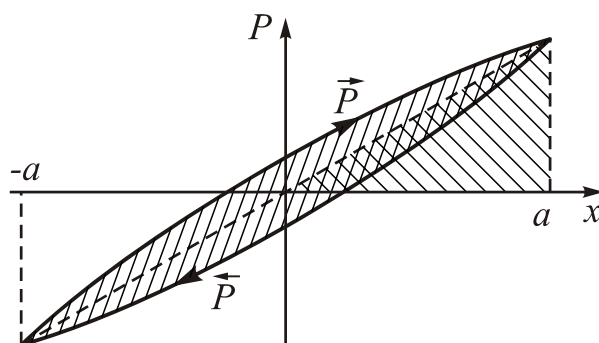


Рис. 5.6. Залежність сили опору від деформації за циклічного деформування

Звідси випливає, що площа петлі гістерезису не залежить від частоти циклічного деформування.

Максимальна потенціальна енергія

$$\Pi_{\max} = \int_0^a P(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^a [\vec{P}(x) + \bar{P}(x)] dx \quad (5.15)$$

також не залежить від частоти навантажування. Тому *коефіцієнт поглинання енергії*

$$\psi = \frac{\Phi}{\Pi_{\max}}$$

системи з внутрішнім тертям не залежить від частоти деформування.

Знайдемо коефіцієнт поглинання для лінійного пружно-демпфівального елемента

$$P(x, \dot{x}) = cx + f\dot{x}, \quad (5.16)$$

припускаючи, що система здійснює гармонічні коливання $x = a \cos \omega t$. Неважко переконатися у тому, що при цьому швидкість деформування ПДЕ можна виразити через його деформацію у такий спосіб:

$$\dot{x} = -a\omega \sin \omega t = \pm a\omega \sqrt{1 - \cos^2 \omega t} = \pm a\omega \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}, \quad (5.17)$$

причому знак «-» відповідає зменшенню деформації від a до $-a$, а знак «+» навпаки – збільшенню деформації від $-a$ до a .

Контурний інтеграл від однозначної функції, очевидно, дорівнює нулю. Тому контурне інтегрування першої складової у (5.16) не впливає на величину площі петлі гістерезису (5.14) і його можна випустити, обмежуючись утримуванням лише **демпфівальної** сили $f\dot{x}$:

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{-a}^a fa\omega \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx + \int_a^{-a} (-fa\omega) \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx = \\ &= fa^2\omega \left(\frac{x}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} + \arcsin \frac{x}{a} \right) \Big|_{-a}^a = \pi a^2 \omega f. \end{aligned}$$

Аналогічно, згідно з виразом (5.15), визначимо

$$\Pi_{\max} = \int_0^a cxdx = \frac{1}{2} ca^2. \quad (5.18)$$

Отже, коефіцієнт поглинання лінійного ПДЕ дорівнює

$$\psi = 2\pi \frac{\omega f}{c}. \quad (5.19)$$

Співвідношення (5.19) справедливе для гармонічного закону змінювання деформації у часі, який відображений на графіку рис. 5.7, а.

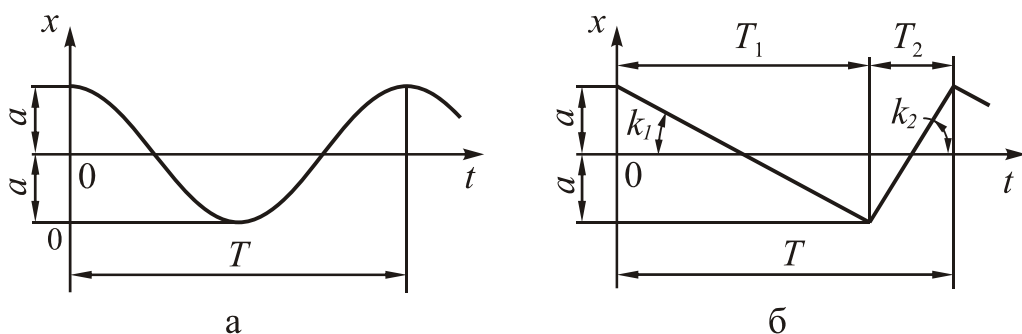


Рис. 5.7. Часові форми змінювання деформації

Розглянемо, як зміняться результати, якщо закон деформування має інший характер, наприклад пилкоподібний, зображений на рис. 5.7, б.

Поділяючи період деформування на дві частини тривалістю T_1 і T_2 (рис. 5.7, б), запишемо закон змінювання деформації у часі:

$$x_1 = a_1 - k_1 t; \quad x_2 = b_2 + k_2 t,$$

де a_1 і b_2 – деякі сталі. Диференціюючи за часом, знайдемо закони змінювання швидкості деформації:

$$\dot{x}_1 = -k_1; \quad \dot{x}_2 = k_2,$$

що означає, як і слід було очікувати, сталість швидкостей деформування на окремих проміжках часу. Залежність реакції лінійного ПДЕ від деформації тепер можна подати так:

$$P_1 = cx - fk_1; \quad P_2 = cx + fk_2.$$

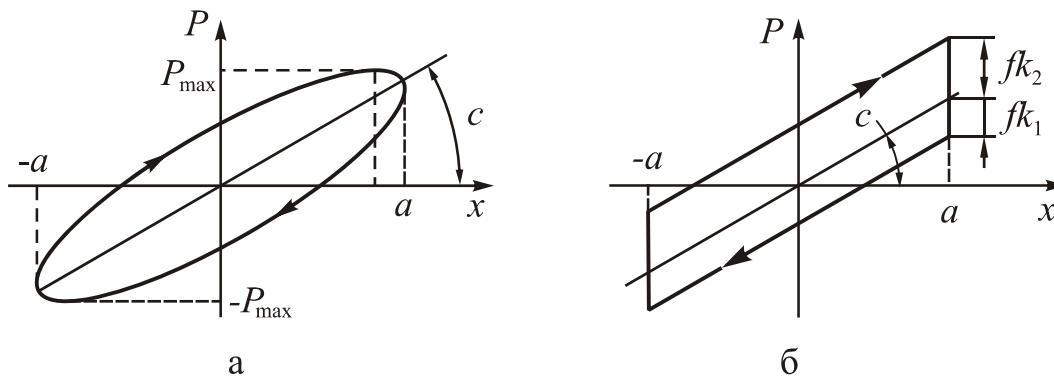


Рис. 5.8. Криві навантажування для лінійного ПДЕ

Графік цієї залежності, показаний на рис. 5.8, б, являє собою паралелограм на відміну від випадку гармонічного деформування, коли залежність $P(x)$ відповідно до (5.16), (5.17) графічно зображується у вигляді еліпса, який накладено на пряму $P = cx$ (рис. 5.8, а). Площа паралелограма, очевидно, дорівнює

$$\Phi = f(k_1 + k_2)2a. \quad (5.20)$$

Позначаючи $m = T_1 / T_2$ і враховуючи, що

$$T_1 + T_2 = (1 + m)T_2 = T = 2\pi / \omega \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega(1 + m)},$$

а також (див. рис 5.7, б)

$$k_1 = \frac{2a}{T_1} = \frac{2a}{T_2 m}; \quad k_2 = \frac{2a}{T_2},$$

вираз (5.20) можна перетворити на такий:

$$\Phi = \frac{2(1 + m)^2}{\pi m} a^2 \omega f.$$

Оскільки потенціальна енергія (5.34) не залежить від закону деформування, то коефіцієнт поглинання енергії дорівнюватиме:

$$\psi = \frac{4(1+m)^2 \omega f}{\pi m c}$$

Аналізуючи набуті залежності, можна зробити наступні висновки.

1. Залежність $P(x)$ для лінійного ПДЕ суттєво залежить від закону деформування $x(t)$. У разі гармонічного закону деформування графік цієї залежності являє собою еліпс, який накладено на пряму $P = cx$, а в разі пилкоподібного закону – паралелограм.

2. Максимум сили реакції лінійного ПДЕ у загальному випадку за циклічного деформування не збігається у часі з максимумом деформації (рис. 5.8, а).

3. Площа петлі гістерезису лінійного ПДЕ пропорційна квадрату амплітуди деформації для будь-якого закону деформування.

4. Площа петлі гістерезису прямо пропорційна частоті деформування незалежно від закону деформування. Інакше кажучи, «товщина» петель гістерезису, що зображені на рис. 5.8, суттєво залежить від частоти деформування (за інших рівних умов). Так, збільшення частоти у два рази призводить до збільшення «товщини» еліпса (або паралелограма) удвічі, а зменшення – до подвійного зменшення товщини цих фігур.

5. Енергія, яка поглинається матеріалом лінійного ПДЕ за циклічного його деформування залежить, за інших рівних умов, від закону деформування.

6. Коефіцієнт розсіювання енергії елемента з в'язким (лінійним) тертям є пропорційним частоті деформування.

7. Коефіцієнт поглинання енергії лінійного ПДЕ не залежить від амплітуди деформації.

8. Коефіцієнт поглинання енергії лінійного ПДЕ обернено пропорційний жорсткості c і залежить від закону деформування (при цьому змінюється лише коефіцієнт при $\omega f / c$).

Порівняймо ці висновки з основними властивостями ПДЕ з внутрішнім або конструкційним тертям. Відзначимо такі особливості ПДЕ з внутрішнім тертям.

1. Залежність $P(x)$ для ПДЕ з внутрішнім тертям *не залежить* від закону деформування $x(t)$. Криві деформування $\bar{P}(x)$ і $\bar{P}(x)$ повністю і однозначно визначаються лише амплітудою a деформації.

2. Максимум сили $P(x)$ ПДЕ з внутрішнім тертям за циклічного деформування за будь-яким законом завжди досягається одночасно з максимумом деформації (рис. 5.6). Це означає, що кути при вершинах петлі гістерезису завжди гострі, а криві деформування $\bar{P}(x)$ і $\bar{P}(x)$ завжди мають додатні тангенси кутів нахилу до осі деформації.

3. Площа петлі гістерезису ПДЕ з внутрішнім тертям не залежить від частоти циклічного деформування і закону деформування у часі.

4. Коефіцієнт поглинання енергії пружного елемента з внутрішнім тертям не залежить від частоти і закону деформування, але може залежати від амплітуди деформації $\psi = \psi(a)$. Саме ця обставина робить зручним використання коефіцієнта поглинання для опису демпфівувальних властивостей ПДЕ з внутрішнім тертям.

Якщо припустити, що в коливальній системі з внутрішнім тертям (і з одним ступенем вільності) усталюються періодичні коливання, близькі до гармонічних $x = a \cos \omega t$, то теоретичне досліджування такої системи можна виконувати за рівнянням, подібному за формою до рівняння руху лінійної стаціонарної системи

$$m\ddot{x} + f\dot{x} + cx = mA \cos(\omega t + \varphi),$$

якщо замінити коефіцієнт демпфірування f на коефіцієнт ψ поглинання енергії згідно з формулою (5.19)

$$f = \frac{c}{\omega} \frac{\Psi}{2\pi},$$

тобто за рівнянням

$$\ddot{x} + \frac{c}{m\omega} \frac{\Psi}{2\pi} \dot{x} + \frac{c}{m} x = A \cos(\omega t + \varphi).$$

У загальному випадку як коефіцієнт поглинання ψ , так і еквівалентна жорсткість c є функціями амплітуди a деформації. Вводячи поняття частоти власних незгасаючих коливань нелінійної системи

$$\lambda(a) = \sqrt{\frac{c(a)}{m}},$$

запишемо це рівняння у вигляді

$$\ddot{x} + \frac{\lambda^2(a)}{\omega} \frac{\psi(a)}{2\pi} \dot{x} + \lambda^2(a)x = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (5.21)$$

Більш глибоко і докладно з механізмом і рівняннями деформування пружно-демпфірувальних елементів можна ознайомитися за джерелами [5, 6, 7, 8].

5.5. Віброзахисні системи з внутрішнім тертям

Для того щоб виявити основні особливості поведінки системи амортизації, побудованої на основі пружно-демпфірувального елемента з внутрішнім тертям, будемо поки що припускати, що ані частота власних коливань, ані коефіцієнт поглинання від амплітуди не залежать:

$$\psi(a) = \psi = \text{const}; \quad \lambda(a) = \omega_0 = \text{const}.$$

Вихідне рівняння коливальної системи (5.21) подамо у безрозмірній формі

$$x'' + \frac{1}{\nu} \frac{\Psi}{2\pi} x' + x = \frac{A}{\omega_0^2} \cos(\nu\tau + \varphi), \quad (5.22)$$

яке відрізняється від відповідного рівняння лінійної системи

$$x'' + 2\zeta x' + x = \frac{A}{\omega_0^2} \cos(\nu\tau + \varphi),$$

лише тим, що замість коефіцієнта згасання ζ фігурує коефіцієнт поглинання енергії згідно з формулою

$$2\zeta\nu = \frac{\Psi}{2\pi}, \quad (5.23)$$

де $\nu = \omega / \omega_0$ – відносна частота зовнішнього збурення.

Тому, на підставі досліджень, аналогічних проведеним у п. 5.2. дістанемо вираз для коефіцієнта віброзахисту, який збігається з раніше одержаною формулою (5.7), якщо в ній виконати заміну (5.23):

$$k_{\text{в}} = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\Psi}{2\pi}\right)^2}{(1 - \nu^2)^2 + \left(\frac{\Psi}{2\pi}\right)^2}}. \quad (5.24)$$

Головна особливість коефіцієнта віброзахисту для амортизатора з внутрішнім тертям, як це впливає з виразу (5.24), полягає у тому, що його чисельник не залежить від частоти збурення. Тому у зоні великих частот збурення ($\nu \gg 1$) коефіцієнт віброзахисту амортизатора з внутрішнім тертям набагато менший, ніж у системі з в'язким тертям.

Припускаючи $\nu \gg 1$, $2\zeta\nu \gg 1$ і нехтуючи малими членами, запишемо наближені вирази для коефіцієнта віброзахисту лінійної демпфіруваної системи ($k_{\text{в.л}}$), недемпфіруваної ($k_{\text{в.нд}}$) і системи з внутрішнім тертям ($k_{\text{в.вт}}$):

$$k_{\text{в.л}} \approx \frac{2\zeta}{\nu}; \quad k_{\text{в.нд}} \approx \frac{1}{\nu^2}; \quad k_{\text{в.вт}} \approx \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\Psi}{2\pi}\right)^2}}{\nu^2}.$$

Із зіставлення цих виразів випливає, що найкращі віброзахисні властивості має недемпфірувана система амортизації. Коефіцієнт віброзахисту її зменшується пропорційно квадрату збільшення частоти збурення. При цьому коефіцієнт пропорційності дорівнює одиниці. Амортизатор з внутрішнім тертям лише ненабагато гірший за недемпфіруваний. Залежність коефіцієнту віброзахисту від частоти збурення в ньому та сама, але коефіцієнт пропорційності $\sqrt{1 + \left(\frac{\Psi}{2\pi}\right)^2}$ – більший за

одиницю. Неважко впевнитися, що максимально можливе значення коефіцієнта поглинання енергії дорівнює 8 (межово петля гістерезису перетворюється у прямокутник зі сторонами $2a$ і $2ca$), отже коефіцієнт пропорційності не перевищує значення 1,62.

Відношення коефіцієнтів віброзахисту демпфіруваної лінійної і недемпфіруваної систем $\frac{k_{\text{в.л}}}{k_{\text{в.нд}}} \approx 2\zeta\nu$ неперервно зростає зі зростанням частоти пропорційно їй, тобто якість віброзахисту демпфіруваної системи зі зростанням частоти збурення гіршає порівняно з недемпфіруваної системою.

У разі резонансу ($\nu = 1$) коефіцієнти віброзахисту набувають вигляду:

$$(k_{\text{в.вт}})_{\text{рез}} = \frac{2\pi}{\Psi} \sqrt{1 + \left(\frac{\Psi}{2\pi}\right)^2}; \quad (k_{\text{в.л}})_{\text{рез}} = \frac{1 + 4\zeta^2}{2\zeta}.$$

Із цих виразів випливає, що боротися зі зростанням силових дій на АО при резонансі в обох випадках можна за допомогою підвищення демпфірування у системі. Проте, якщо у випадку лінійного тертя це призведе до різкого погіршення

віброзахисних властивостей у зарезонансній зоні, то у випадку внутрішнього тертя цього не спостерігається.

Приклад. Нехай коефіцієнт згасання ζ лінійної системи амортизації і коефіцієнт поглинання ψ системи віброзахисту з внутрішнім тертям підібрані так, що при резонансі коефіцієнти віброзахисту цих двох систем дорівнюють $\sqrt{2}$, тобто $\zeta = 0,5$; $\psi = 2\pi$. Тоді, наприклад, якщо частота вібрації у 10 разів більша за частоту власних коливань системи амортизації, коефіцієнт віброзахисту лінійної системи становить 0,1, а амортизатора з внутрішнім тертям – 0,064, тобто у 1,56 рази меншій. Якщо ж частота збурення у 100 разів більша за частоту власних коливань, то $k_b = 0,01$ для лінійної системи і $k_b = 6,36 \cdot 10^{-4}$ для системи з внутрішнім тертям, тобто якість віброзахисту майже у 16 разів вища.

Частотні характеристики коефіцієнта віброзахисту системи амортизації з внутрішнім тертям за двох граничних значень коефіцієнта поглинання енергії $\psi = 0$ і $\psi = 8$ показано на рис. 5.9.

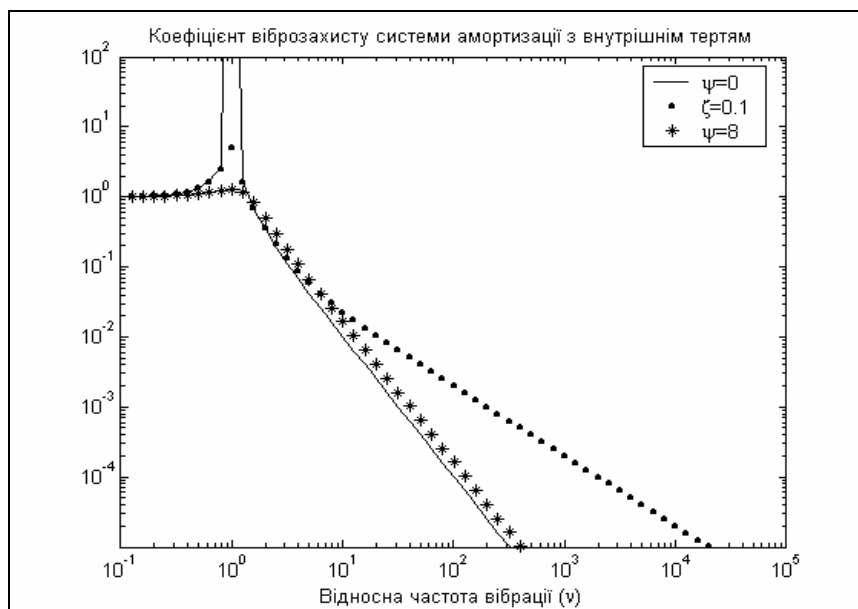


Рис. 5.9. Коефіцієнт віброзахисту системи з внутрішнім тертям

Усі можливі характеристики при інших значеннях коефіцієнта поглинання містяться між наведеними. Задля порівняння на цьому ж рисунку наведена частотна характеристика коефіцієнта віброзахисту для лінійної системи амортизації з значенням відносного коефіцієнта згасання $\zeta = 0,1$. Неважко впевнитися, що система амортизації з внутрішнім тертям (навіть вельми великим) має меншій коефіцієнт віброзахисту, аніж система з лінійним тертям (навіть досить малим) практично в усьому діапазоні частот.

Отже, незалежність амплітуди демпфівальної сили від частоти деформування, яка характерна для внутрішнього розсіювання енергії у матеріалі пружно-демпфівувальних елементів, зумовлює нові особливості поведінки систем амортизації з внутрішнім тертям, які є недосяжними для амортизаторів з в'язким тертям. Це дає змогу одночасно вирішити дві взаємовиключні (у разі в'язкого тертя) задачі – зменшення коефіцієнта віброзахисту і в резонансній, і у зарезонансній

смугах частот збурення. Ця обставина робить дуже перспективним використання як елементів пасивних віброзахисних систем ПДЕ з внутрішнім тертям.

5.6. Системи амортизації із сухим тертям

Сухим зазвичай називають тертя, величина якого не залежить від величини відносної швидкості тертьових поверхонь. Тому залежність сили демпфірування від відносної швидкості можна подати у вигляді графіка рис. 5.10. Нагадаємо, що при цьому обов'язково зберігається залежність сили тертя від знака швидкості, яка впливає з головної властивості будь-якої сили тертя – її направленості проти вектора швидкості відносного руху. Графічну залежність, наведену на рис. 5.10, аналітично прийнято записувати у такий формі:

$$P = -P_m \operatorname{sign}(\dot{x}),$$

де P_m – величина сили сухого тертя, а функція $\operatorname{sign}(x)$ («сигнум икс») є нелінійною розривною функцією, яка визначається у такий спосіб:

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} +1, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x = 0; \\ -1, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

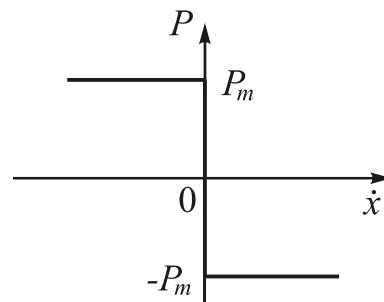


Рис. 5.10. Графік залежності сили сухого тертя від швидкості

Рівняння руху системи віброзахисту із сухим тертям можна подати у вигляді

$$m\ddot{x} + P_m \operatorname{sign}(\dot{x}) + cx = -m\ddot{\xi}_0(t).$$

Нехай прискорення основи $\ddot{\xi}_0(t)$ змінюється у часі за законом:

$$\ddot{\xi}_0(t) = -a_0\omega_0^2 \sin(\omega t + \varphi),$$

де позначено $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$ – частота власних коливань системи амортизації. Вводячи безрозмірний час $\tau = \omega_0 t$, перетворимо це рівняння до безрозмірного виду:

$$x'' + h \operatorname{sign}(x') + x = a_0 \sin(\nu\tau + \varphi), \quad (5.25)$$

де $h = \frac{P_m}{c}$; $\nu = \frac{\omega}{\omega_0}$.

Побудуємо (рис. 5.11) петлю гістерезису для пружно-демпфірувальної сили $P(x) = h \operatorname{sign}(x') + x$, вважаючи, що величина x змінюється від $-a$ до a .

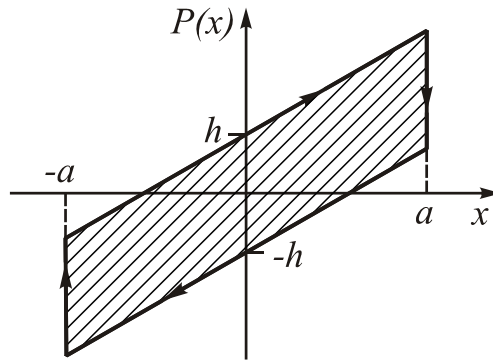


Рис. 5.11. Петля гістерезису для ПДЕ з сухим тертям

Неважко збагнути, що за будь-якого закону змінювання відносного переміщення у часі петля гістерезису є паралелограмом з основою довжиною $2h$ і висотою $2a$, а тому її площа дорівнює $\Phi = 4ha$. Ураховуючи, що в цьому випадку $\Pi_{\max} = a^2/2$, можна записати вираз для коефіцієнта поглинання енергії

$$\psi = \frac{\Phi}{\Pi} = 8 \frac{h}{a}.$$

Користуючись лінеаризованим поданням (рівняння (5.22)) нелінійного рівняння (5.25), отримаємо замість нього:

$$x'' + \frac{4}{\pi} \frac{h}{av} x' + x = a_0 \sin(\nu\tau + \varphi), \quad (5.26)$$

Усталені вимушені коливання шукатимемо у вигляді

$$x = a \sin(\nu\tau); \quad x' = av \cos(\nu\tau). \quad (5.27)$$

Підставлення (5.27) у рівняння (5.26) дозволяє визначити дві невідомі величини a і φ з рівнянь:

$$\begin{cases} (1 - \nu^2)a = a_0 \cos \varphi \\ \frac{4}{\pi} h \frac{1}{av} av = a_0 \sin \varphi \end{cases}$$

Звідси знаходимо

$$a = \frac{\sqrt{a_0^2 - \left(\frac{4}{\pi} h\right)^2}}{1 - \nu^2}; \quad \sin \varphi = \frac{4h}{\pi a_0}. \quad (5.28)$$

Перший вираз (5.28) подає амплітудно-частотну характеристику системи. З його розгляду випливає, що якщо

$$a_0 < \frac{4h}{\pi}, \quad (5.29)$$

дійсних значень амплітуди і фази не існує. Тобто у цьому разі не вдається знайти наближений розв'язок гармонічного вигляду, користуючись методом лінеаризації.

Неважко зрозуміти фізичний зміст цього результату. Якщо сила сухого тертя перевищує амплітуду збурювальної сили, відносний рух об'єкта не може початися. Амортизований об'єкт у такому випадку «зчіплюється» з основою силами сухого тертя і коливається у просторі сумісно з основою як одне ціле. Але умова «зчеплення»

$$a_0 < h$$

не збігається з умовою (5.29). Розв'язок гармонічного вигляду не виходить і за умови

$$h < a_0 < \frac{4h}{\pi}.$$

Аналіз коливань, що виникають за цієї умови, свідчить, що при цьому відбуваються рухи із зупинками, за яких протягом деяких проміжків часу, які періодично повторюються, система «зчіплюється» з основою.

За резонансу ($\nu = 1$) амплітуда вимушених коливань стає нескінченно великою: *сухе тертя не захищає систему від резонансу.*

Визначимо коефіцієнт віброзахисту системи із сухим тертям. Skorистаємося виразом (5.24) для коефіцієнта віброзахисту системи з внутрішнім тертям

$$k_B = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{4h}{\pi a}\right)^2}{(1 - \nu^2)^2 + \left(\frac{4h}{\pi a}\right)^2}}.$$

Підставимо сюди знайдений вираз (5.28) для амплітуди і перетворимо

$$k_B = \sqrt{\left(\frac{4h}{\pi a_0}\right)^2 + \frac{1}{(1 - \nu^2)^2} \left[1 - \left(\frac{4h}{\pi a_0}\right)^2\right]}.$$

Аналіз отриманого виразу дозволяє зробити такі висновки.

1. Сухе тертя не захищає АО за резонансу; як і у випадку повної відсутності демпфірування при збіганні частоти вібрації основи з частотою власних коливань спостерігатиметься необмежене збільшення амплітуди сили з часом.

2. За великих значень частоти вібрації основи у зарезонансній зоні ($\nu \gg 1$) наявність демпфера із сухим тертям призводить до того, що коефіцієнт віброзахисту перестає залежати від частоти збурення і прагне при збільшенні частоти до цілком певної визначеної величини $k_B = \frac{4h}{\pi a_0}$; при цьому чим більшим є сухе тертя,

тим більше граничне значення коефіцієнта віброзахисту.

Частотні характеристики коефіцієнта віброзахисту системи амортизації із сухим тертям за трьох значень величини $\frac{4h}{\pi a_0}$: 0,01; 0,1 та 1 показано на рис. 5.12.

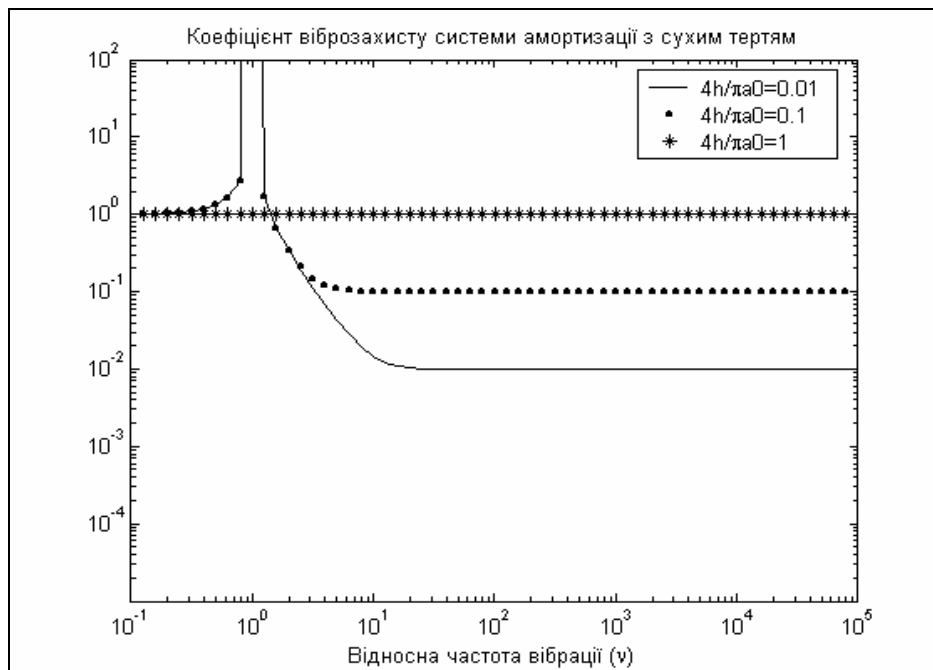


Рис. 5.12. Коефіцієнт віброзахисту системи з сухим тертям

Отже, використання сухого тертя для демпфірування коливань у системах віброзахисту, не поліпшуючи резонансних характеристик системи амортизації, призводить до різкого погіршення віброзахисних властивостей амортизатора. Тому застосування амортизаторів із сухим тертям слід віднести до найменш переважних.

Контрольні запитання

1. Яка мета застосування пасивної системи віброзахисту? в якому діапазоні частот віброзахист може бути ефективним?
2. Які характерні особливості має внутрішнє тертя у порівнянні зі звичайним (в'язким) тертям?
3. Що називають коефіцієнтом віброзахисту? що він характеризує?
4. Що називають лінійним амортизатором?
5. Які рекомендації теорії лінійного віброзахисту? чи можна їх виконати на практиці?
6. У чому полягає перевага амортизації за допомогою елементів з внутрішнім тертям над лінійним віброзахистом?
7. Які властивості мають амортизатори із сухим тертям?
8. Що називають коефіцієнтом поглинання енергії?

Література

[27]; [50]; [31]; [11]; [19]; [20].

Розділ 6. Метод фазової площини. Автоколивання

Поняття фазового простору було введено раніше (див. п. 3.3) стосовно варіацій (відхилень) фазових змінних (змінних стану) системи відносно їх значень за незбуреного руху. Його використовують задля дослідження перехідних процесів, зумовлених початковими відхиленнями. Рівняння у варіаціях набувають вигляду (3.33):

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n); \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (6.1)$$

Для дослідження нелінійних систем часто застосовують *метод фазового простору*, який полягає в аналізі руху зображувальної точки (див. п. 3.3) у фазовому просторі з плином часу. Геометрично під час свого руху зображувальна точка (яка повністю характеризує стан системи у поточний момент часу) описує у фазовому просторі траєкторію, яку називають *фазовою траєкторією*. Вигляд цієї фазової траєкторії і напрямок руху вздовж неї зображувальної точки дає змогу скласти повне уявлення про рух системи в околі незбуреного руху (якому, як відомо, відповідає початок координат у фазовому просторі).

Значення функцій F_i у правих частинах рівнянь (6.1) визначають поточні значення проєкцій $v_i = \frac{dx_i}{dt}$ *фазової швидкості* \mathbf{v} на осі координат фазового простору.

Найбільш ефективно використовувати метод фазового простору для систем другого порядку, коли кількість фазових координат дорівнює двом. У цьому разі фазові траєкторії можна реально й наочно відобразити на площині (рис. 6.1) фазових змінних x_1 і x_2 , і це зображення називають *фазовим портретом* системи.

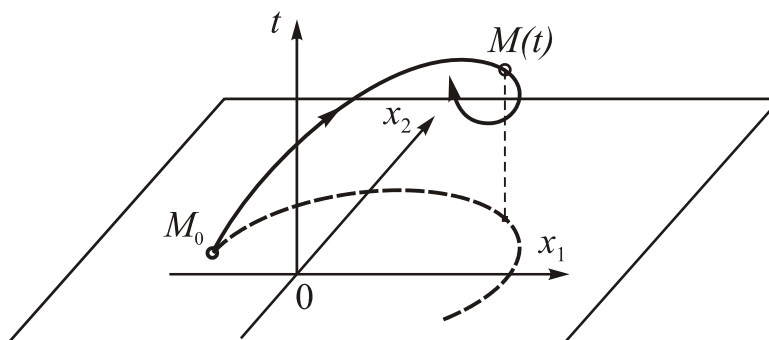


Рис. 6.1. Фазовий портрет і інтегральна крива

Рівняння (6.1) для $n = 2$ набувають вигляду:

$$\frac{dx_1}{dt} = F_1(x_1, x_2); \quad \frac{dx_2}{dt} = F_2(x_1, x_2). \quad (6.2)$$

Вилучивши час, отримаємо з них диференціальне рівняння фазової траєкторії:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{F_2(x_1, x_2)}{F_1(x_1, x_2)}. \quad (6.3)$$

Точки *стану рівноваги* системи визначаються з рівнянь (6.2) прирівнюванням нулю фазової швидкості системи ($\dot{x}_1 = 0$ і $\dot{x}_2 = 0$):

$$F_1(x_1, x_2) = 0; \quad F_2(x_1, x_2) = 0.$$

У цих точках права частина рівняння (6.3) фазової траєкторії стає невідзначеною. Тому *точки стану рівноваги є особливими точками на фазовій площині*.

Заміною змінних можна звести рівняння (6.2) до простішого вигляду:

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = \Phi(x, y).$$

У такому разі координата y , яка відкладається по осі ординат фазової площині, являє собою швидкість змінювання координати x , яка відкладається по осі абсцис. Це дозволяє більш наочно подати зв'язок між фазовим портретом руху системи і часовим змінюванням координати x і її швидкості y . При цьому виконуються такі особливості фазової траєкторії:

а) у верхній півплощині (рис. 6.2) зображувальна точка рухається уздовж фазової траєкторії зліва направо, тобто у бік збільшення x , бо там швидкість додатна ($y > 0$);

б) у нижній півплощині, навпаки, зображувальна точка рухається справа наліво;

в) фазова траєкторія перетинає вісь координати x під прямим кутом, бо в цій точці $y = 0$ (швидкість обертається у нуль), тобто спостерігається екстремум (максимум або мінімум) величини x .

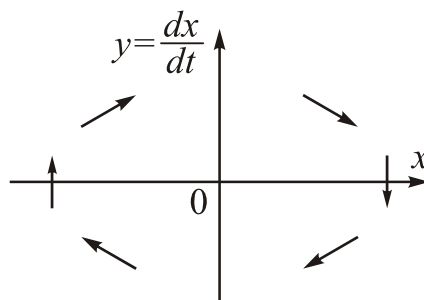


Рис. 6.2. Напрямки руху зображувальної точки на фазовій площині

Як відбивається різний характер процесів на виді фазового портрету продемонстровано на рис. 6.3–6.7.

Рисунок 6.3 відображує загасаючий коливальний процес. На фазовій траєкторії відмічені точки A, B, C, D, E , в яких координата x має або максимум, або мінімум, або обертається у нуль.

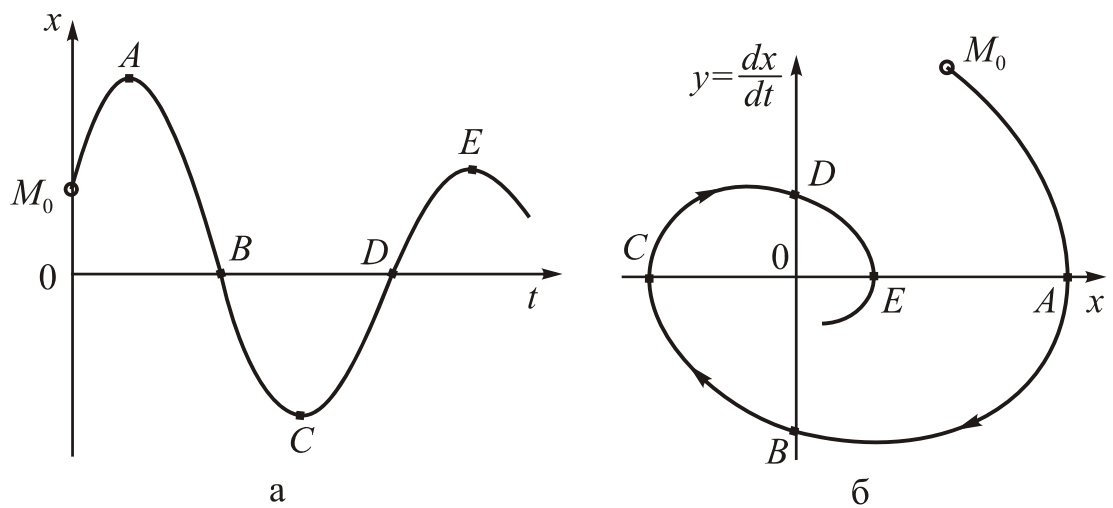


Рис. 6.3. Фазовий портрет загасаючих коливань

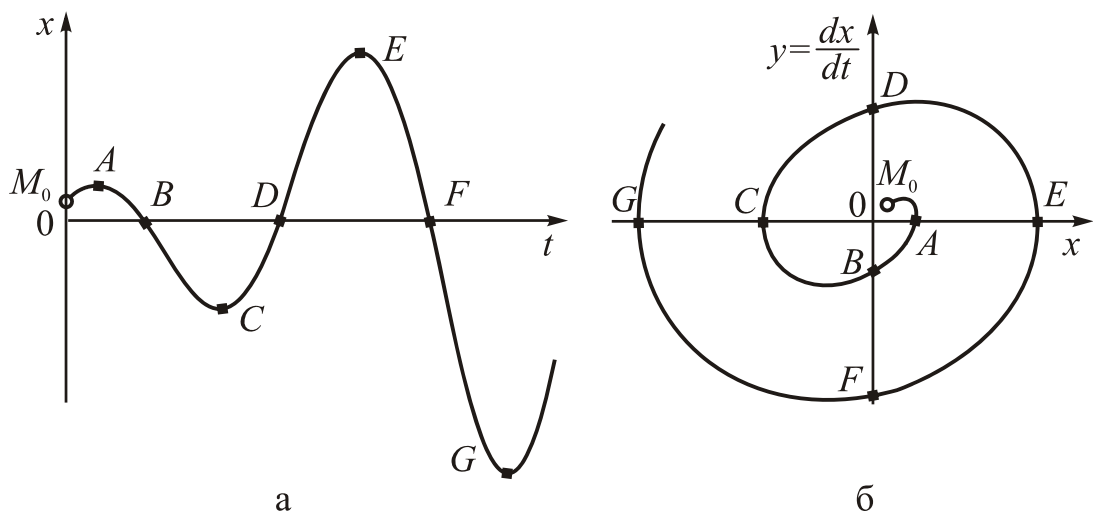


Рис. 6.4. Фазовий портрет розбіжних коливань

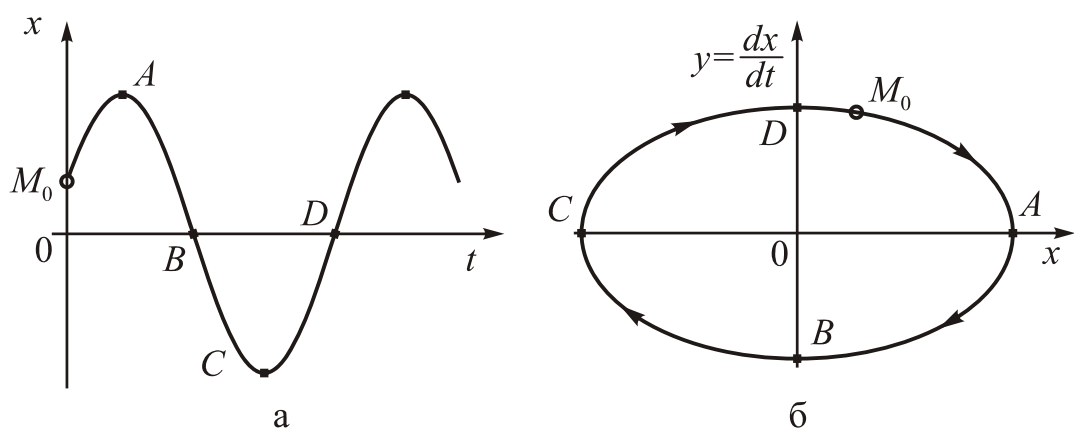


Рис. 6.5. Фазовий портрет періодичних коливань

Як бачимо, загасаючий коливальний процес на фазовій площині має вигляд збіжної спіралеподібної кривої.

Аналогічно розбіжний коливальний процес (рис. 6.4) відображується на фазовій площині як розбіжна спіралеподібна крива.

Періодичний процес (рис. 6.5) на фазовій площині має вигляд замкненої кривої. За один період коливань зображувальна точка оббігає увесь замкнений контур, а потім повторює рух по ньому.

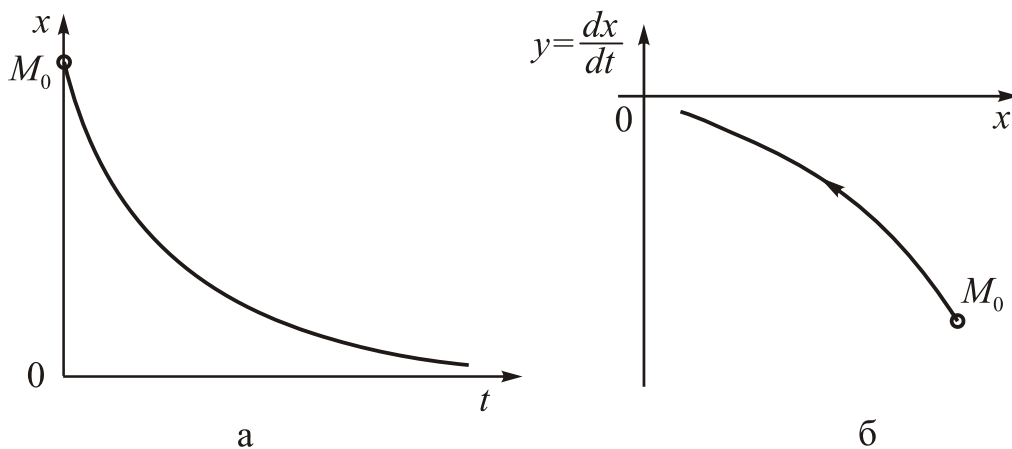


Рис. 6.6. Фазовий портрет монотонно збіжного процесу

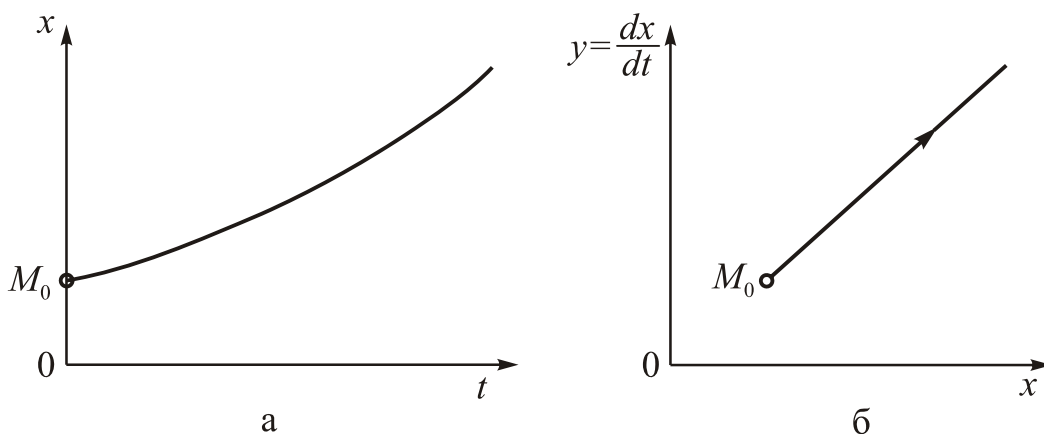


Рис. 6.7. Фазовий портрет монотонно розбіжного процесу

Монотонно загасаючому процесу (рис. 6.6) відповідає на фазовій площині крива, що монотонно наближається до положення рівноваги, а монотонно розбіжному процесу (рис. 6.7) – крива, яка монотонно віддаляється від нього.

Зручність подання процесу у вигляді фазових траєкторій на площині полягає у тому, що уся сукупність можливих форм перехідних процесів за будь-яких початкових умов подається у вигляді єдиного «фазового портрету». Недоліком є те, що при цьому доводиться обмежуватися розглядом систем лише другого порядку. Для дослідження нелінійних систем більш високого порядку застосовують інші методи.

6.1. Фазові портрети лінійних систем

Перш ніж почати аналіз нелінійних систем, розглянемо, які особливості мають фазові портрети лінійних систем другого порядку. Рівняння лінійної системи можна привести до виду:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dy} = y \\ \frac{dy}{dt} = a_1x + a_2y \end{cases},$$

або у векторно-матричній формі

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

Диференціальне рівняння фазової траєкторії матиме вигляд:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + a_2y}{y}.$$

Єдиною особливою точкою (точкою рівноваги системи) є точка $x = 0$, $y = 0$.

Позначимо через λ_1 і λ_2 корені характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ a_1 & a_2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - a_2\lambda - a_1 = 0.$$

Тут E – одинична матриця.

Якщо $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (корені різні і дійсні), то через підстановку $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, де P – невинроджена матриця, рівняння (6.4) можна звести до наступної форми

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = P^{-1}AP\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{y} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)\mathbf{y}; \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

або

$$\frac{dy_1}{dt} = \lambda_1 y_1; \quad \frac{dy_2}{dt} = \lambda_2 y_2.$$

Розв'язок цих рівнянь з поділеними змінними є таким:

$$y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}; \quad y_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (6.5)$$

Розглянемо фазові траєкторії в цій системі координат (y_1, y_2) , а потім відобразимо фазові траєкторії на площину початкових координат (x, y) .

Перехідний процес є аперіодичним. Нехай $|\lambda_2| > |\lambda_1|$. Вилучаючи t з розв'язку (6.5), отримаємо рівняння фазової траєкторії:

$$y_2 = C y_1^{\lambda_2/\lambda_1}.$$

Якщо знаки коренів λ_1 і λ_2 однакові, то з врахуванням зробленого припущення маємо $\lambda_2/\lambda_1 > 1$, і фазові траєкторії набувають вигляду парабол (рис. 6.8).

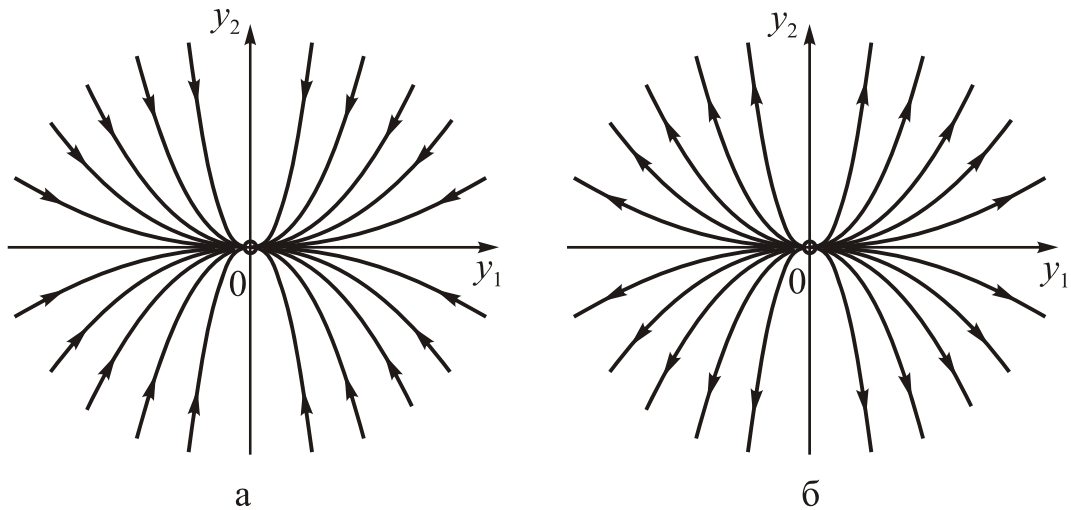


Рис. 6.8. Фазові траєкторії за дійсних коренів однакових знаків

При цьому напрямок руху зображувальної точки вздовж будь-якої фазової траєкторії визначається рівнянням (6.5), а саме: випадку $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ (рис. 6.8, а) відповідає загасаючим перехідним процесам; випадок $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ (рис. 6.8, б) відповідає розбіжним перехідним процесам.

Якщо ж знаки коренів λ_1 і λ_2 різні, то $\lambda_2 / \lambda_1 < -1$, і фазові траєкторії мають вигляд гіпербол (рис. 6.9).

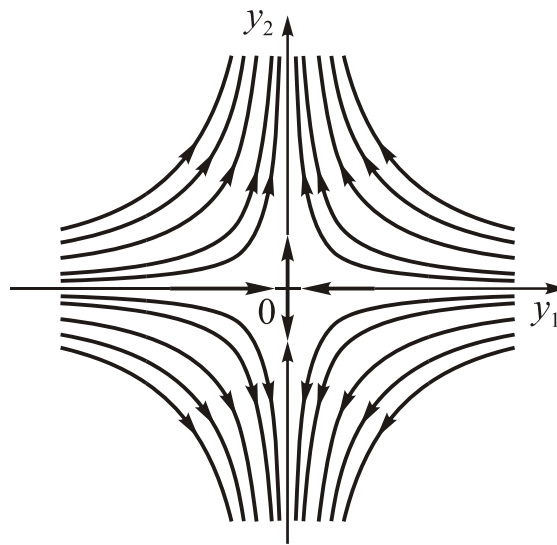


Рис. 6.9. Фазові траєкторії при дійсних коренях різних знаків

Якщо дійсні корені від'ємні (рис. 6.8, а) особливу точку називають *стійким вузлом*, а якщо вони додатні – *нестійким вузлом*. Якщо ж дійсні корені є різних знаків (рис. 6.9), особлива точка називається *сідловиною*. Сідловинна точка завжди є нестійкою.

Припустимо тепер, що корені є комплексними. Тоді вони складають комплексно спряжену пару:

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta.$$

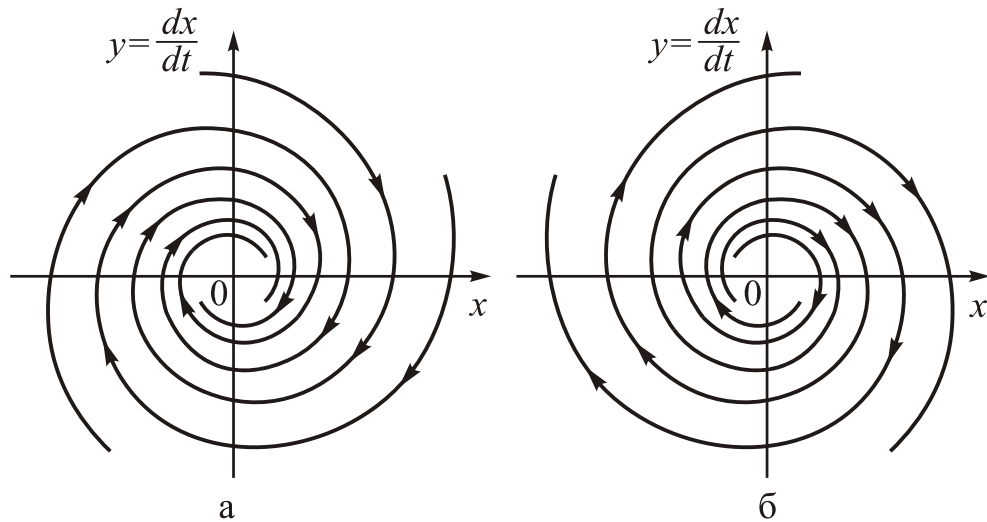


Рис. 6.10. Випадок комплексних коренів

Розв'язки рівняння (6.4) набувають вигляду

$$x = e^{at} [A \sin(\beta t) + B \cos(\beta t)]; \quad y = \frac{dx}{dt} = e^{at} [(aA - \beta B) \sin(\beta t) + (aB + \beta A) \cos(\beta t)].$$

Фазові траєкторії являють собою збіжні (у разі від'ємної дійсної частини a коренів), або розбіжні (за додатної дійсної частини) еліптичні спіралі навколо особливої точки – початку координат. У першому випадку (рис. 6.10, а) особлива точка називається точкою типу «стійкий фокус», у другому (рис. 6.10, б) – точкою типу «нестійкий фокус».

В окремому випадку суто уявних коренів ($\alpha = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm j\beta$), фазові траєкторії мають вигляд (рис. 6.11) замкнених еліпсоподібних кривих. Це відповідає періодичним у часі процесам. У цьому випадку особлива точка називається точкою типу «центр».

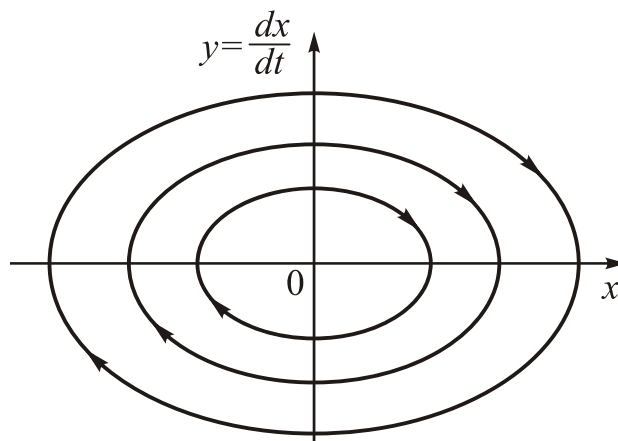


Рис. 6.11. Випадок уявних коренів

6.2. Фазові портрети нелінійних систем

У нелінійних системах, які описуються рівняннями вигляду (6.2) і (6.3), спостерігаються деякі відмітні особливості процесів.

Перш за все, в нелінійній системі може бути *кілька станів рівноваги*, а отже, й особливих точок (рис. 6.12). Тому на фазовій площині виходять ділянки з різними видами фазових траєкторій, які відділяються одна від одної кривими; їх називають *особливими кривими*, або *сепаратрисами*.

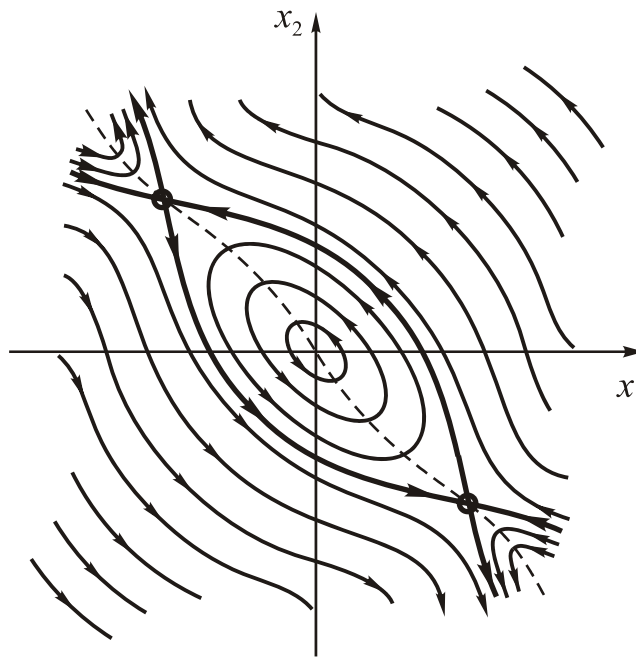


Рис. 6.12. Фазовий портрет нелінійної системи з кількома положеннями рівноваги

Фазові портрети нелінійних систем можуть містити такий вид особливих кривих, як *межові цикли* – замкнені криві, що відповідають періодичним коливанням, в околі яких відбуваються коливальні перехідні процеси. Якщо фазові траєкторії, що відповідають цим перехідним процесам із середини і ззовні сходяться до межового циклу (рис. 6.13, а), то такий цикл є *стійким межовим циклом*. Якщо ж вони віддаляються в обидва боки (рис. 6.13, б), – маємо *нестійкий межовий цикл*. Можливий також і випадок двох межових циклів (рис. 6.13, в), з яких один є стійким (на рисунку – зовнішній), а другий є нестійким.

Особлива точка 0 на рис. 6.13 у першому випадку являє собою нестійке положення рівноваги, а у другому і третьому – стійке.

Стійкий періодичний процес, який відповідає стійкому межовому циклу, являє собою *автоколивання системи*. Це є власні періодичні коливання, що здійснюються при відсутності зовнішньої періодичної дії, причому амплітуда і частота автоколивань не залежать від початкових умов, а визначаються внутрішніми властивостями системи. Автоколивання можуть виникати лише в нелі-

нійних системах, причому за рахунок внутрішнього джерела енергії, яке компенсує втрати енергії через завжди наявні дисипативні сили (сили опору).

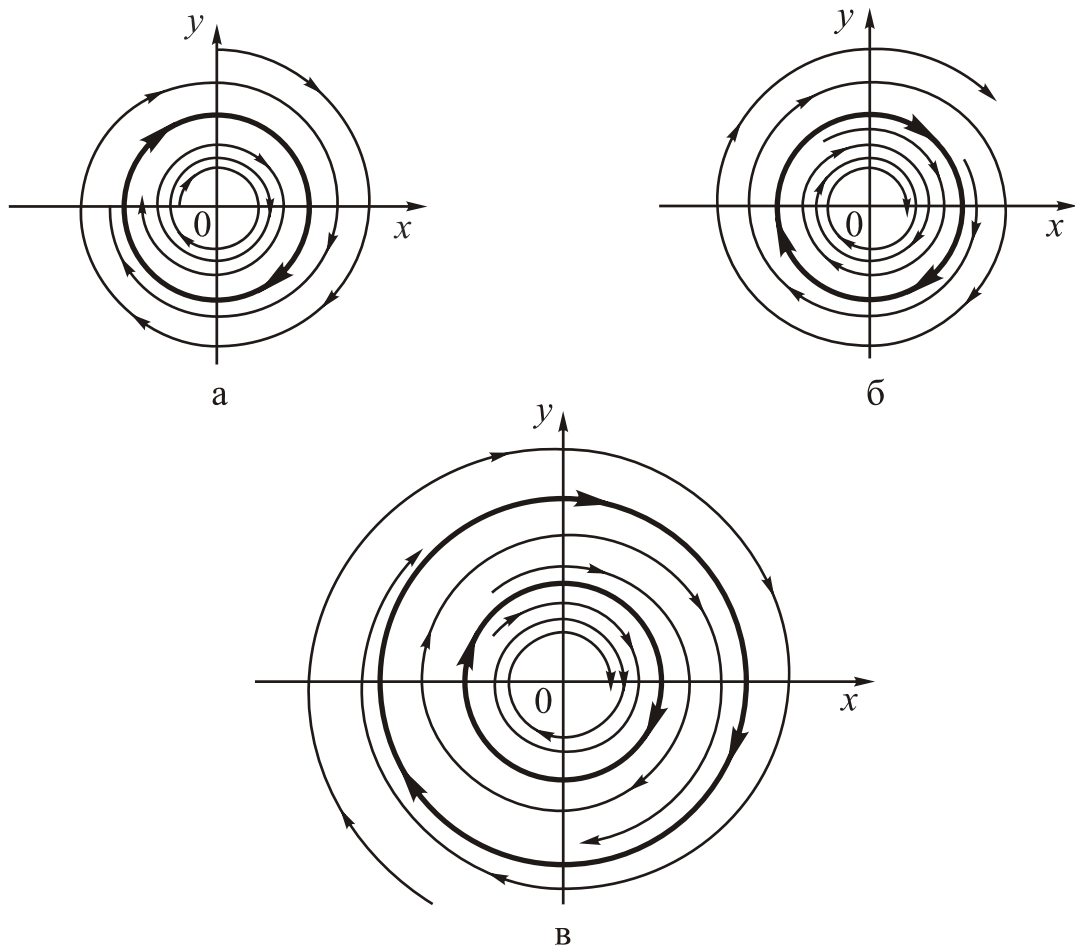


Рис. 6.13. Межові цикли

6.3 Перехідний процес і автоколивання торпеди з курсу

Як приклад застосування методу фазової площини розглянемо процес руху торпеди з кута рискання у випадку, коли керування рухом здійснюється за допомогою стерна, що може займати лише кілька фіксованих положень відносно корпусу торпеди. Зазвичай – це два крайні положення. Таке керування називають релейним.

Рівняння руху торпеди візьмемо у вигляді:

$$J \frac{d^2\psi}{dt^2} + R \frac{d\psi}{dt} = -M_o F(\psi), \quad (6.6)$$

де ψ – кут рискання торпеди, тобто кут відхилення повздовжньої осі торпеди від заданого курсу; J – момент інерції торпеди навколо вертикальної осі; R – коефіцієнт опору оточуючої води обертанню торпеди навколо вертикальної осі; M_o – максимальний керувальний момент сил навколо вертикальної осі, який

діє на торпеду внаслідок повного переключення стерна в один бік; $F(\psi)$ – релейна функція керування.

Прийmemo узагальнений релейний закон керування у формі, поданої графіком, зображеним на рис. 6.14.

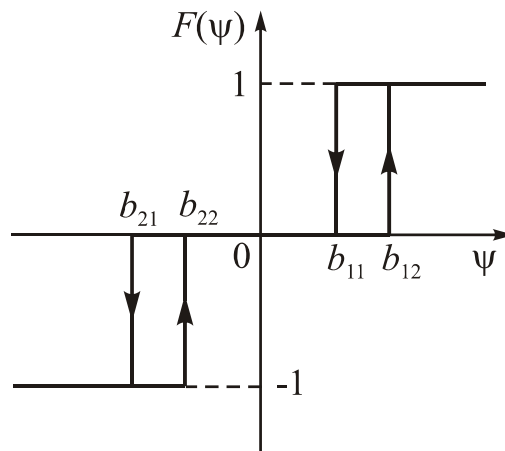


Рис. 6.14. Графічне подання закону керування

Тут b_{21} і b_{11} – кути відхилення торпеди від заданого курсу, за яких здійснюється перемикавання реле при обертанні торпеди проти годинникової стрілки; b_{22} і b_{12} – кути відхилення торпеди від заданого курсу, за яких здійснюється перемикавання реле при обертанні торпеди за годинниковою стрілкою.

6.3.1. Теоретичне дослідження

Перетворимо рівняння (6.6) до такого вигляду

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + h \frac{d\psi}{dt} = -k \cdot F(\psi), \quad (6.7)$$

де

$$h = \frac{R}{J}; \quad k = \frac{M_0}{J}.$$

Позначимо:

$$x = \psi; \quad y = \frac{d\psi}{dt}.$$

Тепер рівняння (6.7) можна подати як систему з двох рівнянь першого порядку:

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = -hy - kF(x),$$

Звідси можна отримати диференціальне рівняння фазових траєкторій:

$$\frac{dy}{dx} = -h - k \frac{F(x)}{y}. \quad (6.8)$$

З рис. 6.14 випливає, що нелінійну функцію $F(x)$ можна описати математично у наступний спосіб:

$$\text{якщо } y = \frac{dx}{dt} > 0, \text{ то } F(x) = \begin{cases} -1, & \text{якщо } -\infty < x < b_{12}; \\ 0, & \text{якщо } b_{12} < x < b_{21}; \\ 1, & \text{якщо } \infty > x > b_{21}; \end{cases}$$

$$\text{якщо } y = \frac{dx}{dt} < 0, \text{ то } F(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \infty > x > b_{11}; \\ 0, & \text{якщо } b_{22} < x < b_{11}; \\ -1, & \text{якщо } -\infty < x < b_{22}/ \end{cases}$$

Виходячи з цього, виокремимо на фазовій площині шість ділянок (рис. 6.15):

- в верхній півплощині ($y > 0$)
 - (1) $-\infty < x < b_{12}$, в якій $F(x) = -1$;
 - (2) $b_{12} < x < b_{21}$, де $F(x) = 0$;
 - (3) $\infty > x > b_{21}$, де $F(x) = 1$;
- у нижній півплощині ($y < 0$)
 - (4) $\infty > x > b_{11}$, де $F(x) = 1$;
 - (5) $b_{22} < x < b_{11}$, де $F(x) = 0$;
 - (6) $-\infty < x < b_{22}$, в якій $F(x) = -1$.

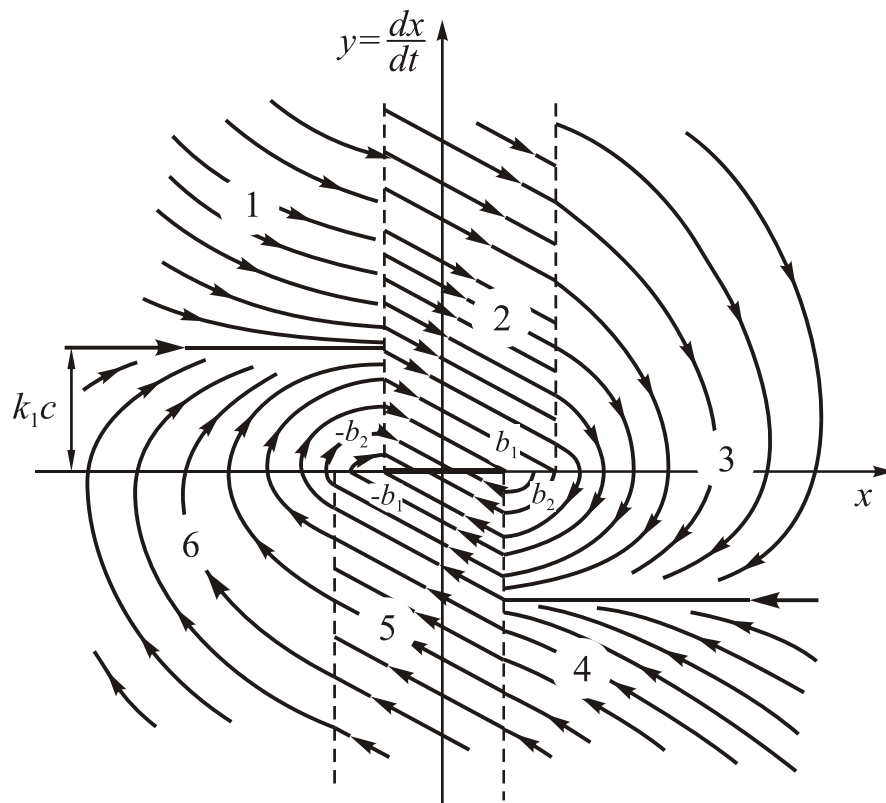


Рис. 6.15. Сукупність фазових траєкторій торпеди

Ці ділянки відділяються одна від одною чотирма вертикальними прямими $x = b_{12}$, $x = b_{21}$, $x = b_{11}$ і $x = b_{22}$, які називаються лініями перемикання. У кожній області виходить власний вигляд фазової траєкторії, які мають бути зшиті на лініях перемикання.

У ділянках 1 і 6 рівняння (6.8) набуває вигляду

$$\frac{dy}{dx} = -h + \frac{k}{y}.$$

Інтегруючи його, дійдемо рівняння фазової траєкторії у цій зоні:

$$x = -\frac{1}{h}y - \frac{k}{h^2} \ln \left| 1 - \frac{h}{k}y \right| + C_1. \quad (6.9)$$

Фазові траєкторії мають асимптоту у вигляді горизонтальної прямої $y = \frac{k}{h}$, до якої вони прагнуть за необмеженого збільшення x . При цьому зображувальна точка за початкового її розміщення у ділянці 6 рухається з часом вздовж фазової траєкторії справа наліво до перетину під прямим кутом осі x , а згодом – зліва направо (в напрямку збільшення куту рискання) до вертикальної прямої $x = b_{12}$.

Аналогічно фазові траєкторії в ділянках 3 і 4 описуються єдиним рівнянням

$$x = -\frac{1}{h}y + \frac{k}{h^2} \ln \left| 1 + \frac{h}{k}y \right| + C_3.$$

і мають асимптоту у вигляді горизонтальної прямої $y = -\frac{k}{h}$ у нижній півплощині фазової площини. Зображувальна точка від свого початкового положення в ділянці 3 рухається вздовж цієї кривої зліва направо у напрямку осі x , яку вона перетинає під прямим кутом, а далі, у ділянці 4 продовжує рухатися справа наліво, наближуючись до асимптоти.

У ділянках 2 і 5 рівняння фазової траєкторії набуває вигляду

$$\frac{dy}{dx} = -h \quad \Rightarrow \quad y = -hx + C_2. \quad (6.10)$$

У ділянці 2 зображувальна точка рухається від межі $x = b_{12}$ до межі $x = b_{21}$ зліва направо уздовж відрізка прямої (6.21), а у ділянці 5 – від межі $x = b_{11}$ до межі $x = b_{22}$, але справа наліво, наближуючись до горизонтальної осі. У цілому сукупність траєкторій показано на рис. 6.15.

Нехай рух торпеди починається, коли кутова швидкість її рискання дорівнює нулю, а кут рискання має від'ємне значення $x_{1\min} < b_{22}$. За цієї умови зображувальна точка у початковий момент часу міститься у зоні ділянок 1 – 6, тому починає рухатися уздовж фазової траєкторії (6.19), причому стала інтегрування у цьому разі набуває значення $C_1 = x_{1\min}$, і тому рівняння траєкторії можна подати у вигляді

$$x = x_{1\min} - \frac{1}{h}y - \frac{k}{h^2} \ln \left| 1 - \frac{h}{k}y \right|.$$

Ця траєкторія перетинає вертикальну лінію перемикування у точці з координатами $\{b_{12}; y_{12}\}$, де координата y_{12} визначається з рівняння

$$b_{12} = x_{1\min} - \frac{1}{h} y_{12} - \frac{k}{h^2} \ln \left| 1 - \frac{h}{k} y_{12} \right|.$$

Починаючи з цієї точки зображувальна точка опиняється в ділянці 2 і починає рухатися вдовж прямої (6.10):

$$y - y_{12} = -h(x - b_{12}).$$

Ця пряма перетинає вертикальну пряму $x = b_{21}$ у точці з ординатою

$$y^* = y_{12} - h(b_{21} - b_{12}).$$

Якщо $y^* > 0$, тобто $y_{12} > h(b_{21} - b_{12})$, то остання точка міститься саме на межі між ділянками 2 і 3, і зображувальна точка переходить з ділянки 2 у ділянку 3 у точці $\{b_{21}; y_{12} - h(b_{21} - b_{12})\}$. Якщо ж виконується умова $y_{12} > h(b_{21} - b_{12})$, то зображувальна точка переходить з ділянки 2 безпосередньо у ділянку 4 у точці $\{b_{12} + \frac{y_{12}}{h}; 0\}$. Більш того, якщо величина $b_{12} + \frac{y_{12}}{h}$ виявиться меншою за b_{11} , зображувальна точка, перейшовши цю точку, опиняється одразу у ділянці 5.

Розглянемо перший випадок – перехід зображувальної точки у ділянку 3.

У ділянці 3 зображувальна точка починає рухатися за траєкторією

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{h} y + \frac{k}{h^2} \ln \left| 1 + \frac{h}{k} y \right| + C_3 = \\ &= b_{12} - \frac{1}{h} (y - y_{12}) + \frac{k}{h^2} \ln \left| \frac{1 + \frac{h}{k} y}{1 + \frac{h}{k} [y_{12} - h(b_{21} - b_{12})]} \right|. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Відшукаємо точку перетину цієї кривої осі абсцис (тобто максимальне відхилення з кута ризику). Для цього достатньо покласти у (6.11) $y = 0$:

$$x_{1\max} = b_{12} + \frac{y_{12}}{h} + \frac{k}{h^2} \ln \left| \frac{1}{1 + \frac{h}{k} [y_{12} - h(b_{21} - b_{12})]} \right|.$$

Зворотний рух зображувальної точки описуватиметься цілком аналогічними рівняннями і приведе у точку $x_{2\min}$ наступного мінімуму кута ризику. Якщо виявиться, що $x_{2\min} = x_{1\min}$, то наступний рух зображувальної точки повністю повторить попередній. Рух торпеди стає циклічним. Це і є автоколивання.

Якщо релейний закон керування є симетричним відносно початку координат, тобто виконуються умови:

$$b_{11} = -b_{12} = -b_1; \quad b_{22} = -b_{21} = -b_2,$$

то для здійснення автоколивань достатньо, щоб $x_{1\max} = -x_{1\min}$. Тоді зворотний рух у наступний півперіод буде повністю симетричним руху за попередній пів-

період, тільки матиме зворотний напрямок. При цьому значення $x_{1\max}$ являтимуть собою амплітуду автоколивань a .

Отже, для визначення амплітуди автоколивань маємо умову:

$$a = b_1 + \frac{y_{12}}{h} + \frac{k}{h^2} \ln \left| \frac{1}{1 + \frac{h}{k} [y_{12} - h(b_2 - b_1)]} \right|,$$

де y_{12} , у свою чергу, дістаємо з рівняння

$$b_1 = -a - \frac{y_{12}}{h} - \frac{k}{h^2} \ln \left| 1 - \frac{h}{k} y_{12} \right|.$$

Вилучаючи з цих двох рівнянь невідому амплітуду автоколивань, матимемо нелінійне рівняння для визначення невідомої амплітуди швидкості автоколивань $y_m = y_{12}$:

$$b_1 + \frac{y_m}{h} + \frac{k}{2h^2} \ln \left| \frac{1 - \frac{h}{k} y_m}{1 + \frac{h}{k} [y_m - h(b_2 - b_1)]} \right| = 0, \quad (6.12)$$

У більш простому випадку двопозиційного керування виконується умова $b_2 = b_1$, і замість (6.12) матимемо:

$$\frac{h^2}{k} b_1 + \frac{h y_m}{k} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \frac{h}{k} y_m}{1 - \frac{h}{k} y_m} \right|. \quad (6.13)$$

Припускаючи, що $\frac{h}{k} y_m$ менша за одиницю і користуючись слушним за цією умови розкладом у степеневий ряд

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right),$$

замінімо рівняння (6.13) на наближене

$$\frac{h^2}{k} b_1 + \frac{h}{k} y_m \approx \frac{h}{k} y_m + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{k} y_m \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{h}{k} y_m \right)^5.$$

Запишемо його у наступному виді

$$\frac{h}{k} y_m = \sqrt[3]{3 \left[\frac{h^2}{k} b_1 - \frac{1}{5} \left(\frac{h}{k} y_m \right)^5 \right]}. \quad (6.14)$$

Розв'язуватимемо це рівняння методом ітерацій. Припускаючи як нульове наближення $y_{m(0)} = 0$ і використовуючи це у правій частині, отримаємо $y_{m(1)}$ у першому наближенні

$$\frac{h}{k} y_{m(1)} = \sqrt[3]{3 \frac{h^2}{k} b_1} \Rightarrow y_{m(1)} = \sqrt[3]{3 \frac{h^2 k^3}{k h^3} b_1} = \sqrt[3]{3 \frac{k^2}{h} b_1}. \quad (6.15)$$

Підставляючи це значення у праву частину виразу (6.14), знаходимо значення амплітуди у другому наближенні

$$\frac{h}{k} y_{m(2)} = \sqrt[3]{3 \left[\frac{h^2}{k} b_1 - \frac{1}{5} \left(\frac{h}{k} y_{m(1)} \right)^5 \right]} = \sqrt[3]{3 \left[\frac{h^2}{k} b_1 - \frac{1}{5} \left(\sqrt[3]{3 \frac{h^2}{k} b_1} \right)^5 \right]}. \quad (6.16)$$

Приклад. Нехай параметри торпеди і моменти керування є наступними:

$$J = 500 \text{ Н м с}^2; \quad R = 500 \text{ Н м с}; \quad M_o = 500 \text{ Н м},$$

а повне перекладення стерна відповідає відхиленню торпеди від заданого напрямку на два градуси, тобто $b_1 = 2\pi/180 = 0,0349$. За таких даних $h = \frac{R}{J} = 1 \text{ с}^{-1}$ і

$k = \frac{M_o}{J} = 1 \text{ с}^{-2}$. У першому наближенні з виразу (6.15) матимемо значення амплітуди автоколиваний торпеди з кутової швидкості $y_{m(1)} = 0,4713 \text{ рад/с}$. Уточнене значення, відшукане відповідно до (6.16) дорівнюватиме $y_{m(1)} = 0,4494 \text{ рад/с}$.

Амплітуду автоколиваний з куту рискання відшукаємо, скориставшись (6.25): $a = 0,1132 \text{ рад} = 6.483^\circ$. Для вельми наближеної оцінки величини частоти автоколиваний можна скористатися співвідношенням $\omega_a = \frac{y_m}{a}$, яке впливає з при-

пущення (у загальному випадку невірному), що автоколиваний являють собою гармонічні коливаний. За отриманих значень амплітуд формула дає таке значення періоду автоколиваний

пущення (у загальному випадку невірному), що автоколиваний являють собою гармонічні коливаний. За отриманих значень амплітуд формула дає таке значення періоду автоколиваний

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} = \frac{2\pi a}{y_m} = 1,5827 \text{ с}.$$

6.3.2. Моделювання на ЕОМ

Задля підтвердження і узагальнення одержаних теоретичних результатів, утворимо комплекс програм моделювання руху торпеди у середовищі Matlab з використанням можливостей пакета Simulink [1]. Комплекс (рис. 6.16) складатиметься з основної (керуючої) програми *Torp.m*, чотирьох програм – *TORP_Zastavka.m*, *TORP_Menu.m*, *TORP_Yadro.m* і *TORP_Vyvod.m* – записаних мовою Matlab і Simulink-моделі *TORPEDA.mdl*. Тексти програм наведені у Додатку 2. До глави 6.

Процес чисельного інтегрування диференціальних рівнянь руху торпеди запрограмований в файлі *TORPEDA.mdl*. У Додатку 2 наведені блок схеми цієї S-моделі та трьох її підсистем *SubsystemTorpeda.mdl*, *Zburenniya.mdl* і *CONTROL.mdl*, які забезпечують відповідно чисельне інтегрування рівняння (6.13), формування моментів збурювальних сил і формування моменту керування. Програма *TORP_Zastavka* здійснює присвоювання первинних значень усім сталим, що визначають прийняту модель, збурення торпеди і закон регулювання, програма *TORP_Menu* – організацію діалогового змінювання параметрів моделі, програма *TORP_Yadro* запускає S-модель *TORPEDA.mdl* із середовища

Matlab, а *TORP_Vyvod* забезпечує виведення у графічне вікно результатів моделювання.

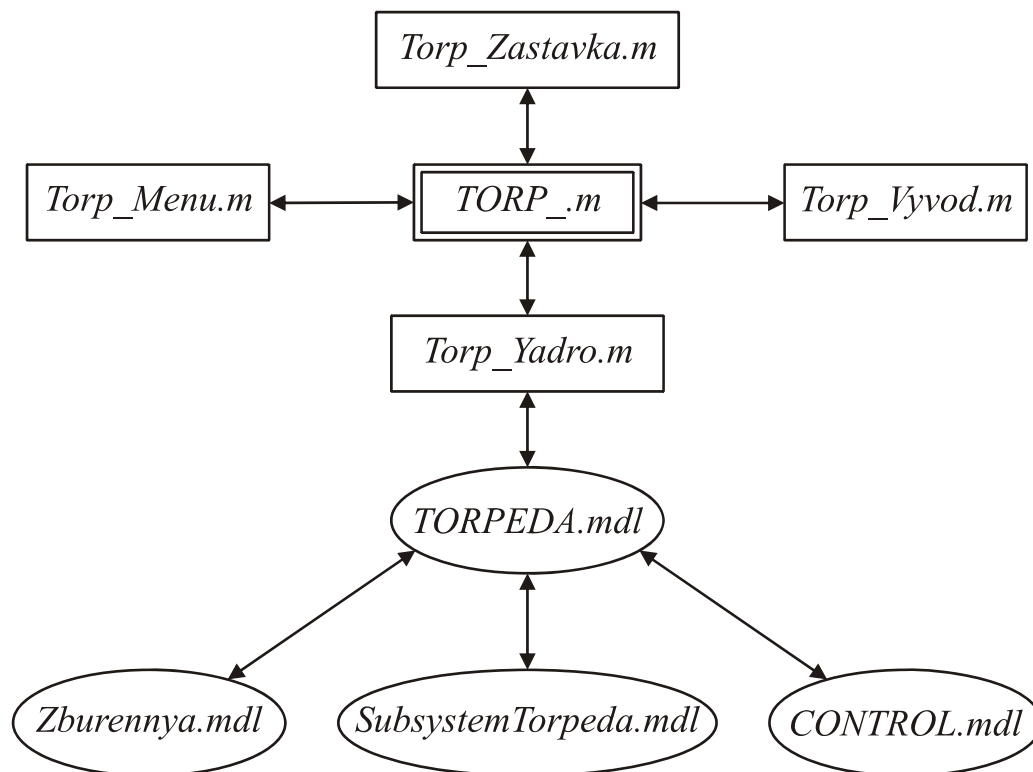


Рис. 6.16. Схема взаємодії комплексу програм TORP_

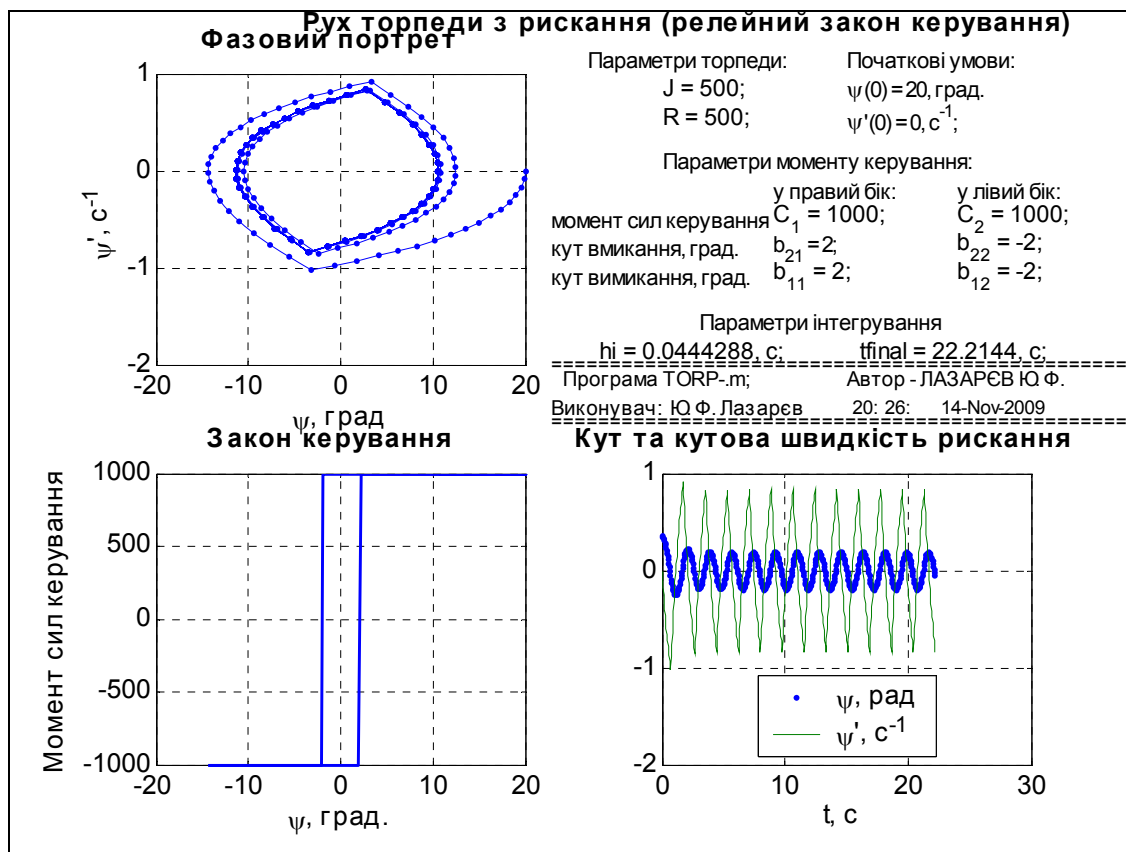


Рис. 6.17. Стійкість двопозиційної релейної системи з зовні

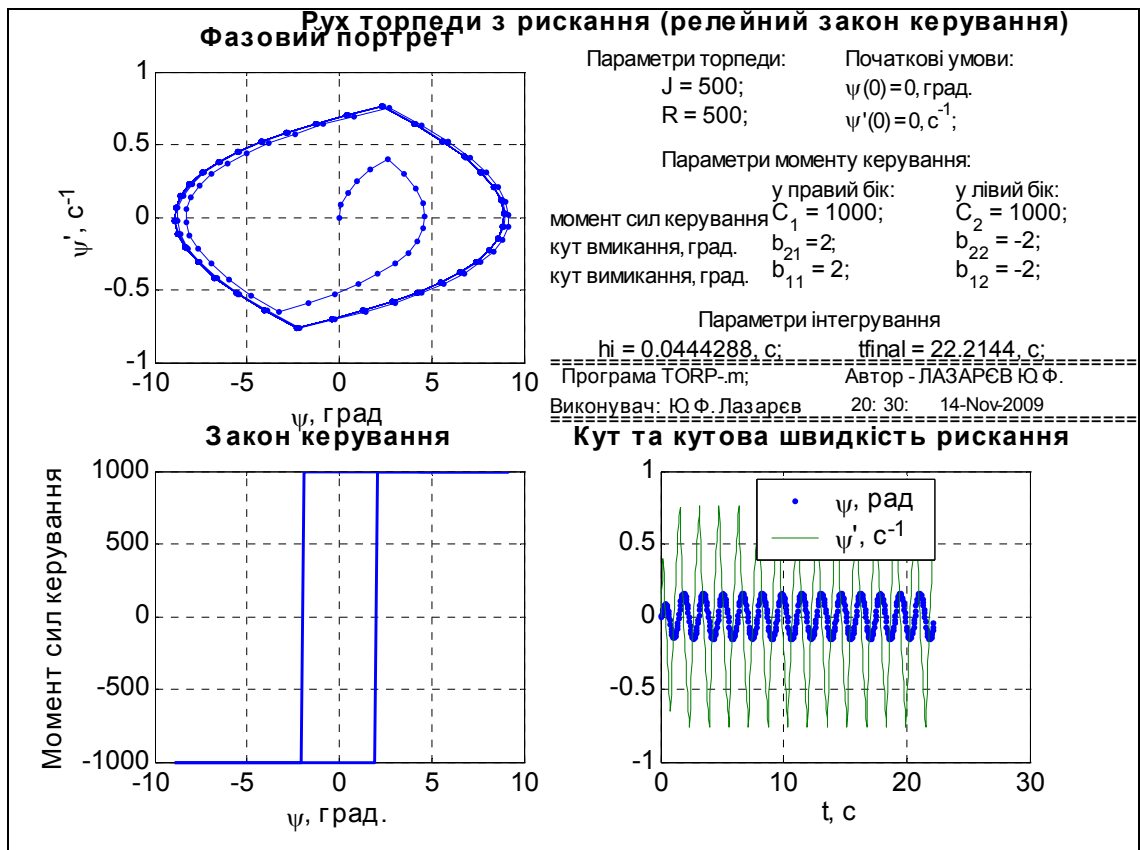


Рис. 6.18. Стійкість двопозиційної релейної системи з середини

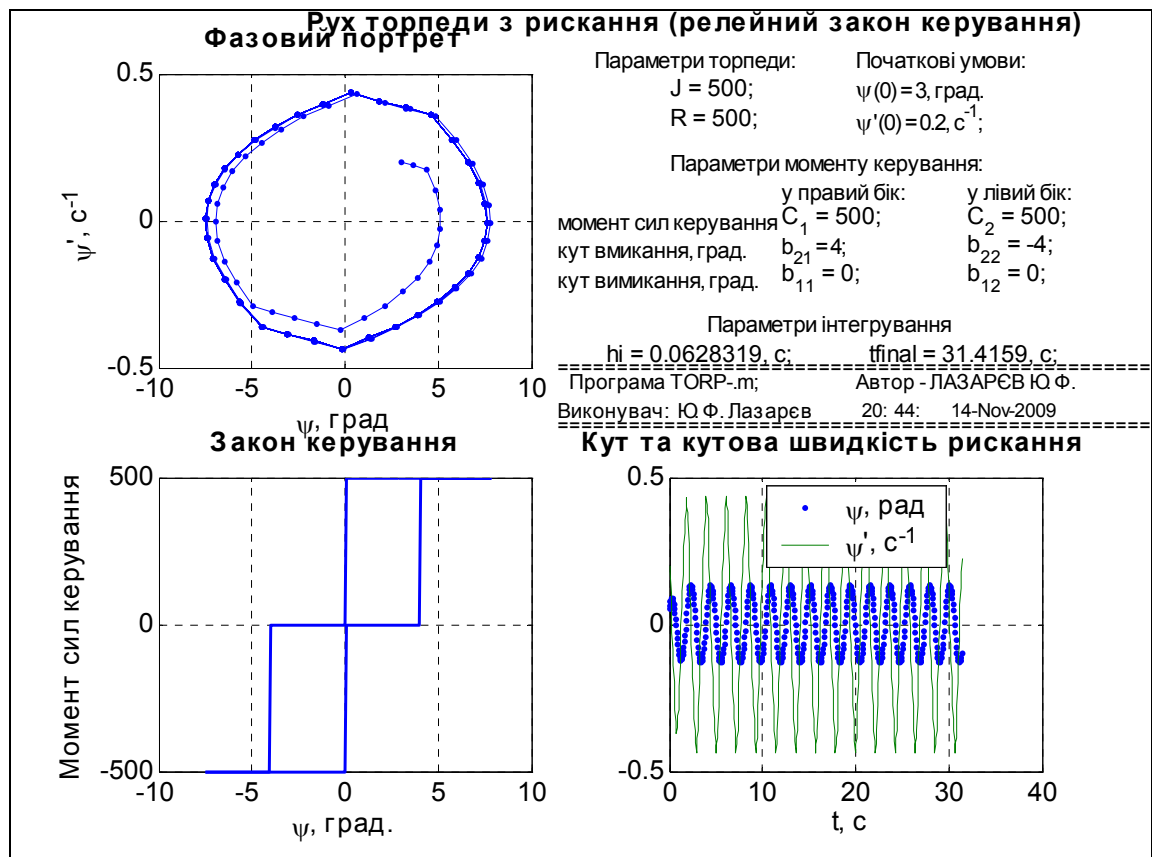


Рис. 6.19. Стійкість трипозиційної релейної системи з середини

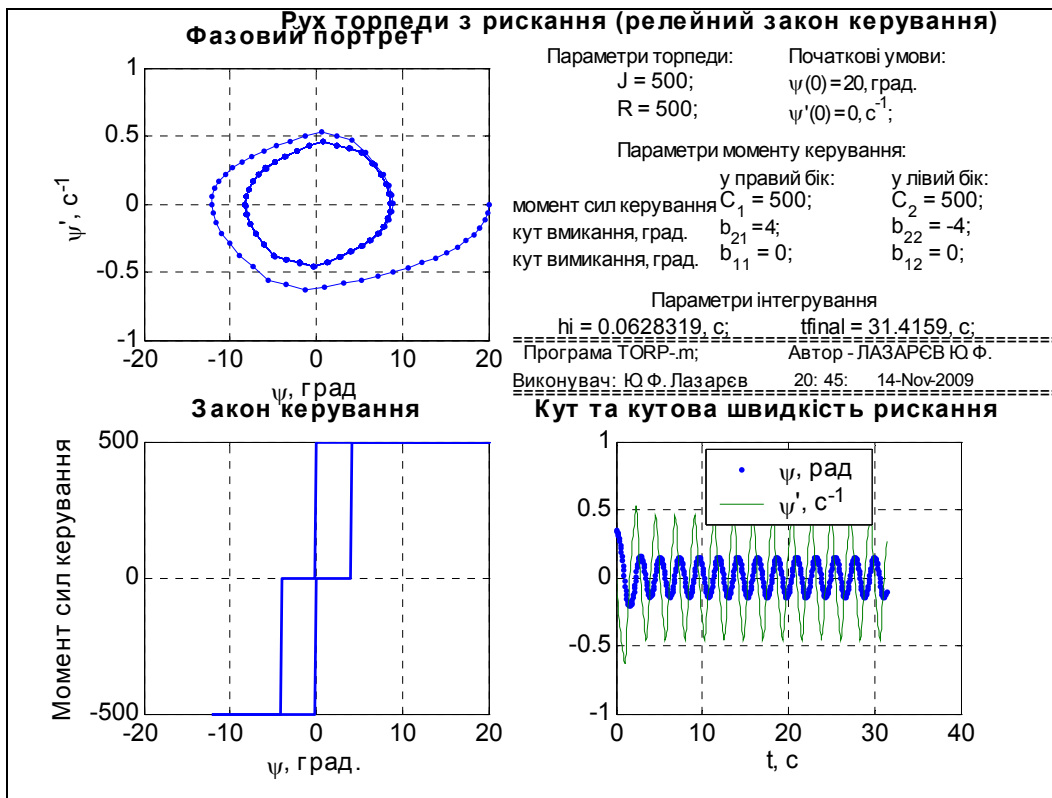


Рис. 6.20. Стійкість трипозиційної релейної системи ззовні

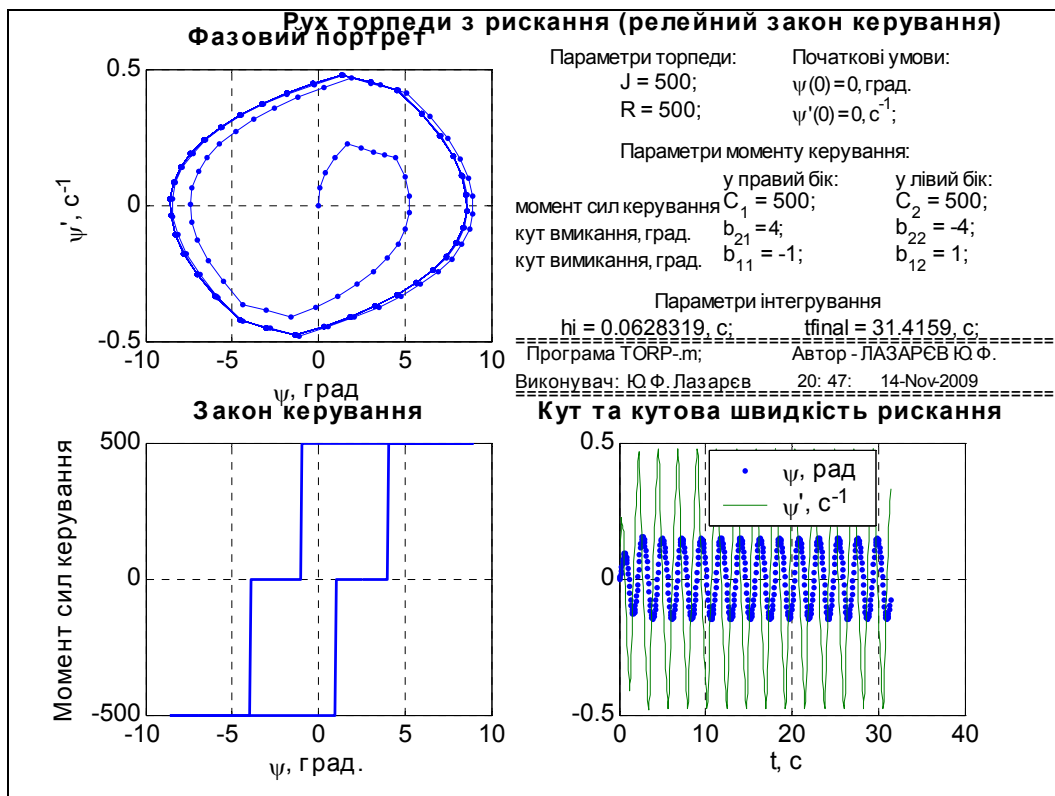


Рис. 6.21. Усталення автоколивань чотирипозиційної релейної системи

Результати роботи поданого комплексу програм наведені на рис. 6.17 – 6.21.

Показана стійкість граничного циклу автоколивань торпеди з кута рискання як ззовні, так і зсередини межового циклу. Такий результат спостеріга-

ється і у випадку, коли кермо торпеди може мати лише два фіксованих положення (двопозиційна релейна система, рис. 6.17 і 6.18), і тоді, коли воно може фіксуватися у трьох (трипозиційна система, рис. 6.19, 6.20) і чотирьох положеннях (рис. 6.21).

Моделювання підтверджує правильність теоретичного дослідження. Неважко впевнитися, що амплітуди автоколивань торпеди з кута рискання і кутвої швидкості, а також період автоколивань, зображених на графіках, отриманих моделюванням на ЕОМ, збігаються з винайденими теоретичним шляхом.

Контрольні запитання

1. Що називають фазовим портретом коливальної системи? Які головні особливості поведінки зображуючої точки на фазовому портреті?
2. Що таке автоколивання? за рахунок чого вони виникають і підтримуються?
3. Які види особливих точок і особливих кривих на фазовій площині можливі для різних систем, і як їх називають?

Література

[61]; [52]; [33, урок 7, с 277 – 347].

Частина 3. Прикладна теорія гіроскопів

Гіроскопом (від грец. «гірос» – обертання і «скопейн» – дивитися, спостерігати) французький фізик Леон Фуко назвав свій прилад, який побудував у 1852 році для демонстрування обертання Землі. Зміст цієї назви полягає у тому, що гіроскоп – це «спостерігач обертання», тобто пристрій, що дозволяє виявити обертання Землі, на поверхні якої гіроскоп установлений, в інерціальному просторі. Подібне уявлення збереглося і донині, але дещо уточнилося. Наразі вважають, що *гіроскоп – це пристрій, який дозволяє виявити (виміряти параметри) обертання основи, на який він встановлений, в інерціальному просторі*. Під вказане визначення підпадають усі відомі види гіроскопічних приладів, зокрема двоступеневі, лазерні, волоконнооптичні, вібраційні, мікромеханічні гіроскопи тощо. Окремо підкреслимо, що гіроскоп вимірює параметри руху (кутового) саме *відносно інерціального простору*. Це суттєво відрізняє його від інших типів вимірювачів параметрів кутового руху.

Розділ 7. Симетричний зрівноважений гіроскоп

7.1. Визначення і властивості гіроскопа

У теоретичній механіці і прикладній теорії гіроскопів склалося більш вузьке і конкретне поняття гіроскопа, яке є базовим для встановлення і вивчення головних властивостей гіроскопічних пристроїв. За визначенням, наведеним в фізичній енциклопедії [58], *гіроскопом називається швидкообертове тверде тіло, вісь обертання якого може довільно змінювати своє положення у просторі*.

Відзначимо три обставини, які впливають з цього визначення.

1. У теорії гіроскопа розглядається, головним чином, обертальний рух *твердого* тіла. Це означає, що деформації, в дійсності існуючі, припускаються настільки малими, що вони практично не впливають на рух тіла. Тверде тіло так само, як і матеріальна точка у механіці і ідеальна нестислива рідина в гідродинаміці, є спрощеною моделлю реального тіла. Обмеження ідеальним випадком твердого тіла дозволяє вивчати поведінку гіроскопа за допомогою простих математичних засобів. Замість диференціальних рівнянь у частинних похідних, необхідних у випадку деформованих тіл, у гіроскопічній теорії обходяться звичайними диференціальними рівняннями. Цим пояснюється й та обставина, що в теорії гіроскопів трапляється набагато більше задач, що піддаються точному розв'язуванню, ніж, наприклад, в теорії пружності або гідродинаміці. Багато математиків зверталися у своїх дослідженнях до гіроскопа і обирали його як зручну модель почасти для того, щоб на ньому продемонструвати ефективність математичних методів.

Хоча гіроскопічна теорія і обмежувалась у своїх дослідженнях твердими тілами, вже давно були вивчені подібні гіроскопічні явища, що спостерігалися у тілах, що деформуються. Так, Землю у геофізиці можна розглядати як великий гіроскоп, хоча вона деформується і має гідросферу. Гіроскопічні явища, які по-

части також використовуються у техніці, можна знайти також в рідинах які обертаються, у вирах, у гнучких кільцях з канату або ланцюга, які швидко обертаються.

2. Гіроскопом називають тіло, яке *швидко обертається*. Для механіки величина кутової швидкості тіла не є ваговою ознакою гіроскопа. Земна куля, яка робить один оберт за добу, підкорюється гіроскопічним законам так само, як технічні гіроскопи, які обертаються з кутовою швидкістю в десятки тисяч обертів у хвилину. Однак, виявляється, що розрахунок швидкообертального гіроскопа допускає спрощення, виключно важливі для теоретичного дослідження складних гіроскопічних систем. Відзначимо що визначення швидкообертального тіла – відносне, потребує уточнення. Це уточнення буде зроблено далі.

3. Третя важлива обставина: гіроскоп – це таке тверде тіло, яке *має можливість довільно змінювати положення осі свого обертання*. З врахуванням цього, наприклад, ротор парової турбіни, ротор електродвигуна не є гіроскопами. Їм не притаманна жодна з тих властивостей, які відрізняють поведінку гіроскопа від поведінки звичайного твердого тіла. Більш того, якщо обертальне тіло має змогу змінювати положення осі свого обертання тільки в одній площині, то таке тіло, точно кажучи, також не є гіроскопом, хоча в техніці такі пристрої й називають двоступеневими гіроскопами (маються на увазі два кутові ступеня вільності: один – навколо осі власного обертання, а другий – навколо перпендикулярної осі). Гіроскопом у повному сенсі можна називати лише тіло, яке має щонайменше три обертальні ступеня вільності: один – навколо осі власного обертання, два інші – навколо двох неколінеарних осей, не компланарних першій, що забезпечують повну свободу обертання осі власного обертання гіроскопа у просторі.

Отже, для того, щоб перетворити тверде тіло в гіроскоп, необхідно забезпечити йому три кутові ступеня вільності, тобто повну свободу кутового руху. Цю функцію виконує *підвіс гіроскопа*.

Підвіс гіроскопа конструктивно може бути виконаний у різний спосіб. Найпростішим видом підвісу є *сферичний шарнір* (рис. 7.1).

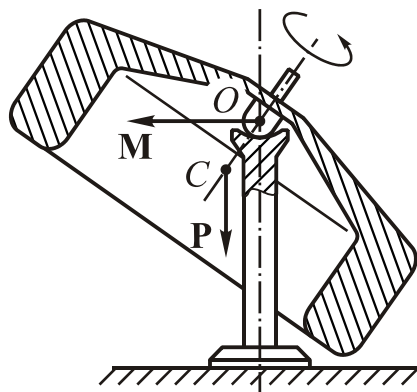


Рис. 7.1. Гіроскоп з підвісом у вигляді сферичного шарніру

У техніці значного поширення набув *карданів підвіс* (рис. 7.2), що складається із *зовнішньої рамки 2*, яка має можливість обертатися відносно корпусу приладу (основи, на якій встановлено гіроскоп) навколо *зовнішньої осі підвісу cc* , *внутрішньої рамки 1*, яка має змогу повертатися відносно зовнішньої рамки навколо осі bb , і *ротора гіроскопа*, який обертається навколо осі aa відносно внутрішньої рамки. Вісь bb називають *внутрішньою віссю підвісу*, а вісь aa – *головною віссю гіроскопа*, віссю ротора або віссю власного обертання гіроскопа.

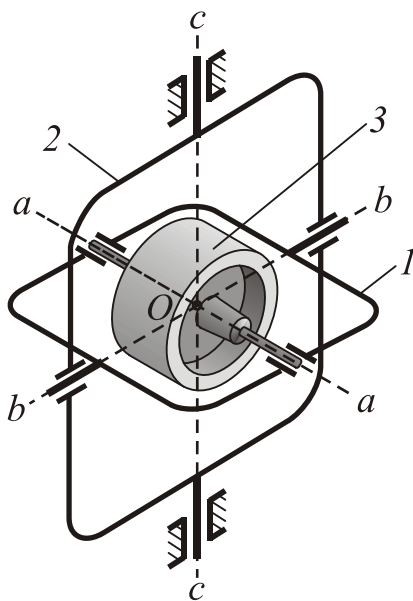


Рис. 7.2. Гіроскоп у кардановому підвісі

Існують й інші види підвісів: *гідростатичний*, у якому гіроскоп плаває у важкій рідині, «підвішений» в ній силою Архімеда; *аеростатичний*, в якому гіроскоп «підвішений» за допомогою піддування повітря у зону контакту гіроскопа з основою; *аеродинамічний*, в якому піддування повітря здійснюється за рахунок швидкого обертання самого гіроскопа; *електростатичний*, в якому гіроскоп «підвішений» за допомогою електростатичних сил; *магнітний*, в якому підвішування здійснюють магнітні сили тощо.

У великому енциклопедичному словнику [58] зазначається, що гіроскоп має низку цікавих властивостей, які спостерігаються в обертових небесних тілах, артилерійських снарядах, у дитячій іграшки – дзизі, роторах турбін, установлених на суднах тощо. На використанні властивостей гіроскопа побудовано різноманітні пристрої або прилади, які широко застосовуються в сучасній техніці.

Властивості гіроскопа виявляються при виконанні двох умов:

- 1) вісь обертання гіроскопа має можливість змінювати свій напрямок у просторі;
- 2) кутова швидкість обертання гіроскопа навколо своєї осі є вельми великою у порівнянні з тією кутовою швидкістю, яку матиме сама вісь при змінюванні свого напрямку.

Якщо центр ваги гіроскопа збігається з точкою його підвісу, то гіроскоп називають *астатичним*, або *зрівноваженим*, якщо не збігається – *важким*.

Перша властивість зрівноваженого гіроскопа з трьома ступенями вільності полягає в тому, що його вісь прагне стійко зберігати в інерціальному просторі наданий їй початковий напрямок. Якщо ця вісь на початку напрямлена на якусь зірку, то за будь-яких переміщень приладу і випадкових поштовхів вона буде продовжувати вказувати на цю зірку, змінюючи свою орієнтацію відносно осей, пов'язаних з Землею. Це дає змогу виявити обертання Землі в інерціальному просторі.

Друга властивість гіроскопа виявляється, коли на його вісь (або рамку) починає діяти сила (або пара сил), яка прагне привести вісь у рух, тобто яка утворює обертальний момент відносно точки підвісу. На відміну від необертального твердого тіла, яке під дією сталого моменту сил здійснюватиме обертальний рівноприскорювальний рух навколо осі дії цього моменту сил, вісь власного обертання гіроскопа здійснює у цьому випадку рівномірне обертання в інерціальному просторі з кутовою швидкістю ω , яка визначається векторним рівнянням:

$$\omega \times \mathbf{H} = \mathbf{M}, \quad (7.1)$$

де \mathbf{M} – момент сил, що діють на гіроскоп; $\mathbf{H} = J\Omega$ – власний кінетичний момент гіроскопа, який дорівнює добуткові вектора Ω власного обертання гіроскопа на момент інерції J гіроскопа відносно осі його власного обертання. Як випливає з (7.1) обертання осі гіроскопа здійснюватиметься навколо осі, ортогональній як осі дії моменту \mathbf{M} , так і осі власного обертання (вектора \mathbf{H}). Таке обертання називають вимушеною *прецесією* гіроскопа. Воно тим повільніше, чим швидше обертається навколо своєї осі сам гіроскоп. Якщо в якийсь момент часу дія моменту сил припиниться, то у цю мить припиниться прецесія, і вісь власного обертання зупиниться. Правило прецесії іноді називають *законом прецесії*. Воно визначає як величину, так і напрямок кутової швидкості прецесії.

Третя властивість гіроскопа – *нутація*. Так називаються малі (зазвичай непомітні наочно), але швидкі коливання осі власного обертання гіроскопа по конусу навколо її середнього положення, які спостерігаються після дії силового удару на гіроскоп. Розмахи цих коливань швидкообертального гіроскопа дуже малі і внаслідок неминучій наявності опору швидко загасають. Це дозволяє при розв'язуванні більшості технічних задач нехтувати нутацією і побудувати елементарну теорію гіроскопів, яка враховує лише прецесію, що визначається формулою (7.1).

Прецесійний рух можна спостерігати на прикладі дзиги (рис. 7.3), для якої роль точки підвісу відіграє точка опори O . Якщо вісь такої дзиги поставити під кутом до вертикалі, розкрутити і відпустити, то вона під дією сили тяжіння буде відхилятися не в бік дії цієї сили, тобто не вниз, а в перпендикулярному напрямку і прецесувати навколо вертикалі.

Прецесія дзиги супроводжується також наочно непомітними нутаційними коливаннями, які швидко загасають унаслідок опору повітря і тертя в опорі. Під дією тертя власне обертання дзиги поступово уповільнюється, а швидкість прецесії відповідно зростає. Коли кутова швидкість обертання дзиги стає меншою

від певної величини, вона втрачає стійкість і падає. Нутаційні коливання повільно обертової дзиги можуть бути досить помітними і, накладаючись на прецесію, суттєво змінити картину руху осі дзиги. Кінець осі буде описувати хвилеподібну або петлеподібну криву, то відхиляючись від вертикалі, то наближаючись до неї (рис. 7.3).

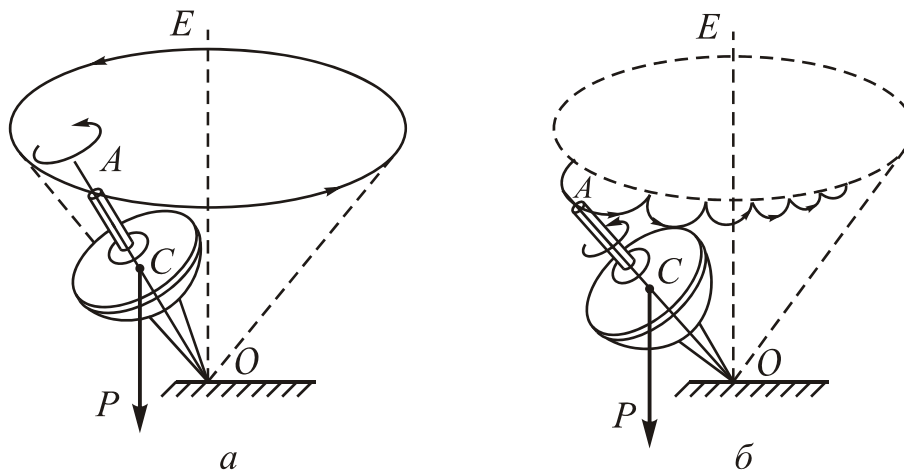


Рис. 7.3. Рух дзиги

Інший приклад прецесійного руху дає артилерійський снаряд (або куля). На снаряд під час його руху, окрім сили (P) тяжіння, діє сила опору (R) повітря, яка направлена проти швидкості центра мас (рис. 7.4, а) і прикладена в точці на осі симетрії снаряда, яка зміщена уперед відносно центра мас.

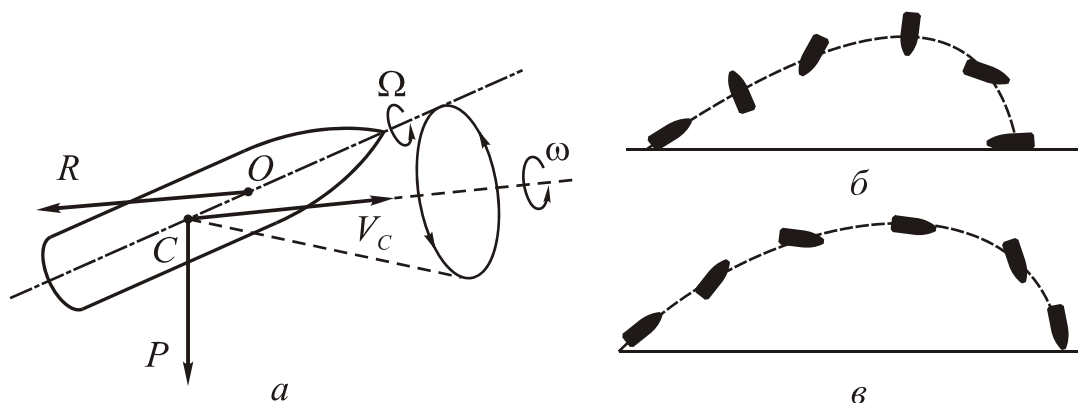


Рис. 7.4. Рух снаряду

Необертний снаряд під дією цієї сили буде перекидатися, і його політ стане безладним (рис. 7.4, б); при цьому значно зросте опір руху вздовж траєкторії, зменшиться дальність польоту. Обертний же снаряд має усі властивості гіроскопа, і сила опору повітря зумовлює його прецесію навколо прямої, уздовж якої направлена швидкість снаряда, тобто навколо дотичної до траєкторії центра мас снаряда (рис. 7.4, в); це робить політ снаряда таким, що його вісь симетрії майже збігається з дотичною до траєкторії протягом усього польоту. Унаслідок цього набагато зменшується опір руху з боку повітря, збільшується

далекість польоту снаряда і забезпечується на спадній гілці траєкторії попадання снаряда у ціль головною його частиною.

Розглянемо основні поняття, які характеризують гіроскоп і використовуються для опису його поведінки.

Назвемо *головною віссю гіроскопа* вісь, жорстко пов'язану з тілом гіроскопа, навколо якої гіроскопу надано швидкого обертання. Цю вісь ще називають віссю власного обертання гіроскопа.

Проекцію миттєвої кутової швидкості гіроскопа на його головну вісь називають *кутовою швидкістю власного обертання гіроскопа*.

Власний кінетичний момент гіроскопа H , за визначенням, – це добуток моменту інерції гіроскопа відносно головної осі на кутову швидкість власного обертання гіроскопа. Інакше кажучи, власний кінетичний момент являє собою проекцію повного вектора \mathbf{K} гіроскопа на його головну вісь. Якщо вісь власного обертання є головною віссю інерції і момент інерції гіроскопа відносно неї позначити через J , а кутову швидкість власного обертання позначити Ω , то

$$H = J\Omega.$$

Величина кутової швидкості Ω жорстко пов'язана з головною віссю гіроскопа. Тому замість неї зручніше розглядати вектор Ω кутової швидкості власного обертання, вважаючи його напрямленим уздовж головної осі гіроскопа. Аналогічно вводиться й поняття *вектора власного кінетичного моменту*

$$\mathbf{H} = J\Omega,$$

який також завжди напрямлений уздовж головної осі.

7.2. Рівняння руху симетричного зрівноваженого гіроскопа

Симетричним гіроскопом називають динамічно симетричне тверде тіло, приведене у швидке обертання навколо його осі фігури і обладнане пристроєм (підвісом), що забезпечує повне вільне повертання у просторі цієї осі власного обертання.

Зрівноваженим (астатичним) називають гіроскоп, центр мас якого збігається з точкою його підвісу.

Далі розглядатиметься поведінка симетричного зрівноваженого гіроскопа (СЗГ), який об'єднує обидві вказані властивості. Прикладом конструктивного втілення СЗГ можна вважати гіроскоп, наведений на рис. 7.1, у випадку, коли його центр мас C суміщено з точкою підвісу O .

В основі теоретичного аналізу поведінки СЗГ лежать рівняння його руху. **Вигляд** рівнянь залежить від того, як саме обрані узагальнені координати, що визначають поточне положення гіроскопа у просторі, і перш за все – положення його головної осі.

Наприклад, якщо кінематику поворотів СЗГ в інерціальному просторі задати у вигляді, поданому на рис. 2.3, то рівняння руху СЗГ у проекціях на осі Резаля матимуть вигляд (2.6).

Якщо ж положення гіроскопа визначати п'ятьма кутами α_K , β_K (див. рис. 2.4) і ψ , ϑ , φ (див. рис. 2.5), то як доведено у п. 2.2, отримаємо рівняння (2.10), (2.13) – (2.15) у формі Булгакова. Ці рівняння спираються на подання закону моментів у *кінетичних осях*, зв'язаних з віссю кінетичного моменту \mathbf{K} гіроскопа. При цьому положення гіроскопа в інерціальному просторі визначається опосередковано, через визначення його положення відносно кінетичних осей.

У цілому рівняння у формі Булгакова є сукупністю шести диференціальних рівнянь першого порядку, які можна поділити на три групи:

- рівняння прецесійного руху (2.10);
- рівняння нутаційного руху (2.13), (2.14);
- рівняння власного обертання (2.15).

Рівняння нутаційного руху можна подати (див. (2.16) – (2.18)) через напрямні косинуси x , y і z осі фігури (головної осі гіроскопа).

Апексом (або вершиною) гіроскопа називають точку перетину головною віссю гіроскопа сфери одиничного радіуса, центр якої збігається з точкою підвісу гіроскопа.

Використані в рівняннях у формі Булгакова кути, що визначають положення гіроскопа в кінетичних осях, показано на рис. 2.5. Напрямні косинуси x , y і z осі фігури в системі координат $x_K y_K z_K$ являють собою декартові координати апексу гіроскопа в цій системі координат.

Деякі загальні властивості руху СЗГ можна встановити, не звертаючись до рівнянь його руху. Для цього розглянемо площину (рис. 7.5), яка проходить через вісь фігури гіроскопа і миттєву вісь його обертання (вектор $\boldsymbol{\omega}$ миттєвої кутової швидкості гіроскопа).

Вісь A у цій площині, перпендикулярна осі фігури, лежить в екваторіальній площині. Тому вона, а також вісь B , яка перпендикулярна як осі A , так і осі фігури, є головними осями інерції гіроскопа, моменти інерції відносно яких дорівнюють екваторіальному J_e . Тому складові кінетичного моменту \mathbf{K} по осях A , B і осі фігури визначаються як добутки моментів інерції відносно відповідної осі і проекції миттєвої кутової швидкості гіроскопа на ту саму вісь:

$$K_A = J_e \omega_e; \quad K_B = J_e \cdot 0 = 0; \quad K_Z = J r = H, \quad (7.2)$$

де ω_e – екваторіальна кутова швидкість гіроскопа (і одночасно – проекція кутової швидкості гіроскопа на вісь A); r – кутова швидкість власного обертання гіроскопа, тобто проекція його кутової швидкості на вісь фігури; J – осьовий момент інерції гіроскопа; H – власний кінетичний момент гіроскопа.

З співвідношень (7.2) безпосередньо випливає, що *вісь фігури СЗГ, вектор його миттєвої кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}$ і вектор \mathbf{K} його кінетичного моменту завжди (при будь-якому русі гіроскопа) лежать в одній площині.*

Якщо $J = J_e$, що є характерним для динамічно кулесиметричного гіроскопа, вектор \mathbf{K} кінетичного моменту збігається за напрямком з вектором $\boldsymbol{\omega}$ кутової швидкості гіроскопа.

У випадку сплюсненого гіроскопа ($J > J_e$) вектор \mathbf{K} міститься між віссю фігури і вектором кутової швидкості. У витягнутого гіроскопа ($J < J_e$), навпаки, вектор миттєвої кутової швидкості СЗГ завжди міститься між віссю фігури і вектором кінетичного моменту.

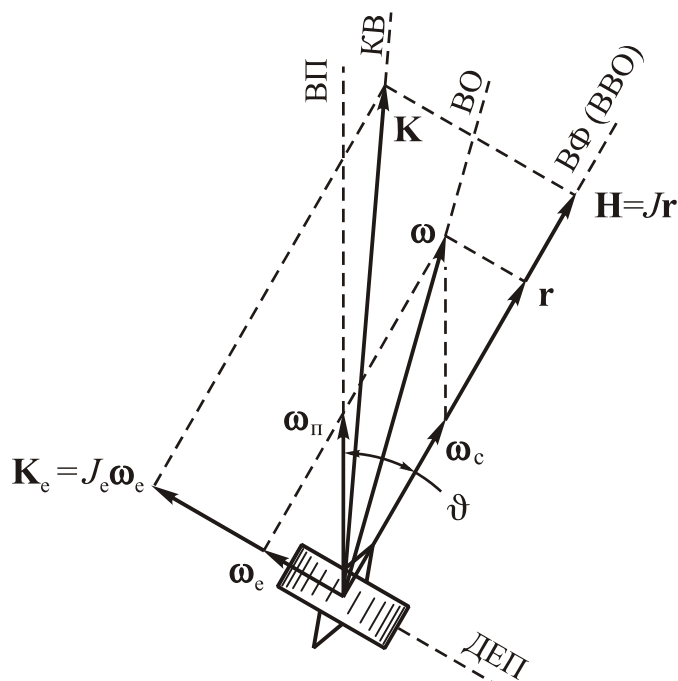


Рис. 7.5. Взаємне розміщення векторів ω , \mathbf{K} і осі фігури СЗГ:
 ВФ – вісь фігури; ДЕП – динамічна екваторіальна площина;
 ВО – вісь обертання; КВ – кінетична вісь; ВП – вісь прецесії;
 ВВО – вісь власного обертання

Вивчення поведінки гіроскопа у тих чи інших умовах зазвичай має на меті виявлення просторового руху головної осі гіроскопа. Саме цей рух є спостережуваним для зовнішнього спостерігача, параметри його можна виміряти і зареєструвати. Власне обертання гіроскопа є непомітним і мало цікавим для спостерігача, тому такий рух називають «прихованим», «неявним» або «ігнорованим».

Для наочного подання визначального, явного руху (просторового руху головної осі гіроскопа) вводиться поняття апексу гіроскопа. Під час руху головної осі у просторі апекс рухається по поверхні сфери, описуючи на ній певну траєкторію. За виглядом і параметрами цієї траєкторії можна судити й про вигляд і параметри просторового руху головної осі. При цьому дуги описаних на поверхні сфери траєкторії являють собою кути повороту головної осі у просторі, виражені в радіанній мірі.

Іноді використовують зручне і більш наближене, дещо спотворене подання. На відстані одиниця від точки підвісу гіроскопа проводять площину, яка не бере участі в русі гіроскопа. Її називають *картинною площиною*. Зазвичай картинну площину вважають нерухомою в інерціальній системі відліку, хоча мож-

ливі випадки, коли зручніше вважати її нерухомою відносно іншої рухомої системи відліку. Рух гіроскопа у просторі приводить до зумовленого ним руху по картинній площині точки перетину головної осі з картинною площиною. Цю точку перетину також називають вершиною гіроскопа. Вона ніби рисує картину руху гіроскопа на вказаній площині, звідси назва «картинна площина».

На відміну від траєкторії апексу на сфері, дуги траєкторії на картинній площині у загальному випадку містять спотворену інформацію про кути повороту гіроскопу.

7.3. Поняття прецесії

Поняття прецесії виникло з астрономії (*praecessio* (лат.) – передування – рух уперед, випередження рівнодення – повільний рух осі вузлів земної орбіти в інерціальному просторі з періодом 26 500 років). *Прецесією називають рух твердого тіла з однією нерухомою точкою, який складається з двох обертань:*

1) навколо осі, жорстко зв'язаної з тілом (яку називають *віссю власного обертання* тіла) з деякою кутовою швидкістю ω_b ;

2) навколо деякої нерухомої осі (її називають *віссю прецесії*) з певною іншою кутовою швидкістю ω_p .

При цьому вважається, що осі власного обертання і прецесії не збігаються одна з одною. Кут між осями векторів ω_b (*власної кутової швидкості*) і ω_p (*кутової швидкості прецесії*) позначимо через ϑ .

Прецесією симетричного гіроскопа навколо деякої нерухомої осі, яку називають віссю прецесії, будемо вважати такий рух, за якого гіроскоп здійснює власне обертання навколо своєї осі фігури, а ось фігури, у свою чергу, обертається навколо осі прецесії, складаючи з нею деякий кут ϑ (рис. 7.5). Як неважко помітити, гіроскоп обертається відносно площини, в якій міститься вісь фігури і вісь прецесії, з деякою кутовою швидкістю ω_b . Сама площина осі фігури і осі прецесії обертається відносно простору з кутовою швидкістю ω_p , при цьому вектор ω_b складає з напрямком вектора ω_p кут ϑ .

Якщо обидва обертання здійснюються рівномірно і кут між складовими швидкостями є також незмінним, то прецесія називається *регулярною*:

$$\omega_p = \omega_{p0} = \text{const}; \quad \omega_b = \omega_{b0} = \text{const}; \quad \vartheta = \vartheta_0 = \text{const}.$$

Очевидно ω_p і ω_b являють собою складові повної кутової швидкості ω . Через те, що третя складова, перпендикулярна *площині прецесії* (площині, яка проходить через вісь фігури і вісь прецесії) в силу незмінності кута ϑ дорівнює нулю, то ω_b і ω_p при регулярній прецесії повністю визначають собою вектор ω , який лежить у цьому випадку в площині прецесії (див. рис. 7.6).

Кутова швидкість ω_b називається *власною кутовою швидкістю* гіроскопа (не плутати з кутовою швидкістю \mathbf{r} власного обертання, спрямованою також по осі фігури, але яка не збігається з нею за значенням), а кутова швидкість – ω_p – *кутовою швидкістю прецесії*. Круговий конус з вершиною у нерухомому центрі O , який описує вісь фігури при її обертанні навколо осі прецесії, називається *конусом прецесії*.

Кутом ϑ_{Π} називатимемо кут між векторами $\boldsymbol{\omega}$ і $\boldsymbol{\omega}_{\Pi}$, кутом ϑ_{ω} – кут між $\boldsymbol{\omega}$ і $\boldsymbol{\omega}_B$. Кут ϑ називатимемо *кутом прецесії*.

Оскільки всі елементи паралелограма кутових швидкостей (рис. 7.6) за регулярної прецесії є незмінними, незмінними будуть також величина кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}$ гіроскопа і кути ϑ_{Π} і ϑ_{ω} , які утворює вектор $\boldsymbol{\omega}$ з віссю прецесії і віссю фігури відповідно.

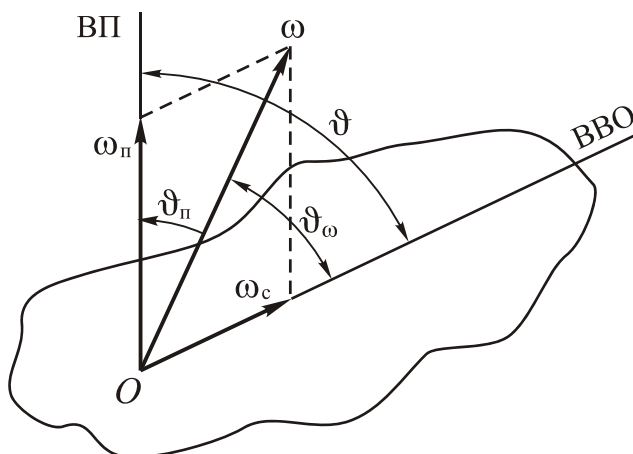


Рис. 7.6. Кінематика прецесії
ВВО – вісь власного обертання; ВП – вісь прецесії

Вектор $\boldsymbol{\omega}$, постійно розміщуючись у площині прецесії, обертається у просторі разом з нею, описуючи з кутовою швидкістю ω_{Π} конус з кутом розхилу $2\vartheta_{\Pi}$ навколо осі прецесії. Розрізняють кілька видів регулярної прецесії в залежності від величини кутів $\vartheta, \vartheta_{\omega}$ і ϑ_{Π} . Якщо кути $\vartheta, \vartheta_{\omega}, \vartheta_{\Pi}$ – гострі, тобто картина регулярної прецесії така, як зображено рис. 7.7, а, прецесія називається *епіциклоїдальною* (табл. 7.1).

У випадку, коли кути ϑ_{Π} і ϑ_{ω} гострі, але у сумі утворюють тупий кут ϑ , прецесія називається *антициклоїдальною* (рис. 7.7, б). Якщо тупим є не тільки кут ϑ між власною кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}_B$ і кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}_{\Pi}$, але й кут ϑ_{ω} між вектором повної кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}$ і вектором $\boldsymbol{\omega}_B$, то прецесія називається *перициклоїдальною* (рис. 7.7, в). Нарешті, будемо називати *гіпоциклоїдальною* прецесію, якщо тупим є кут ϑ_{Π} між векторами кутової швидкості прецесії $\boldsymbol{\omega}_{\Pi}$ і вектором повної кутової швидкості гіроскопа $\boldsymbol{\omega}$ (рис. 7.6, г).

Назви усіх видів прецесії пояснюються тим, що якщо провести на деякій відстані від нерухомої точки O тіла площину, перпендикулярну осі прецесії, то слідом на цій площині будь-якої осі, що проходить крізь точку O , незмінно зв'язана з тілом гіроскопа і не збігається з віссю фігури, буде крива, яка нагадує відповідно епіциклоїду, антициклоїду, перициклоїду і гіпоциклоїду.

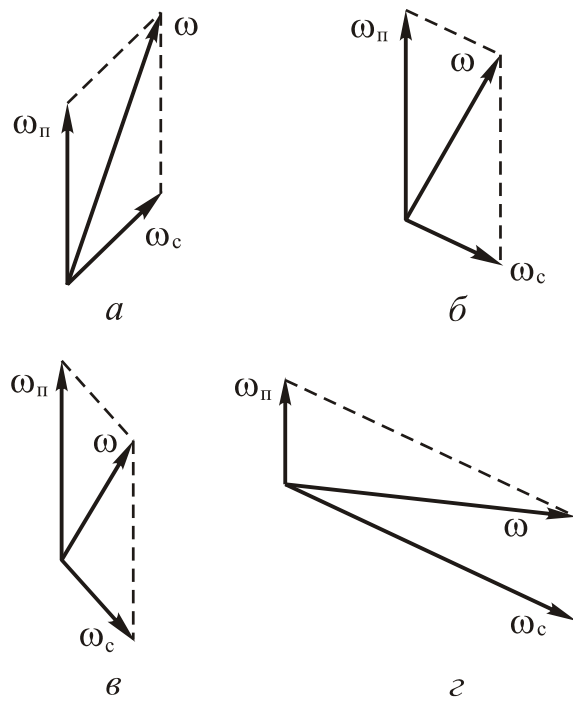


Рис. 7.7. Види регулярної прецесії: а – епіциклоїдальна; б – антициклоїдальна; в – перициклоїдальна; г – гіпоциклоїдальна

Таблиця 7.1. Види прецесії

Вид регулярної прецесії	Кут прецесії ϑ	ϑ_{Π}	ϑ_{ω}
Епіциклоїдальна	$< \frac{\pi}{2}$	$< \frac{\pi}{2}$	$< \frac{\pi}{2}$
Антициклоїдальна	$> \frac{\pi}{2}$	$< \frac{\pi}{2}$	$< \frac{\pi}{2}$
Перициклоїдальна	$> \frac{\pi}{2}$	$< \frac{\pi}{2}$	$> \frac{\pi}{2}$
Гіпоциклоїдальна	$> \frac{\pi}{2}$	$> \frac{\pi}{2}$	$< \frac{\pi}{2}$

Неважко впевнитися, що регулярна прецесія СЗГ можлива лише відносно осі прецесії, яка міститься у площині, що проходить через вісь фігури і вектор миттєвої кутової швидкості гіроскопа (див. рис. 7.5). Надалі вісь, вздовж якої направлений вектор повного кінетичного моменту \mathbf{K} гіроскопа за Б. В. Булгаковим будемо називати *кінетичною віссю*.

Позначимо: δ – кут між кінетичною віссю і віссю фігури; ϑ_{ω} – кут між віссю обертання і віссю фігури і $\vartheta_{k\omega}$ – кут між кінетичною віссю і віссю обертання. З рис. 7.5 випливає

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{K_e}{H} = \frac{J_e \omega_e}{Jr}; \quad \operatorname{tg} \vartheta_{\omega} = \frac{\omega_e}{r},$$

Тому маємо

$$\operatorname{tg} \vartheta_{\omega} = \frac{J}{J_e} \operatorname{tg} \delta,$$

а кут між віссю власного обертання гіроскопа і кінетичною віссю визначається співвідношенням

$$\operatorname{tg} \vartheta_{k\omega} = \operatorname{tg}(\vartheta_{\omega} + \delta) = \frac{\operatorname{tg} \vartheta_{\omega} - \operatorname{tg} \delta}{1 + \operatorname{tg} \vartheta_{\omega} \operatorname{tg} \delta} = \frac{(J - J_e) \operatorname{tg} \delta}{J_e + J \cdot \operatorname{tg}^2 \delta}.$$

Очевидно якщо величина проєкцій кутової швидкості гіроскопа на вісь фігури (r) і екваторіальну площину (ω_e) відомі, тоді всі кути δ , ϑ_{ω} і $\vartheta_{k\omega}$ визначені. Якщо величини кутових швидкостей r і ω_e незмінні, взаємне розташування векторів ω , \mathbf{K} і осі фігури також не змінюється у часі.

Для технічних гіроскопів величина кутової швидкості r становить біля тисячі радіан у секунду. Водночас кутова швидкість повороту осі фігури у просторі (ω_e) не перевищує зазвичай одного радіана за секунду. Звідси випливає, що значення кутів, які складають між собою вісь миттєвого обертання (вектор ω), кінетична вісь (вектор \mathbf{K}) і вісь фігури дуже малі, порядку одної тисячної долі радіана (приблизно три кутові мінуси) і менше.

7.4. Вільний рух симетричного зрівноваженого гіроскопа

Вільним називають симетричний зрівноважений гіроскоп тоді, коли на нього не діють моменти зовнішніх сил.

Найбільш раціонально для аналізу поведінки вільного СЗГ використовувати рівняння у формі Булгакова. При цьому вдається одержати точний розв'язок з наочним уявленням про рух.

Відповідно до визначення вільного СЗГ маємо

$$M_{xK} \equiv M_{yK} \equiv M_{zK} \equiv 0.$$

Тому рівняння (2.10), (2.13) – (2.15) матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} 1) \frac{d\beta_K}{dt} = 0; \quad 2) \frac{d\alpha_K}{dt} = 0; \quad 3) \frac{dK}{dt} = 0; \quad (7.3) \\ 4) \frac{d\psi}{dt} = \lambda; \quad 5) \frac{d\vartheta}{dt} = 0; \quad 6) \frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{1}{J} - \frac{1}{J_e}\right) K \cos \vartheta, \end{aligned}$$

де відповідно до (2.17)

$$\lambda = \frac{K}{J_e}. \quad (7.4)$$

З перших двох рівнянь (7.3) випливає, що кінетична вісь вільного СЗГ залишається нерухомою в інерціальному просторі:

$$\alpha_K(t) = \alpha_{K0} = \text{const}, \quad \beta_K(t) = \beta_{K0} = \text{const},$$

а з третього рівняння випливає незмінність величини повного кінетичного моменту гіроскопа

$$K(t) = K_0 = \text{const}.$$

Тому величина λ , яка визначається співвідношенням (7.4), теж є незмінною за вільного руху СЗГ

$$\lambda = \lambda_0 = \frac{K_0}{J_e} = \text{const}. \quad (7.5)$$

П'яте рівняння приводить до висновку, що кут ϑ між віссю фігури і кінетичною віссю при вільному русі СЗГ залишається незмінним у часі:

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 = \text{const}.$$

Шосте рівняння наводить до висновку, що власна кутова швидкість гіроскопа залишається незмінною у часі:

$$\dot{\phi}(t) = \dot{\phi}_0 = \left(\frac{1}{J} - \frac{1}{J_e}\right)K_0 \cos \vartheta_0 = \text{const}. \quad (7.6)$$

Нарешті четверте рівняння приводить до висновку

$$\dot{\psi}(t) = \dot{\psi}_0 = \lambda_0 = \text{const}. \quad (7.7)$$

Отже за відсутності зовнішніх дій, симетричний врівноважений гіроскоп здійснює обертання з двома кутовими швидкостями:

- навколо осі фігури зі сталою кутовою швидкістю (7.6);

- навколо кінетичної осі зі сталою кутовою швидкістю (7.7).

При цьому кінетична вісь залишається нерухомою в інерціальному просторі. Незмінний і кут між цими двома векторами кутових швидкостей.

У цілому все це підпадає під визначення регулярної прецесії, причому роль власної кутової швидкості відіграє $\dot{\phi}_0$ ($\omega_c = \dot{\phi}_0$), а кутової швидкості прецесії – величина $\dot{\psi}_0$ ($\omega_n = \dot{\psi}_0 = \lambda_0 = \frac{K_0}{J_e}$).

Вільний СЗГ здійснює регулярну прецесію навколо нерухомої в інерціальному просторі осі повного кінетичного моменту гіроскопа. Цей рух називають природною прецесією.

Неважко показати, що природна прецесія сплюсненого гіроскопа завжди є перициклоїдальною, а витягнутого гіроскопа – епіциклоїдальною.

Вільний рух триступеневого гіроскопа, яка полягає у конусоподібних коливаннях головної осі у просторі, називають нутацією.

Цікаво відзначити, що:

1) власна кутова швидкість кулесиметричного гіроскопа дорівнює нулю (площина прецесії обертається у просторі з такою самою швидкістю, що й сам гіроскоп);

2) власна кутова швидкість (7.6) сплюсненого гіроскопа від'ємна, тобто гіроскоп обертається навколо осі фігури з меншою швидкістю, ніж площина прецесії; можна також казати, що у сплюсненому гіроскопі нутація здійснюється швидше за власне обертання;

3) власна кутова швидкість витягнутого гіроскопа додатна, тобто гіроскоп обертається навколо осі фігури з більшою швидкістю, ніж площина прецесії; у витягнутому гіроскопі нутація здійснюється повільніше за власне обертання.

Нутаційні коливання головної осі навколо кінетичної осі можливі лише коли ϑ_0 не дорівнює нулю. Інакше вісь власного обертання гіроскопа залиша-

тиметься нерухомою у просторі, тобто ніякої нутації не спостерігатиметься. Це означає, що для виникнення нутаційних коливань неодмінною умовою є відхилення у початкову момент часу кінетичної осі від осі фігури. А це можливо лише за наявності у цей момент часу початкової екваторіальної складової кутової швидкості гіроскопа. Тоді в динамічній екваторіальній площині виникне складова кінетичного моменту $K_e = J_e \omega_e$, яка й стане причиною відхилення. При цьому кут нахилу кінетичної осі до осі фігури визначиться з виразу:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{K_e}{H} = \frac{J_e \omega_e}{J \Omega},$$

де Ω – кутова швидкість власного обертання гіроскопа навколо його осі фігури.

Якщо у початкову мить осі фігури є нерухомою, то вісь фігури збігається з кінетичною віссю. Розтулити ці дві осі можливо за рахунок нанесення силового удару по осі власного обертання.

Силова ударна дія еквівалентна раптовому змінненню швидкостей точок механічної системи, а отже, – й кінетичної енергії системи. У випадку, коли ударна дія спрямована на тіло з нерухомою точкою, вона призводить до раптового зміннення кутової швидкості тіла.

Розглянемо, що відбувається в результаті дії удару на гіроскоп.

Нехай головна вісь СЗГ (вісь власного обертання, вісь фігури) перед дією удару була нерухомою в інерціальному просторі. З огляду на це кінетична вісь фігури у цей час збігається з віссю фігури, а вектор власного кінетичного моменту \mathbf{H} повністю збігається з вектором \mathbf{K} повного кінетичного моменту $\mathbf{K} = \mathbf{H}$.

Нехай по осі фігури на деякій відстані l від нерухомої точки (точки підвісу гіроскопа) наноситься удар силою \mathbf{F} (рис. 7.8). Ця сила утворює момент \mathbf{M} відносно осі, перпендикулярній як осі фігури, так і напрямку сили (рис. 7.8). Дія удару характеризується не величиною прикладеної сили і навіть не тривалістю Δt дії цієї сили, а їх добутком $\mathbf{F} \Delta t$, який називають *імпульсом сили*. У випадку тіла з нерухомою точкою удар зручніше описувати за допомогою *моменту імпульсу сил* $\mathbf{M} \Delta t = (\mathbf{F} \times \mathbf{l}) \Delta t$.

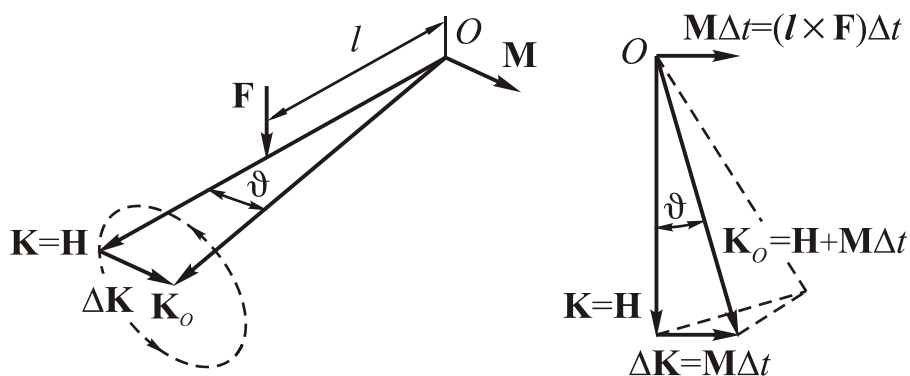


Рис. 7.8. Дія удару на гіроскоп

Із закону моментів $\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{M}$, якщо його подати у вигляді кінцевих приростів, впливає, що приріст вектора повного кінетичного моменту в результаті дії удару дорівнюватиме як за величиною, так і за напрямком вектору моменту імпульсу сил: $\Delta\mathbf{K} = \mathbf{M}\Delta t$.

Отже, внаслідок удару, вектор повного кінетичного моменту, одержавши цей приріст, раптово повернеться на кінцевий кут ϑ в інерціальному просторі і займе нове положення в ньому. Сама вісь фігури набуде при цьому початкової кутової швидкості $\Delta\omega_e = \frac{\mathbf{M}\Delta t}{J_e}$ у напрямку дії моменту, але, як жорстко зв'язана з тілом, внаслідок інерційності тіла і малої тривалості удару, залишиться у тому самому положенні, що й до нанесення удару. Останнє твердження виконується тим точніше, чим менша тривалість удару (за збереження величини ударного імпульсу).

У результаті після удару матимемо раптово повернутий (але надалі нерухомий) вектор повного кінетичного моменту $\mathbf{K}_0 = \mathbf{H} + \mathbf{M}\Delta t$ і залишившийся у тому самому положенні, але набувший швидкості $\Delta\omega_e$ вектор власного кінетичного моменту \mathbf{H} . Кут між ними дорівнюватиме

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\Delta K}{H} = \frac{M\Delta t}{H} = \frac{J_e\Delta\omega_e}{H}. \quad (7.8)$$

Після удару на гіроскоп не діють зовнішні сили (отже – й моменти сил). Тому у подальшому змінений вектор \mathbf{K}_0 повного кінетичного моменту залишатиметься нерухомим у просторі і незмінним за величиною. Вектор же власного кінетичного моменту, теж залишаючись незмінним за величиною, повертатиметься у просторі, описуючи навколо нього конічну поверхню.

Щоб визначити кутову швидкість λ обертання осі фігури навколо кінетичної осі, діятимемо у такий спосіб. Визначимо лінійну радіальну швидкість $V = H\Delta\omega_e$ кінця вектора \mathbf{H} , яку він набуває внаслідок удару, і поділимо її на відстань $x = \Delta K \cos\vartheta$ цієї точки від осі повного кінетичного моменту (див. рис. 7.8). В результаті виходить

$$\lambda = \frac{V}{x} = \frac{H\Delta\omega_e}{J_e\Delta\omega_e \cos\vartheta} = \frac{H}{J_e} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\vartheta} = \frac{H}{J_e} \frac{\sqrt{\Delta K^2 + H^2}}{H} = \frac{K_0}{J_e},$$

що збігається з виразом (7.5).

Кут ϑ між осями повного і власного кінетичних моментів у розглядуваному випадку є *амплітудою нутаційних коливань* осі фігури гіроскопа в його вільному русі, а λ являє собою *частоту цих нутаційних коливань*.

Цікаво встановити зв'язок між розглянутим рухом гіроскопа і рухом того самого тіла у тих самих умовах, але якому попередньо не надано власного обертання.

Якщо поступово зменшувати величину власного кінетичного моменту H , то, як це впливає з (7.8) величина кута між віссю фігури і нерухомою віссю, навколо якої обертатиметься перша вісь, буде збільшуватися, і гранично, при

$H=0$, дорівнюватиме $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. У цьому граничному випадку конус нутації вироджується у площину, тобто внаслідок удару вісь фігури набуде кутової швидкості $\Delta\omega_e = \frac{M\Delta t}{J_e}$ у напрямку ударного імпульсу і надалі буде обертатися у площині, що проходить через вісь фігури і силу удару з цією сталою швидкістю. При цьому частота нутації дорівнюватиме набутій кутовій швидкості $\Delta\omega_e$. Це повністю відповідає відомому поведженню твердого тіла під дією удару.

Апекс гіроскопа під час його вільному руху описує на поверхні сфери одиничного радіуса траєкторію у вигляді кола. Центр цього кола є нерухомим і збігається зі слідом кінетичної осі на сфері.

7.5. Симетричний зрівноважений гіроскоп під дією постійного моменту сил

Розглянемо поведження гіроскопа, якщо на нього діє постійний момент зовнішніх сил, лінія дії якого спрямована по осі y_k . Тобто,

$$M_{xk} = M_{zk} = 0; \quad M_{yk} = M_0 = \text{const}.$$

Для дослідження руху скористаємося рівняннями у формі Булгакова, які в цьому випадку набудуть вигляду

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\beta_k}{dt} = 0; \\ \frac{d\alpha_k}{dt} = -\frac{M_0}{K \cos\beta_k}; \\ \frac{dK}{dt} = 0; \end{array} \right. \quad (7.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} + \lambda y = 0; \\ \frac{dy}{dt} - \lambda x = -\frac{M_0}{K} z; \end{array} \right. \quad (z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}), \quad (7.10)$$

причому

$$\lambda = \frac{K}{J_e} + \frac{M_0}{K} \text{tg}\beta_k.$$

Проінтегрувавши рівняння (7.9), можна зробити висновок, що

$$\beta_k \equiv \beta_{k_0} = \text{const}; \quad K = K_0 = \text{const}; \quad \frac{d\alpha_k}{dt} = -\frac{M_0}{K_0 \cos\beta_{k_0}} = \text{const}. \quad (7.12)$$

Звідси випливає, що й величина λ , яка характеризує кутову швидкість обертання осі фігури навколо кінетичної осі, теж залишається сталою:

$$\lambda = \lambda_0 = \frac{K_0}{J_e} + \frac{M_0}{K_0} \text{tg}\beta_{k_0} = \text{const} \quad (7.13)$$

Інтегрування рівнянь (7.10) проведемо наближено, вважаючи, що величини x і y відхилення вершини гіроскопа від кінетичної осі набагато менші від одиниці

$$x \ll 1; \quad y \ll 1. \quad (7.14)$$

На з'ясуванні умов, за яких такі припущення можна вважати справедливими, зупинимось пізніше.

Наближеність інтегрування буде полягати у заміні величини z одиницею у правій частині другого рівняння (7.10), бо відповідно до (2.18) і умови (7.14), матимемо

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \approx 1 - \frac{x^2 + y^2}{2} \approx 1$$

З урахуванням цієї обставини рівняння (7.10) по координатах x і y можна розглядати як систему лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + \lambda_0 y = 0; \\ \frac{dy}{dt} - \lambda_0 x = -\frac{M_0}{K_0}. \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи по координатах x і y відповідно до загальної теорії диференціальних рівнянь являє собою (див. п. 3.2.2) суму загального розв'язку однорідної системи диференціальних рівнянь і окремого (частинного) розв'язку неоднорідної системи

$$\begin{cases} x = x_{3.0} + x_{ч.н} \\ y = y_{3.0} + y_{ч.н} \end{cases}$$

Розв'язок однорідних рівнянь має вигляд

$$x_{3.0} = C \sin(\lambda_0 t + \varphi); \quad y_{3.0} = -C \cos(\lambda_0 t + \varphi),$$

де C і φ визначаються початковими умовами.

Частинний розв'язок неоднорідних рівнянь, через те, що права частина рівнянь є постійною величиною, має форму

$$x_{ч.н} = \frac{M_0}{\lambda_0 K_0}; \quad y_{ч.н} = 0.$$

Отже, повний розв'язок можна подати у вигляді

$$x = C \sin(\lambda_0 t + \varphi) + \frac{M_0}{\lambda_0 K_0}; \quad y = -C \cos(\lambda_0 t + \varphi). \quad (7.15)$$

Розглянемо частковий, але практично важливий випадок раптового прикладення моменту сил, який характеризується тим, що у початковий момент часу вісь фігури гіроскопа (вектор \mathbf{H}) і кінетична вісь (вектор \mathbf{K}) збігаються. Тоді початкові умови для (7.15) будуть такими:

$$x(0) = 0; \quad y(0) = 0.$$

Сталі C і φ за таких умов визначаються співвідношеннями

$$\varphi = \frac{\pi}{2}; \quad C = -\frac{M_0}{\lambda_0 K_0},$$

звідки випливає

$$x = \frac{M_0}{\lambda_0 K_0} [1 - \cos(\lambda_0 t)]; \quad y = -\frac{M_0}{\lambda_0 K_0} \sin(\lambda_0 t).$$

Отже, вісь фігури описує в кінематичному триграннику $x_K y_K z_K$ коловий конус навколо осі z^* , повернутій навколо осі y_K дії моменту сил відносно положення осі z_K повного кінетичного моменту \mathbf{K} на кут ϑ^* , значення якого визначається формулою

$$\cos \vartheta^* = \cos(x_K, z^*) = \sin(z_K, z^*) = \sin \vartheta^* = \frac{M_0}{\lambda_0 K_0}.$$

Траєкторія апекса гіроскопа на спеціальній картинній площині, яка є перпендикулярною до кінетичної осі, наведена на рис. 7.9. Як було раніше зазначено, напрямні косинуси x і y одночасно є декартовими координатами апекса в системі координат $x_K y_K z_K$, а отже й координатами апексу в цій картинній площині.

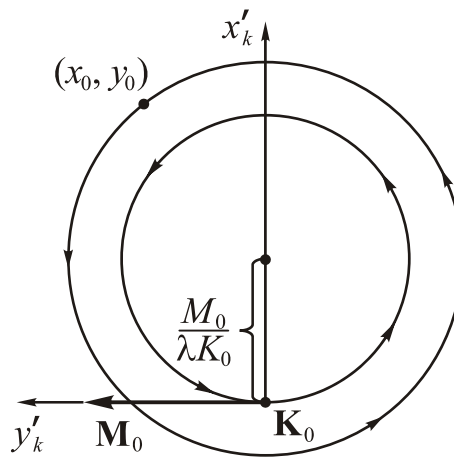


Рис. 7.9. Траєкторія руху апекса гіроскопа в кінетичних осях

Якщо початкові умови – довільні, то відмінність буде полягати лише в тому, що конус траєкторії осі фігури буде проходити через початкову точку x_0, y_0 (рис. 7.9). При цьому зміниться лише радіус конусу (амплітуда коливань осі фігури), а центр (положення центральної осі конуса) залишиться на тому самому місці.

Підводячи підсумки, зазначимо, що під дією моменту зовнішніх сил M_0 гіроскоп здійснює складний рух у вигляді потрійного обертання з наступними особливостями:

1) вісь кінетичного моменту рівномірно описує коловий конус навколо нерухомої осі ξ , яка перпендикулярна до лінії дії моменту M_0 , з кутовою шви-

дкістю $\dot{\alpha}_K$ (7.12), яку можна інтерпретувати як кутову швидкість *вимушеної прецесії* під дією зовнішнього моменту сил

$$\omega_{\text{пр}} = \dot{\alpha}_K = -\frac{M_0}{K_0 \cos \beta_{K0}}; \quad (7.16)$$

2) вісь фігури обертається по конусу навколо осі (яка у власну чергу обертається у просторі сумісно з кінетичними осями) з постійною кутовою швидкістю (7.13)

$$\lambda = \frac{K_0}{J_e} \left(1 + \frac{J_e M_0}{K_0^2} \operatorname{tg} \beta_{K0} \right); \quad (7.17)$$

цей рух можна ототожнити з раніше визначеними нутаційними коливаннями; але у випадку дії сталого моменту сил ці коливання здійснюються не навколо кінетичної осі гіроскопа, а навколо осі, яка повернута відносно кінетичної осі на сталий кут ϑ^* , значення якого визначається виразом

$$\sin \vartheta^* = \frac{M_0}{\lambda_0 K_0};$$

при цьому вже кут ϑ між віссю фігури і кінетичною віссю не залишається сталим, а кут ψ не збільшується рівномірно; амплітуда нутаційних коливань залежить від початкових умов;

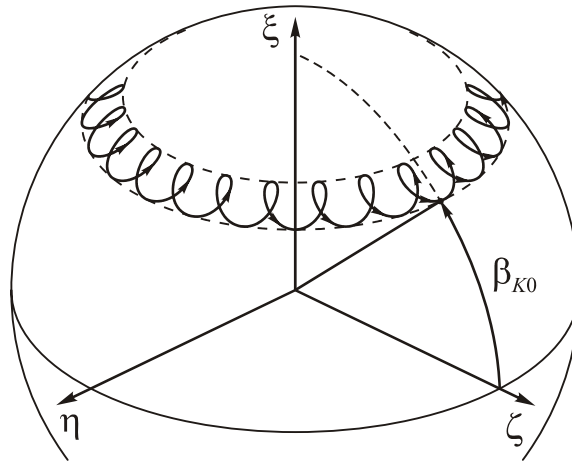


Рис. 7.10. Траєкторія руху апекса гіроскопа в інерціальному просторі

3) тіло гіроскопа обертається навколо осі фігури відносно площини, що проходить через кінетичну вісь і вісь фігури, з власною кутовою швидкістю

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{1}{J} - \frac{1}{J_e} \right) K_0 \cos \vartheta + \frac{M_0 \cos \psi}{K_0 \sin \vartheta}.$$

У цілому траєкторія апекса гіроскопа являє собою спіраль (рис. 7.10), середнє положення якої дещо зміщене відносно кінетичної осі (це зміщення залежить тільки від величини і напрямку прикладеного постійного моменту сил і не залежить від початкових умов) і рівномірно обертається навколо нерухомої осі ξ .

7.6. Поняття швидкого гіроскопа. Псевдорегулярна прецесія

Уведемо у розгляд безрозмірну величину, що дорівнює відношенню кутової швидкості нутації до кутової швидкості прецесії:

$$n = \frac{\lambda}{\dot{\alpha}_K} = \frac{\lambda}{\omega_{\text{пр}}} \approx \frac{K_0^2}{J_e M_0} \approx \frac{J^2 \Omega^2}{J_e M_0}. \quad (7.18)$$

Її зручно інтерпретувати як кількість циклів нутації, що вкладається у проміжок часу, відповідний одному циклу прецесії

$$n = \frac{T_{\text{пр}}}{T_{\text{нут}}}, \quad (7.19)$$

де $T_{\text{пр}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{пр}}}$ – період прецесії, $T_{\text{нут}} = \frac{2\pi}{\lambda}$ – період нутації.

Цією величиною можна характеризувати *ступінь швидкості гіроскопа*.

Швидким називають такий гіроскоп, кількість нутацій в одному циклі прецесії якого є великою (наприклад, $n > 10\,000$).

Неважко збагнути, що це поняття стає певним лише для гіроскопа, на який діє деякий момент сил, бо без дії зовнішнього моменту сил не буде і вимушеної прецесії гіроскопа. Отже поняття «швидкості» гіроскопа стає визначеним лише за умови, що відома величина моменту сил, що діють на нього.

Для прикладу, обчислимо порядок цієї величини для технічного гіроскопа.

Гіроскоп напрямку системи керування торпеди має власний кінетичний момент порядку $H = 1 \text{ Н м с}$, екваторіальний момент інерції $J_e = 10 \text{ сН см}^2$. Максимальний момент сил сухого тертя, що може діяти на такий гіроскоп, складає величину не більше за $M = 10 \text{ сН см}$. Тому для цього гіроскопа $n \approx \frac{H^2}{J_e M_0} = 1 \cdot 10^6$, тобто в одному циклі вимушеної прецесії гіроскопа під дією цього моменту сил уміщуються мільйон циклів його власних коливань (нутації).

Величина n визначає багато параметрів руху гіроскопа. Наприклад, середнє положення осі фігури відхилено від кінетичної осі на кут (7.23) $\vartheta^* \approx \frac{1}{n}$.

Для технічного гіроскопа цей кут дорівнює

$$\vartheta^* = 10^{-6} = 5^\circ,7296 \cdot 10^{-5} = 3',4377 \cdot 10^{-3} = 0'',20626.$$

Як бачимо, це відхилення настільки мале, що його неможливо виміряти навіть найточнішими сучасними вимірювачами кутів. У цьому випадку можна вважати, що кінетична вісь практично збігається з віссю фігури, а власний кінетичний момент H практично дорівнює повному кінетичному моменту гіроскопа K_0 .

Окрім того, у виразі (7.17) для частоти власних коливань за цих умов можна нехтувати другим доданком у дужках порівняно з одиницею і вважати

$$\lambda = \frac{K_0}{J_e}.$$

Оскільки у разі раптового прикладення моменту сил амплітуда нутаційних коливань також дорівнює $\vartheta_m = 1/n$, нутаційні коливання швидкого гіроскопа стають практично непомітними.

У результаті рух гіроскопа видається спостерігачеві як регулярна прецесія осі фігури навколо нерухомої осі, і тому рух гіроскопа під дією сталого моменту сил отримав назву *псевдoreгулярної прецесії*.

Отже, *швидкий СЗГ під дією постійного моменту сил здійснює псевдoreгулярну прецесію навколо нерухомої в інерціальному просторі осі*.

7.7. Земля як гіроскоп

Відомо, що фігура планети Земля являє собою дещо сплющений вздовж осі власного обертання еліпсоїд обертання. Тому можна вважати Землю симетричним зрівноваженим гіроскопом, вісь фігури якого збігається з віссю географічних полюсів. Період власного обертання Земля дорівнює одній добі, точніше

$$T_Z = 23 \text{ год } 56 \text{ хв } 4,1 \text{ с} = 86\,164 \text{ с}.$$

Під дією збурювальних моментів сил тяжіння з боку Сонця і Місяця екваторіального потовщення Землі вісь обертання Землі здійснює повільну прецесію навколо перпендикуляра до площини екліптики з кутовою швидкістю $50''$,24 за рік, тобто період прецесії дорівнює $T_{пр} = 25\,796$ років.

Період нутації Землі як твердого тіла через те, що екваторіальний і осьовий моменти інерції Землі майже однакові, практично дорівнює одній добі

$$T_{нут} = \frac{2\pi}{\lambda} \approx \frac{2\pi J_e}{H} = \frac{J_e}{J} \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{J_e}{J} T_Z \approx T_Z.$$

Із виразу (7.19) можна визначити параметр «швидкості» Землі як гіроскопа

$$n = \frac{T_{пр}}{T_{нут}} \approx \frac{25796 \cdot 365}{1} \approx 9,4156 \cdot 10^6 \approx 10^7.$$

Як бачимо, Земля є настільки ж швидким гіроскопом, як і технічні гіроскопи.

Оскільки всі вимірювання на Землі здійснюються у системі координат, жорстко зв'язаній з поверхнею обертової Землі, рух Землі більш практично розглядати за динамічними рівняннями Ейлера, які, як відомо, мають вигляд:

$$\begin{cases} J_X \frac{d\omega_X}{dt} + (J_Z - J_Y)\omega_Y\omega_Z = M_X \\ J_Y \frac{d\omega_Y}{dt} + (J_X - J_Z)\omega_X\omega_Z = M_Y \\ J_Z \frac{d\omega_Z}{dt} + (J_Y - J_X)\omega_X\omega_Y = M_Z \end{cases}$$

Припускається, що XYZ – декартова система координат, жорстко зв'язана з тілом, координатні осі цієї системи є головними осями інерції; J_X, J_Y, J_Z – моменти інерції тіла відносно цих осей; $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$ – проекції абсолютної кутової швидкості тіла на вказані осі; M_X, M_Y, M_Z – проекції на ті самі осі вектора моменту зовнішніх сил відносно початку вказаної системи координат.

Застосовуючи ці рівняння для опису обертального руху планети Земля, введемо систему координат XYZ , жорстко пов'язану з Землею, і вважатимемо:

- 1) початок цієї системи координат міститься у центрі мас Землі;
- 2) вісь Z напрямлена вздовж лінії географічних полюсів, а осі X і Y лежать у площині екватора Землі;
- 3) Земля є динамічно симетричним твердим тілом, вісь фігури якого збігається з віссю полюсів; момент інерції відносно осі фігури $J_Z = J$, екваторіальний момент інерції $J_X = J_Y = J_e$.

З врахуванням цього, рівняння Землі набудуть вигляду:

$$\begin{cases} J_e \frac{d\omega_X}{dt} + \Delta J \omega_Y \omega_Z = M_X; \\ J_e \frac{d\omega_Y}{dt} - \Delta J \omega_X \omega_Z = M_Y; \\ J \frac{d\omega_Z}{dt} = M_Z, \end{cases}$$

де позначено

$$\Delta J = J - J_e.$$

Розглянемо вільний рух Землі, який описується рівняннями

$$\begin{cases} \frac{d\omega_X}{dt} + k\omega_Y = 0; \\ \frac{d\omega_Y}{dt} - k\omega_X = 0; \end{cases} \quad \left(k = \frac{\Delta J}{J_e} \Omega \right),$$

де $\Omega = \omega_Z = \text{const}$ – стала кутова швидкість власного обертання Землі навколо лінії полюсів.

Розв'язок цієї системи рівнянь має вигляд:

$$\omega_X = C \cos(kt + \varepsilon); \quad \omega_Y = C \sin(kt + \varepsilon),$$

де C і ε – сталі інтегрування, що визначаються початковими умовами. З цього випливає, що екваторіальна складова кутової швидкості Землі залишається весь

час незмінною за величиною $\omega_e = \sqrt{\omega_X^2 + \omega_Y^2} = C$. Вектор екваторіальної кутової швидкості Землі обертається з частотою k відносно поверхні Землі.

У цілому миттєва вісь обертання Землі описує конічну поверхню в земній системі координат XYZ з кутом розхилу $\Delta\vartheta \approx \frac{C}{\Omega}$, а її слід на поверхні Землі описує коло радіусом $\Delta r \approx \frac{C}{\Omega} R_Z$ (R_Z – радіус Землі). Ці коливання спричиняють виникнення ефекту, який називається варіацією широти, і добре спостерігається на досліді.

Оцінимо частоту k цих коливань, вважаючи Землю однорідним еліпсоїдом обертання, моменти інерції якого визначаються формулами

$$J_e = \frac{1}{5} m(a^2 + b^2); \quad J = \frac{2}{5} ma^2.$$

Тут m – маса Землі, a – її екваторіальний радіус, b – полярний радіус. З цього маємо:

$$\frac{\Delta J}{J_e} = \frac{J - J_e}{J_e} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

Приймаючи $a = 6378$ км, $b = 6357$ км, отримаємо $\frac{\Delta J}{J_e} = 3,29 \cdot 10^{-3}$.

Отже, період очікуваних коливань миттєвої осі обертання Землі на її поверхні має бути $T_k = T_Z \frac{J_e}{\Delta J} \approx 304$ діб.

Графіки спостережуваного руху полюса Землі по її поверхні наведені на рис. 7.11 [2].

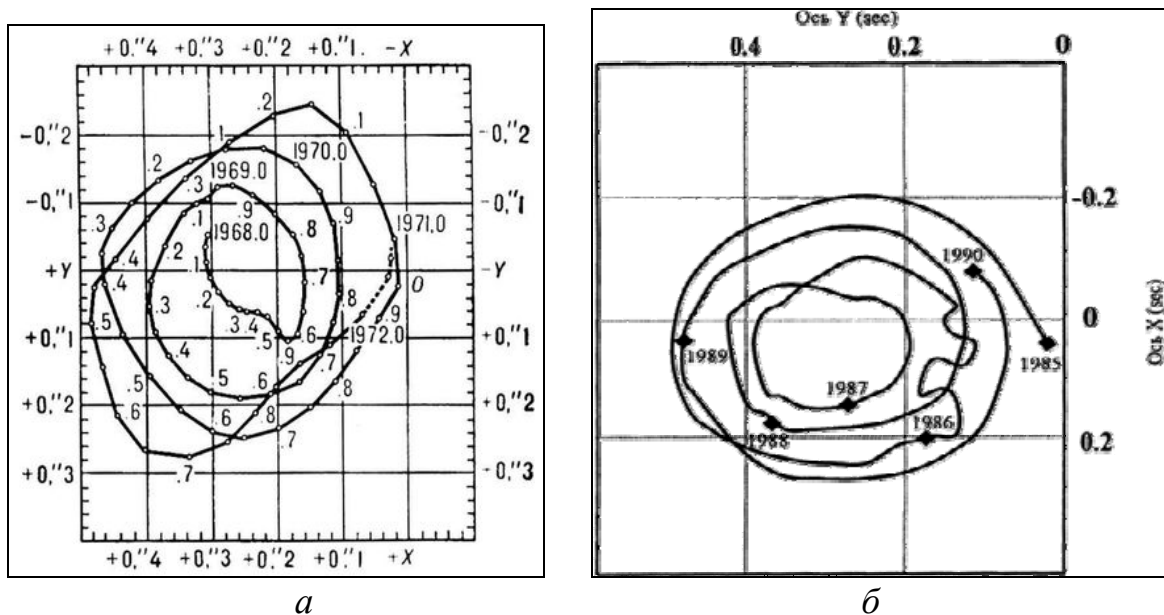


Рис. 7.11. Рух Північного полюса Землі а) с 1968 по 1972; б) з 1985 по 1990 роки ($0''{,}1$ відповідає 315 см на поверхні Землі).

Спостережуваний рух у дійсності має річну компоненту (яка інтерпретується як вимушені коливання) і вільні коливання з періодом 420 діб. Наприкінці XIX ст. Ньюкомб показав, що такий період власних коливань Землі як гіроскопа може бути зумовлений деформацією Землі.

Вільна складова коливань вдається загасаючою з часом загасання 30 років, або навіть менше, і містить інформацію про дисипативні характеристики Землі. Однак досі не з'ясовано, що саме підтримує цей рух.

7.8. Прецесійні рівняння. Наближена теорія гіроскопа

Як було встановлено, при дії на швидкий гіроскоп сталого моменту сил вектор власного кінетичного моменту \mathbf{H} як за величиною, так і за напрямком майже збігається з вектором \mathbf{K} повного кінетичного моменту гіроскопа. Виникає питання: чи можливо за таких умов нехтувати різницею між векторами \mathbf{H} і \mathbf{K} задля спрощення опису руху гіроскопа? Відповідь є ствердною. Але слід мати на увазі, що за такого ототожнення векторів \mathbf{H} і \mathbf{K} приходять до наближених рівнянь, які не повною мірою якісно і кількісно відображують особливості поведінки гіроскопа. Такі рівняння називають *прецесійними рівняннями гіроскопа*.

Складемо ці рівняння. Для цього достатньо у виразі закону моментів $\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{M}$ замінити вектор \mathbf{K} повного кінетичного моменту на вектор \mathbf{H} власного кінетичного моменту:

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \mathbf{M}.$$

Вектор \mathbf{H} постійно (за визначенням) направлений вздовж головної осі (у випадку СЗГ – уздовж осі фігури). Нехай у системі координат XYZ вісь Z направлена вздовж головної осі гіроскопа. Позначимо через ω^P абсолютну кутову швидкість цієї системи, і скористаємося для визначення скалярних рівнянь гіроскопа правилом диференціювання вектора в обертовій системі координат:

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{H}}{dt} + \boldsymbol{\omega}^P \times \mathbf{H} = \mathbf{M}. \quad (7.20)$$

Проеціюючи це векторне рівняння на осі системи координат XYZ , дістанемо

$$\begin{cases} \frac{dH_X}{dt} + \omega_Y^P H_Z - \omega_Z^P H_Y = M_X \\ \frac{dH_Y}{dt} + \omega_Z^P H_X - \omega_X^P H_Z = M_Y \\ \frac{dH_Z}{dt} + \omega_X^P H_Y - \omega_Y^P H_X = M_Z \end{cases}$$

Оскільки вектор \mathbf{H} направлений вздовж головної осі, його проекції дорівнюють $H_X \equiv H_Y \equiv 0$; $H_Z = H$. Окрім того, з того, що вісь Z є головною віссю

фігури гіроскопа і нерухомою відносно тіла гіроскопа, впливає, що $\omega_Y^P = \omega_Y$ і $\omega_X^P = \omega_X$, де ω – вектор абсолютної кутової швидкості гіроскопа. Тому виходять наступні прецесійні рівняння гіроскопа

$$\begin{cases} \omega_Y H = M_X \\ -\omega_X H = M_Y \\ \frac{dH}{dt} = M_Z \end{cases} \quad (7.21)$$

Ці прецесійні рівняння гіроскопа лежать в основі наближеної теорії гіроскопів.

Використання наближеної теорії дозволяє суттєво спростити теоретичний аналіз руху гіроскопічних приладів, особливо у складних випадках руху основи і виявити чимало ефектів, що спричиняють значні похибки приладів.

Очевидно, що наближеність прецесійних рівнянь руху гіроскопа зумовлена використанням ототожнюванням векторів повного і власного кінетичних моментів, які насправді є різними і рухаються у просторі по-різному. Тому використання прецесійних рівнянь унеможливорює вивчення власних (нутаційних) коливань, а також вимушеного руху під дією моментів зовнішніх сил, які змінюються у часі періодично з великою частотою (близькою, або більшою за частоту нутаційних коливань). Покажемо це, аналізуючи точні рівняння у формі Булгакова, які були названі рівняннями прецесійного (2.10) і нутаційного рухів (2.13) і (2.14).

Точні рівняння (2.10) прецесійного руху нагадують наближені прецесійні рівняння (7.21). Головна відмінність полягає у наступному. Точні рівняння описують рух не самого гіроскопа, а лише вектора його кінетичного моменту. Прецесійні ж рівняння виражають рух саме головної осі, але не точно, а лише наближено.

Нехай на гіроскоп діє постійний за величиною момент уздовж осі y_K . Тоді, як впливає з рівнянь (7.9), вектор кінетичного моменту \mathbf{K} здійснює рівномірне обертання навколо нерухомої осі ξ зі швидкістю, пропорційною величині моменту сил. Водночас дія такого моменту сил призведе (відповідно до рівнянь (7.10) нутаційного руху) спричиняє певне зміщення центра нутаційних коливань відносно кінетичної осі. Це зміщення є постійним (при постійній величині моменту сил) і дуже мале для швидкого гіроскопу

$$x^* = \frac{M_0}{\lambda_0 K_0} \approx \frac{M_0 J_e}{K_0^2} = \frac{1}{n}.$$

З цього впливає, що носієм вимушеної прецесії гіроскопа є його кінетична вісь. Саме вона бере участь в обертанні з постійною кутовою швидкістю, величина якої визначається величиною діючого моменту сил. А вісь фігури лише незначно відхиляється від кінетичної осі і здійснює нутаційні коливання навколо цього нового центра, беручи одночасно участь у прецесійному русі сумісно з кінетичною віссю. Із припиненням дії моменту сил кінетична вісь у той же момент часу зупиняється, а вісь фігури продовжує рухатися по інерції, здій-

снюючи нутаційні коливання по конусу тепер вже навколо самої кінетичної осі. Звідси випливає, що вимушений прецесійний рух можна вважати безінерційним. Інерційним є лише власний нутаційний рух гіроскопа.

Якщо власний кінетичний момент гіроскопа є сталим за величиною, локальна похідна від нього стає рівною нулю і векторне рівняння (7.20) набуває вигляду:

$$\boldsymbol{\omega}^P \times \mathbf{H} = \mathbf{M}. \quad (7.22)$$

У такій формі воно відображує векторну форму закону прецесії: **векторний добуток кутової швидкості прецесії на вектор власного кінетичного моменту гіроскопа дорівнює моменту зовнішніх сил, що діють на гіроскоп.**

З цього випливає таке *правило прецесії*: **під дією моменту зовнішніх сил головна вісь гіроскопа прецесує з постійною кутовою швидкістю у такий спосіб, що вектор його кінетичного моменту прагне по найкоротшому шляху суміститися з вектором діючого моменту сил.**

Щоб наочно уявити собі механізм, завдяки якому дія моменту сил зумовлює не прискорений рух тіла навколо осі моменту, а лише рівномірне обертання тіла, причому навколо осі, перпендикулярної до осі дії моменту (а також до осі власного кінетичного моменту), уведемо поняття гіроскопічного моменту. Гіроскопічним моментом називають момент сил інерції коріолісового прискорення, який виникає у разі повороту осі фігури гіроскопа з постійною кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}^P$ в інерціальному просторі. Він визначається формулою

$$\mathbf{M}^{\text{гір}} = \mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega}^P.$$

Дійсно, у цьому випадку на будь-яку точку гіроскопа масою dm і радіусом-вектором \mathbf{r} (відносно точки підвісу) «діє» сила інерції $d\mathbf{F}^{ih} = -\mathbf{w}_c dm$, обумовлена прискоренням Коріоліса $\mathbf{w}_c = 2\boldsymbol{\omega}^P \times \mathbf{v}$, де \mathbf{v} – вектор відносної швидкості відповідної точки гіроскопа (відносно осей Резаля). Момент сил інерції усіх таких сил відносно тієї ж точки підвісу можна подати як інтеграл за об'ємом гіроскопа

$$\mathbf{M}^{\text{гір}} = \int_{(V)} \mathbf{r} \times d\mathbf{F}^{ih} = - \int_{(V)} \mathbf{r} \times \mathbf{w}_c dm = -2 \int_{(V)} \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega}^P \times \mathbf{v}) dm.$$

Відносна ж швидкість визначається співвідношенням $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$, тому момент сил інерції коріолісова прискорення набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{\text{гір}} &= -2 \int_{(V)} \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega}^P \times \mathbf{v}) dm = -2 \left\{ \int_{(V)} \boldsymbol{\omega}^P (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) dm - \int_{(V)} \mathbf{v} (\boldsymbol{\omega}^P \cdot \mathbf{r}) dm \right\} = \\ &= 2 \int_{(V)} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) (\boldsymbol{\omega}^P \cdot \mathbf{r}) dm, \end{aligned} \quad (7.23)$$

бо $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{r} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \equiv 0$.

Далі перейдемо до подання гіроскопічного моменту у координатно-векторній формі в осях Резаля. Маємо:

$$\boldsymbol{\omega}^P = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}; \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}; \quad \boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{k}.$$

Тому

$$\boldsymbol{\omega}^P \cdot \mathbf{r} = \omega_X x + \omega_Y y + \omega_Z z; \quad \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = -\Omega y \mathbf{i} + \Omega x \mathbf{j}.$$

Врахуємо це у (7. 23):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{\text{гір}} &= 2 \int_{(V)} (-\Omega y \mathbf{i} + \Omega x \mathbf{j})(\omega_X x + \omega_Y y + \omega_Z z) dm = \\ &= 2 \left\{ -\Omega \mathbf{i} \left[\omega_X \int_{(V)} xy dm + \omega_Y \int_{(V)} y^2 dm + \omega_Z \int_{(V)} yz dm \right] + \right. \\ &\quad \left. + \Omega \mathbf{j} \left[\omega_X \int_{(V)} x^2 dm + \omega_Y \int_{(V)} xy dm + \omega_Z \int_{(V)} xz dm \right] \right\}. \end{aligned}$$

Візьмемо до уваги, що відцентрові моменти інерції симетричного гіроскопа відносно осей Резаля дорівнюють нулю

$$\int_{(V)} xy dm = \int_{(V)} xz dm = \int_{(V)} yz dm = 0,$$

а моменти інерції відносно екваторіальних осей є однаковими

$$J_Y = \int_{(V)} (x^2 + z^2) dm = J_X = \int_{(V)} (y^2 + z^2) dm = J_e \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{(V)} x^2 dm = \int_{(V)} y^2 dm = \frac{1}{2} \int_{(V)} (x^2 + y^2) dm = \frac{J}{2}.$$

Тепер гіроскопічний момент можна подати так:

$$\mathbf{M}^{\text{гір}} = J(-\Omega \omega_Y \mathbf{i} + \Omega \omega_X \mathbf{j}) = J \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}^P = \mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega}^P,$$

що й потрібно було довести.

Напрямок гіроскопічного моменту у просторі визначається *правилом Жуковського*: **якщо головна вісь гіроскопа обертається в інерціальному просторі з кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}^P$, виникає гіроскопічний момент опору цьому обертанню, який направлений у такому напрямку, що нібито прагне найкоротшим шляхом сумістити вектор власного кінетичного моменту гіроскопа з вектором кутової швидкості його головної осі.**

Закон прецесії (7.22), згідно з принципом Даламбера, можна подати у вигляді

$$\mathbf{M} + \mathbf{M}^{\text{гір}} = 0.$$

Це можна інтерпретувати у такий спосіб: **при вимушеній прецесії гіроскопа під дією постійного моменту зовнішніх сил, цей момент у кожному мить врівноважується гіроскопічним моментом.** Саме тому гіроскоп не повертається навколо осі дії моменту сил прискорено. При цьому можна також вважати гіроскопічний момент моментом сил опору гіроскопа дії зовнішнього моменту сил.

7.9. Вплив тертя на поведінку гіроскопа

Вивчимо поведінку СЗГ під дією моментів сил опору з боку навколишнього середовища.

Спочатку розглянемо випадок, найбільш близький до реального, коли обертове тіло (гіроскоп) розташований у нерухомому опірному середовищі, – припустимо, що момент сил опору пропорційний абсолютній кутовій швидкості гіроскопа і напрямлений протилежно вектору цієї швидкості:

$$\mathbf{M} = -f\boldsymbol{\omega}. \quad (7.24)$$

Раніше було показано, що за будь-якого руху СЗГ (тобто в разі дії на нього довільних моментів сил) його вісь фігури Z , миттєва вісь обертання ($\boldsymbol{\omega}$) і кінетична вісь (\mathbf{K}) завжди лежать у одній площині (рис. 7.12).

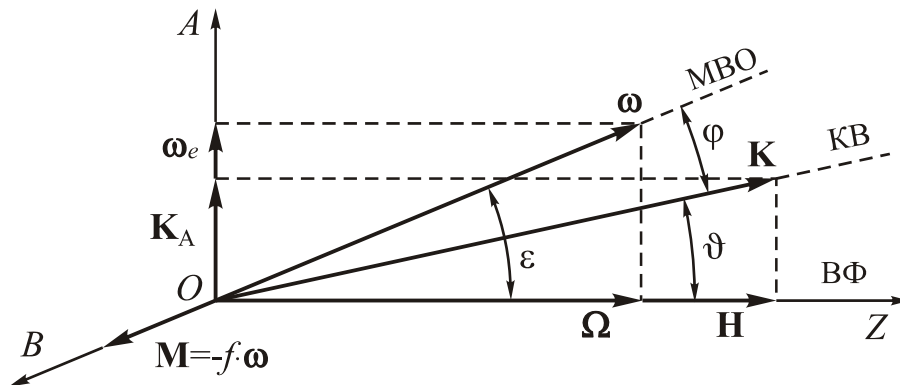


Рис. 7.12. Взаємне положення осей СЗГ:
 МВО – миттєва вісь обертання; KB – кінетична вісь; ВΦ – вісь фігури

Позначимо через A екваторіальну вісь, яка є перетином цієї площини з динамічною екваторіальною площиною гіроскопа, а B – вісь, яка перпендикулярна цій площині. Очевидно, вісь B також лежить у динамічній екваторіальній площині. Три осі A , B і Z утворюють систему головних осей інерції гіроскопа. Оскільки вектор миттєвої кутової швидкості гіроскопа завжди лежить у площині AZ , його проекції на осі системи декартових осей ABZ дорівнюють:

$$\omega_A = \omega_e; \quad \omega_B = 0; \quad \omega_Z = \Omega, \quad (7.25)$$

де ω_e – екваторіальна, а Ω – осьова складові кутової швидкості гіроскопа. Складові ж кінетичного моменту є такими:

$$K_A = K_e = J_e \omega_e; \quad K_B = 0; \quad K_Z = H = J\Omega. \quad (7.26)$$

Складемо рівняння руху СЗГ, користуючись законом моментів в осях ABZ . Введемо поняття $\boldsymbol{\omega}^*$ – вектора абсолютної кутової швидкості цієї системи координат. Тоді закон моментів слід записати у виді:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} + \boldsymbol{\omega}^* \times \mathbf{K} = \mathbf{M},$$

або, у проекціях на осі системи ABZ :

$$\begin{cases} \frac{dK_A}{dt} + \omega_B^* K_Z - \omega_Z^* K_B = M_A; \\ \frac{dK_B}{dt} + \omega_Z^* K_A - \omega_A^* K_Z = M_B; \\ \frac{dK_Z}{dt} + \omega_A^* K_B - \omega_B^* K_A = M_Z. \end{cases} \quad (7.27)$$

З того, що система осей ABZ є різновидом осей Резаля, випливає, що проекції вектора ω^* на екваторіальні осі є такими самими, як і проекції вектора ω самого гіроскопа. Враховуючи (7.25) і (7.26), рівняння (7.27) можна записати так:

$$\begin{cases} \frac{dK_e}{dt} = M_A; \\ \omega_Z^* K_e - \omega_e H = M_B; \\ \frac{dH}{dt} = M_Z. \end{cases} \quad (7.28)$$

У розглядуваному випадку момент сил опору (7.24) також лежить у площині AZ , а тому $M_A = -f\omega_e$; $M_B = 0$; $M_Z = -f\Omega$.

Тепер перше і третє з рівнянь (7.28) набувають виду:

$$\begin{cases} J_e \frac{d\omega_e}{dt} + f\omega_e = 0; \\ J \frac{d\Omega}{dt} + f\Omega = 0. \end{cases}$$

Розв'язком цих рівнянь є такі вирази для складових кутової швидкості гіроскопа:

$$\omega_e = C_1 e^{-\frac{f}{J_e} t}; \quad \Omega = C_2 e^{-\frac{f}{J} t}.$$

Визначимо, як з врахуванням цього змінюються з часом кути ε (між миттєвою віссю обертання і віссю фігури), ϑ (між кінетичною віссю і віссю фігури) і ϕ (між миттєвою віссю обертання і кінетичною віссю). З рис. 7. 12 випливає:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\omega_e}{\Omega} &= C e^{-\frac{f}{J \cdot J_e} t}; & \operatorname{tg} \vartheta = \frac{K_e}{H} = \frac{J_e \omega_e}{J \Omega} = \frac{J_e}{J} C e^{-\frac{f}{J \cdot J_e} t}; \\ \operatorname{tg} \phi = \operatorname{tg}(\vartheta - \varepsilon) &= \frac{\operatorname{tg} \vartheta - \operatorname{tg} \varepsilon}{1 + \operatorname{tg} \vartheta \operatorname{tg} \varepsilon} = \frac{J_e \omega_e}{J \Omega} = \frac{J_e - J}{J} \frac{C e^{-\frac{f}{J \cdot J_e} t}}{1 + \frac{J_e}{J} C^2 e^{-2\frac{f}{J \cdot J_e} t}}. \end{aligned}$$

Проаналізуємо отримані формули.

Сплюснутий гіроскоп. Для сплюсненого гіроскопа $J > J_e$. У цьому випадку показник в усіх експонентах від'ємний і буде збільшуватися з часом за модулем. Тому кути між усіма трьома осями будуть з часом зменшуватися, нутаційні коливання загасають, рух гіроскопа є асимптотично стійким.

Витягнутий гіроскоп. У цьому разі $J < J_e$. Показник в усіх експонентах додатний і збільшується з часом необмежено. Тому кути між усіма трьома осями будуть збільшуватися, амплітуда нутаційних коливання зростає, рух гіроскопа – нестійкий.

Висновок: *вільний рух сплюсненого СЗГ під дією сил опору з боку навколишнього середовища є асимптотично стійким, а витягнутого СЗГ – нестійким.*

Саме завдяки цій обставині витягнуті гіроскопи (веретеноподібної форми) не застосовують на практиці.

Як інший практично важливий приклад розглянемо таку просту математичну модель: момент сил опору лежить в екваторіальній площині, направлений протилежно вектору екваторіальної складової кутової швидкості гіроскопа і пропорційний його величині:

$$\mathbf{M} = -f\boldsymbol{\omega}_e.$$

Аналіз руху зробимо, користуючись рівняннями СЗГ в осях Резаля (див. (2.6), п. 2.2.1):

$$\begin{cases} J_e \dot{\omega}_X + \omega_Y H - \omega'_Z J_e \omega_Y = -f\omega_X \\ J_e \dot{\omega}_Y + \omega'_Z J_e \omega_X - \omega_X H = -f\omega_Y \\ \dot{H} = 0 \end{cases} \quad (7.29)$$

Третє рівняння дозволяє дійти висновку, що у цьому разі власний кінетичний момент гіроскопа буде незмінним за величиною:

$$H = H_0 = \text{const}.$$

Досліджувати рух будемо наближено за спрощеними рівняннями руху (див. п. 2.5), тобто знехтуємо відцентровими моментами сил інерції гіроскопа (членами $-\omega'_Z J_e \omega_Y$ і $\omega'_Z J_e \omega_X$). Тоді рівняння (7.38) набудуть вигляду

$$\begin{cases} J_e \dot{\omega}_X + f\omega_X + H_0 \omega_Y = 0; \\ J_e \dot{\omega}_Y + f\omega_Y - H_0 \omega_X = 0. \end{cases} \quad (7.30)$$

Для розв'язання цієї системи рівнянь використаємо доволі специфічний метод – *метод компресії* (стискання) *рівнянь*. Полягає він у наступному.

Замість двох дійсних невідомих ω_X і ω_Y уводять одну комплексну змінну (наприклад, u) дійсну і уявну частину якої складають вихідні змінні:

$$u = \omega_X + j\omega_Y; \quad (j = \sqrt{-1}).$$

Використаємо цю заміну для перетворення системи (7.30). Для цього помножимо друге рівняння на $j = \sqrt{-1}$ і додамо до першого. Отримаємо замість системи двох диференціальних рівнянь першого порядку одне диференціальне рівняння першого порядку:

$$J_e \dot{u} + (f - jH_0)u = 0. \quad (7.31)$$

У такий спосіб зменшено порядок системи диференціальних рівнянь удвічі. Платою за це стала поява комплексних коефіцієнтів у диференціальному рівнянні.

Уведемо позначення

$$h = \frac{f}{J_e}; \quad \lambda = \frac{H_0}{J_e}.$$

Корінь характеристичного рівняння диференціального рівняння (7.31) є єдиним і дорівнює $p = -h + j\lambda$, а тому розв'язок однорідного рівняння (7.31) має вид

$$u = Ce^{-ht} e^{j\lambda t} = u_0 e^{-ht} e^{j\lambda t}; \quad (u_0 = \omega_{X0} + j\omega_{Y0}). \quad (7.33)$$

Прирівнюючи окремо дійсні і уявні частини рівності (7.33), можна знайти й розв'язки у вихідних змінних:

$$\omega_X = e^{-ht} (\omega_{X0} \cos \lambda t - \omega_{Y0} \sin \lambda t); \quad \omega_Y = e^{-ht} (\omega_{Y0} \cos \lambda t + \omega_{X0} \sin \lambda t).$$

Але більш наочно подавати рух гіроскопа саме в комплексній площині, по дійсній осі якої відкладаються значення кутової швидкості ω_X , а по уявній – значення ω_Y (рис. 7.13). Таку площину називають *зображувальною*.

Стан гіроскопа відображується на зображувальній площині положенням деякої точки M , координати якої і дорівнюють проєкціям кутової швидкості гіроскопа. При русі гіроскопа положення точки M буде змінюватися. При цьому точка M буде описувати на зображувальній площині деяку траєкторію, за видом якої можна судити про просторовий рух гіроскопа. Тому таку точку називають *зображувальною*.

Приведемо комплексні величини в (7.33) до показникової форми:

$$u_0 = \omega_{X0} + j\omega_{Y0} = U_0 e^{j\varepsilon};$$

$$u(t) = U(t) e^{j\varphi(t)} = U_0 e^{j\varepsilon} e^{-ht} e^{j\lambda t} = U_0 e^{-ht} e^{j(\lambda t + \varepsilon)}. \quad (7.34)$$

Тут позначено: U_0 – модуль радіуса-вектора зображувальної точки M на зображувальній площині у початковий момент часу (стала величина); ε – кут між радіус-вектором початкового положення точки M і дійсною додатною піввіссю (стала величина); U – модуль поточного радіуса-вектора зображувальної точки M на зображувальній площині (змінна величина); φ – кут між радіус-вектором поточного положення точки M і дійсною додатною піввіссю (змінна величина).

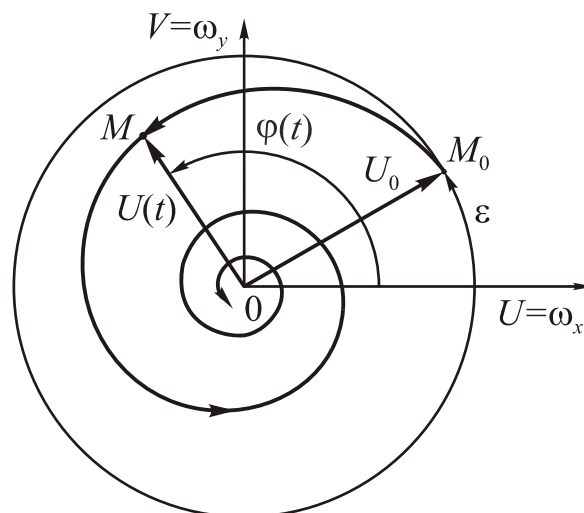


Рис. 7.13. Рух гіроскопа під дією моментів сил опору на зображувальній площині

Відповідно до знайденого розв'язку (7.34) поточне значення відстані зображувальної точки від початку координат змінюється у часі за законом

$$U(t) = U_0 e^{-ht},$$

а кут її радіуса вектора з дійсною піввіссю – за законом:

$$\varphi(t) = \varepsilon + \lambda t.$$

Із цього випливає:

1) аргумент $\varphi(t)$ з часом неперервно збільшується, якщо $H_0 > 0$, і зменшується, якщо $H_0 < 0$; це означає, що траєкторія зображувальної точки навколо початку координат (який відповідає нерухомому положенню головної осі гіроскопа у просторі) має вигляд спіралі, уздовж якої зображувальна точка рухається проти годинникової стрілки у першому випадку і за годинниковою стрілкою – у другому;

2) повний оберт навколо початку координат зображувальна точка здійснює за час, що дорівнює періоду нутаційних коливань гіроскопа $T_{\text{нут}} = \frac{2\pi}{\lambda}$;

3) під дією моменту сил опору (тертя) зображувальна точка неперервно наближається до початку координат; це означає, що амплітуда нутаційних коливань з часом зменшується за експоненціальним (у разі в'язкого тертя) законом; у підсумку нутаційні коливання загасають повністю, і гіроскоп зупиняється.

Щоб визначити повороти головної осі гіроскопа у просторі, достатньо проінтегрувати за часом знайдені розв'язки з кутових швидкостей.

Не зменшуючи узагальненості вважатимемо, що початкове положення гіроскопа характеризується нульовими значеннями кутів: $\alpha(0) = 0$; $\beta(0) = 0$. Задля визначеності припустимо, що у початковий момент часу головна вісь гіроскопа мала швидкість лише навколо осі Y , тобто $\omega_{X0} = 0$; $\omega_{Y0} = \omega_0$. Тоді матимемо:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &\approx \int_0^t \omega_X(t) dt = \int_0^t e^{-ht} (\omega_{X0} \cos \lambda t - \omega_{Y0} \sin \lambda t) dt = \\ &= \int_0^t e^{-ht} (-\omega_0 \sin \lambda t) dt = \frac{\omega_0}{\lambda^2 + h^2} [e^{-ht} (h \sin \lambda t + \lambda \cos \lambda t) - \lambda]; \\ \beta(t) &\approx \int_0^t \omega_Y(t) dt = \int_0^t e^{-ht} (\omega_{X0} \sin \lambda t + \omega_{Y0} \cos \lambda t) dt = \\ &= \int_0^t e^{-ht} \omega_0 \cos \lambda t \cdot dt = \frac{\omega_0}{\lambda^2 + h^2} [e^{-ht} (-h \cos \lambda t + \lambda \sin \lambda t) + h]. \end{aligned}$$

Із знайдених співвідношень випливає, що головна вісь гіроскопа здійснює загасаючи нутаційні коливання навколо центра, зміщеного відносно початкового положення на кут, який визначається початковою екваторіальною кутовою швидкістю. Координати цього центра визначаються співвідношеннями:

$$\alpha^* = -\frac{\omega_0 \lambda}{\lambda^2 + h^2}; \quad \beta^* = \frac{\omega_0 h}{\lambda^2 + h^2}.$$

З плином часу, коли нутаційні коливання загаснуть, головна вісь опиниться у положенні, зсунутому відносно початкового саме на цю величину.

Розглянемо тепер рух кінетичної осі у просторі.

У початковий момент часу завдяки початковій кутовій швидкості ω_0 , яка, за зробленим припущенням, направлена вздовж осі Y , вісь Y_K виявляється повернутою відносно осі Y на кут

$$\alpha_{k0} = -\arctg\left(\frac{\Delta K}{H_0}\right) \approx -\frac{\Delta K}{H_0} = -\frac{J_e \omega_0}{H_0} = -\frac{\omega_0}{\lambda}.$$

Вісь X_k при цьому залишається збіжною з віссю Резаля X , тому $\beta_{k0} = 0$. Через мализну кутів відхилення кінетичної осі від осі фігури у рівняннях (2.10) можна вважати, що $M_{XK} \approx M_X = -f\omega_X$; $M_{YK} \approx M_Y = -f\omega_Y$.

Оскільки значення кінетичного моменту в початковий момент часу дещо відрізняється від власного кінетичного моменту

$$K = \sqrt{H_0^2 + \Delta K^2} = H_0 \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2}{\lambda^2}},$$

поводження кінетичної осі визначатиметься рівняннями

$$\begin{cases} \frac{d\beta_K}{dt} = -\frac{h}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}} \omega_X \\ \frac{d\alpha_K}{dt} = \frac{h}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}} \omega_Y \end{cases}.$$

Підставляючи у праві частини цих рівнянь знайдені розв'язки з кутів α і β і інтегруючи, отримаємо

$$\begin{aligned} \alpha_K(t) &= -\frac{\omega_0}{\lambda} + \frac{h}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}} \int_0^t \omega_Y dt = -\frac{\omega_0}{\lambda} + \frac{h}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}} \beta(t); \\ \beta_K(t) &= -\frac{h}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}} \int_0^t \omega_X dt = -\frac{h}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}} \alpha(t). \end{aligned} \quad (7.35)$$

З вразів (7.35) випливає, що кінетична вісь під дією моментів сил опору теж здійснює загасаючі нутаційні коливання. Але амплітуда цих коливань набагато менша за амплітуду коливання головної осі у просторі (у $\lambda/h = H_0/f$ разів). По завершенні загасання кінетична вісь встановиться у нове, дещо відхилене від початкового положення з координатами:

$$\begin{aligned} \alpha_k^* &= -\frac{\omega_0}{\lambda} + \frac{h}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}} \beta^* = -\frac{\omega_0}{\lambda} + \frac{h^2}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}} \frac{\omega_0}{\lambda^2 + h^2}; \\ \beta_k^* &= -\frac{h}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}} \alpha^* = \frac{h}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}} \frac{\omega_0 \lambda}{\lambda^2 + h^2}. \end{aligned}$$

Найбільший поворот кінетичної осі виявляється у напрямку початкової кутової швидкості.

7.10. Моделювання поведінки симетричного зрівноваженого гіроскопа

Більш цілісне уявлення про рух гіроскопа можна отримати шляхом чисельного інтегрування диференціальних рівнянь гіроскопа на цифровій обчислювальній техніці, використовуючи значні графічні можливості сучасних комп'ютерних систем. При цьому можна з'ясувати можливий вплив на рух різних чинників, які не були враховані за аналітичного дослідження.

Нижче наведено опис комплексу програм (див. Додаток 3. До розділу 7) для середовища Matlab, який здійснює моделювання поведінки СЗГ на основі чисельного інтегрування повних рівнянь руху виду

$$\begin{cases} J_e \frac{d\omega_X}{dt} + \omega_Y (H - J_e \omega'_Z) = M_X \\ J_e \frac{d\omega_Y}{dt} + \omega_X (H - J_e \omega'_Z) = M_Y \\ \frac{dH}{dt} = M_Z \end{cases} \quad (7.36)$$

які безпосередньо впливають з рівнянь (2.4) з врахуванням співвідношення (2.5) (див. п. 2.2.1). При цьому використано можливості пакету прикладних програм Simulink, який входить до складу середовища Matlab.

Комплекс складається з головної (керуючої) програми *Sug_M.m*, чотирьох програм *Sug_ZastavkaM.m*, *Sug_MenuM.m*, *Sug_YadroM.m*, *Sug_Vyvod.m* і Simulink-моделі *SugM.mdl* (рис. 7.14).

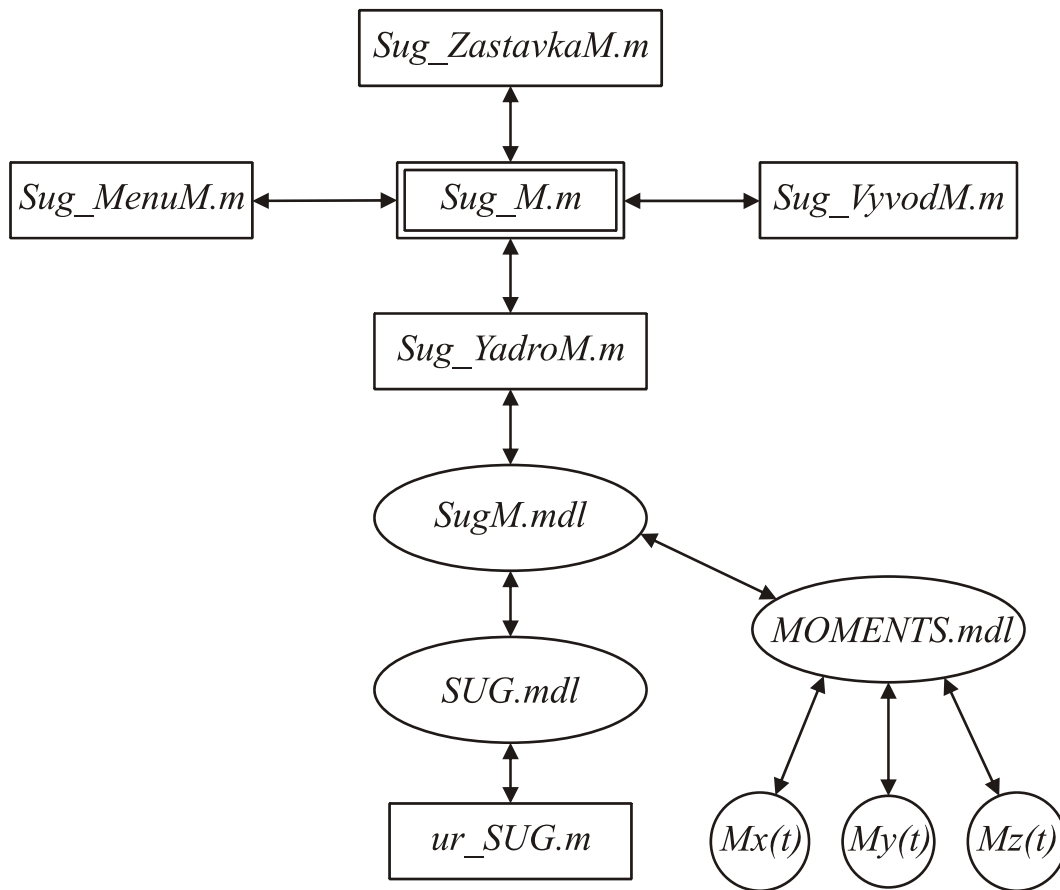


Рис. 7.14. Схема взаємодії комплексу програм **Sug_M**

«Серцем», ядром програми інтегрування рівнянь (7.58) є блок-схема S-моделі **SugM.mdl**, наведена у Додатку 3. Вона складається з двох блоків – **SUG** і **MOMENTS** та п'яти вихідних портів, на які подаються вихідні сигнали моделі. Структура блоку **MOMENTS** показана у Додатку 3. Він здійснює «генерування» сигналів, що імітують моменти зовнішніх сил, що діють по осях Резаля на гіроскоп. У програмі закладена можливість формування цих моментів за такою математичною моделлю:

$$M_X = M_{XO} + M_{Xm} \sin(\omega_X t + \varepsilon_X) - f_X \omega_X;$$

$$M_Y = M_{YO} + M_{Ym} \sin(\omega_Y t + \varepsilon_Y) - f_Y \omega_Y;$$

$$M_Z = M_{ZO} + M_{Zm} \sin(\omega_Z t + \varepsilon_Z) - f_Z \omega_Z.$$

У склад блоку **MOMENTS** входять три підсистеми (схема однієї з них також наведена у Додатку 3), кожна з яких формує частину відповідного моменту сил, яка залежить лише від часу. Частини моментів, які залежать явно від часу (за гармонічним законом) формуються у подібних окремих підсистемах, які подані на блок-схемі **MOMENTS** у вигляді блоків **Mx(t)**, **My(t)** і **Mz(t)**. Вміст цих блоків показаний у Додатку 3. Для формування моментів сил в'язкого тертя використовується інформація з основної блок-схеми про поточні значення проєкцій ω_X , ω_Y і власного кінетичного моменту H . Ця інформація надається через вхідні порти блоку **MOMENTS**, а формується вона на виході підсистеми **SUG**.

Блок **SUG** виконаний у виді S-функції, текстова частина **ur_Sug.m** якої наведена у Додатку 3. Вхідними величинами для цього блоку є величини моме-

нтів сил, які сформовані у підсистемі **MOMENTS** і об'єднані в єдиний векторний сигнал u . У блоці **SUG** ці три «сигнали» перетворюються згідно рівнянь (7.36) у кути α (Alfa), β (Beta), кінетичний момент H і проекції ω_x , ω_y кутової швидкості.

У вікні *Configuration Parameters* меню *Simulation* блок-схеми **SugM** встановлений розв'язувач **ode4** (метод Рунге-Кутта четвертого порядку) з фіксованим кроком, причому величина кроку інтегрування визначається значенням параметру hi , а тривалість інтегрування величиною параметру $tfinal$.

Запуск S-моделі до виконання здійснюється у Script-файлі за ім'ям **SUG_YadroM**. В ньому здійснюється також присвоювання початкових значень змінних стану системи диференціальних рівнянь, а також розрахунок кутів α_K (alk) і β_K (btk) орієнтації у просторі вектора повного кінетичного моменту **K** гіроскопа. Запуск же самої програми **SUG_YadroM**, як й інших допоміжних програм, здійснюється в керуючій програмі **SUG_M**, головне призначення якої полягає саме у виклику окремих програм **SUG_ZastavkaM**, **SUG_MenuM**, **SUG_YadroM** та **SUG_VyvodM** у певній послідовності.

Програма **SUG_ZastavkaM** здійснює присвоювання первинних значень усім параметрам, що використовуються для здійснення інтегрування, програма **SUG_MenuM** – діалогове змінювання параметрів гіроскопа, моментів сил, початкових умов і параметрів інтегрування. Призначення програми **SUG_VyvodM** – організувати виведення результатів інтегрування у графічне вікно в найбільш зручній графічній формі. Тексти усіх програм наводяться у Додатку 3.

Результати роботи цього комплексу програм для випадків руху, розглянутих раніше теоретично, наведені далі на рис. 7.15 – 7.21.

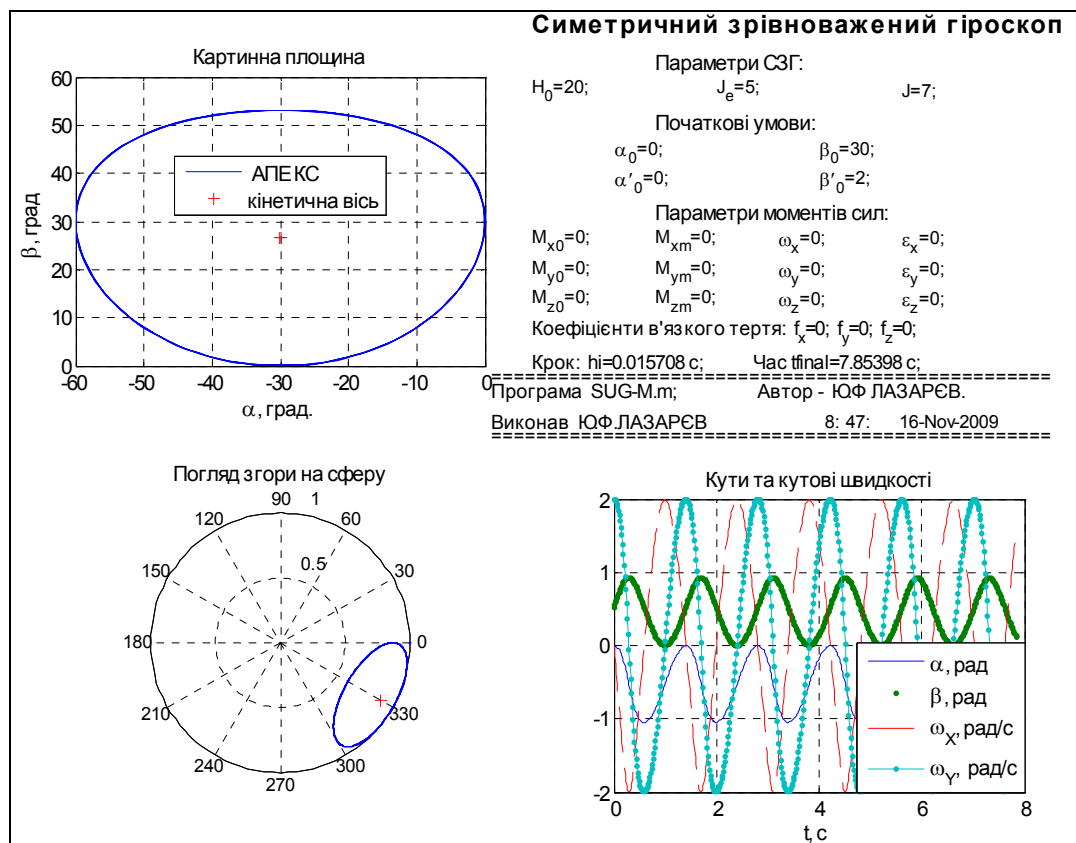


Рис. 7.15. Вільний рух СЗГ

Рис. 7.15 відображує вільний рух СЗГ, рис. 7.16 – рух під дією екваторіального моменту сил опору. У разі дії такого моменту, як і впливає з теоретичного аналізу, рух не залежить від того, чи є гіроскоп витягнутим, чи сплюснутим.

Але реакція сплюснутого і витягнутого гіроскопів на дію повного моменту сил тертя є різною. Сплюснутий гіроскоп, як показує рис. 7.17, здійснює у цьому випадку загасаючі стійкі коливання, а витягнутий (рис. 7.18) – коливання з наростаючою амплітудою, тобто рух його є нестійким. Це підтверджує теоретичні висновки.

Дію на гіроскоп постійного моменту сил ілюструє рис. 7.19, а на рис. 7.20 зображено дію на гіроскоп ще й екваторіального моменту сил опору.

Рис. 7.21 подає поведження гіроскопа, параметри якого наближені до реальних технічних гіроскопів. Розглянуто дію раптово прикладеного сталого моменту сил і моментів сил тертя в екваторіальній площині. Як бачимо, при цьому виникають нутаційні коливання з амплітудою $\alpha_m = \beta_m = 2 \cdot 10^{-7}$ радіан ($1,146 \cdot 10^{-5}$ градуса), частотою $\lambda = 2000 \text{ c}^{-1}$, які з часом загасають.

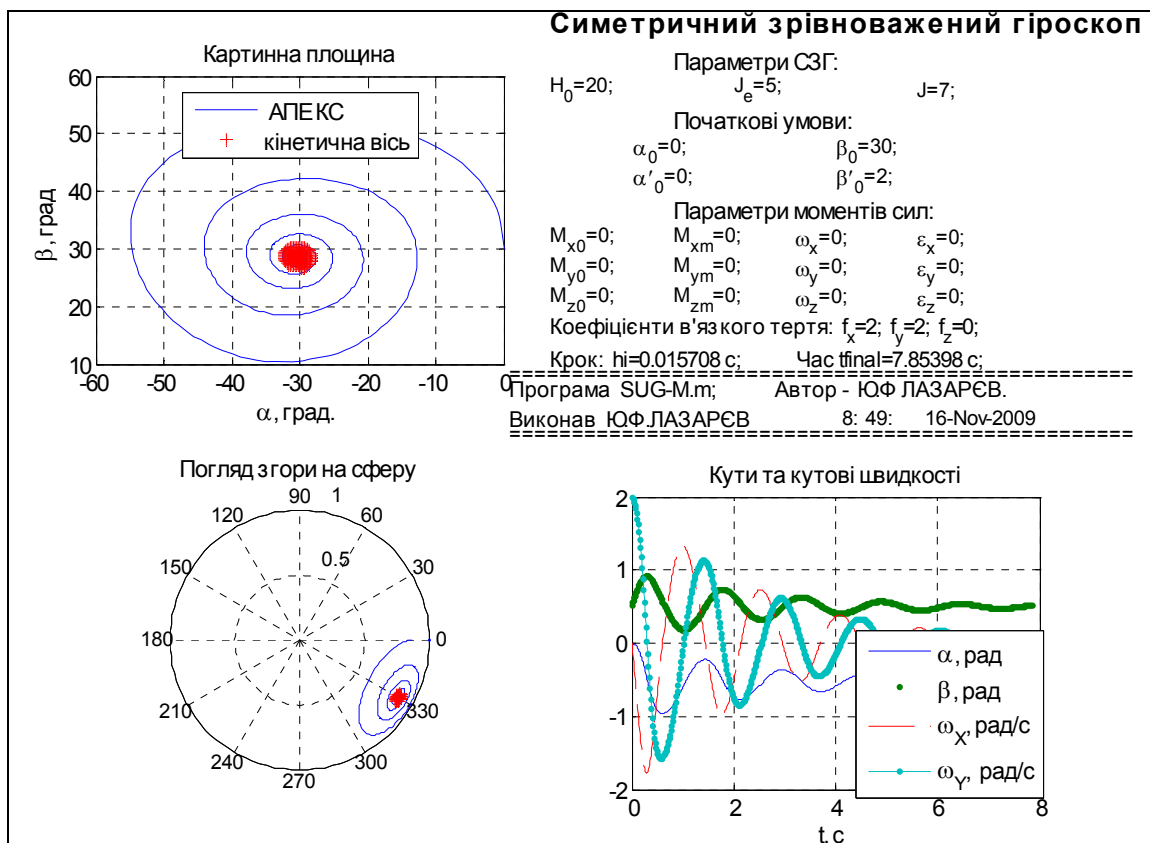


Рис. 7.16. Вільний рух СЗГ з екваторіальним тертям

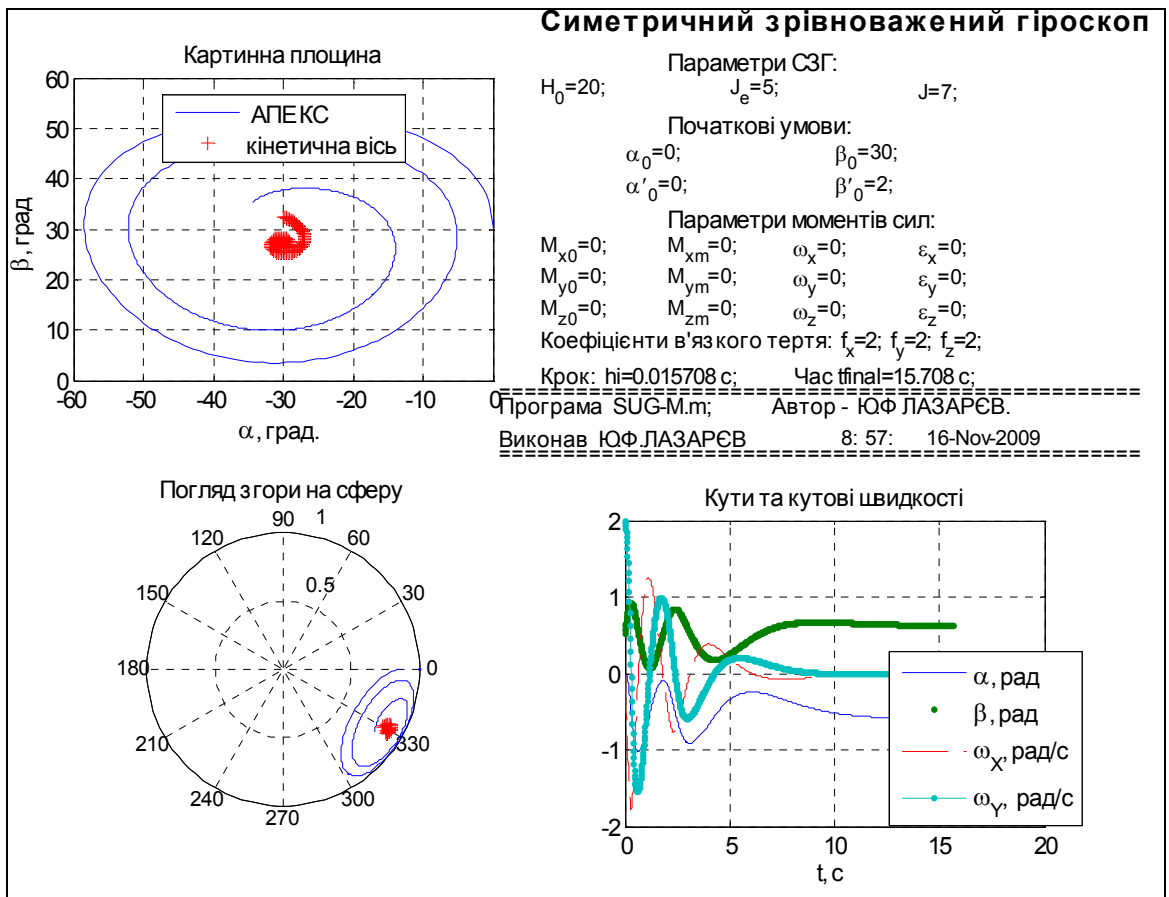


Рис. 7.17. Стійкий рух сплюсненого СЗГ при повному опорі

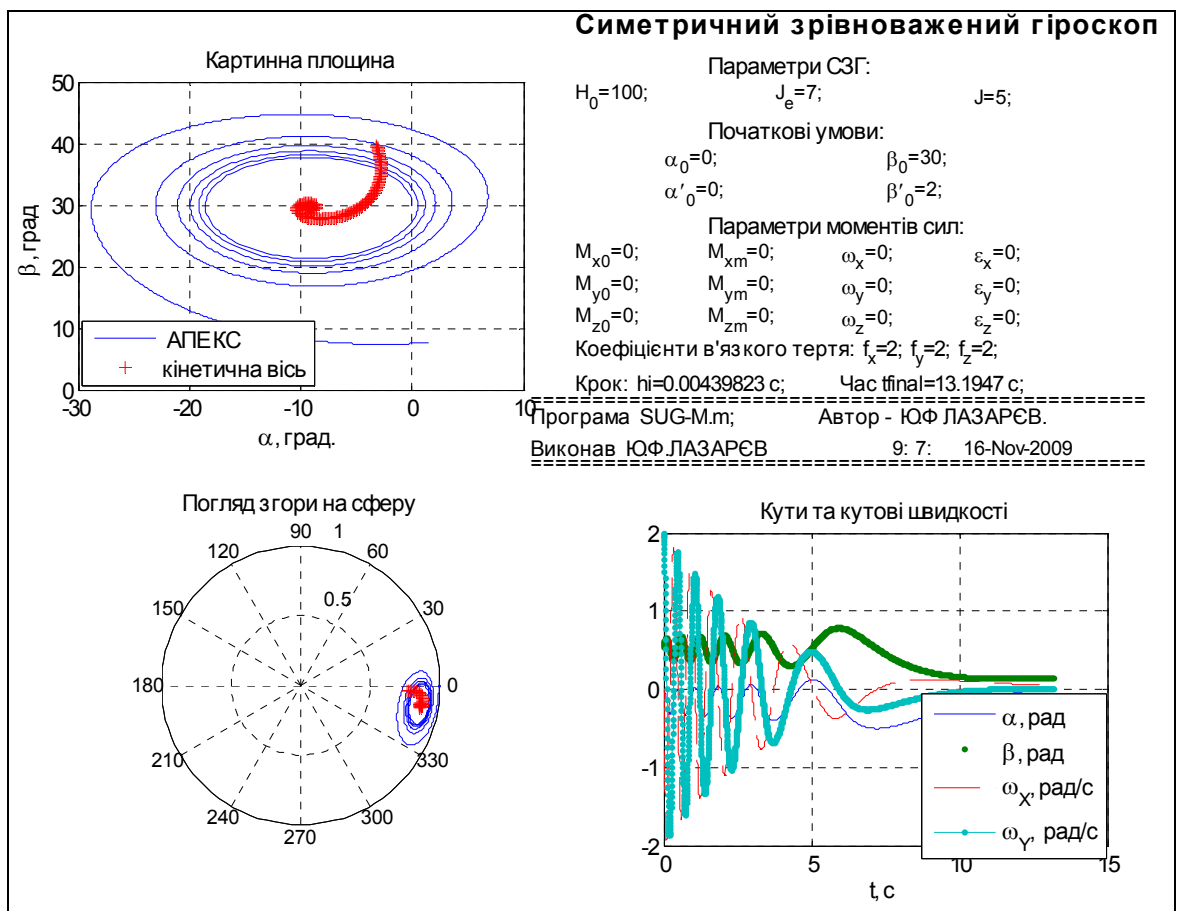


Рис. 7.18. Нестійкі коливання витягнутого СЗГ при повному опорі

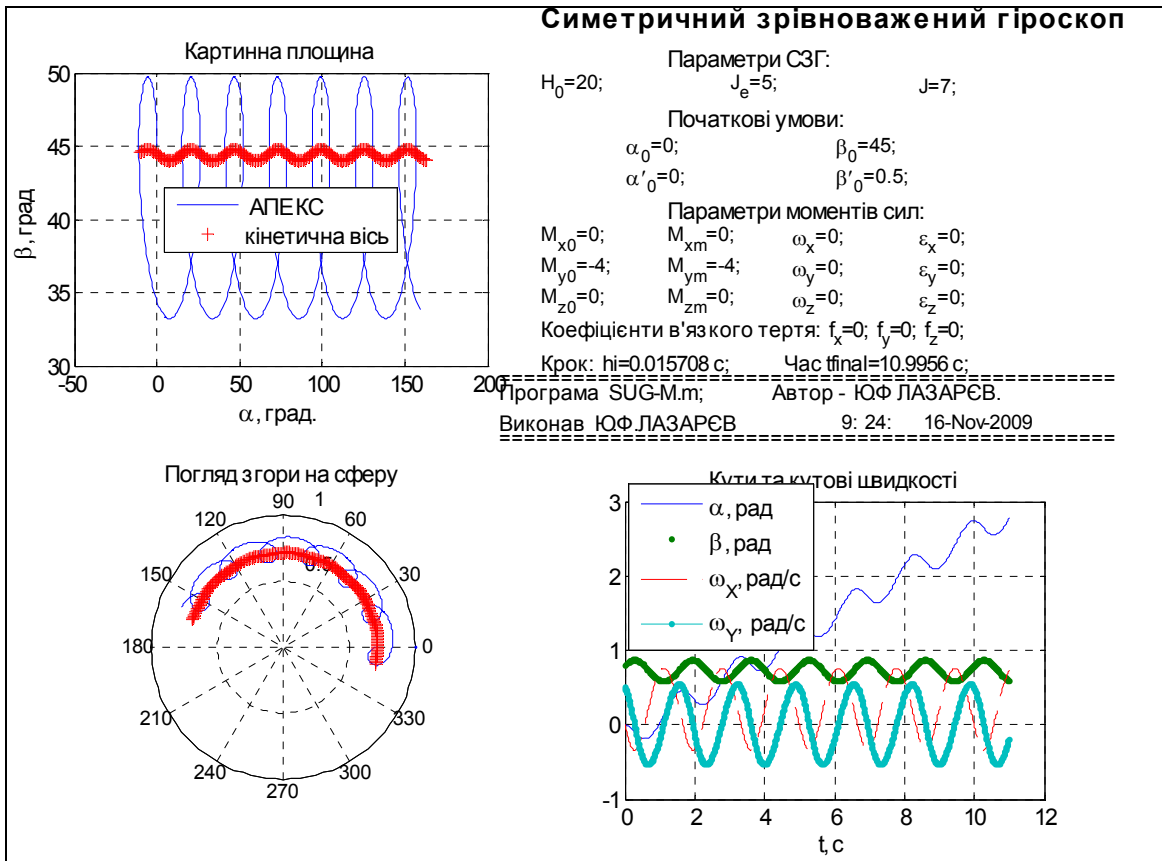


Рис. 7.19. Рух СЗГ під дією постійного моменту сил

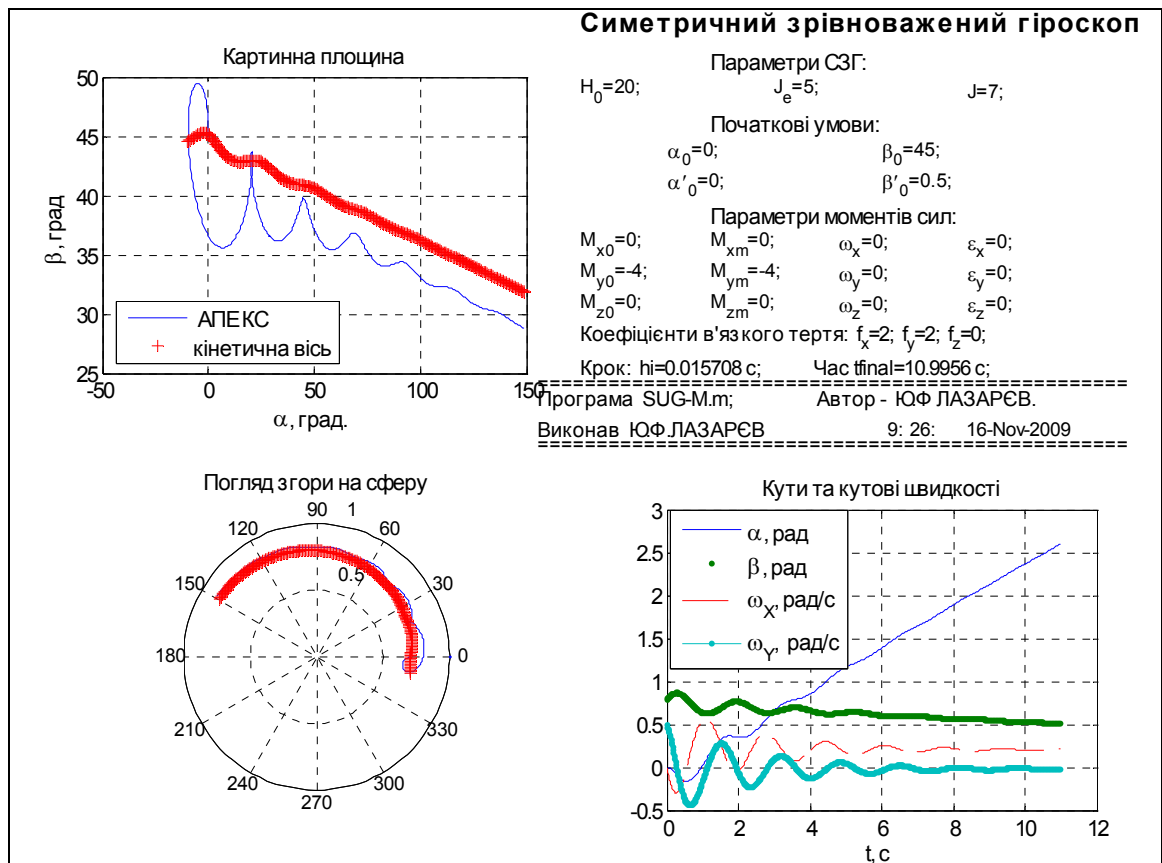


Рис. 7.20. Дія постійного моменту сил і сил опору

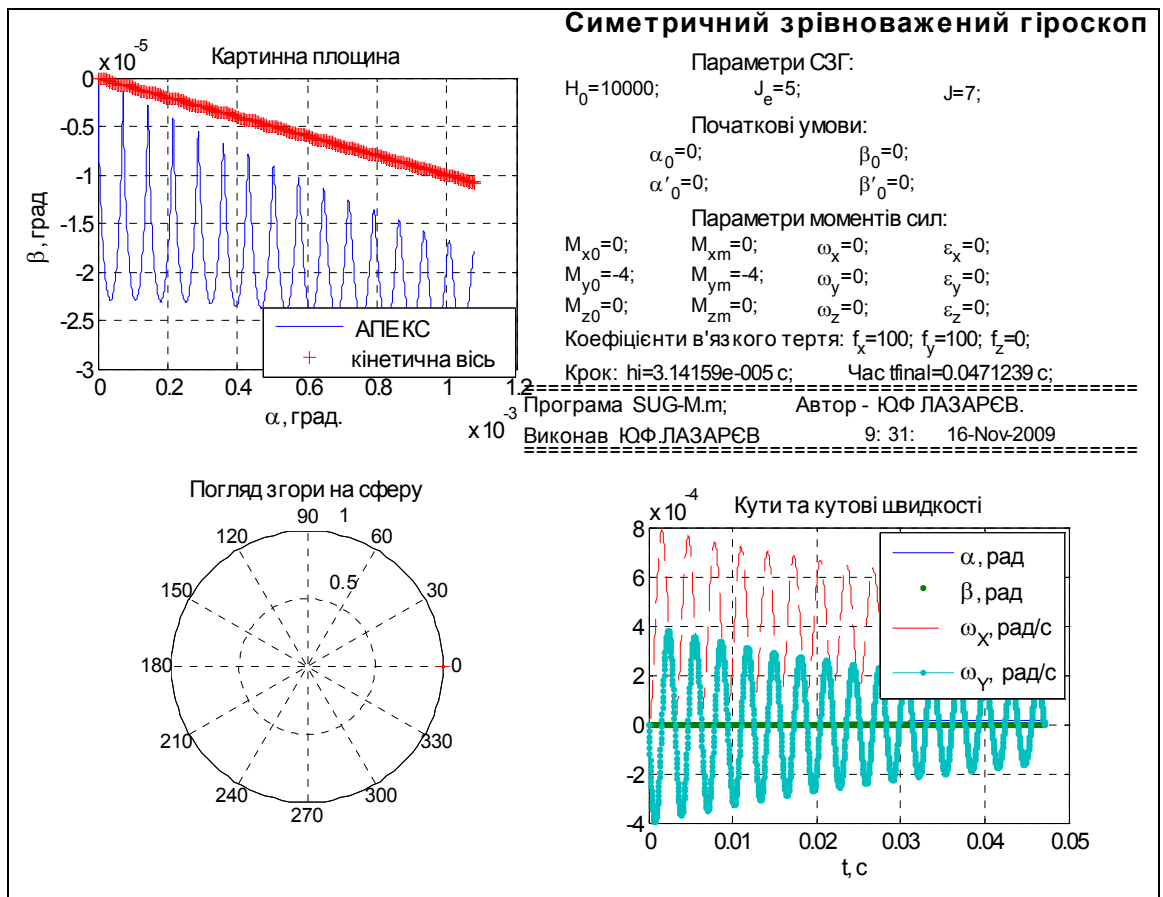


Рис. 7.21. Ратове прикладення моменту сил

При цьому у гіроскопа спостерігається дрейф навколо обох екваторіальних осей, – вимушена прецесія навколо осі X зі швидкістю $\langle \dot{\alpha} \rangle = 2,29 \cdot 10^{-2}$ град/с ($4 \cdot 10^{-4}$ рад/с) і прецесія навколо осі Y зі швидкістю $\langle \dot{\beta} \rangle = 2,29 \cdot 10^{-4}$ град./с ($4 \cdot 10^{-6}$ рад/с). Остання має вторинне походження і викликана постійним моментом сил опору, що виникає навколо осі X внаслідок вимушеної прецесії.

Завдання

Використовуючи програмну модель поведінки симетричного зрівноваженого гіроскопа, наведену у Додатку 3 (До глави 7), виконати наступні завдання.

Завдання 7.1. Дослідження вільного руху симетричного зрівноваженого гіроскопа

1. За вказаною програмною моделлю провести експерименти і встановити залежність частоти і амплітуди нутаційних коливань від: а) величини і напрямку початкової екваторіальної складової кутової швидкості гіроскопа; б) величини власного кінетичного моменту гіроскопа; в) величини екваторіального моменту інерції гіроскопа; г) величини початкового куту.
2. Провести розрахунок частоти і амплітуди по формулах, що впливають з теорії, за тих значень параметрів, які були використані.

ні в експериментах. Зіставити результати теорії і експериментів. Зробити висновки. Виявити причини незбігу результатів.

3. Відповісти на запитання:

- Що називають симетричним зрівноваженим гіроскопом?
- Що називають «кінетичною» віссю СЗГ? кінетичними осями?
- Що саме розуміють під рухом гіроскопа?
- Опишіть вільний рух СЗГ. За якою формулою визначається частота вільних коливань? Чим визначається амплітуда цих коливань? Як називають ці коливання?
- Яку структуру має комплекс програмних засобів у використуваній лабораторній роботі? які з програм чи процедур відповідають саме за інтегрування диференціальних рівнянь руху СЗГ? Якого саме виду диференціальні рівняння інтегруються?
- Чи підтверджуються теоретичні висновки проведеними вами експериментами? Якщо є розбіжності, то у чому ви вбачаєте їхню причину? Чи може це бути наслідком неадекватності програмної моделі? неправильності чи неточності теоретичної формули? неправильності чи неточності ваших «вимірювань» параметрів руху гіроскопа по результатах моделювання?

Завдання 7.2. Дослідження руху симетричного зрівноваженого гіроскопа за дії сталого моменту сил

1. Провести експерименти з вивчення руху СЗГ за дії сталого моменту сил. Для цього встановити сталу складову моменту вдовж осі Y рівною 1. Решту параметрів моментів сил встановити рівними нулеві. Початкову швидкість осі фігури встановити рівній нулю. Змінюючи величину моменту, виміряти значення амплітуд, частоти коливань і швидкості прецесії. Встановити залежність цих характеристик від початкових умов, кінетичного моменту гіроскопа.
2. Провести розрахунки тих самих характеристик по теоретично встановлених формулах за умов експериментів. Порівняти теоретичні і експериментальні характеристики. Зробити висновки.
3. Відповісти на запитання:
 - Які особливості руху СЗГ під дією сталого моменту сил. За якими формулами визначаються амплітуда, частота нутаційних коливань, кутова швидкість прецесії? Від чого залежать ці параметри руху?
 - Чи підтверджуються ці теоретичні висновки проведеними вами експериментами? Якщо є розбіжності, то у чому ви вбачаєте їхню причину?
 - Чи можливо підбором початкових умов позбутися нутаційних коливань при дії постійного моменту сил?

Завдання 7.3. Дослідження впливу тертя на рух симетричного зрівноваженого гіроскопа

1. Провести експерименти по вивченню впливу тертя на вільний рух СЗГ. Для цього встановити коефіцієнти тертя $f_x = f_y = 2$. Решту па-

- раметрів моментів сил встановити рівними нулю. Визначити характер руху осі фігури і кінетичної осі. Фіксувати частоту коливань, величину і напрямок зміщення положення осі фігури і кінетичної осі. Визначити, чи збігаються вони з розрахунковими. Зробити висновки.
2. Варіюючи величинами коефіцієнтів тертя, повторити експерименти з п.1. Зробити висновки з залежності степеня загасання амплітуди, частоти коливань і зміщень кінетичної осі і осі фігури від коефіцієнтів тертя. Зіставити ці результати з теоретичними. Зробити висновки. Вивести до друку результати двох найбільш типових експериментів.
 3. Провести аналогічні експерименти, варіюючи величиною власного кінетичного моменту СЗГ.
 4. Провести експерименти по вивченню впливу тертя на рух СЗГ під дією сталого моменту сил. Для цього встановити коефіцієнти тертя $f_x = f_y = 2$, $M_{y_0} = 1$. Решту параметрів моментів сил встановити рівними нулю. Визначити характер руху осі фігури і кінетичної осі. Фіксувати частоту коливань, величину і напрямок кутової швидкості прецесії, зміщення положення осі фігури і кінетичної осі. Визначити, чи збігаються вони з розрахунковими. Зробити висновки.
 5. Варіюючи величинами коефіцієнтів тертя, повторити експеримент п. 4. Зробити висновки з залежності степеня загасання амплітуди, частоти коливань, швидкості прецесії і зміщень кінетичної осі і осі фігури від коефіцієнтів тертя. Зіставити ці результати з теоретичними. Зробити висновки.
 6. Провести аналогічні експерименти, варіюючи величиною власного кінетичного моменту СЗГ.
 7. Відповісти на запитання:
 - Який (опишіть) вплив тертя на вільний і вимушений рух СЗГ. Чи справджуються теоретичні висновки у цьому випадку з результатами проведених експериментів? Якщо є розбіжності, то у чому ви вбачаєте їхню причину?
 - Яку чисельну модель СЗГ втілено у програмному забезпеченні цієї лабораторної роботи? Вкажіть фрагменти програм, де це зроблено.

Задачі

Задача 7.1. Розрахувати частоту і амплітуду нутаційних коливань гіроскопа, на який подіяв ударний обертальний силовий імпульс $M\Delta t = 2 \cdot 10^{-3}$ Н м с. Кінетичний момент гіроскопа $H = 0,5$ Н м с, екваторіальний момент інерції $J_e = 3 \cdot 10^{-4}$ Н м с².

Відповідь: $f_\lambda = 265$ Гц, $\vartheta_m = 14'$

Задача 7.2. Власний кінетичний момент СЗГ дорівнює $H = 1$ Н м с, екваторіальний момент інерції – $J_e = 6$ сН см с². На гіроскоп раптово подіяв мо-

мент сил $M = 5$ сН см. Розрахувати амплітуду і частоту нутаційних коливань і кутову швидкість вимушеної прецесії.

Відповідь: $\vartheta_m = 6'' \cdot 10^{-2}$; $f_\lambda = 265$ Гц; $\omega_{\text{пр}} = 103$ °/годину

Задача 7.3. Ротор турбіни корабля має масу $m = 2500$ кг, обертається навколо поздовжньої осі корабля з кутовою швидкістю $n = 3000$ обертів у хвилину. Радіус інерції ротора турбіни навколо цієї осі дорівнює $r = 0,6$ м. Корабель здійснює кильову хитавицю з періодом $T = 6$ с і амплітудою $\vartheta_m = 6^\circ$. Відшукати найбільшу величину додаткової сили притиску у підшипниках ротору, якщо відстань між підшипниками дорівнює $l = 2$ м.

Відповідь: $F_m = 15500$ Н

Задача 7.4. Ротор турбіни корабля має масу $m = 2500$ кг, обертається навколо поздовжньої осі корабля з кутовою швидкістю $n = 3000$ обертів у хвилину. Радіус інерції ротора турбіни навколо цієї осі дорівнює $r = 0,6$ м. Корабель здійснює циркуляцію з періодом повної циркуляції $T = 60$ с. Відшукати величину додаткової сили притиску у підшипниках ротору, якщо відстань між підшипниками дорівнює $l = 2$ м.

Відповідь: $F_m = 14800$ Н

Задача 7.5. Загальна маса двох гребних коліс колісного пароплава дорівнює $m = 25000$ кг, а радіус інерції – $r = 2,6$ м. Колеса обертається навколо поперечної осі пароплава з кутовою швидкістю $n = 60$ обертів у хвилину. Корабель здійснює циркуляцію з періодом повної циркуляції $T = 60$ с. Відшукати величину додаткової сили притиску у підшипниках гребних коліс, якщо відстань між підшипниками дорівнює $l = 2$ м.

Відповідь: $F_m \approx 28\ 000$ Н

Задача 7.6. Загальна маса двох гребних коліс колісного пароплава дорівнює $m = 25000$ кг, а радіус інерції – $r = 2,6$ м. Колеса обертається навколо поперечної осі пароплава з кутовою швидкістю $n = 60$ обертів у хвилину. Корабель здійснює бічну хитавицю з періодом $T = 4$ с і з амплітудою $\varphi_m = 15^\circ$. Відшукати величину максимальної додаткової сили притиску у підшипниках гребних коліс, якщо відстань між підшипниками дорівнює $l = 2$ м.

Відповідь: $F_m \approx 110\ 000$ Н

Задача 7.7. Як зміниться амплітуда нутаційних коливань симетричного врівноваженого гіроскопа внаслідок дії на нього ударного імпульсу моменту зовнішніх сил, якщо кутову швидкість його власного обертання зменшити у 2 рази?

Задача 7.8. Як зміниться амплітуда нутаційних коливань симетричного врівноваженого гіроскопа внаслідок дії на нього ударного імпульсу моменту зовнішніх сил, якщо кутову швидкість його власного обертання збільшити у 2 рази?

Задача 7.9. Як зміниться амплітуда нутаційних коливань симетричного врівноваженого гіроскопа внаслідок дії на нього ударного імпульсу моменту зовнішніх сил, якщо величину ударного імпульсу зменшити у 2 рази?

Задача 7.10. Як зміниться амплітуда нутаційних коливань симетричного зрівноваженого гіроскопа внаслідок дії на нього ударного імпульсу моменту зовнішніх сил, якщо величину цього ударного імпульсу збільшити у 2 рази?

Задача 7.11. Як зміниться частота нутаційних коливань симетричного зрівноваженого гіроскопа внаслідок дії на нього ударного імпульсу моменту зовнішніх сил, якщо кутову швидкість його власного обертання зменшити у 2 рази?

Задача 7.12. Як зміниться частота нутаційних коливань симетричного зрівноваженого гіроскопа внаслідок дії на нього ударного імпульсу моменту зовнішніх сил, якщо кутову швидкість його власного обертання збільшити у 2 рази?

Задача 7.13. Як зміниться частота нутаційних коливань симетричного зрівноваженого гіроскопа внаслідок дії на нього ударного імпульсу моменту зовнішніх сил, якщо величину цього імпульсу зменшити у 2 рази?

Задача 7.14. Як зміниться частота нутаційних коливань симетричного зрівноваженого гіроскопа внаслідок дії на нього ударного імпульсу моменту зовнішніх сил, якщо величину цього імпульсу збільшити у 2 рази?

Задача 7.15. Як зміниться поведження симетричного зрівноваженого гіроскопа при ударі, якщо величину удару збільшити у 2 рази і одночасно збільшити його кінетичний момент у 2 рази?

Задача 7.16. Як зміниться поведження СЗГ при ударі, якщо ширину його ротора зменшити у 2 рази (вважати ротор тонким обідом)?

Задача 7.17. Як зміниться поведження СЗГ при дії на нього постійного раптово прикладеного моменту сил, якщо величину його кінетичного моменту збільшити у 2 рази?

Контрольні запитання

1. Що називають симетричним гіроскопом? зрівноваженим гіроскопом?
2. Який рух називають прецесією? регулярною прецесією? вимушеною прецесією?
3. Що являють собою рівняння у формі Булгакова? яка їхня головна особливість?
4. Який гіроскоп називають вільним?
5. Як рухається у просторі вільний симетричний зрівноважений гіроскоп?
6. Що називають природною регулярною прецесією?
7. Що називають псевдoreгулярною прецесією? коли вона спостерігається?
8. Який гіроскоп називають швидким?
9. Які рівняння називають прецесійними рівняннями гіроскопа? коли ними можна користуватися?
10. Які рівняння гіроскопа називають спрощеними? скороченими? лінеаризованими? у яких випадках їх можна використовувати?
11. Сформулюйте закон прецесії, правило прецесії.
12. Як впливає момент сил опору з боку навколишнього середовища на вільний рух гіроскопа?

13. Що розуміють під нутацією гіроскопа?
14. Від яких параметрів залежить частота нутаційних коливань? Напишіть формулу.
15. Які параметри визначають амплітуду нутаційних коливань? Запишіть формулу амплітуди.
16. Що таке метод компресії рівнянь? У чому він полягає?
17. Що розуміють під зображувальною площиною? зображувальною точкою?
18. Перелікуйте можливі види регулярної прецесії. Чим вони відрізняються один від одного?
19. Яких видів буває природна прецесія симетричного врівноваженого гіроскопу? Чим визначається вид регулярної прецесії СЗГ?
20. Що таке власний кінетичний момент гіроскопа? Від яких параметрів він залежить? Запишіть формулу.
21. Що називають апексом гіроскопа? Для чого вводиться це поняття?
22. Що називають віссю фігури тіла? Для якого тіла є слухним це поняття?
23. Що таке головна вісь гіроскопа? Чи збігається це поняття з поняттям осі фігури?
24. Що називають миттєвою віссю обертання гіроскопа? Чи збігається ця вісь з головною віссю гіроскопа?
25. Що розуміють під поняттям кінетичної осі гіроскопа? Чи збігається це поняття з поняттям головної осі гіроскопа?
26. Що називають картинною площиною? Для чого вводиться це поняття?
27. Що називають віссю власного обертання гіроскопа? Чи збігається це поняття з поняттям головної осі гіроскопа?
28. Що таке власна кутова швидкість гіроскопа? Чи вона є тим самим, що кутова швидкість власного обертання гіроскопа?
29. Що називають гіроскопічним моментом? Коли він виникає? Дією якого прискорення він обумовлений?
30. Як впливає гіроскопічний момент у гвинтових літаках на рух цих літаків у повітрі?
31. Якими є наслідки дії гіроскопічного моменту, що виникає у роторах турбін кораблів?
32. Що таке астатичний гіроскоп? Як його ще називають?
33. Що називають витягнутим гіроскопом? сплюснутим гіроскопом? кульовим гіроскопом?
34. Що називають конусом прецесії? віссю прецесії? кутом прецесії? площиною прецесії?
35. Що розуміють під прецесією Землі? нутацією Землі?
36. Що називають фазовими координатами? змінними стану?
37. У чому полягає правило Жуковського?
38. Що називають вільним рухом гіроскопа? вимушеним рухом?

39. Що називають прецесійними рівняннями гіроскопа? рівняннями прецесійного руху? скороченими рівняннями руху гіроскопа? чи збігаються ці поняття?

40. Що розуміють під спрощеними рівняннями? лінеаризованими рівняннями? технічними рівняннями руху гіроскопа? чи збігаються ці поняття?

41. Що таке власний кінетичний момент гіроскопа? кінетичний момент гіроскопа? чи збігаються ці поняття?

42. Що називають осями Резаля? Для чого їх використовують?

43. Опишіть поведження симетричного зрівноваженого гіроскопа при ударі.

44. Охарактеризуйте поняття природної прецесії СЗГ.

45. Охарактеризуйте поняття псевдорегулярної прецесії СЗГ. За яких умов вона спостерігається? Чи може вона стати регулярною прецесією і, якщо може, то за яких умов?

46. Чому на практиці застосовуються тільки сплюснуті гіроскопи?

47. Як сили тертя впливають на рух СЗГ?

Література

[58]; [2]; [9, гл. VI, с. 234 – 277]; [10, гл. 2, с. 69 – 78, 92 – 103, 138 – 143]; [33, урок 8, с. 348 – 402].

Розділ 8. Гіромаятник

На відміну від зрівноваженого (або астатичного) гіроскопа, центр мас (інерції, тяжіння) якого суміщений з точкою підвісу, гіроскоп, центр мас C якого не збігається з точкою його підвісу O , називають «важким». Цією назвою підкреслюється та обставина, що на рух такого гіроскопа суттєво впливає сила тяжіння, яка утворює відносно точки підвісу момент, величина і напрямок якого залежать від поточного кутового положення гіроскопа. Найпростішим видом важкого гіроскопа є гіромаятник. *Гіромаятником зазвичай називають гіроскоп, центр мас якого зміщено відносно точки підвісу вздовж його головної осі.*

Надалі розглядатимемо окремих випадок гіромаятника – симетричний гіромаятник. *Симетричний гіромаятник – це симетричний гіроскоп, центр мас якого зміщений відносно точки його підвісу вздовж осі фігури.* Найбільш відомим прикладом симетричного гіромаятника є дитяча іграшка – дзига.

З визначення гіромаятника випливає, що він належить до «важких» гіроскопів, але до такого їх різновиду, у якому еліпсоїд інерції гіроскопа, побудований для точки опори (підвісу), є еліпсоїдом обертання, а центр тяжіння гіроскопа лежить на осі симетрії цього еліпсоїда.

Обертальний рух важкого гіроскопа навколо точки опори та його можливий поступальний рух разом із точкою опори не можуть розглядатися як незалежні, за винятком випадку, коли точка опори рухається без прискорення, тобто прямолінійно та рівномірно. Якщо точка опори рухається з прискоренням, то до неї прикладена деяка прискорююча сила у вигляді реакції опори. Ця сила утворює відносно центра тяжіння C гіроскопа момент, який певним чином впливає на подальший обертальний рух гіроскопа.

Будемо вважати, що точка опори не має прискорення, тобто гіромаятник встановлено на «нерухомій» основі (точніше кажучи, на основі, яка рухається прямолінійно та рівномірно в інерціальному просторі).

Звертаючись до опису кінематики гіромаятника, скористаємось раніше введеними системами координат та кутовими координатами з деякими уточненнями. Передусім домовимося вектор \mathbf{l} зміщення центра тяжіння C відносно точки опори O завжди скеровувати вздовж додатної півосі осі фігури (рис. 8.1), а додатну піввісь нерухомої осі ξ – уверх по вертикалі (тобто паралельно лінії дії сили тяжіння \mathbf{P} гіроскопа). Тоді кут α характеризуватиме азимутальне положення осі фігури гіромаятника, а кут β – підняття осі фігури над площиною горизонту.

Рівняння руху гіромаятника знайдемо за допомогою формалізму Лагранжа (або рівнянь Лагранжа другого роду), використовуючи як узагальнені координати кути α, β, γ (рис. 8.1).

Кінетична енергія гіромаятника визначається через обрані узагальнені координати так

$$2T = J'_e (\dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta + \dot{\beta}^2) + H^2 / J,$$

де $J'_e = J_e + ml^2$ – момент інерції гіромаятника відносно екваторіальної осі, яка проходить через точку підвісу; $H = J\omega_z = J(\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta)$; J_e – екваторіальний мо-

мент інерції гіроскопа відносно осі, яка проходить через центр тяжіння; m – маса гіромаятника, l – величина зміщення центра маси відносно точки підвісу.

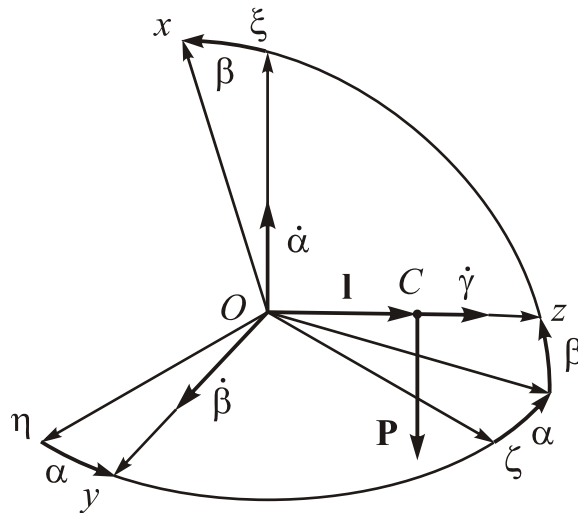


Рис. 8.1. Кінематика поворотів гіромаятника

Щоб урахувати вплив на рух гіромаятника моменту сили тяжіння відносно точки опору, будемо вважати, що гіромаятник міститься в силовому потенціальному полі сили тяжіння. Потенціальна енергія гіромаятника, зумовлена наявністю цього поля, визначиться виразом: $\Pi = mgh = mg(\mathbf{I})_{\xi} = mgl \sin \beta$.

Рівняння Лагранжа для розглядуваної системи мають вигляд:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \Gamma}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i.$$

Виконавши необхідні дії, дістанемо таку систему рівнянь руху гіромаятника:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (J'_e \dot{\alpha} \cos^2 \beta + H \sin \beta) = M_{\xi}; \\ J'_e \ddot{\beta} + J'_e \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta - H \dot{\alpha} \cos \beta = -mgl \cos \beta + M_{\gamma}; \\ \frac{dH}{dt} = M_z. \end{cases} \quad (8.1)$$

Можливі й інші форми вигляду рівнянь руху гіроскопа.

Наприклад, якщо як узагальнені координати обрати кути осциляції у відповідності з рис. 2.6, то рівняння руху, виведені у п. 2.3.1, матимуть вигляд (2.21). Якщо ж скористуватися кутами Ейлера відповідно до рис. 2.7, отримаємо систему рівнянь (2.24).

Найбільш наочний фізичний зміст мають кути Ейлера ψ, ϑ, φ . Кут нутації ϑ характеризує відхилення осі фігури гіроскопа від вертикалі, кут прецесії ψ – поворот вертикальної площини, яка проходить через вісь фігури гіроскопа, навколо вертикалі, а кут ротації φ – поворот ротора гіроскопа навколо осі фігури відносно вертикальної площини, яка проходить через вісь фігури.

8.1. Вільний рух гіромаятника. Точні дослідження

Вільним називають гіромаятник, на який не діють моменти зовнішніх сил, окрім сили тяжіння.

Гіромаятник, на який діє лише сила тяжіння, являє собою консервативну систему, яка описується за довільних узагальнених координатах q_i , рівняннями вигляду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \Gamma}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0; \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad (8.2)$$

де k – кількість ступенів вільності системи.

Покажемо, що рівняння (8.2) дозволяють узагальнений інтеграл енергії, тобто сума кінетичної та потенціальної енергій дорівнює постійному, незмінному з часом значенню – початковому значенню цієї суми.

Помножимо кожне з рівнянь (8.2) на відповідну узагальнену швидкість \dot{q}_i та складемо почленно між собою отримані рівняння:

$$\sum_{i=1}^k \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i - \sum_{i=1}^k \frac{\partial \Gamma}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^k \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \dot{q}_i = 0.$$

Візьмемо до уваги, що для консервативної системи (потенціальна енергія якої не залежить безпосередньо від часу) є слушним співвідношення:

$$\frac{d\Pi}{dt} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \dot{q}_i = \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \dots + \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt}, \quad (8.3)$$

а також використаємо ту обставину, що кожний доданок у першій сумі може бути поданий у вигляді :

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i,$$

а це означає, що і всю суму можна записати у вигляді суми двох доданків

$$\sum_{i=1}^k \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i = \sum_{i=1}^k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - \sum_{i=1}^k \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i. \quad (8.4)$$

За теоремою Ейлера про однорідні функції, з урахуванням, що у даному випадку кінетична енергія Γ є однорідною квадратичною функцією узагальнених швидкостей, маємо:

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2\Gamma.$$

Отже, можемо записати

$$\sum_{i=1}^k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^k \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) = \frac{d}{dt} (2\Gamma) = 2 \frac{d\Gamma}{dt}. \quad (8.5)$$

Тепер співвідношення (8.3), (8.4) і (8.5) дозволяють звести рівняння до такого вигляду:

$$2 \frac{dT}{dt} - \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial \ddot{q}_i} \ddot{q}_i \right) + \frac{d\Pi}{dt} = 0.$$

Неважко зрозуміти, що другий доданок є повною похідною від кінетичної енергії за часом (кінетична енергія у цьому разі не залежить явним чином від часу). Тому останнє співвідношення рівносильне наступному:

$$T + \Pi = \text{const},$$

що й потрібно було довести.

Позначимо початкове значення повної енергії гіроскопа через E . Тоді, доведений інтеграл енергії набуде вигляду:

$$T + \Pi = E. \quad (8.6)$$

Другим інтегралом, загальним для всіх виведених рівнянь руху гіромаятника, є сталість власного кінетичного моменту гіроскопа:

$$H = H_0 = \text{const}. \quad (8.7)$$

Неважко бачити, що існування цього інтеграла обумовлено тим, що кутові координати γ , δ_3 та φ є *циклічними* (тобто кінетична та потенційна енергії гіромаятника не залежать від цих координат).

Ще один (третій) інтеграл допускають рівняння руху (8.1) та (2.24), бо в них координати α і ψ відповідно також є циклічними:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = \frac{\partial T}{\partial \alpha} \equiv 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \psi} = \frac{\partial T}{\partial \psi} \equiv 0,$$

звідки випливає (див. 8.2)

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = \text{const}; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = \text{const},$$

або інакше, більш розгорнуто:

$$J'_e \dot{\alpha} \cos^2 \beta + H \sin \beta = A; \quad J'_e \dot{\psi} \sin^2 \vartheta + H \cos \vartheta = A, \quad (8.8)$$

де A – постійна величина, яка характеризує значення проекції повного кінетичного моменту на вертикаль у початковий момент часу. Отже, фізичний зміст третього інтеграла полягає в тому, що *проекція повного кінетичного моменту \mathbf{K} на вертикаль залишається незмінною з плином часу*. Геометрично це означає, що рух кінця вектора кінетичного елемента гіроскопа є таким, що якщо його початок помістити в точку підвісу O гіроскопа, то кінець вектора \mathbf{K} під час руху гіроскопа буде завжди розміщуватися на горизонтальній площині, яка віддалена на відстань A від точки опори O . Аналогічно міркуючи, можна дійти висновку, що кінець вектора \mathbf{K} внаслідок другого інтеграла (8.7) буде постійно міститися у площині, яка перпендикулярна осі фігури та розміщена на відстані H_0 від початку. Інакше кажучи, кінець вектора кінетичного моменту постійно буде міститися на лінії перетину вказаних двох площин, як це зображено на рис. 8.2.

Під час руху гіроскопа лінія перетину площин l і m може переміщуватися по площині l (у разі змінювання кута нутації ϑ і кута прецесії ψ); крім того, кінець вектора \mathbf{K} може переміщуватися вздовж лінії перетину KN .

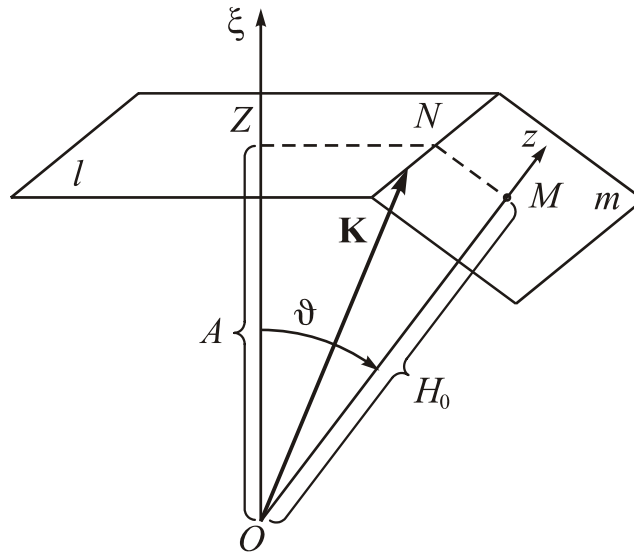


Рис. 8.2. Схема розташування вектора кінетичного моменту

Зупинимося задля визначеності на узагальнених координатах ψ, ϑ, ϕ – кутах Ейлера.

Співвідношення (8.6) з урахуванням виразів (2.22) і (2.23) для потенціальної і кінетичної енергій записується в розгорнутій формі так:

$$J'_e(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta) + H^2/J + 2mgl \cos \vartheta = 2E. \quad (8.9)$$

Для аналізу та дослідження руху гіромаятника зручно замість кута нутації ϑ ввести нову змінну

$$u = \cos \vartheta.$$

Тоді, враховуючи, що

$$\sin \vartheta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \vartheta} = \pm \sqrt{1 - u^2}; \quad \frac{d(\cos \vartheta)}{dt} = -\dot{\vartheta} \sin \vartheta = \dot{u},$$

з чого випливає

$$\dot{\vartheta} = \mp \dot{u} / \sqrt{1 - u^2},$$

та використовуючи співвідношення (8.8) для подання кутової швидкості $\dot{\vartheta}$ через інші параметри руху гіроскопа, отримаємо

$$\frac{\dot{u}^2}{1 - u^2} = \frac{2E - H^2/J}{J'_e} - \frac{2mgl}{J'_e} u - \dot{\psi}^2 (1 - u^2). \quad (8.10)$$

Якщо тепер взяти до уваги співвідношення (8.7) та (8.8) двох інших інтегралів та ввести позначення

$$p = \frac{mgl}{J'_e}; \quad e = \frac{2E - H_0^2/J}{J'_e}; \quad a = \frac{A}{J'_e}; \quad h = \frac{H_0}{J'_e}, \quad (8.11)$$

то вираз (8.10) можна звести до такого

$$\left(\frac{du}{dt} \right)^2 = (1 - u^2)(e - 2pu) - (a - hu)^2. \quad (8.12)$$

Рівняння (8.12) є диференціальним рівнянням першого порядку відносно змінної $u = \cos \vartheta$ із поділеними змінними і тому його можна проінтегрувати. В ре-

зультаті розв'язування цього рівняння визначиться величина u (тобто косинус куту нутації ϑ) як функція часу. Щоб отримати кут прецесії, необхідно скористатися інтегралом (8.8), з якого випливає

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{a - hu}{1 - u^2}. \quad (8.13)$$

Якщо функція $u(t)$ відома, то інтегрування рівняння (8.13) не становить труднощів.

Розглянемо рівняння нутації (8.12). Звернемо увагу на те, що права частина цього рівняння є поліномом третього степеня відносно змінної u . Позначимо цей поліном $f(u)$:

$$f(u) = (1 - u^2)(e - 2pu) - (a - hu)^2, \quad (8.14)$$

де e – величина, що характеризує різницю між початковим значенням енергії E та енергією, яка обумовлена власним обертанням гіроскопа; p – величина, пропорційна опорному моменту гіромаятника $M_{\text{оп}} = mgl$ (див. (8.11)); a дорівнює (в зміненому масштабі) проекції повного кінетичного моменту на вертикаль, а h – пропорційна власному кінетичному моменту H_0 гіроскопа.

Функцію (8.14), як і будь-який поліном, можна подати у вигляді

$$f(u) = 2p(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3), \quad (8.15)$$

де u_1, u_2, u_3 – корені цього полінома.

З урахуванням (8.14) рівняння (8.12) набуде виду:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = f(u). \quad (8.16)$$

Розглянемо функцію $f(u)$ (її називають *гіроскопічною*), щоб встановити, як змінюється її знак у разі проходження змінною u значень від $-\infty$ до $+\infty$.

За змістом позначення величина u не може набувати значення, яке б за модулем перевищувало одиницю. За крайніх значень $u = \pm 1$ відповідно до (8.12) функція $f(u)$ приймає від'ємні значення:

$$f(-1) = -(a + h)^2; \quad f(+1) = -(a - h)^2.$$

Визначимо значення функції $f(u)$ у початковий момент часу. Для цього згадаймо, що відповідно до інтегралів (8.8) і (8.9) маємо

$$\begin{aligned} e &= \frac{2E - H_0^2/J}{J_e'} = \frac{J_e'(\dot{\vartheta}_0^2 + \dot{\psi}_0^2 \sin^2 \vartheta_0) + H_0^2/J + 2mgl \cos \vartheta_0 - H_0^2/J}{J_e'} = \\ &= \dot{\vartheta}_0^2 + \dot{\psi}_0^2 \sin^2 \vartheta_0 + 2 \frac{M_{\text{оп}}}{J_e'} \cos \vartheta_0, \end{aligned}$$

а у відповідності до виразів (8.11) і (8.8)

$$a = \dot{\psi}_0 \sin^2 \vartheta_0 + \frac{H_0}{J_e'} \cos \vartheta_0.$$

Тому, враховуючи, що $u_0 = \cos \vartheta_0$, дістанемо:

$$e - 2pu_0 = \dot{\vartheta}_0^2 + \dot{\psi}_0^2 \sin^2 \vartheta_0; \quad a - hu_0 = \dot{\psi}_0 \sin^2 \vartheta_0.$$

Тепер можна дійти висновку, що гіроскопічна функція у початковий момент часу набуває значення

$$f(u_0) = \sin^2 \vartheta_0 (\dot{\vartheta}_0^2 + \dot{\psi}_0^2 \sin^2 \vartheta_0) - (\dot{\psi}_0 \sin^2 \vartheta_0)^2 = \dot{\vartheta}_0^2 \sin^2 \vartheta_0 \geq 0.$$

Отже, якщо задатися деяким початковим значенням кута нутації ϑ (або змінної $u = \cos \vartheta$, яка, вочевидь, може змінюватися лише у межах від -1 до +1), то графік гіроскопічної функції буде мати вигляд, зображений на рис. 8.3.

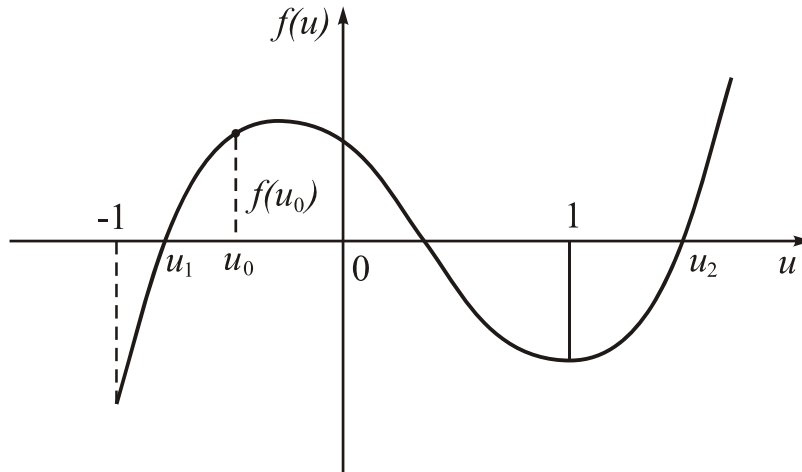


Рис. 8.3. Графік гіроскопічної функції

Початкове значення функції є додатним, якщо виконуються дві умови $\vartheta_0 \neq 0$; $\dot{\vartheta}_0 \neq 0$, тобто якщо вісь фігури у початковий момент часу не направлена вздовж вертикалі, а початкова швидкість змінювання кута нутації не дорівнює нулю. У цьому разі гіроскопічна функція має два дійсних корені $u_1 < u_2$ в робочому інтервалі від -1 до +1. Менший корінь міститься на ділянці від -1 до u_0 , а другий (більший) – на ділянці від u_0 до +1 включно.

Далі, згідно з рівнянням (8.16)

$$\frac{du}{dt} = \pm \sqrt{f(u)}. \quad (8.17)$$

Величина $\frac{du}{dt}$ характеризує кутову швидкість нутації $\dot{\vartheta}$, тобто являє собою дійсну фізичну величину, яка не може набувати уявних значень.

Отже, в умовах поставленої задачі значення u мають задовольняти умову, щоб функція $f(u)$ не мала від'ємних значень, а це можливо лише якщо u за реального руху гіромаятника не виходить за межі діапазону

$$u_1 \leq u(t) \leq u_2.$$

Задля інтегрування рівняння нутації (8.17) замінимо змінну u на нову змінну x згідно з умовою:

$$u = u_1 + (u_2 - u_1)x^2. \quad (8.18)$$

Звернемо увагу на те, що $x = 0$ при $u = u_1$, а при $x = \pm 1$ величина $u = u_2$.

Не зменшуючи узагальненості, можна вважати коефіцієнт $p = \frac{mgl}{J'_e}$ додатною величиною. Це означає (з огляду на те, що величини J'_e , m і g є суто додатними), що припускається $l > 0$, тобто, що центр мас зсунений відносно точки підвісу вдовж осі фігури у додатному напрямку.

Як впливає з розгляду гіроскопічної функції (8.15), за великих додатних значень ($u \rightarrow \infty$) значення гіроскопічної функції буде додатним

$$f(u) \rightarrow 2pu^3 > 0,$$

тому третій корінь u_3 (див. рис. 8.3) міститиметься праворуч від $u = 1$. У цілому корені функції $f(u)$ задовольняють умови:

$$-1 \leq u_1 \leq u_0 \leq u_2 \leq +1 \leq u_3.$$

Уведемо позначення для суто додатної величини:

$$k^2 = \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1}.$$

Тепер вираз (8.15) можна перетворити до виду:

$$f(u) = 2p(u_2 - u_1)^2 (u_3 - u_1) x^2 (1 - x^2) (1 - k^2 x^2). \quad (8.19)$$

Диференціюючи співвідношення (8.18), знайдемо зв'язок між похідними старої і нової змінної:

$$\frac{du}{dt} = (u_2 - u_1) 2x \frac{dx}{dt}.$$

Підставимо (8.19) і (8.15) у (8.17). Отримаємо:

$$\frac{dx}{dt} = \pm \omega \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)},$$

звідки випливає:

$$\omega dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}, \quad (8.20)$$

де використано позначення

$$\omega = \sqrt{\frac{p}{2}} (u_3 - u_1).$$

Проінтегруємо вираз (8.20) від моменту часу, коли $u = u_1$ (або $x = 0$), до довільного моменту часу. Позначаючи

$$\tau = \omega(t - t|_{u=u_1}),$$

отримаємо:

$$\tau = \pm \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}. \quad (8.21)$$

З рівняння (8.21) випливає, що змінна x є еліптичною функцією часу

$$x = \pm \operatorname{sn} \tau.$$

Щодо змінної u , то вона змінюється відповідно до виразу (8.18) за законом

$$u = u_1 + (u_2 - u_1) \operatorname{sn}^2 \omega(t - t_1), \quad (8.22)$$

де $t_1 = t|_{u=u_1}$. Із цього співвідношення випливає, що якщо усі три корені u_1, u_2, u_3 функції $f(u)$ є різними, тобто якщо $(u_3 - u_1) > 0$ і $k^2 < 1$, то змінна u , а отже, й сам кут нутації ϑ періодично змінюються з плином часу. Найбільше значення куту нутації дорівнює $\vartheta_1 = \arccos u_1$, найменше – $\vartheta_2 = \arccos u_2$, тобто

$$\vartheta_2 \leq \vartheta \leq \vartheta_1.$$

Період розглядуваної еліптичної функції $\operatorname{sn}^2 \omega(t - t_1)$, а отже, і змінної u відносно аргументу τ становить

$$T_\tau = 2K(k) = 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

де $K(k)$ – повний еліптичний інтеграл першого роду. Відносно до часу t період буде дорівнювати

$$T = \frac{T_\tau}{\omega} = \frac{2}{\omega} K(k) = \frac{2}{\omega} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

8.2. Регулярні прецесії гіромаятника

Розглянемо окремий випадок. Нехай гіроскопічна функція $f(u)$ має подвійний корінь

$$u_1 = u_2 = u_0.$$

За цієї умови з рівняння (8.22) випливає:

$$u = u_0 = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \vartheta = \vartheta_0 = \text{const}.$$

Тобто *кут нутації залишається незмінним*.

У початковий момент часу $f(u) = f(u_0) = 0$, бо u_0 є коренем полінома $f(u)$.

З рівняння (8.23) випливає, що у початковий момент часу швидкість змінювання кута нутації має дорівнювати нулю і залишиться такою і надалі

$$\dot{\vartheta}(0) = \dot{\vartheta}_0 = 0. \quad (8.23)$$

З рівняння (8.13) внаслідок незмінності у часі u випливає незмінність швидкості змінювання куту прецесії ψ , а з рівняння (8.7) і виразу (2.23) – сталість й кутової швидкості власного обертання гіроскопа $\dot{\phi}$:

$$\dot{\psi}(t) = \dot{\psi}_0 = \text{const}; \quad \dot{\phi}(t) = \dot{\phi}_0 = \text{const}.$$

Отже, у розглядуваній ситуації рух гіроскопа складається з рівномірного обертання осі фігури навколо вертикалі з кутовою швидкістю $\dot{\psi}_0$, причому кут нутації між віссю фігури і вертикаллю залишається увесь час постійним, рівним початковому ϑ_0 , і рівномірного обертання тіла гіроскопа навколо осі фігури відносно площини прецесії з кутовою швидкістю $\dot{\phi}_0$. Такий рух можна охарактеризувати як *регулярну прецесію* гіроскопа навколо вертикалі.

Уточнимо, за яких початкових умов можлива регулярна прецесія гіромаятника.

Очевидно, що умова (8.23) є лише необхідною, але не достатньою задля здійснення такої прецесії, бо означає лише, що початкове значення кута збігається з одним з коренів $f(u)$, але не з обома одночасно. Умовою збігу u_0 одночасно з u_1 і u_2 є рівність нулю не лише самої функції $f(u)$, але й її похідної $df(u)/du$. Тому відшукаємо похідну

$$\begin{aligned} \left. \frac{df(u)}{du} \right|_{u=u_0} &= \left[(1-u^2)(-2p) + (e-2pu)(-2u) + 2h(a-hu) \right]_{u=u_0} = \\ &= -2 \sin^2 \vartheta (\dot{\psi}_0^2 \cos \vartheta_0 - \frac{H_0}{J'_e} \dot{\psi}_0 + \frac{M_{on}}{J'_e}) = \\ &= -2 \cos \vartheta_0 \sin^2 \vartheta (\dot{\psi}_0 - \dot{\psi}_{01})(\dot{\psi}_0 - \dot{\psi}_{02}), \end{aligned}$$

де $\dot{\psi}_{01}$ і $\dot{\psi}_{02}$ – корені квадратного рівняння

$$J'_e \dot{\psi}_0^2 \cos \vartheta_0 - H_0 \dot{\psi}_0 + M_{on} = 0. \quad (8.24)$$

Розв'язуючи рівняння (8.24), дійдемо наступного виразу коренів:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_{01} &= \frac{H_0}{2J'_e \cos \vartheta_0} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4M_{on} J'_e \cos \vartheta_0}{H_0^2}} \right), \\ \dot{\psi}_{02} &= \frac{H_0}{2J'_e \cos \vartheta_0} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4M_{on} J'_e \cos \vartheta_0}{H_0^2}} \right). \end{aligned} \quad (8.25)$$

Варто відзначити, що умова існування дійсних коренів (8.25) збігається з раніше встановленою умовою стійкості верхнього положення дзиги.

Отже, додатковою умовою існування регулярної прецесії гіромаятника є така. Значення швидкості з кута прецесії у початковий момент часу, коли виконується умова (8.23), має бути або $\dot{\psi}_{01}$, або $\dot{\psi}_{02}$ (8.25). У першому випадку гіромаятник у подальшому здійснюватиме регулярну прецесію навколо вертикалі з малою кутовою швидкістю $\dot{\psi}_{01}$ (*повільну прецесію*). У другому випадку – швидку регулярну прецесію з великою кутовою швидкістю $\dot{\psi}_{02}$.

За довільних початкових умов величини (8.25) являють собою дві частоти власних коливань гіромаятника.

Задля ілюстрації одержаних результатів скористаємося програмою **GM_m1.m**, яка здійснює чисельне інтегрування рівнянь (2.24). Її текст наведено у Додатку 4. Чисельне інтегрування тут здійснюється методом Рунге-Кутти 4-го порядку (процедура **RKO4.m**), яка використовує процедуру **GM_kut_EULER1.m** обчислення правих частин диференціальних рівнянь гіромаятника, тексти яких подані у Додатку 4.

Результати моделювання за цими програмами показано на рис. 8.4 – 8.6, вільний незгасаючий рух – на рис. 8.4, а два можливих випадки регулярної прецесії – швидкої і повільної – на рис. 8.5 і 8.6 відповідно.

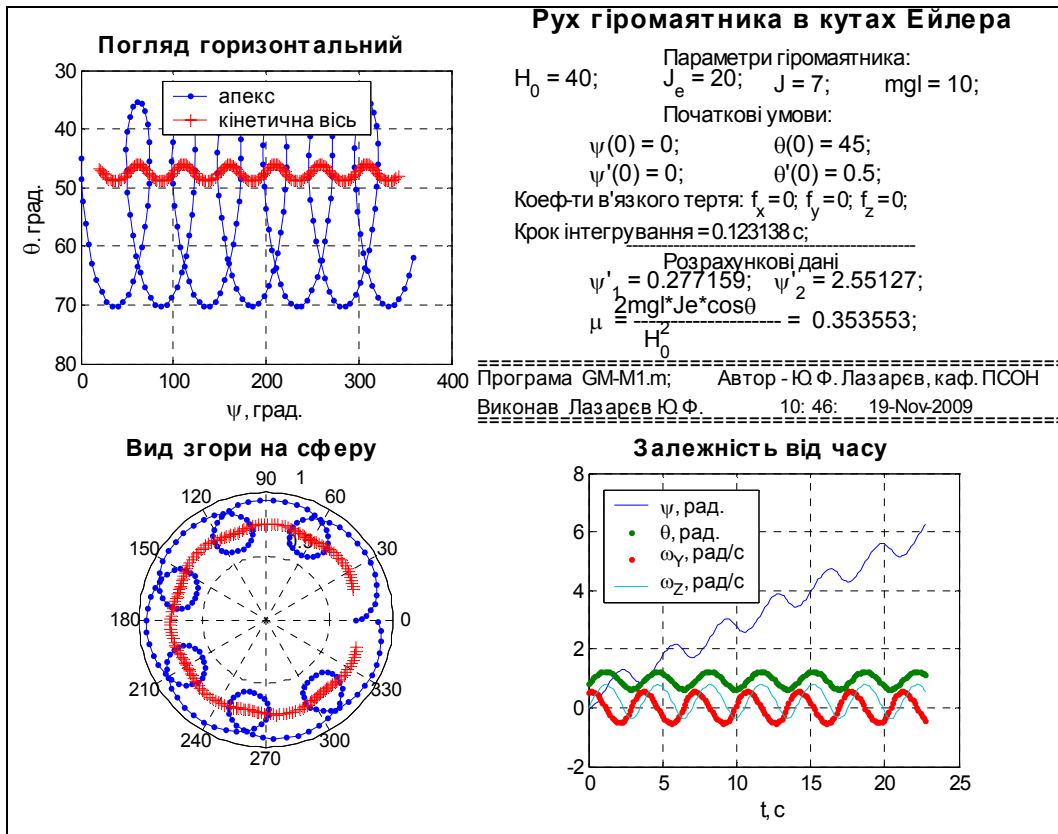


Рис. 8.4. Вільний рух гіромаятника

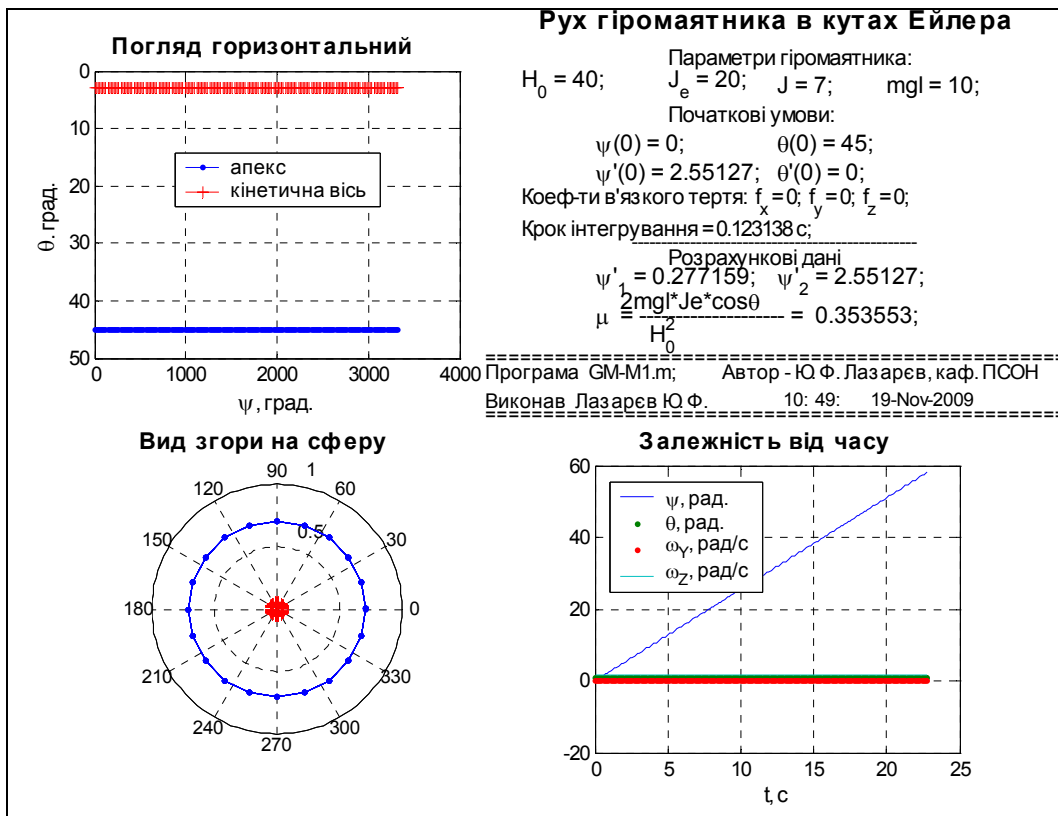


Рис. 8.5. Регулярна швидка прецесія гіромаятника

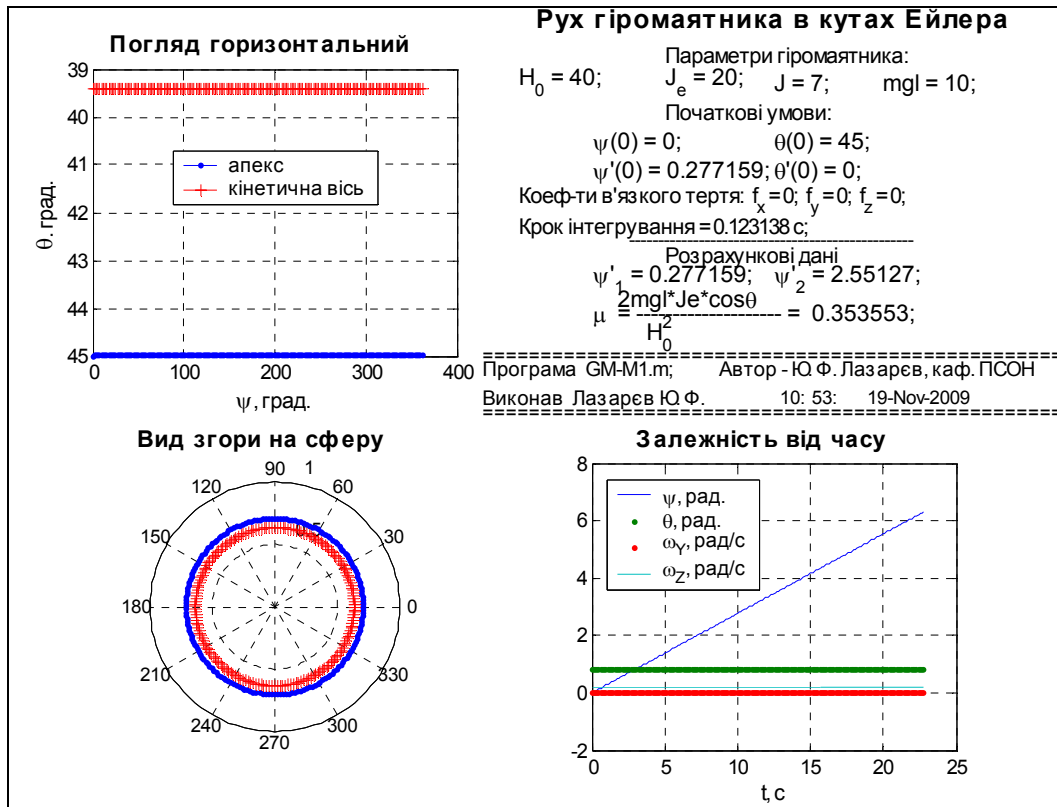


Рис. 8.6. Регулярна повільна прецесія гіромаятника

8.3. Вільний рух гіромаятника. Наближені дослідження. Метод компресії

Розглянемо вільний рух гіромаятника в околі положення вертикалі, тобто у припущенні, що головна вісь гіромаятника увесь час рухається поблизу вертикалі.

У цьому випадку найбільш раціонально використовувати для аналізу рівняння (2.21) в кутах осциляції. Припускаючи в них моменти зовнішніх сил рівними нулю, кути осциляції малими $\delta_1 \ll 1$; $\delta_2 \ll 1$, кутові швидкості $\dot{\delta}_1$ і $\dot{\delta}_2$ – також малими і залишаючи у рівняннях лише члени першого порядку мализни, отримаємо лінеаризовані рівняння:

$$\begin{cases} J'_e \ddot{\delta}_1 + H_0 \dot{\delta}_2 - mgl \delta_1 = 0 \\ J'_e \ddot{\delta}_2 - H_0 \dot{\delta}_1 - mgl \delta_2 = 0 \end{cases} \quad (8.26)$$

Для розв'язування такої системи диференціальних рівнянь можна застосувати метод компресії рівнянь. Для цього введемо комплексну змінну

$$z = \delta_1 + j\delta_2. \quad (8.27)$$

Помножимо друге рівняння (8.26) на уявну одиницю і складемо результат з першим рівнянням. В результаті дістанемо одне рівняння другого порядку:

$$J'_e \ddot{z} - jH_0 \dot{z} - mglz = 0. \quad (8.28)$$

Характеристичне рівняння

$$J'_e p^2 - jH_0 p - mgl = 0 \quad (8.29)$$

має корені

$$p_{1,2} = j \frac{H_0}{2J'_e} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4J'_e mgl}{H_0^2}} \right]. \quad (8.30)$$

Якщо $l > 0$, то маємо випадок «верхньої маятниковості», коли центр мас гіромаятника розміщений вище за точку підвісу. Випадок $l < 0$ відповідає «нижній маятниковості», при якій центр мас міститься нижче за точку його підвісу.

З рівності (8.30) випливає, що за нижньої маятниковості ($l < 0$) корені характеристичного рівняння будуть обидва суто уявними. Те саме відбудеться у разі верхньої маятниковості (випадок дзиги) за умови досить значного за величиною кінетичного моменту гіромаятника (див. також умову (3.47))

$$H_0 \geq 2\sqrt{J'_e mgl}. \quad (8.31)$$

Якщо ж умова (8.31) не виконується, то у коренях (8.30) виникають дійсні частини, з яких одна буде обов'язково додатною, що свідчить про нестійкість руху.

Вважаючи умову (8.31) виконаною, позначимо

$$\omega_{01} = \frac{H_0}{2J'_e} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4J'_e mgl}{H_0^2}} \right]; \quad \omega_{02} = \frac{H_0}{2J'_e} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{4J'_e mgl}{H_0^2}} \right]. \quad (8.32)$$

Розв'язок рівняння (8.28) тепер можна подати у вигляді:

$$z(t) = C_1 e^{j\omega_{01}t} + C_2 e^{j\omega_{02}t}. \quad (8.33)$$

Кожна з двох складових, з яких складається розв'язок, відображується на зображувальній комплексній площині z ($\delta_1 - j\delta_2$) траєкторією зображувальної точки у вигляді кола з центром у початку координат. Рух по колу у випадку першої складової здійснюється з меншою коловою частотою, тобто з більшим періодом

$T_{01} = \frac{2\pi}{\omega_{01}}$, а у випадку другої складової, – з більшою частотою (з меншим

періодом $T_{02} = \frac{2\pi}{\omega_{02}}$). У цілому траєкторія, що відповідає розв'язку (8.33) являє собою суму цих двох колових рухів, тобто спіралеподібну замкнену криву (рис. 8.7)

з центром у початку координат.

Неважко впевнитися, що траєкторія зображувальної точки на комплексній зображувальній площині у випадку гіромаятника повністю збігається з траєкторією апексу гіроскопа на картинній площині гіромаятника, якщо її провести горизонтально на висоті одиниця від точки підвісу (рис. 8.8)

Отже, вісь фігури симетричного вільного гіромаятника здійснює складений рух у просторі, обертаючись по конусу з великою частотою навколо осі, яка у свою чергу обертається навколо вертикалі з малою частотою.

Якщо кінетичний момент гіромаятника великий, тобто виконується умова

$$\mu = \frac{4J'_e mgl}{H_0^2} \ll 1,$$

то значення частот (8.32) власних коливань гіромаятника можна обчислювати за наближеними формулами:

$$\omega_{01} \approx \frac{mgl}{H_0}; \quad \omega_{02} \approx \frac{H_0}{J'_e}.$$

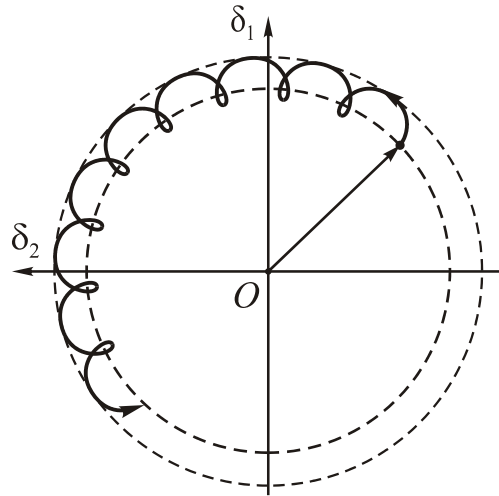


Рис. 8.7. Траєкторія зображувальної точки гіромаятника

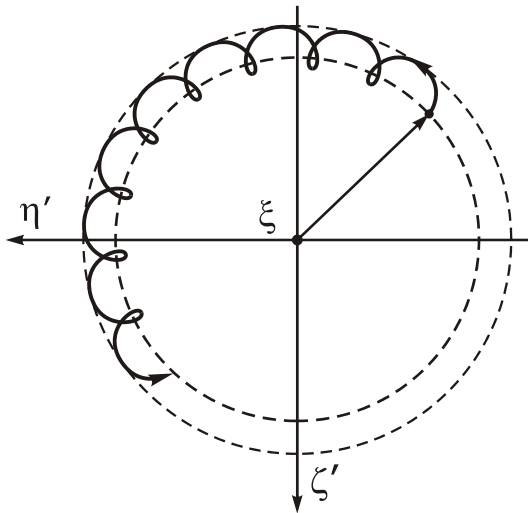


Рис. 8.8. Траєкторія апекса гіромаятника на картинній площині

Неважко збагнути, що перша з цих частот збігається з кутовою швидкістю вимушеної прецесії гіроскопа під дією моменту mgl сили тяжіння, а друга – з частотою нутації.

Далі наводяться деякі результати моделювання поведінки гіромаятника за моделлю, поданою рівняннями у кутах осциляції (2.21), для чого замість попередньої програми використаємо програму **GM_M2**, в якій замість процедури правих частин **GM_kut_Euler1** використана файл-функція **GM_kut_occilation** (текст обох програм поданий у Додатку 4).

Перевагою застосування моделі саме у кутах осциляції полягає у тому, що її можливо і доцільно використовувати для опису руху осі гіромаятника поблизу вертикалі, включаючи проходження через вертикаль (що неможливо зробити у

кутах Ейлера, бо рівняння Ейлера у разі проходження осі гіромаятника через вертикаль вироджуються).

Це продемонстровано на рис. 8.9, на якому відображений випадок, коли початкове положення осі гіромаятника збігається з вертикаллю, а рух починається завдяки початковій кутовій швидкості $\dot{\delta}_{10} = 0,3$ рад/с. На картинній площині $\delta_1 - \delta_2$ наведена також траєкторія кінетичної осі.

Інший рух гіромаятника, коли у початковий момент часу вісь фігури гіромаятника нерухома, але відхилена від вертикалі на кут $\delta_{10} = 30^\circ$, ілюструють рис. 8.10 і 8.11. Центр мас гіромаятника на рис. 8.10 розміщений вище за точку підвісу (верхня маятниковість), а на рис. 8.11 – нижче (нижня маятниковість).

Обрання тієї чи іншої моделі гіромаятника, тобто обрання сукупності кутів послідовних поворотів, що визначають кутове положення гіроскопа, визначається видом прогнозованого руху гіромаятника.

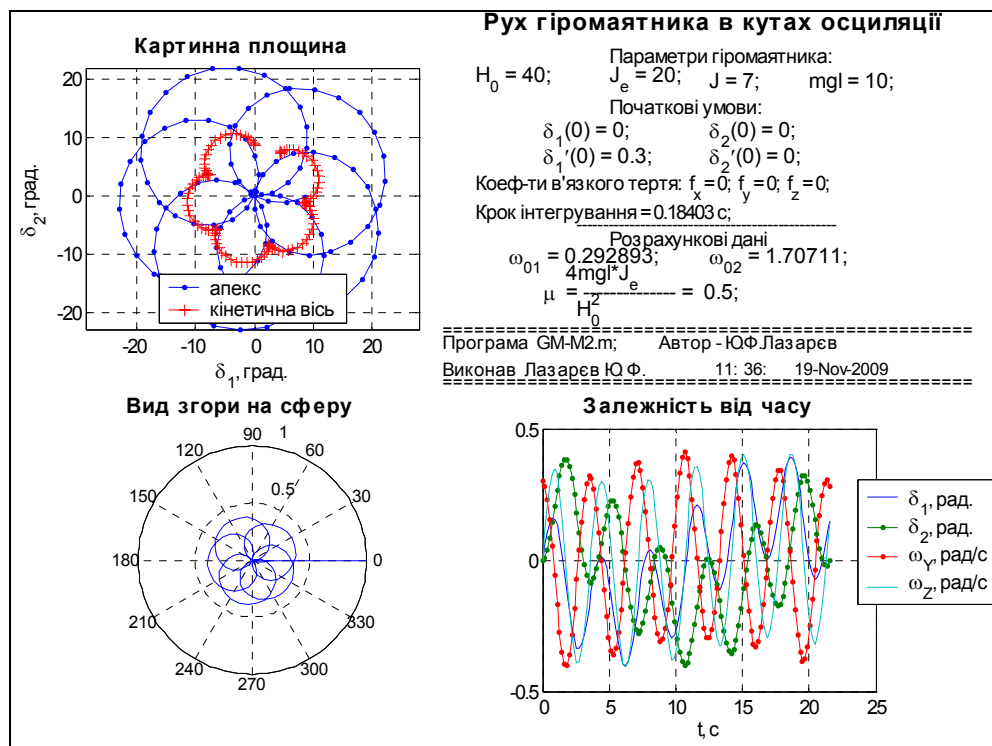


Рис. 8.9. Вільні коливання гіромаятника з проходженням через вертикаль

Якщо рух осі фігури гіромаятника є таким, що кути відхилення від вертикалі можуть змінюватися у великих межах, але при цьому вісь маятника не проходить через вертикаль – доцільно використовувати модель у кутах Ейлера, особливо коли можливий перехід осі фігури через горизонтальну площину.

Якщо ж за досліджуваного руху вісь фігури не проходить через горизонтальну площину, особливо якщо проходження її через вертикальне положення, слід використовувати модель у кутах осциляції.

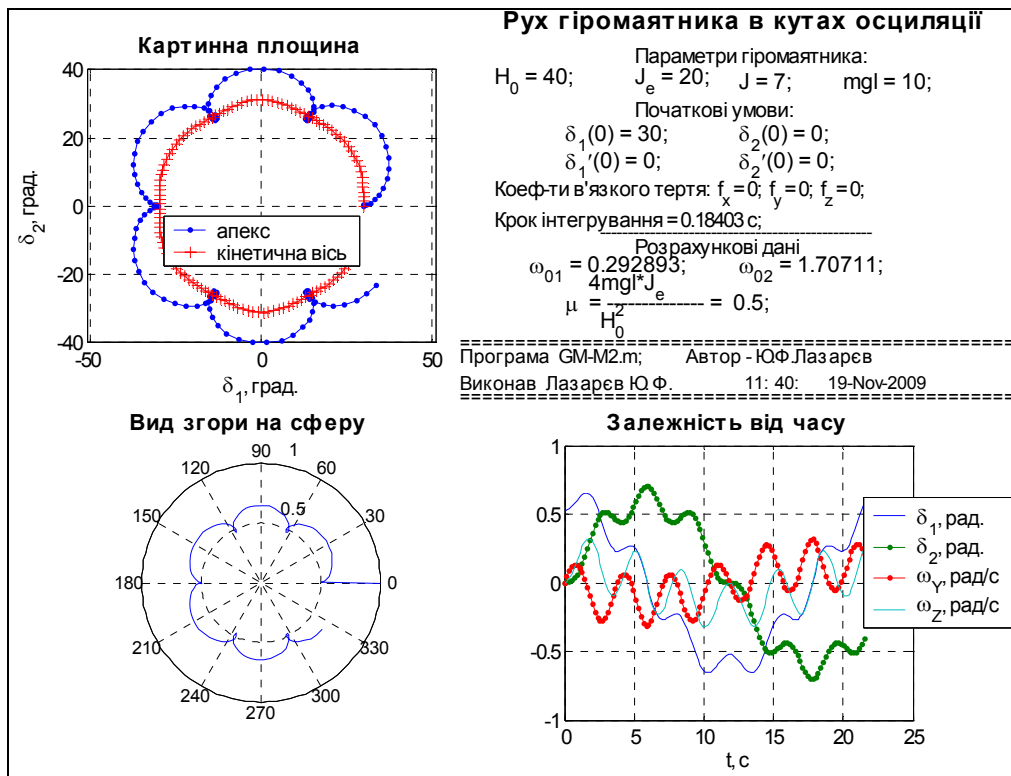


Рис. 8.10. Вільні коливання гіромаятника зі стану спокою (верхня маятниковість)

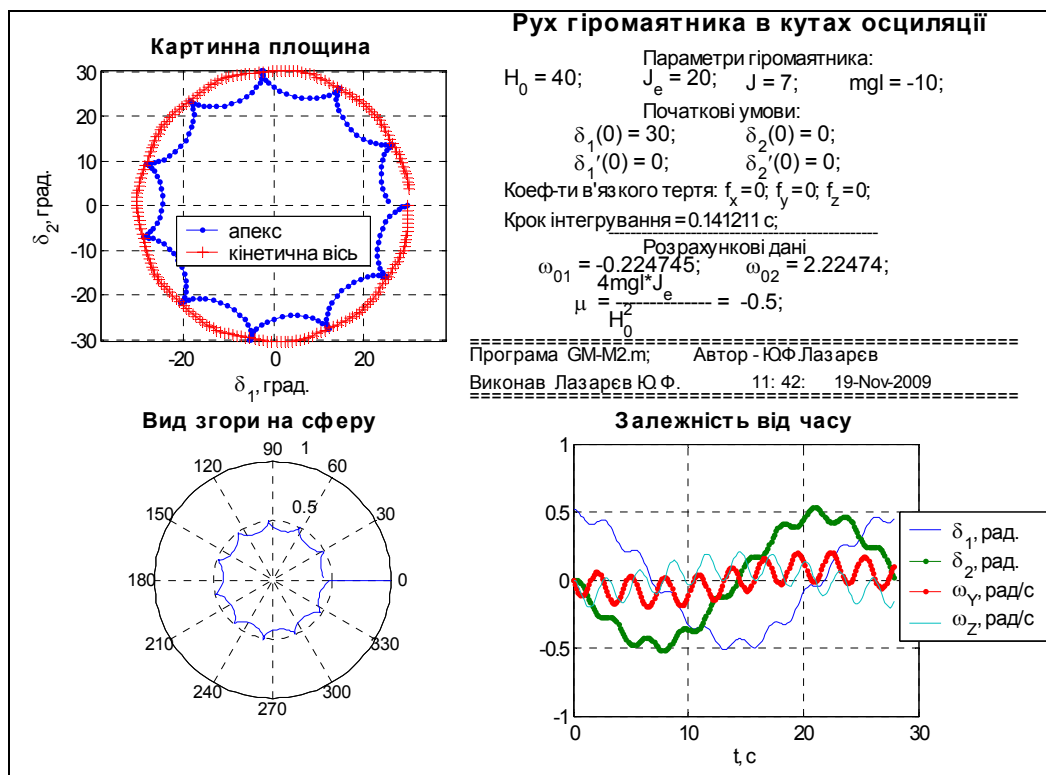


Рис. 8.11. Вільні коливання гіромаятника зі стану спокою (нижня маятниковість)

8.4. Вплив тертя на поведінку гіромаятника

Вплив тертя на рух вільного гіромаятника достатньо точно кількісно і якісно можна розглянути на лінеаризованій моделі (див. рівняння (8.48)) за малих від-

хилень осі гіромаятника від вертикалі. Припускаючи, що тертя є лінійним (в'язким, тобто пропорційним швидкості) будемо вважати, що:

- момент сил тертя залежить лише від екваторіальної складової кутової швидкості гіроскопа і пропорційний їй за величиною;
- вектор моменту сил тертя направлений протилежно вектору екваторіальної кутової швидкості:

$$\mathbf{M}_{\text{прт}} = -f\boldsymbol{\omega}_e.$$

Це дає такі складові цього моменту на осі Резаля (див. рис. 8.2):

$$M_Y = -f\dot{\delta}_1 \cos \delta_2 \approx -f\dot{\delta}_1; \quad M_Z = -f\dot{\delta}_2.$$

Рівняння (8.26) з урахуванням моментів сил тертя за таких умов набудуть вигляду:

$$\begin{cases} J'_e \ddot{\delta}_1 + f\dot{\delta}_1 + H_0 \dot{\delta}_2 - mgl\delta_1 = 0 \\ J'_e \ddot{\delta}_2 + f\dot{\delta}_2 - H_0 \dot{\delta}_1 - mgl\delta_2 = 0 \end{cases} \quad (8.34)$$

Як і раніше, скористаємося методом компресії рівнянь. Уведемо комплексну змінну (8.27) і зведемо систему рівнянь (8.34) до одного рівняння другого порядку:

$$J'_e \ddot{z} + fz - jH_0 \dot{z} - mglz = 0.$$

Відповідне характеристичне рівняння матиме вигляд:

$$J'_e p^2 + (f - jH_0)p - mgl = 0.$$

Відшукаємо корені цього рівняння з комплексними коефіцієнтами:

$$p_{1,2} = j \frac{H_0}{2J'_e} \left(1 + j \frac{f}{H_0} \right) \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4J'_e mgl}{H_0^2 \left(1 + j \frac{f}{H_0} \right)^2}} \right].$$

Щоб дослідити стійкість вільних коливань гіромаятника достатньо скористатися наближеними значеннями коренів, які впливають з припущень, що тертя є малим, а гіромаятник – швидким, тобто про мализну (порівняно з одиницею) величин $\frac{f}{H_0}$ і $\frac{4J'_e mgl}{H_0^2}$. З першого припущення маємо: $\frac{1}{\left(1 + j \frac{f}{H_0} \right)^2} \approx 1 - j2 \frac{f}{H_0}$.

Друге припущення дозволяє записати:

$$\sqrt{1 - \frac{4J'_e mgl}{H_0^2 \left(1 + j \frac{f}{H_0} \right)^2}} \approx \sqrt{1 - \frac{4J'_e mgl}{H_0^2} \left(1 - j2 \frac{f}{H_0} \right)} \approx 1 - \frac{2J'_e mgl}{H_0^2} \left(1 - j2 \frac{f}{H_0} \right).$$

Тепер перший корінь набуває такого наближеного значення:

$$p_1 = j \frac{H_0}{2J'_e} \left(1 + j \frac{f}{H_0} \right) \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4J'_e mgl}{H_0^2 \left(1 + j \frac{f}{H_0} \right)^2}} \right] \approx$$

$$\approx j \frac{H_0}{2J'_e} \left(1 + j \frac{f}{H_0} \right) \frac{2J'_e mgl}{H_0^2} \left(1 - j 2 \frac{f}{H_0} \right) \approx j \frac{mgl}{H_0} \left(1 - j \frac{f}{H_0} \right),$$

або остаточно:

$$p_1 \approx f \frac{mgl}{H_0^2} + j \frac{mgl}{H_0}. \quad (8.35)$$

Другий корінь визначиться так:

$$p_2 = j \frac{H_0}{2J'_e} \left(1 + j \frac{f}{H_0} \right) \left[1 + \sqrt{1 - \frac{4J'_e mgl}{H_0^2 \left(1 + j \frac{f}{H_0} \right)^2}} \right] \approx$$

$$\approx j \frac{H_0}{J'_e} \left(1 + j \frac{f}{H_0} \right) = -\frac{f}{J'_e} + j \frac{H_0}{J'_e}. \quad (8.36)$$

Проаналізуємо отримані результати.

1. Оскільки момент інерції J'_e і коефіцієнт тертя f завжди додатні, дійсна частина другого кореня (8.36) є завжди від'ємною, тому **високочастотна складова власних коливань завжди є стійкою, і з плином часу високочастотні коливання зникнуть.**

2. Стійкість або нестійкість низькочастотних коливань гіромаятника залежить від того, вище чи нижче точки підвісу розташований його центр мас (див. дійсну частину кореня (8.35)). У разі верхньої маятниковості ($l > 0$, випадок дзиги) низькочастотні коливання нестійкі, а за нижній маятниковості ($l < 0$) – стійкі і з часом зникають. Отже, **верхнє положення рівноваги гіромаятника є нестійким, а нижнє – стійким.** У цьому відношенні гіромаятник не відрізняється від звичайного маятника.

Ці висновки наочно проілюстровано на рис. 8.12 – 8.14. Графіки отримані через моделювання за допомогою раніше описаних програм. Як бачимо, усі висновки підтверджуються.

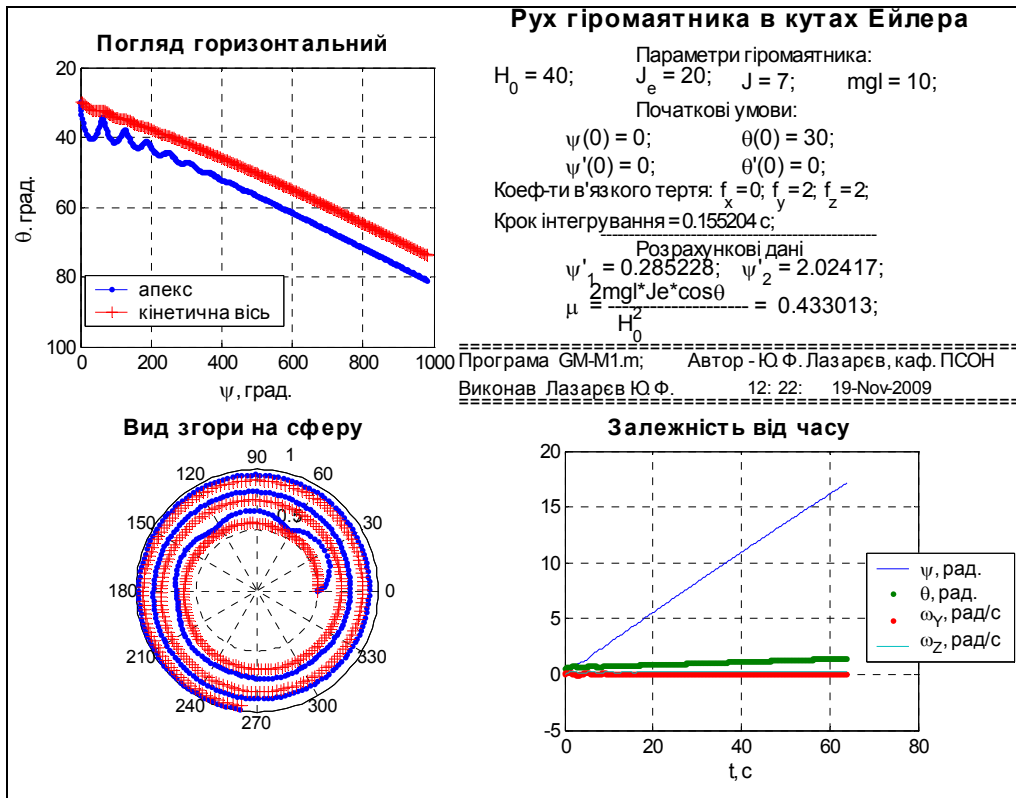


Рис. 8.12. Загасаючі коливання гіромаятника у кутах Ейлера

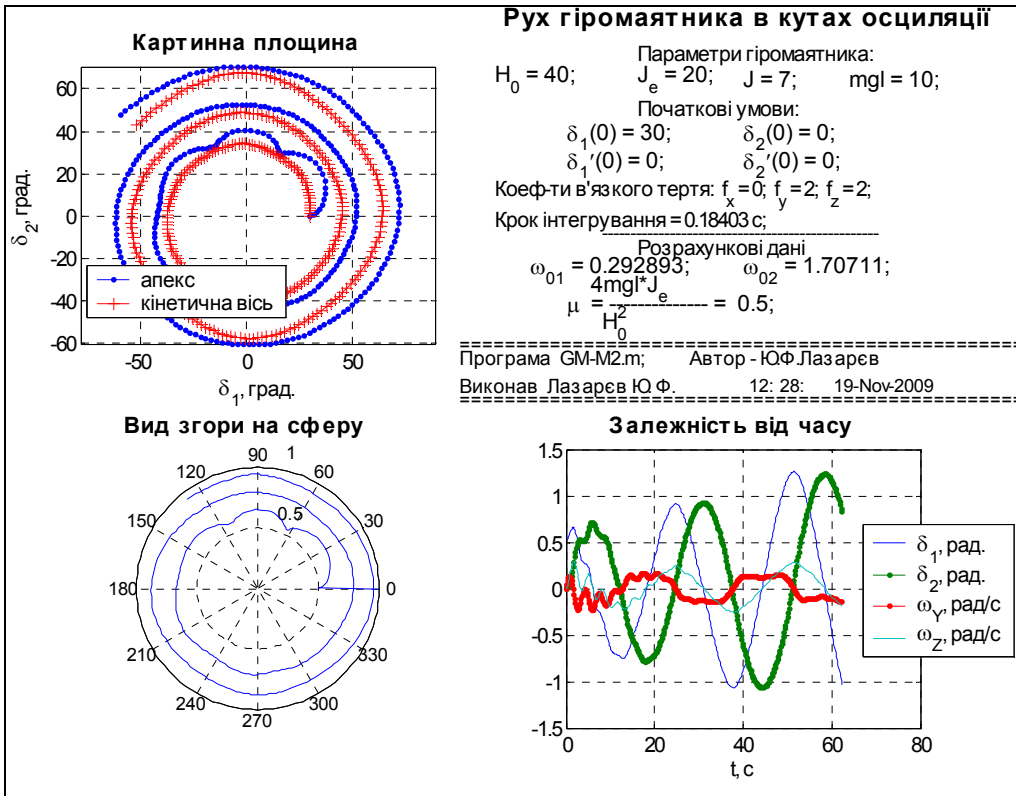


Рис. 8.13. Коливання гіромаятника у кутах осциляції (верхня маятниковість)

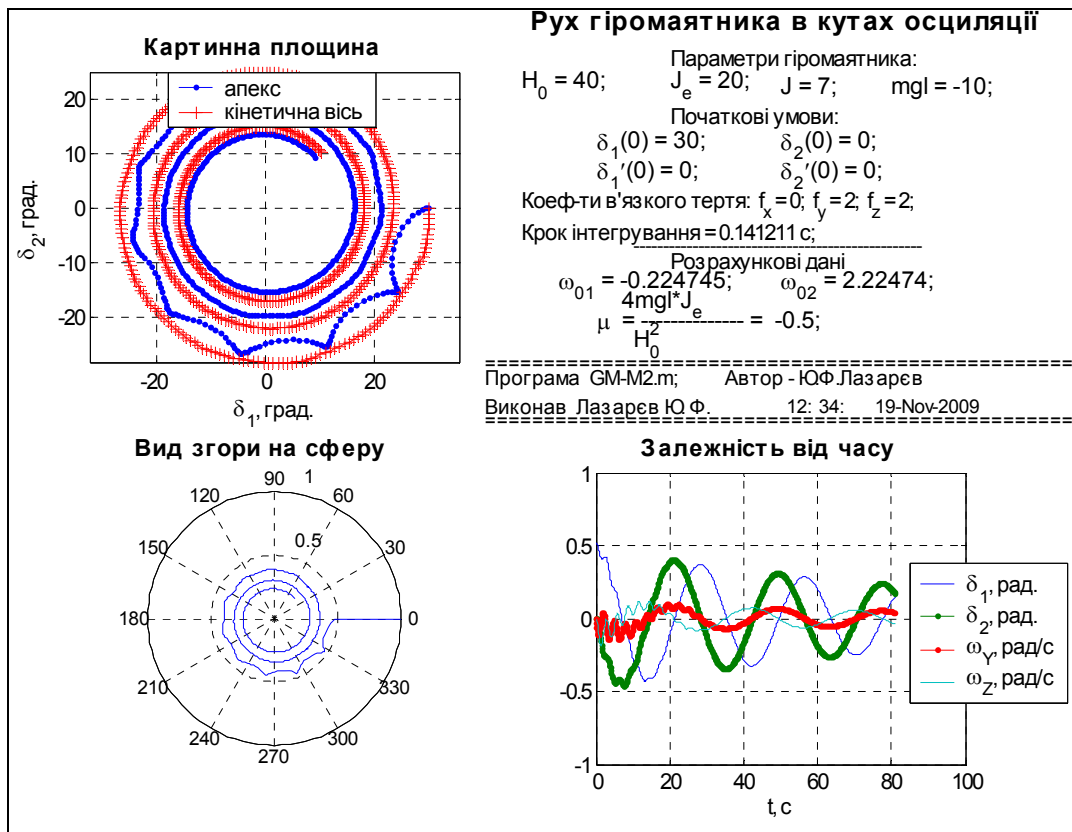


Рис. 8.14. Коливання гіромаятника у кутах осциляції (нижня маятниковість)

Зовсім інакше проявляє себе тертя у тому випадку, коли гіроскоп спирається закругленим нижнім кінцем своєї осі на підп'ятник (рис. 8.15).

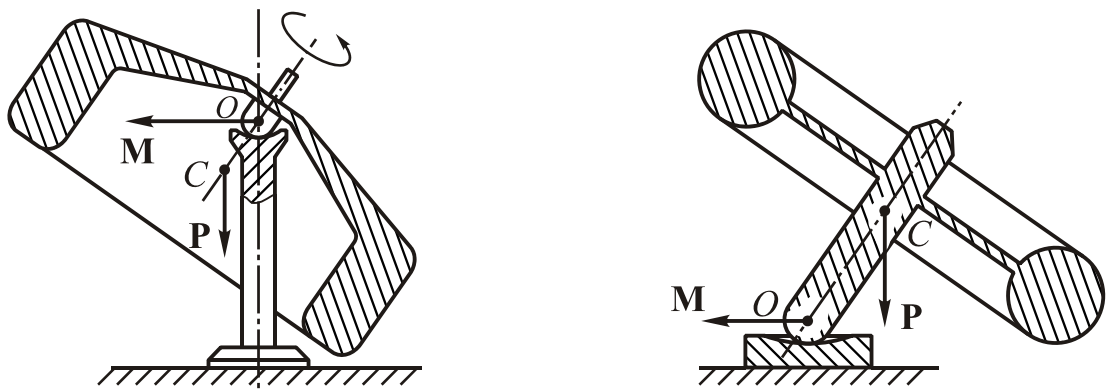


Рис. 8.15. Гіромаятник на підп'ятнику

Для спрощення дослідження припустимо, що кінець осі гіромаятника має форму кулі, а підп'ятник є сферичним, радіус якого більший за радіус цієї кулі. Вважатимемо також, що центр півкулі на кінці осі гіромаятника залишається нерухомим увесь час розглядуваного руху, тобто він є точкою опори O . Тоді точки дотику осі гіромаятника з підп'ятником, які лежать точно нижче від цієї точки мають швидкості ковзання за напрямком майже горизонтальні. Усі вони направлені в один бік, який визначається напрямком власного обертання гіроскопа. Сила кулонового тертя у кожній такій точці не залежить від величини швидкості ковзання, а визначається лише напрямком відповідної швидкості й силою тиску у цій

точці. У сукупності вони утворюють єдину горизонтальну силу тертя, яка прикладена до гіроскопа у точці дотику осі фігури з поверхнею підп'ятника. Ця сила тертя на плечі радіуса кулі осі фігури утворює відносно точки опори O вектор моменту сил тертя, який, як легко впевнитися, є у розглядуваному випадку горизонтальним, міститься у вертикальній площині, що проходить через вісь фігури гіроскопа і завжди направлений у напрямку, протилежному напрямку кутової швидкості власного обертання. Величина цього моменту не залежить ані від величини кутової швидкості власного обертання, ані від кута відхилення осі гіромаятника від вертикалі.

Залежно від того, чи буде центр тяжіння C гіроскопа вищим за точку його опори O , чи нижче від неї (рис. 8.15), а також залежно від напрямку власного обертання гіроскопа, можна вирізнити чотири випадки взаємного розташування векторів, що визначають рух гіромаятника (рис. 8.16).

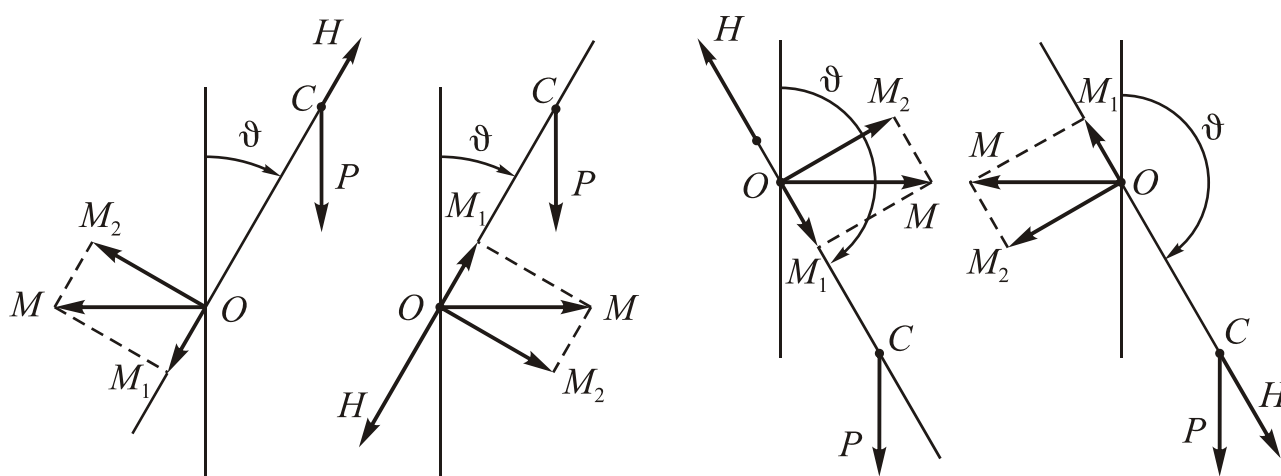


Рис. 8.16. Варіанти дії тертя у підп'ятнику на гіромаятник

Розкладемо вектор \mathbf{M} на складові M_1 і M_2 вздовж осі фігури і по перпендикулярній до неї осі, що лежить у вертикальній площині разом з віссю фігури. Складова M_1 завжди зменшує величину кінетичного моменту H гіроскопа. Складова M_2 викликає додаткову прецесію гіромаятника. Як впливає з розгляду рис. 8.18, ця складова зумовлює підняття центра тяжіння гіромаятника, коли він вищий за точку підвісу, і навпаки, його опускання, якщо центр тяжіння нижче за точку підвісу.

Отже, можна дійти висновку: тертя у підп'ятнику зменшує кутову швидкість власного обертання гіромаятника; завдяки тертю і **нижнє і верхнє положення рівноваги гіромаятника на підп'ятнику є стійкими**.

Цим і пояснюється відоме, легко спостережуване і парадоксальне явище швидкого випрямлення осі обертової дзиги, яка спирається на горизонтальну площину. За такого випрямлення потенціальна енергія збільшується, зате відповідно зменшується кінетична енергія, яку гіроскоп має завдяки власному обертанню.

Як тільки швидкий гіромаятник (дзига) сягає вертикального положення, дія тертя ковзання зменшується, але зате починає проявлятися тертя крутіння. Це тертя зменшує величину кінетичного моменту гіроскопа. З плином часу гіроскоп перестає бути швидким, його кінетичний момент стає меншим за визначений нерівністю (8.50). Якщо при цьому вісь гіроскопа встигла зайняти верхнє вертикальне положення, то після цього умова стійкості порушується, і дзига починає розгойдуватися і, кінець-кінцем, перекидається.

Результати чисельного моделювання поведінки гіромаятника з врахуванням тертя у підп'ятнику наведено на рис. 8.17. З нього випливає, що спочатку вісь фігури підіймається до майже вертикального положення, а згодом починає опускатися. Це підтверджує результати теоретичного аналізу.

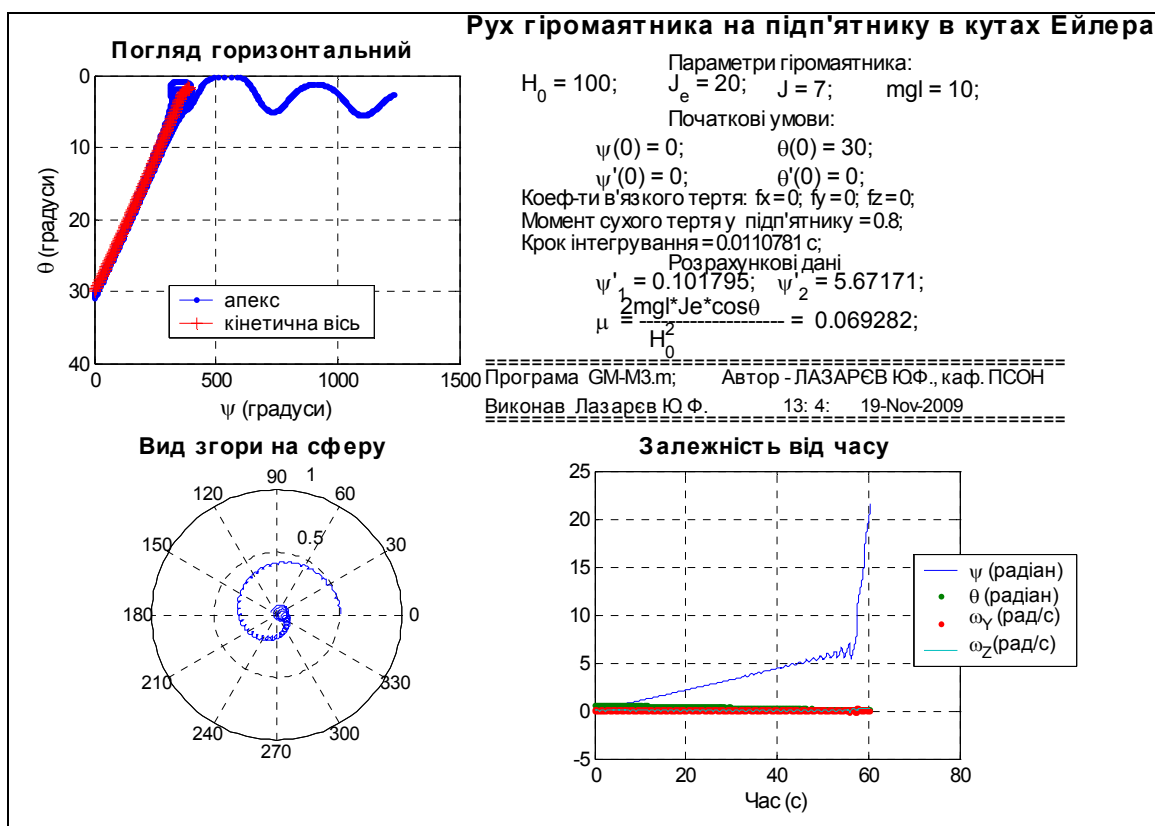


Рис. 8.17. Дія тертя у підп'ятнику на гіромаятник

Завдання

Користуючись комплексом програмних засобів, наведеном у Додатку 4, виконати наступні завдання.

Завдання 8.1. Дослідження вільного руху гіромаятника

- Провести за вказаним програмним забезпеченням експериментальні дослідження вільного руху гіромаятника. Установити фіксоване, вказане викладачем, значення кута відхилення осі фігури від вертикалі. Решту початкових умов установити рівними нулю. Вимірювати частоти власних коливань і їх амплітуди. Варіювати значеннями

- а) кінетичного моменту, б) опорного маятничого моменту, в) екваторіального моменту інерції.
2. Побудувати графіки експериментальних і теоретичних залежностей частоти і амплітуди коливань гіромаятника від варійованих параметрів. Порівняти їх. Зробити висновки.
 3. Відповісти на запитання:
 - чи спостерігаються суттєві розбіжності між результатами експериментальних і теоретичного досліджень? якщо вони є, – то яка їх причина?
 - які висновки можна зробити про стійкість коливань гіромаятника? чи є певна межа для кінетичного моменту гіромаятника, нижче від якої рух гіромаятника стає нестійким?
 - за якими рівняннями здійснюється моделювання поведінки гіромаятника у лабораторній роботі? в яких конкретно програмних засобах ці рівняння запрограмовані?

Завдання 8.2. Дослідження впливу тертя на рух гіромаятника

1. Провести за вказаним програмним забезпеченням експериментальні дослідження впливу тертя на поведінку гіромаятника. Установити фіксоване, вказане викладачем, значення кута відхилення осі фігури від вертикалі. Решту початкових умов установити рівними нулю. Установити значення параметрів гіроскопа і коефіцієнтів тертя за вказівкою викладача. Варіювати значеннями а) кінетичного моменту, б) опорного маятничого моменту, в) коефіцієнтів тертя.
2. Зробити висновки про стійкість коливань гіромаятника. характер залежності ступеня загасання швидких і повільних коливань від зазначених параметрів і відповідності поведінки гіромаятника теоретичним уявленням.
3. Відповісти на запитання:
 - яку модель тертя використано в експериментах?
 - диференціальні рівняння якого виду застосовані в експериментах?
 - чи зміняться результати експериментальних досліджень, якщо змінити форму подання положення осі фігури гіромаятника у просторі? доведіть;
 - як змінюється поведінка гіромаятника, якщо верхню його маятничовість змінити на аналогічну нижню?
 - за якими рівняннями здійснюється моделювання поведінки гіромаятника у лабораторній роботі? в яких конкретно програмних засобах ці рівняння відбиті?

Задачі

Задача 8.1. В основу гіромаятника покладено гіромотор, ротор якого має кінетичний момент $H = 1 \cdot 10^4$ сН см с. Екваторіальний момент інерції ротора дорівнює $J_e = 5$ сН см с². Гіромотор підвішений так, що його центр тяжіння зміщен-

ний вздовж осі ротора на величину $l = 5$ см. Вага гіромотора $P = 1 \cdot 10^3$ сН. Вагою решти деталей знехтувати. Розрахувати частоти власних коливань гіромаятника. Як зміняться ці частоти, якщо такий гіромаятник установити на Місяці?

Контрольні запитання

1. Наведіть визначення поняттям:
 - кути Ейлера;
 - кути осциляції;
 - гіромаятник;
 - швидкий гіромаятник.
2. Опишіть умови існування регулярних прецесій гіромаятника.
3. Чи може бути стійким верхнє положення рівноваги гіромаятника?
4. Як зміняться величини частот повільної і швидкої прецесії гіромаятника, якщо його перемістити на поверхню Місяця?
5. Що таке кут прецесії? кут нутації? кут ротації? чим обумовлені ці назви?
6. Що називають «важким» гіроскопом? Чи відноситься гіромаятник до важких гіроскопів?
7. Що таке піднятий гіромаятник? опущений гіромаятник? Чи є дзига опущеним гіромаятником, чи піднятим? Чи може дзига бути опущеним гіромаятником?
8. Що таке однорідна функція? інтеграл руху?
9. Що таке повільна прецесія? швидка прецесія?
10. Що називають опорним маятниковим моментом?
11. Як зміниться поведження вільного гіромаятника, якщо кутову швидкість його власного обертання збільшити у два рази?
12. Як зміниться поведження вільного гіромаятника, якщо його опорний момент збільшити у два рази?
13. Охарактеризуйте власний рух гіромаятника.
14. Який гіромаятник називають вільним?
15. Як зміниться поведження гіромаятника, якщо його розташувати на Місяці?

Література

[10, глава 2, с. 103 – 156]

Розділ 9. Гіроскоп у кардановому підвісі на нерухомій основі

Гіроскоп у кардановому підвісі становить основу багатьох застосованих наразі гіроскопічних пристроїв (рис. 9.1).

Він складається з трьох тіл: 1) власне гіроскопа – ротора, якому надано велику (власну) кутову швидкість обертання навколо осі cc ; 2) внутрішньої рамки 1, яка має ступінь вільності повороту навколо осі bb ; 3) зовнішньої рамки 2, яка має ступінь вільності повороту навколо осі aa .

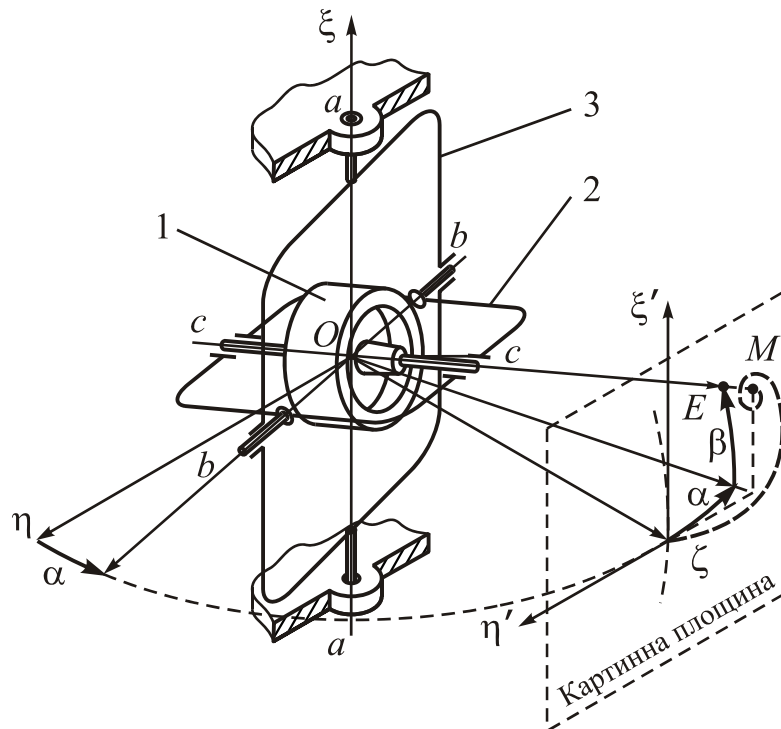


Рис. 9.1. Кінематика гіроскопа у кардановому підвісі

Вісь cc називають віссю власного обертання гіроскопа або *головною віссю підвісу*, вісь bb – *внутрішньою віссю підвісу*, вісь aa – *зовнішньою віссю підвісу*. Вживають також терміни «вісь внутрішньої рамки» та «вісь зовнішньої рамки», маючи на увазі, що вони є матеріальними осями відповідних рамок підвісу гіроскопа.

Площину, яка містить у собі зовнішню та внутрішню осі підвісу, називають *площиною зовнішньої рамки*. Відповідно площину, яка проходить через вісь власного обертання та внутрішню вісь підвісу, – *площиною внутрішньої рамки*. В реальному виконанні, звісно, ані зовнішня, ані внутрішня рамка може не мати форми рамок, а являти собою тіла довільної форми. Тому назва «рамки» умовна. Зокрема, внутрішня рамка зазвичай має форму кожуха ротора гіроскопа (циліндра з віссю обертання cc), до якого прикріплені дві півосі bb .

Карданів підвіс являє собою певну модифікацію шарніра Гука, яка дозволяє забезпечити три кутові ступені вільності за допомогою трьох пов'язаних один з одним циліндричних шарнірів aa , bb та cc . Надалі будемо припускати,

що усі три осі шарнірів (aa , bb та cc) перетинаються в одній точці O , яку називають *точкою підвісу* гіроскопа. Очевидно, ця точка гіроскопа буде нерухомою відносно основи, на якій встановлено гіроскоп (чи, що те саме, відносно корпусу гіроскопа) за будь яких кутових рухів гіроскопа й основи.

Особливістю карданового підвісу порівняно з іншими видами підвісів гіроскопа є те, що всі три осі підвісу матеріальні. Завдяки цьому значно спрощується зняття інформації про кутове положення головної осі відносно корпусу гіроскопа (на рис. 9.1 корпус показано штриховкою). Для цього достатньо лише на зовнішній і внутрішній осях підвісу розмістити датчики кутових переміщень так, щоб рухомі та нерухомі їх частини розташовувались на різних тілах підвісу (для зовнішньої осі – на зовнішній рамці та корпусі пристрою, для внутрішньої осі – на внутрішній та зовнішній рамках). Позначимо: α – кут повороту зовнішньої рамки відносно корпусу пристрою (навколо зовнішньої осі підвісу), β – кут повороту внутрішньої рамки відносно зовнішньої (навколо внутрішньої осі підвісу). Тоді при використанні вказаних датчиків кути α і β відносних поворотів рамок підвісу можуть бути виміряні безпосередньо.

Для наочного уявлення руху головної осі гіроскопа у просторі в гіроскопії упроваджено поняття *вершини* (або *апекса*) гіроскопа. Апексом прийнято називати точку E (рис. 9.1) перетину головної осі зі сферою одиничного радіуса, центр якої розміщений у точці підвісу O . Траєкторія, яку описує вершина гіроскопу на нерухомій сфері під час його руху, однозначно та наочно подає рух у просторі головної осі гіроскопа.

Частіше, однак, замість точки E розглядають точку M (рис. 9.1) перетину головної осі не зі сферою одиничного радіуса, а з нерухомою площиною $\xi'\eta'$, яка паралельна площині $\xi\eta$ і віддалена від неї на відстань, що дорівнює одиниці. Точку M також будемо називати вершиною гіроскопу, а саму площину $\xi'\eta'$ – *картинною*. З рис. 9.1 випливає, що за малих кутів α і β відхилення головної осі від початкового положення (осі ζ) лінійні координати вершини M в площині $\xi'\eta'$ майже збігаються з кутами α і β , виміряними в радіанах. При цьому координата точки M по осі η' характеризує поворот гіроскопа навколо зовнішньої осі (з протилежним знаком), а координата ξ' – його поворот навколо внутрішньої осі. Тому замість картинної площини $\xi'\eta'$ можна як таку використовувати площину кутових координат α і β , – різниця буде незначною. Надалі для зручності не будемо розрізняти картинну площину і площину координат α і β .

Гіроскоп в кардановому підвісі, будучи системою трьох взаємодіючих один з одним і з основою тіл, являє собою значно більш складний об'єкт, ніж розглянутий раніше СЗГ. Основні особливості динаміки ГКП зумовлені специфікою самого карданового підвісу і полягають в наступному.

1. Гіроскоп у кардановому підвісі являє собою не одне тіло, а сукупність трьох взаємодіючих тіл, взаємне положення яких неперервно змінюється.
2. Навіть в разі ідеального виконання підвісу (відсутності збурювальних моментів по осях aa , bb і cc підвісу) ГКП не можна вважати повністю віль-

ним, тобто не можна вважати, що на нього не діють моменти зовнішніх сил, оскільки в цьому разі на систему «гіроскоп в кардановому підвісі» діє момент реакції з боку основи, направлений уздовж перпендикуляра до площини зовнішньої рамки. За певних умов цей момент може відчутно вплинути як кількісно, так і якісно на поведження гіроскопа.

3. Моменти зовнішніх сил, які діють на ГКП, здебільшого (за винятком описаних в попередньому пункті) зв'язані з матеріальними осями підвісу, тобто їхні вектори направлені вздовж цих осей. У разі змінювання положення в просторі цих осей (зумовленого або поворотами основи, або поворотами самого гіроскопа) змінюють своє положення і лінії дії відповідних моментів зовнішніх сил.

Складаючи математичної моделі ГКП роблять зазвичай такі спрощуючі припущення (рис. 9.2):

- 1) осі x_2, y_2, z_2 , зв'язані з зовнішньою рамкою, є головними осями інерції для зовнішньої рамки;
- 2) осі x_1, y_1, z_1 , зв'язані з внутрішньою рамкою, є головними осями інерції для внутрішньої рамки;
- 3) ось z_1 є віссю фігури ротора гіроскопа, тому площина x_1, y_1 є екваторіальною площиною ротора, а осі x_1, y_1, z_1 – головними осями інерції ротора.

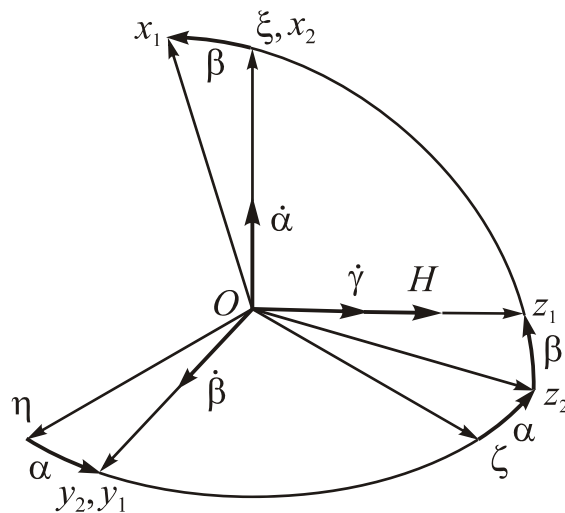


Рис. 9.2. Кінематика поворотів ГКП

Використовуватимемо позначення: J_{2X}, J_{2Y}, J_{2Z} – моменти інерції зовнішньої рамки відносно осей x_2, y_2, z_2 відповідно, де x_2 – зовнішня вісь; y_2 – внутрішня вісь підвісу; J_{1X}, J_{1Y}, J_{1Z} – моменти інерції внутрішньої рамки відносно осей x_1, y_1 і z_1 відповідно, де y_1 – внутрішня вісь підвісу, а z_1 – головна вісь гіроскопа; J_e, J – відповідно екваторіальний і осьовий (відносно головної осі) моменти інерції ротора гіроскопа.

Рівняння руху (2.72) ГКП, установленого на нерухомій основі, за зроблених допущень отримані у главі 2.

Окрім моментів сил, які діють по осях карданова підвісу, на ГКП, як було показано у главі 2, діють ще моменти реакцій в'язей, серед яких найважливішим з точки зору виявлення фізичного змісту деяких особливостей поведінки ГКП є момент реакції з боку основи N_{z2} , який направлений вздовж перпендикуляра до площини зовнішньої рамки. Він визначається виразом (2.71)

$$N_{z2} = \frac{R - N \sin \beta}{\cos \beta} + J_1 \ddot{\alpha} \operatorname{tg} \beta + (J_3 - J_2) \dot{\alpha} \dot{\beta}.$$

9.1. Вільний рух гіроскопа у кардановому підвісі. Дрейф Магнуса

Вільним називають такий гіроскоп у кардановому підвісі, на який не діють моменти зовнішніх сил по осях його підвісу.

Відповідно до цього, досліджуючи вільний рух ГКП, вважають рівними нулю усі моменти сторонніх сил і моменти N , L , R взаємодії між елементами карданового підвісу, направленими відповідно по зовнішній, внутрішній осям підвісу і головній осі гіроскопа.

Рівняння руху (2.72) для вільного ГКП набувають вигляду:

$$\begin{cases} A(\beta) \ddot{\alpha} - 2J_2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \cos \beta + H \dot{\beta} \cos \beta = 0; \\ J_3 \ddot{\beta} + J_2 \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta - H \dot{\alpha} \cos \beta = 0; \\ \frac{dH}{dt} = 0, \end{cases} \quad (9.1)$$

де позначено

$$A(\beta) = J_1 + J_2 \cos^2 \beta. \quad (9.2)$$

Із третього рівняння (9.1) одразу випливає сталість власного кінетичного моменту гіроскопа:

$$H = H_0 = \text{const.} \quad (9.3)$$

Можлива й інша форма запису рівнянь (9.1):

$$\begin{cases} A(\beta) \ddot{\alpha} + \frac{\partial A(\beta)}{\partial \beta} \dot{\alpha} \dot{\beta} + H_0 \dot{\beta} \cos \beta = 0; \\ J_3 \ddot{\beta} - \frac{1}{2} \frac{\partial A(\beta)}{\partial \beta} \dot{\alpha}^2 - H_0 \dot{\alpha} \cos \beta = 0, \end{cases} \quad (9.4)$$

якщо врахувати, що, відповідно до позначення (9.2), має місце співвідношення

$$\frac{\partial A(\beta)}{\partial \beta} = -2J_2 \sin \beta \cos \beta.$$

Рівняння (9.4) – повні рівняння вільного ГКП.

Нехтуючи складовими з добутком кутових швидкостей, отримують спрощені рівняння руху вільного гіроскопу:

$$\begin{cases} A(\beta) \ddot{\alpha} + H_0 \dot{\beta} \cos \beta = 0; \\ J_3 \ddot{\beta} - H_0 \dot{\alpha} \cos \beta = 0. \end{cases}$$

Можна перейти до лінеаризованих (технічних) рівнянь руху ГКП, якщо знехтувати змінюванням величини кута β за час розглядуваного руху:

$$\begin{cases} A\ddot{\alpha} + H_0 \cos \beta_{cp} \dot{\beta} = 0; \\ J_3 \ddot{\beta} - H_0 \cos \beta_{cp} \dot{\alpha} = 0. \end{cases} \quad (9.5)$$

де позначено:

$$A = J_1 + J_2 \cos^2 \beta_{cp},$$

а β_{cp} - деяке середнє за проміжок часу, що розглядається, значення кута β .

Нарешті, відкидаючи з рівнянь (9.4) ще й інерційні члени, дійдемо скорочених (прецесійних) рівнянь:

$$\begin{cases} H_0 \dot{\beta} \cos \beta = 0; \\ -H_0 \dot{\alpha} \cos \beta = 0. \end{cases} \quad (9.6)$$

9.1.1. Дослідження руху за прецесійною моделлю

Дослідження вільного руху ГКП почнемо з аналізу найбільш грубого наближення – прецесійних рівнянь (9.6). З них випливає, що в цьому наближенні кутові швидкості обертання головної осі ГКП в інерціальному просторі ($\dot{\alpha}$ і $\dot{\beta}$) дорівнюють нулю (за умови, що головна вісь не збігається з зовнішньою віссю підвісу – $\beta \neq \pm \frac{\pi}{2}$):

$$\dot{\alpha} \equiv 0; \quad \dot{\beta} \equiv 0,$$

Отже, вільний ГКП зберігає своє положення (положення головної осі гіроскопа) незмінним в інерціальному просторі. Звідси також випливає, що за кутами α та β ГПК завжди перебуває в положенні рівноваги (ці кути можуть бути довільними):

$$\alpha = \alpha_0; \quad \beta = \beta_0.$$

Інакше кажучи, вільний гіроскоп не має вибіркості і його головна вісь може займати довільне положення у просторі.

9.1.2. Дослідження руху за лінеаризованою моделлю

Більш точно уявлення про рух вільного гіроскопа можна отримати, вивчаючи лінеаризовані рівняння (9.5).

Запишемо їх у матрично-операторному вигляді:

$$\begin{vmatrix} Ap^2 & H_0 \cos \beta_{cp} p \\ -H_0 \cos \beta_{cp} p & J_3 p^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha(p) \\ \beta(p) \end{vmatrix} = 0.$$

Характеристичне рівняння цієї системи визначається дорівнюванням до нуля визначника характеристичної матриці:

$$p^2 [AJ_3 p^2 + H_0^2 \cos^2 \beta_{cp}] = 0.$$

Знайдемо корені характеристичного рівняння. Перші два корені дорівнюють нулю. Це означає, що відносно кутів α і β гіроскоп перебуває у положенні байдужої рівноваги, і стійкість його руху потрібно досліджувати не з кутових координат, а з кутових швидкостей $\dot{\alpha}$ і $\dot{\beta}$.

Два інші корені визначаємо дорівнюванням до нуля виразу в дужках:

$$p_{3,4} = \pm j \frac{H_0 \cos \beta_{cp}}{\sqrt{AJ_3}}.$$

Пара суто уявних коренів характеристичного рівняння означає, що ГКП за кутовими швидкостями $\dot{\alpha}$ і $\dot{\beta}$ міститься на коливальній межі стійкості, тобто рух вільного ГКП являє собою незгасаючі коливання з частотою:

$$\lambda = \frac{H_0 \cos \beta_{cp}}{\sqrt{AJ_3}}. \quad (9.7)$$

Вільний рух (коливання) вільного гіроскопа називають *нутацією*, а частоту λ – частотою нутаційних коливань.

Якщо параметри гіроскопа будуть такими: $H = 2$ Н м с; $A = 25$ сН см c^2 ; $J_3 = 10$ сН см c^2 ; $\beta_{cp} = 0$, то частота нутаційних коливань $\lambda = 1265$ $c^{-1} = 201$ Гц. Це свідчить про те, що в реальних технічних гіроскопах значення частоти нутації велике.

Розв'язок рівнянь (9.5) з кутових швидкостей має вигляд:

$$\dot{\alpha} = a \cos(\lambda t + \delta); \quad \dot{\beta} = b \sin(\lambda t + \delta), \quad (9.8)$$

а з кутів

$$\alpha = \alpha^* + \alpha_m \sin(\lambda t + \delta); \quad \beta = \beta^* - \beta_m \cos(\lambda t + \delta). \quad (9.9)$$

Колівання з кутів α і β зсунуті за фазою відносно один одного на 90° . Це впливає з рівнянь (9.5). Апекс (вершина) гіроскопа описує у картинній площині еліпс (рис. 9.3).

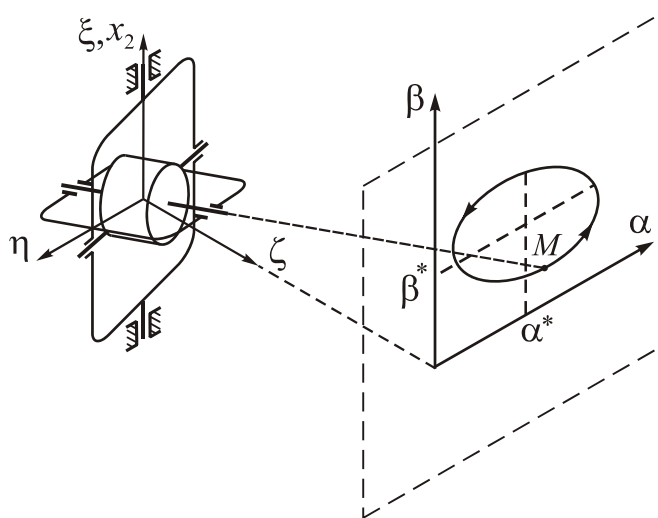


Рис. 9.3. Траєкторія вершини на картинній площині

Відношення півосей еліпсу дорівнює

$$\frac{\beta_m}{\alpha_m} = \sqrt{\frac{A}{J_3}}. \quad (9.10)$$

Дійсно, диференціюючи розв'язки (9.9), дістанемо

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \alpha_m \lambda \cos(\lambda t + \delta); & \dot{\beta} &= \beta_m \lambda \sin(\lambda t + \delta). \\ \ddot{\alpha} &= -\alpha_m \lambda^2 \sin(\lambda t + \delta); & \ddot{\beta} &= \beta_m \lambda^2 \cos(\lambda t + \delta). \end{aligned} \quad (9.11)$$

Порівняння (9.11) з (9.8) приводить до співвідношень:

$$a = \alpha_m \lambda; \quad b = \beta_m \lambda, \quad (9.12)$$

а підставлення (9.11) у рівняння (9.5) – до відношення (9.10).

Вилучимо з співвідношень (9.9) час t :

$$\left(\frac{\alpha - \alpha^*}{\alpha_m} \right)^2 + \left(\frac{\beta - \beta^*}{\beta_m} \right)^2 = 1.$$

Як бачимо, в картинній площині вершина гіроскопа описує еліпс, центр якого зміщений відносно початку координат на величини α^* і β^* , а півосі дорівнюють відповідно α_m і β_m .

Визначимо, як залежать параметри еліпса від початкових умов. Нехай за $t = 0$ значення кутових координат та швидкостей ГКП становлять: $\alpha(0) = \alpha_0$; $\beta(0) = \beta_0$; $\dot{\alpha}(0) = \dot{\alpha}_0$; $\dot{\beta}(0) = \dot{\beta}_0$. Підставивши їх в розв'язок (9.9), отримаємо співвідношення:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \alpha^* + \alpha_m \sin \delta; & \dot{\alpha} &= \alpha_m \lambda \cos \delta; \\ \beta_0 &= \beta^* - \beta_m \cos \delta; & \dot{\beta} &= \beta_m \lambda \sin \delta. \end{aligned}$$

З урахуванням (9.12) та позначення

$$i = \sqrt{\frac{J_3}{A}},$$

матимемо:

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \frac{\sqrt{\dot{\alpha}_0^2 + i^2 \dot{\beta}_0^2}}{\lambda}; & \beta_m &= -\frac{\sqrt{\dot{\alpha}_0^2 + i^2 \dot{\beta}_0^2}}{i\lambda}; \\ \alpha^* &= \alpha_0 + \frac{i\dot{\beta}_0}{\lambda}; & \beta^* &= \beta_0 + \frac{\dot{\alpha}_0}{i\lambda}. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Аналіз виразів (9.13) та (9.9) дозволяє дійти таких висновків:

- 1) нутаційні коливання гіроскопа виникають лише за наявності початкових кутових швидкостей навколо зовнішньої ($\dot{\alpha}_0$) або внутрішньої ($\dot{\beta}_0$) осей підвісу;
- 2) траєкторія вершини гіроскопа (еліпс) проходить через початкове положення (α_0, β_0) осі ротора;
- 3) від ударів навколо зовнішньої ($\dot{\alpha}_0$) та внутрішньої ($\dot{\beta}_0$) осей підвісу виникає зміщення центра еліпса відносно початкового положення в напрямку, перпендикулярному як до головної осі, так і до осі, навколо якої прикладений ударний імпульс;

4) як амплітуда нутаційних коливань, так і зміщення від початкового положення пропорційні відношенню кутової швидкості $(\dot{\alpha}_0, \dot{\beta}_0)$ до частоти нутації λ , тому для технічних гіроскопів вони становлять дуже малі величини.

Наприклад, для раніше наведених параметрів гіроскопа та початкових кутових швидкостей гіроскопа порядку 1 рад./с амплітуда нутаційних коливань

$$\alpha_m = \frac{a}{\lambda} = \frac{1\text{с}^{-1}}{1264\text{с}^{-1}} \approx 7,9 \cdot 10^{-4} \text{ рад} \approx 2',7$$

Реальні величини збурень, діючих на технічні гіроскопи (гіроприлади), зазвичай менші прийнятих тут на порядок і більше. Звідси випливає, що нутаційні коливання гіроприладів дуже малі та практично непомітні.

Напрямок руху вершини гіроскопа по еліпсу на картинній площині під час нутаційних коливань не залежить від напрямку удару і завжди збігається з напрямком власного обертання ротора.

9.1.3. Метод зображувальної точки Ніколаї. Компресія рівнянь.

Метод зображувальної точки розробив російський вчений Є. Л. Ніколаї для дослідження впливу моментів сил сухого тертя на поведінку гіроскопу [41]. Він полягає в переході від координат α і β до нових змінних

$$u = \dot{\alpha}\sqrt{A}; \quad v = \dot{\beta}\sqrt{J_3}, \quad (9.14)$$

що дозволяє застосовувати для дослідження руху ГКП метод компресії рівнянь. Застосуємо його спочатку для аналізу вільного руху ГКП.

Визначаючи з позначень (9.14) $\dot{\alpha}$ і $\dot{\beta}$ та підставляючи їх у рівняння (9.5), отримаємо

$$\begin{cases} \frac{A}{\sqrt{A}}\dot{u} + \frac{H_0 \cos\beta_{cp}}{\sqrt{J_3}}v = 0; \\ \frac{J_3}{\sqrt{J_3}}\dot{v} - \frac{H_0 \cos\beta_{cp}}{\sqrt{A}}u = 0. \end{cases}$$

а з урахуванням (9.7)

$$\begin{cases} \dot{u} + \lambda v = 0; \\ \dot{v} - \lambda u = 0. \end{cases} \quad (9.15)$$

Для розв'язання системи (9.15) використаємо компресію рівнянь. Введемо нову змінну

$$z = u + jv.$$

Помножимо друге рівняння (9.15) на уявну одиницю (j) та складемо з першим. Отримаємо одне диференціальне рівняння першого порядку

$$\dot{z} - j\lambda z = 0. \quad (9.16)$$

Його характеристичне рівняння має вигляд $p - j\lambda = 0$, звідки знайдемо його єдиний корінь $p = j\lambda$. Тепер розв'язок рівняння можна подати так:

$$z = Ce^{j\lambda t}. \quad (9.17)$$

Оберемо такі початкові умови: при $t = 0$

$$z(0) = z_0 = u_0 + jv_0 = \dot{\alpha}_0 \sqrt{A} + j\dot{\beta}_0 \sqrt{J_3}. \quad (9.18)$$

Підставляючи (9.18) у (9.17), визначимо сталу інтегрування

$$C = z_0 = \dot{\alpha}_0 \sqrt{A} + j\dot{\beta}_0 \sqrt{J_3}.$$

Отже розв'язок рівняння (9.16) має вигляд

$$z = z_0 e^{j\lambda t}, \quad (9.19)$$

що, як неважко переконатися, еквівалентно наступним розв'язкам системи (9.15):

$$\begin{aligned} u &= \dot{\alpha}_0 \sqrt{A} \cos \lambda t - \dot{\beta}_0 \sqrt{J_3} \sin \lambda t; \\ v &= \dot{\beta}_0 \sqrt{J_3} \cos \lambda t + \dot{\alpha}_0 \sqrt{A} \sin \lambda t. \end{aligned} \quad (9.20)$$

На зображувальній площині (u, v) траєкторія зображувальної точки, яка описується виразами (9.20), являє собою коло з центром у початку координат, яке проходить через точку z_0 (рис. 9.4).

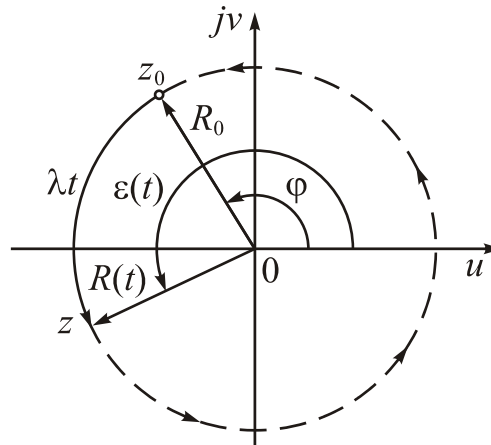


Рис. 9.4. Траєкторія зображувальної точки

Дійсно, комплексне число z_0 можна подати в показниковій формі:

$$z_0 = R_0 e^{j\varphi}, \quad (9.21)$$

де R_0 – модуль комплексного числа z_0 (відстань від зображувальної точки до початку координат); φ – початковий фазовий кут (кут між вектором z_0 і віссю u).

Підставляючи (9.21) у (9.19), приведемо комплексне число z , яке характеризує поточне положення зображуючої точки, теж до показникової форми:

$$z = R(t) e^{j\varepsilon(t)} = R_0 e^{j\varphi} e^{j\lambda t} = R_0 e^{j(\varphi + \lambda t)},$$

звідки випливає

$$R(t) = R_0; \quad \varepsilon(t) = \varphi + \lambda t.$$

Інакше кажучи, відстань від зображувальної точки до початку координат не змінюється з часом і рівна відстані від цього початку початкового положення зображуючої точки. Фазовий кут між радіусом-вектором поточного

положення зображуючої точки та віссю u неперервно збільшується пропорційно часу.

Отже, зображувальна точка описує коло з центром у початку координат, яке проходить через початкове положення зображувальної точки. Те, що центр кола міститься у початку координат, свідчить про те, що середня швидкість руху осі фігури (апекса) гіроскопа в просторі дорівнює нулю, тобто, що **дрейф головної осі гіроскопа відсутній**.

Досліджувати рух гіроскопа шляхом аналізу руху зображувальної точки на зображувальній площині зручно у двох відношеннях:

1) нутаційні коливання в зображувальній площині відображаються не у вигляді еліпса, а у вигляді кола; це забезпечується спеціальною зміною масштабів по координатах (див. (9.14)) і дозволяє легко зображати траєкторію зображувальної точки за допомогою циркуля;

2) постійній складовій кутової швидкості повороту гіроскопу ($\dot{\alpha}$ і $\dot{\beta}$) на зображувальній площині відповідає постійне зміщення центра траєкторії від початку координат, а не неперервно наростаюче зміщення, як у картинній площині.

Ці дві особливості методу Ніколаї забезпечують велику зручність графічної побудови траєкторії зображувальної точки, тобто графічного інтегрування рівнянь типу (9.5) у разі, коли ці траєкторії можна подати у вигляді чергування дуг кіл (почасти, при вивченні руху ГКП під дією моментів сил сухого тертя).

9.1.4. Точне дослідження повних рівнянь гіроскопа у кардановому підвісі

Дотепер розглянуто рух ГКП згідно з наближеними рівняннями гіроскопу. Однак деякі загальні висновки можна зробити, досліджуючи повні рівняння руху вільного ГКП. Можна точно довести, наприклад, що ГКП здійснює *періодичний* рух навколо внутрішньої осі підвісу, тобто *дрейфу ГКП навколо внутрішньої осі підвісу немає*. Нагадаємо, що *під дрейфом гіроскопа розуміють такий його рух, коли головна вісь обертається у просторі з постійною кутовою швидкістю*.

Дійсно, внаслідок того що на ГКП не діють моменти по осях підвісу, рівняння руху вільного ГКП допускають три інтеграли.

Перші два інтеграли обумовлені тим, що координати α і γ виявляються циклічними (тобто кінетична енергія та моменти зовнішніх сил не залежать явно від цих узагальнених координат). Із цього випливають два наслідки:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = 0; \quad \frac{dH}{dt} = 0,$$

звідки виходить

$$H = H_0; \tag{9.22}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = H \sin \beta + A(\beta) \dot{\alpha} = H_0 \sin \beta_0 + A(\beta_0) \dot{\alpha}_0 = K_{x0}.$$

Отримані співвідношення виражають наступне:

1) проекція повного кінетичного моменту ГКП на зовнішню вісь підвісу залишається постійною протягом усього руху;

2) власний кінетичний момент гіроскопу залишається незмінним.

Третій інтеграл руху є інтеграл енергії: кінетична енергія системи залишається постійною. Доведемо це.

Рівняння руху вільного ГКП з узагальненою координатою q_i мають вигляд:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \Gamma}{\partial q_i} = 0; \quad i = (1, 2, 3).$$

Помноживши кожне з цих рівнянь на відповідну узагальнену швидкість \dot{q}_i та підсумувавши їх, отримуємо

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_i} - \sum_i \frac{\partial \Gamma}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} = 0. \quad (9.23)$$

Перетворимо ліву частину рівняння (9.23). Перш за все маємо

$$\dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt},$$

тому ліву частину можна перетворити до такого вигляду:

$$\begin{aligned} \sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_i} - \sum_i \frac{\partial \Gamma}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} &= \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - \sum_i \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial \Gamma}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - \left(\frac{d\Gamma}{dt} - \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Оскільки в розглядуваному випадку основа нерухома і тому в'язі стаціонарні, можна записати $\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = 0$, а за теоремою Ейлера про однорідні функції (кінетична енергія гіроскопа є однорідною квадратичною функцією узагальнених швидкостей):

$$\sum_i \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2\Gamma,$$

остаточно ліву частину рівняння (9.23) зведемо до вигляду $\frac{d}{dt} (2\Gamma) - \frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d\Gamma}{dt}$.

Тепер рівняння (9.23) набуває вигляду:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0.$$

Інтегруючи це рівняння, отримаємо

$$\Gamma = \Gamma_0, \quad (9.24)$$

що і потрібно було довести.

Об'єднавши (9.22), та (9.24), матимемо

$$\begin{cases} H = H_0; \\ A(\beta)\dot{\alpha} + H_0 \sin \beta = K_{X0} \quad (A_0 = 2T_0 - \frac{H_0^2}{J}); \\ A(\beta)\dot{\alpha}^2 + J_3\dot{\beta}^2 = A_0. \end{cases} \quad (9.25)$$

Тут під H_0 , K_{X0} , A_0 потрібно розуміти значення лівих частин рівності (9.25) за початкових значень параметрів руху ($\beta = \beta_0$, $\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_0$, $\dot{\beta} = \dot{\beta}_0$).

Проаналізуємо отриману систему рівнянь. Вона відрізняється від первинної системи (9.1) зменшенням порядку системи диференціальних рівнянь. Доведемо, що *вільний рух ГКП не супроводжується дрейфом гіроскопу навколо внутрішньої осі підвісу*. Для цього, очевидно, достатньо показати, що за весь час руху кут β буде перебувати в певному діапазоні між двома крайніми значеннями, і час між проходженням цих крайніх значень буде *скінченним*.

Вилучимо з рівнянь (9.25) кутову швидкість $\dot{\beta}$

$$\dot{\beta} = \pm \frac{1}{\sqrt{J_3}} \sqrt{A_0 - \frac{(K_{X0} - H_0 \sin \beta)^2}{J_1 + J_2 \cos^2 \beta}}. \quad (9.26)$$

Уведемо нове позначення: $u = \sin \beta$.

Тоді

$$\dot{u} = \dot{\beta} \cos \beta; \quad \dot{\beta} = \frac{\dot{u}}{\cos \beta} = \frac{\dot{u}}{\sqrt{1-u^2}}; \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2} \right),$$

і рівняння (9.26) можна звести до вигляду

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \pm \sqrt{\frac{(1-u^2)}{J_3} \left[A_0 - \frac{(K_{X0} - H_0 u)^2}{J_1 + J_2 (1-u^2)} \right]} = \\ &= \pm \sqrt{\frac{1-u^2}{J_3} \frac{A_0(J_1 + J_2) - K_{X0}^2 + 2K_{X0}H_0u - (H_0^2 + J_2A_0)u^2}{J_1 + J_2 - J_2u^2}}. \end{aligned} \quad (9.27)$$

Корені квадратного рівняння

$$u^2(H_0^2 + J_2A_0) - 2K_{X0}H_0u + K_{X0}^2 - A_0(J_1 + J_2) = 0$$

визначаються виразом

$$u_{1,2} = \frac{K_{X0}H_0 \pm \sqrt{K_{X0}^2H_0^2 - [K_{X0}^2 - A_0(J_1 + J_2)](H_0^2 + J_2A_0)}}{H_0^2 + J_2A_0}. \quad (9.28)$$

Підрадикальний вираз у правій частині (9.28)

$$\begin{aligned} &K_{X0}^2H_0^2 - [K_{X0}^2 - A_0(J_1 + J_2)](H_0^2 + J_2A_0) = \\ &= J_2A_0(H_0^2 - K_{X0}^2) + H_0^2A_0J_1 + J_2A_0^2(J_1 + J_2) \end{aligned}$$

завжди додатний. Тому корені u_1 та u_2 будуть дійсними.

Підрадикальний вираз в (9.28) подамо в вигляді

$$A_0(J_1 + J_2) - K_{X0}^2 + 2K_{X0}H_0u - u^2(H_0^2 + J_2A_0) = (H_0^2 + J_2A_0)(u_1 - u)(u - u_2).$$

Підставимо цей вираз у рівняння (9.27):

$$\frac{du}{dt} = \pm \sqrt{\frac{1-u^2}{J_3}} \sqrt{\frac{AJ_2 + H_0^2}{J_1 + J_2 - J_2u^2}} (u_1 - u)(u - u_2). \quad (9.29)$$

Проаналізуємо отриманий вираз. Оскільки $u < 1$, то ні $\sqrt{1-u^2}$, ні $\sqrt{J_1 + J_2 - J_2u^2}$ не можуть стати уявними. За цих умов швидкість \dot{u} буде дійсною (описувати реальний рух) лише за умови, коли поточне значення u буде перебувати між найменшим (u_2) та найбільшим (u_1) значеннями кореня (9.39). Тому реальний рух навколо внутрішньої осі здійснюється у такий спосіб, що виконуються нерівності

$$u_2 = \sin \beta_2 \leq \sin \beta \leq \sin \beta_1 = u_1,$$

тобто кут β коливається між крайніми значеннями β_1 та β_2 , які визначаються рівностями (9.28).

При цьому, якщо кут β збільшується (u змінюється від u_2 до u_1), то у виразі (9.28) перед радикалом слід брати знак «+», а якщо β зменшується (u змінюється від u_1 до u_2), – то знак «-».

Інтегруючи (9.29), можна отримати явний вираз часу через кут β :

$$t = \int_{u_0}^u \frac{\pm \sqrt{J_3(J_1 + J_2 - J_2u^2)}}{\sqrt{(1-u^2)(AJ_2 + H_0^2)}(u_1 - u)(u - u_2)} du.$$

Період коливань з куту β визначається як подвоєний проміжок часу між проходженням кутом β крайніх значень β_2 та β_1 :

$$T = 2 \sqrt{\frac{J_3}{AJ_2 + H_0^2}} \int_{u_2}^{u_1} \sqrt{\frac{J_1 + J_2 - J_2u^2}{(1-u^2)(u_1 - u)(u - u_2)}} du.$$

Отже, дослідження повних рівнянь руху вільного ГКП показує, що *гіроскоп здійснює періодичні коливання навколо внутрішньої осі підвісу*.

Казати те саме про рух навколо зовнішньої осі підвісу не можна. Більш того, за певних умов *нутаційні коливання ГКП навколо зовнішньої осі підвісу, навіть коли на гіроскоп не діють зовнішні моменти сил супроводжуються постійним дрейфом навколо цієї осі*.

9.1.5. Дрейф Магнуса

Під дрейфом гіроскопа зазвичай розуміють сталу складову кутової швидкості повороту головної осі гіроскопа в інерціальному просторі.

У 1955 р. Курт Магнус з Німеччини і Б. Плаймель і Р. Гудстейн зі США незалежно один від одних встановили, що вільний ГКП, тобто такий, на який не діють моменти зовнішніх сил вздовж осей підвісу, може при нутаційних коливаннях мати систематичний дрейф навколо зовнішньої осі підвісу, а також довели формулу швидкості цього дрейфу. Цю формулу доведено методом збурень у главі 3 (див. (3.117)):

$$\langle \dot{\alpha} \rangle = -\frac{J_1 \sin \beta_{cp}}{2H_0 \cos^2 \beta_{cp}} a^2. \quad (9.30)$$

де $\langle \dot{\alpha} \rangle$ – стала складова (середнє значення за період нутації) кутової швидкості повороту ГКП навколо зовнішньої осі підвісу; β_{cp} – деяке середнє за період нутаційних коливань значення кута β ; a – амплітуда кутової швидкості коливань ГКП навколо зовнішньої осі підвісу; $J_1 = J_{2x} + J_{1z}$; J_{2x}, J_{1z} – моменти інерції відповідно зовнішньої рамки відносно зовнішньої осі та внутрішньої рамки відносно головної осі гіроскопа. Це і є формула Магнуса, яка описує сталу складову кутової швидкості повороту ГКП навколо ЗОП.

В лекціях, які були читані на механіко-математичному факультеті Московського університету, О. Ю. Ішлинський застосовував (1969 р.) оригінальне доведення цієї формули. Воно ґрунтується на спеціальному перетворенні другого з точних рівнянь (9.4), що описують рух ГКП. Його можна подати так:

$$\dot{\alpha} = \frac{J_3}{H \cos \beta} \ddot{\beta} - \frac{1}{2H \cos \beta} \frac{\partial A(\beta)}{\partial \beta} \dot{\alpha}^2. \quad (9.31)$$

Легко впевнитися, що з позначення (9.2) випливає тотожність:

$$A(\beta) + \frac{1}{2} \frac{\partial A(\beta)}{\partial \beta} \operatorname{ctg} \beta = J_1, \quad (9.32)$$

яка сумісно з очевидною тотожністю

$$\frac{1}{\cos \beta} \ddot{\beta} \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\cos \beta} \dot{\beta} \right) - \frac{\operatorname{tg} \beta}{\cos \beta} \dot{\beta}^2$$

дозволяє звести рівність (9.31) до вигляду:

$$\dot{\alpha} = \frac{J_3}{H} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\cos \beta} \dot{\beta} \right) - \frac{J_1}{H} \frac{\operatorname{tg} \beta}{\cos \beta} \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{H} \frac{\operatorname{tg} \beta}{\cos \beta} \{A(\beta) \dot{\alpha}^2 - J_3 \dot{\beta}^2\}. \quad (9.33)$$

Функція $\beta = \beta(t)$, як було доведено, є періодичною. Тому

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\cos \beta} \dot{\beta} \right) dt = 0.$$

Очевидно також, що

$$\frac{\operatorname{tg} \beta_1}{\cos \beta_1} < \frac{\operatorname{tg} \beta}{\cos \beta} < \frac{\operatorname{tg} \beta_2}{\cos \beta_2},$$

де β_1 і β_2 – межі змінювання куту β . У випадку малих рухів осі ротора ($\beta_1 \approx \beta_2$) усі тригонометричні функції кута $\beta \approx \beta_{cp}$ можна вважати постійними.

Внаслідок цього, усереднюючи обидві частини (9.33) на періоді нутаційних коливань, можна дійти такого виразу для дрейфу ГКП навколо зовнішньої осі:

$$\langle \dot{\alpha} \rangle = -\frac{J_1}{H} \frac{\operatorname{tg} \beta_{cp}}{\cos \beta_{cp}} \langle \dot{\alpha}^2 \rangle + \frac{1}{H} \frac{\operatorname{tg} \beta_{cp}}{\cos \beta_{cp}} \langle A(\beta_{cp}) \dot{\alpha}^2 - J_3 \dot{\beta}^2 \rangle, \quad (9.34)$$

де β_{cp} – деяке середнє значення куту β в інтервалі (β_1, β_2) . Якщо підставити у праву частину рівності (9.47) розв'язки (9.8) лінійних рівнянь (9.5) з кутів α і β , отримаємо формулу Магнуса (9.30).

Як бачимо, постійне обертання (дрейф) гіроскопа спостерігається за відсутності моментів сил по осях підвісу і визначається інерційністю рамок карданового підвісу. Якщо рамки безінерційні ($J_{2x} = J_{1z} = 0$), дрейфу Магнуса немає. Тому такий дрейф іноді називають *інерційним*. Необхідною умовою його є існування нутаційних коливань ($a \neq 0$). При цьому величина кутової швидкості дрейфу пропорційна квадрату амплітуди нутаційних коливань.

Досить суттєво на дрейф Магнуса впливає середнє відхилення (β_{cp}) головної осі гіроскопа від перпендикуляра до площини зовнішньої рамки. У разі зміни знака цього відхилення змінюється напрямок дрейфу. Цікаво, що напрямки дрейфу не залежить від напрямку удару по гіроскопу, який зумовлює виникнення нутаційних коливань.

Дрейф Магнуса не виникає, якщо виконується хоча б одна з умов:

- моменти інерції зовнішньої рамки відносно зовнішньої осі та внутрішньої рамки відносно головної осі гіроскопа дорівнюють нулю;
- головна вісь гіроскопа перпендикулярна до зовнішньої осі підвісу;
- гіроскоп не здійснює коливань.

Як приклад розглянемо дрейф Магнуса ГКП з такими параметрами:

$$H_0 = 0,2 \text{ Н м с}; \quad a = \dot{\alpha}_m = 1 \text{ с}^{-1}; \quad J_{2x} + J_{1z} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ кг м}^2; \quad \beta_{cp} = -60^\circ.$$

Відповідно до формули (9.30) $\langle \dot{\alpha} \rangle = 8,7 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1} \approx 180^\circ$ у годину. На картинній площині вісь ротора ГКП за нутаційних коливань у загальному випадку описує не замкнену фігуру – еліпс, а фігуру, зображену на рис. 9.5.

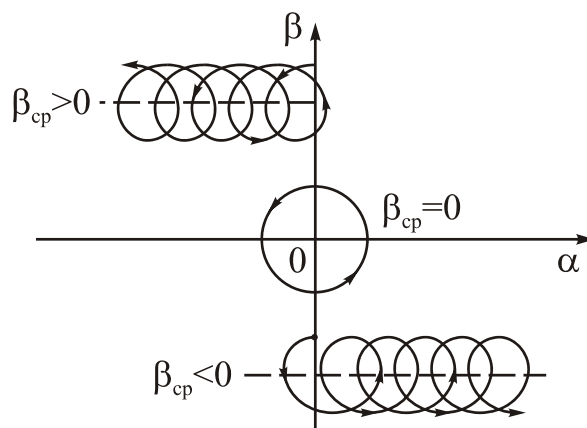


Рис. 9.5. Траєкторія апекса ГКП

9.1.6. Фізична причина дрейфу Магнуса.

У розділі 7 було встановлено, що вектор повного кінетичного моменту \mathbf{K} СЗГ не бере участі у власних коливаннях головної осі (нутації). Тобто рух вектора \mathbf{K} у просторі визначається лише дією моментів зовнішніх сил. Звідси можна зробити висновок, що вивчати дрейфи гіроскопа під дією зовнішніх збурень (зазвичай це одне з головних завдань теоретичного дослідження) зручніше

не за рухом головної осі гіроскопа, як це зазвичай робиться, а за поворотом у просторі вектора повного кінетичного моменту. Тим паче, що опис його руху за рівняннями (2.24) у формі Булгакова є точним.

Слід очікувати аналогічного ефекту й у випадку ГКП. Тут роль повного кінетичного моменту відіграє вектор \mathbf{K}_c :

$$\mathbf{K}_c = \mathbf{K} + \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2,$$

який дорівнює сумі векторів кінетичних моментів \mathbf{K} ротора, \mathbf{K}_1 внутрішньої рамки і \mathbf{K}_2 зовнішньої рамки. А моментами зовнішніх сил \mathbf{M} у цьому випадку слід уважати усі моменти, що є зовнішніми саме до всієї системи «ротор + внутрішня рамка + зовнішня рамка», тобто моменти, що діють на зовнішню рамку з боку основи, включаючи моменти сил реакцій в'язі основи із зовнішньою рамкою:

$$\mathbf{M} = \mathbf{N}_{x_2} + \mathbf{N}_{y_2} + \mathbf{N}_{z_2}.$$

Тут момент \mathbf{N}_{x_2} – момент, що діє вдовж зовнішньої осі підвісу. Його величину позначено у рівняннях як N . Для вільного ГКП $N \equiv 0$. Дві інші складові \mathbf{N}_{y_2} і \mathbf{N}_{z_2} є реакціями в'язей, напрямлені по вказаних осях, а їхні величини визначаються у відповідності до формул (2.42):

$$\begin{aligned} N_{y_2} = L \equiv 0; \quad N_{z_2} &= \frac{R - N \sin \beta}{\cos \beta} + J_1 \ddot{\alpha} \operatorname{tg} \beta + (J_3 - J_2) \dot{\alpha} \dot{\beta} = \\ &= J_1 \ddot{\alpha} \operatorname{tg} \beta + (J_3 - J_2) \dot{\alpha} \dot{\beta}. \end{aligned} \quad (9.35)$$

Розглядатимемо рух гіроскопа і кінетичного моменту \mathbf{K}_c послідовними наближеннями. Спочатку вважатимемо, що на ГКП у першому наближенні не діють ніякі моменти зовнішніх сил, тобто нехтуватимемо моментом реакції (N_{z_2}). Тоді з рівнянь руху кінетичного моменту

$$\begin{cases} \frac{d\beta_K}{dt} = \frac{(N_{z_2})_{xK}}{K_c} \\ \frac{d\alpha_K}{dt} = -\frac{(N_{z_2})_{yK}}{K_c \cos \beta_K} \\ \frac{dK_c}{dt} = (N_{z_2})_{zK} \end{cases} \quad (9.36)$$

впливає, що:

1) величина кінетичного моменту залишається незмінною увесь час руху гіроскопа:

$$K_c = K_{c0} = \text{const} \approx H_0;$$

2) напрям кінетичного моменту \mathbf{K}_c теж залишається незмінним:

$$\alpha_K = \alpha_{K0} = \text{const}; \quad \beta_K = \beta_{K0} = \text{const}.$$

При цьому, як було встановлено раніше, головна вісь гіроскопа здійснює у просторі коливання, обертаючись по конусу з дуже малим кутом розхилу навколо нерухомої осі за законом (9.17):

$$\Delta \alpha = \alpha - \alpha^* = \alpha_m \sin(\lambda t + \delta); \quad \Delta \beta = \beta - \beta^* = -\beta_m \cos(\lambda t + \delta);$$

$$\dot{\alpha} = a \cos(\lambda t + \delta); \quad \dot{\beta} = b \sin(\lambda t + \delta).$$

Неважко впевнитися, що, як і у випадку симетричного гіроскопа, центральною віссю такого конуса є саме кінетична вісь гіроскопа, тобто $\alpha^* = \alpha_{K0}$ і $\beta^* = \beta_{K0}$.

Отже, у першому наближенні кінетична вісь є нерухомою, а головна вісь гіроскопа коливається симетрично відносно неї з частотою нутації.

Перейдемо до наступного наближення, уточнюючи отримані результати.

Передусім уточнимо, як із врахуванням руху гіроскопа у першому наближенні змінюється у часі величина моменту реакції N_{Z2} . Для цього скористаємося виразом (9.35), беручи до уваги, що кут β мало змінюється за величиною за нутаційних коливань, а тому тригонометричні функції цього куту можна вважати постійними величинами і користуватися наближеним співвідношенням:

$$\begin{aligned} N_{Z2} &\approx J_1 \operatorname{tg} \beta_{cp} \ddot{\alpha} + (J_3 - J_2) \dot{\alpha} \dot{\beta} = \\ &= J_1 \operatorname{tg} \beta_{cp} [-a \lambda \sin(\lambda t + \delta)] + (J_3 - J_2) a \cos(\lambda t + \delta) b \sin(\lambda t + \delta) = \\ &= -J_1 \operatorname{tg} \beta_{cp} a \lambda \sin(\lambda t + \delta) + (J_3 - J_2) \frac{ab}{2} \sin 2(\lambda t + \delta) \approx \\ &\approx -J_1 \operatorname{tg} \beta_{cp} a \lambda \sin(\lambda t + \delta). \end{aligned} \quad (9.37)$$

Останнє нехтування другою складовою порівняно з першою можливе, бо амплітуда нутаційних коливань за кутовою швидкістю зазвичай набагато менша за частоту нутації ($\lambda \approx 10^3 \text{ c}^{-1}$, $a \approx b \approx 0,1 \text{ c}^{-1}$).

Отже, у другому наближенні виявляється, що момент реакції з боку основи за нутаційних коливань ГКП не дорівнює нулю, а змінюється з плином часу за гармонічним законом з частотою нутації.

Поглянемо на гіроскоп з боку зовнішньої осі підвісу (рис. 9.6).

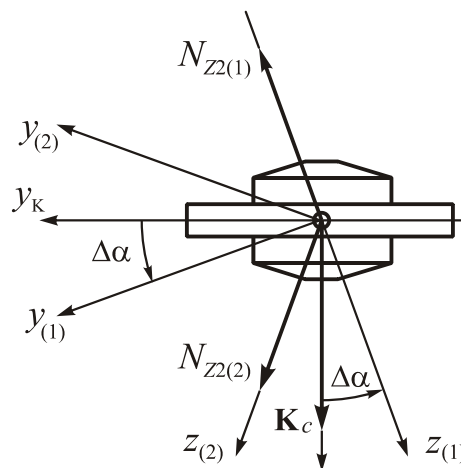


Рис. 9.6. Взаємне положення кінетичної осі та осей зовнішньої рамки

Із рисунку видно, що

$$(N_{Z2})_{ZK} = N_{Z2} \cos(\alpha - \alpha_K) \approx N_{Z2} = -J_1 \operatorname{tg} \beta_{cp} a \lambda \sin(\lambda t + \delta);$$

$$\begin{aligned}
(N_{Z2})_{YK} &= -N_{Z2} \sin(\alpha - \alpha_K) \approx -N_{Z2} \Delta\alpha \approx \\
&\approx J_1 \operatorname{tg} \beta_{cp} a \lambda \sin(\lambda t + \delta) \alpha_m \sin(\lambda t + \delta) = J_1 \operatorname{tg} \beta_{cp} a \lambda \sin(\lambda t + \delta) \frac{a}{\lambda} \sin(\lambda t + \delta) = \\
&= \frac{J_1 \operatorname{tg} \beta_{cp}}{2} a^2 [1 - \cos 2(\lambda t + \delta)].
\end{aligned}$$

Із врахуванням того, що $(N_{Z2})_{XK} \approx -(N_{Z2})_{ZK} \sin \beta_{cp}$, у другому наближенні рівняння (9.36) набувають виду

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\beta_K}{dt} &\approx \frac{J_1 \operatorname{tg} \beta_{cp} a \lambda}{H_0} \sin \beta_{cp} \sin(\lambda t + \delta) \approx \frac{J_1 \sin^2 \beta_{cp}}{\sqrt{AJ_3}} a \sin(\lambda t + \delta); \\ \frac{d\alpha_K}{dt} &\approx -\frac{J_1 \operatorname{tg} \beta_{cp}}{2H_0 \cos \beta_{cp}} a^2 [1 - \cos 2(\lambda t + \delta)]. \end{aligned} \right. \quad (9.38)$$

Аналіз отриманих виразів дозволяє дійти висновку, що кінетичний момент системи \mathbf{K}_c здійснює періодичні коливання навколо внутрішньої осі підвісу. Навколо зовнішньої осі його рух більш складний. Він складається з руху з постійною кутовою швидкістю

$$\langle \dot{\alpha}_K \rangle = -\frac{J_1 \operatorname{tg} \beta_{cp}}{2H_0 \cos \beta_{cp}} a^2 \quad (9.39)$$

і коливань з частотою, яка вдвічі перевищує частоту нутації. Амплітуда кутової швидкості цих коливань дорівнює по величині постійній складовій кутової швидкості (9.39). У цілому на картинній площині вектор кінетичного моменту описує пилкоподібну траєкторію, зображену на рис. 9.7.

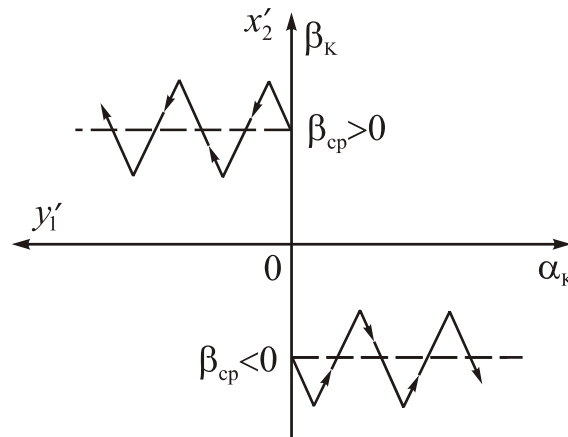


Рис. 9.7. Траєкторії сліду кінетичної осі на картинній площині

Формула (9.39) повністю збігається з формулою дрейфу Магнуса (9.30), що підтверджує зроблений раніше висновок: про відхилення осі фігури ГКП можна робити висновок, розглядаючи відхилення в просторі вектора його повного кінетичного моменту \mathbf{K}_c .

Тепер можна виявити фізичну причину дрейфу Магнуса.

Дійсно, в першому, грубому наближенні, відповідно до розв'язку (9.38) кінетичний момент залишається майже нерухомим відносно зовнішньої осі підвісу, здійснюючи коливання з подвійною частотою нутації і амплітудою

$$\Delta\alpha_{Km} = \frac{J_1 \operatorname{tg}\beta_{cp}}{4\sqrt{AJ_3}} \left(\frac{a}{\lambda} \right)^2, \text{ у той же час здійснюючи коливання з частотою нутації}$$

навколо внутрішньої осі підвісу з амплітудою $\Delta\beta_{Km} = \frac{J_1 \sin^2 \beta_{cp}}{\sqrt{AJ_3}} \frac{a}{\lambda} \gg \Delta\alpha_{Km}$.

Тому, якщо подивитися на площину $y_1 z_1 (y_k z_k)$ з боку осі x_2 , то кінетична вісь z_k (вектор \mathbf{K}_c) виявиться нерухомою (див. рис. 9.6), в той час як вісь фігури z_1 буде коливатися відносно неї з амплітудою нутаційних коливань $(\alpha - \alpha_K) \cong \Delta\alpha$. При цьому момент реакції, направлений по осі z_2 , змінює свій напрямок у площині разом з віссю z_1 і змінює також відповідно до (9.37) свою величину з таким самим періодом, але в протифазі. Це означає, що коли кут α додатний (рис. 9.5, індекс «1»), момент реакції N_{Z2} від'ємний (має напрямок у бік, протилежний осі фігури z_1), а якщо α від'ємний (рис. 9.5, індекс «2»), його напрямок збігається з додатною піввіссю фігури. В результаті, як показано на рис. 9.5, протягом обох півперіодів нутаційних коливань проекція $M_{YK} = N_{Z2} \sin(\alpha_K - \alpha)$ моменту N_{Z2} на напрямок осі y_K , перпендикулярної до вектора кінетичного моменту \mathbf{K}_c , залишається того самого знака, тобто утворює постійну складову $\langle M_{YK} \rangle$ моменту впродовж цієї осі. Відповідно до закону прецесії ця постійна складова призведе до повороту (прецесії) гіроскопа у напрямку суміщення вектора кінетичного моменту з вектором діючого моменту сил $\langle M_{YK} \rangle$:

$$\langle \dot{\alpha}_k \rangle = \langle \dot{\alpha} \rangle = -\frac{\langle M_{YK} \rangle}{H \cos\beta^*} = -\frac{\langle N_{Z2} \sin(\alpha_k - \alpha) \rangle}{H \cos\beta^*} \approx -\langle \frac{N_{Z2}}{H \cos\beta^*} (\alpha_k - \alpha) \rangle. \quad (9.40)$$

Як бачимо, виникає постійна складова моменту сил, яка напрямлена вздовж осі y_K . Саме цей постійний момент сил зумовлює звичайну прецесію кінетичної осі (а отже, і вельми близької до неї головної осі гіроскопа) навколо зовнішньої осі підвісу

$$\langle \dot{\alpha} \rangle = \left\langle \frac{d\alpha_K}{dt} \right\rangle = \left\langle -\frac{(N_{Z2})_{YK}}{K_c \cos\beta_K} \right\rangle \approx -\frac{\langle (N_{Z2})_{YK} \rangle}{H_0 \cos\beta_{cp}} = -\frac{J_1 \operatorname{tg}\beta_{cp}}{2H_0 \cos\beta_{cp}} a^2.$$

Як бачимо, знову отримано формулу дрейфу Магнуса.

Дрейф Магнуса – один з проявів явища, яке в теорії гіроскопів називають *випрямним ефектом* або *ефектом детектування*. Суть його полягає в тому, що за певних умов систематичні відхилення (дрейфи) гіроскопа можуть спричинити не тільки постійні моменти сил по осях підвісу, але й періодично змінювані «центровані» (тобто сталі складові яких дорівнюють нулеві) моменти сил. Необхідні умови виникнення постійної складової відхилення гіроскопа є такими:

1) періодично має змінюватися не тільки значення діючого моменту сил, з тим самим періодом (синхронно) має змінюватися (повертатися в просторі) і *напрямок* лінії дії цього моменту;

2) коливання значення моменту і кута відхилення лінії його дії від середнього положення в просторі має бути синфазним, тобто зсув за фазою цих коливань не має становити $\pm(\frac{\pi}{2} + k\pi)$; максимальне відхилення за інших однакових умов буде за зсуву фаз $\pm k\pi$.

Ці дві умови виконано в випадку, що досліджується. Лінія дії моменту N_{z2} – перпендикуляр z_2 до площини зовнішньої рамки – коливається навколо зовнішньої осі підвісу з частотою нутації. З такою самою частотою нутації, але в протифазі з коливаннями осі z_2 , змінюється величина моменту N_{z2} . У результаті утворюється постійна складова проекції цього моменту на площину, перпендикулярну до кінетичної осі, яка й спричиняє відхилення гіроскопа.

Підсумовуючи, можна визначити *випрямний ефект* як *явище виникнення постійних складових кутових швидкостей гіроскопа при дії на нього моментів, які є «центрованими» функціями часу* (такими, що не мають постійних складових).

Тепер можна сформулювати фізичну причину дрейфу Магнуса у такий спосіб: *дрейф Магнуса зумовлений випрямним ефектом моменту реакції основи, спрямованого вдовж перпендикуляра до площини зовнішньої рамки.*

9.1.7. Моделювання поведження гіроскопа у кардановому підвісі

Перевіримо результати, отримані теоретичним аналізом, чисельним інтегруванням точних рівнянь руху (2.43). Для цього скористаємося комплексом програм, тексти яких наведені у Додатку 5. До розділу 9.

Схема взаємодії окремих програм цього комплексу подана на рис. 9.8.

Основу комплексу складає Simulink-модель **GKPno_M1.mdl**, блок-схема якої показана у Додатку 5. У склад блок-схеми входять два блоки:

– **MOMENTY**, який генерує частини моментів сил, що діють на ГКП, які подано як явні функції часу (у цій програмі – це сталі і гармонічно змінювані моменти сил по осях підвісу);

– **GKP**, який побудовано на основі S-функції за іменем **ur_GKPno**, текст якої наведено у Додатку.

Блок-схеми цих блоків теж вміщено у додатку 5. Вхідними величинами блока **GKP** є моменти сил, значення яких сформовано у блоці **MOMENTY**, вихідними – п'ять величин: α (alfa) – поточний кут повороту зовнішньої рамки відносно основи; β (beta) – поточний кут повороту внутрішньої рамки відносно зовнішньої; H (H) – поточне значення власного кінетичного моменту ГКП; K_{x2} (K_x) – поточне значення проекції повного кінетичного моменту ГКП на зовнішню вісь підвісу; $\dot{\beta}$ (btT) – поточна кутова швидкість обертання внутрішньої рамки відносно зовнішньої.

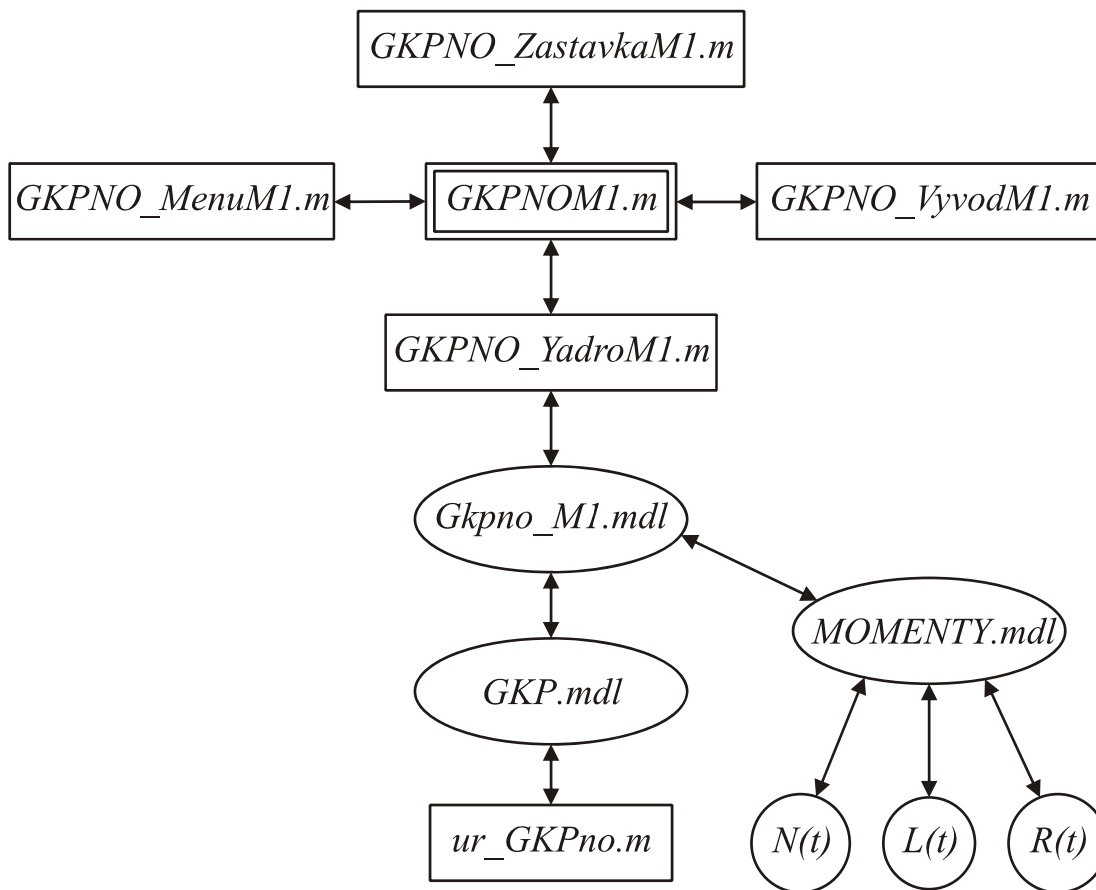


Рис. 9.8. Схема взаємодії комплексу програм GKPNO_M1

S-функція *ur_GKPno* (її текст див. у Додатку 5) здійснює розрахунок правих частин диференціальних рівнянь (2.43) руху ГКП, поданих у формі Коші, в яких змінними стану прийняті вищезазначені величини (див. процедуру *mdlDerivatives*), причому в ній враховуються моменти сил в'язкого і сухого тертя по осях карданового підвісу.

Далі наводяться (у графічній формі) результати моделювання для випадку вільного руху ГКП.

На рис. 9.9 подані нутаційні коливання ГКП навколо перпендикуляра до площини зовнішньої рамки. При цьому кінетична вісь гіроскопа залишається нерухомою, а головна вісь обертається навколо неї по конусу. Зображувальна точка описує на зображуючій площині коло з центром у початку координат.

Якщо нутація здійснюється з середнім положенням головної осі, відхиленням від цього перпендикуляра на 30° , то, як впливає з рис. 9.10, слід кінетичної осі на картинній площині являє собою пилкоподібну криву. Кінетична вісь коливається навколо внутрішньої осі з частотою нутації і одночасно обертається з постійною кутовою швидкістю навколо зовнішньої осі. Апекс гіроскопа рухається по колу навколо кінетичної осі, описую у цілому спиралевидну криву.

Збільшення куту відхилення від перпендикуляра до площини зовнішньої рамки до 60° (рис. 9. 11) призводить до збільшення як амплітуди коливання кі-

нетичної осі відносно внутрішньої осі, так і до ще більшого збільшення кутової швидкості дрейфу навколо зовнішньої осі.

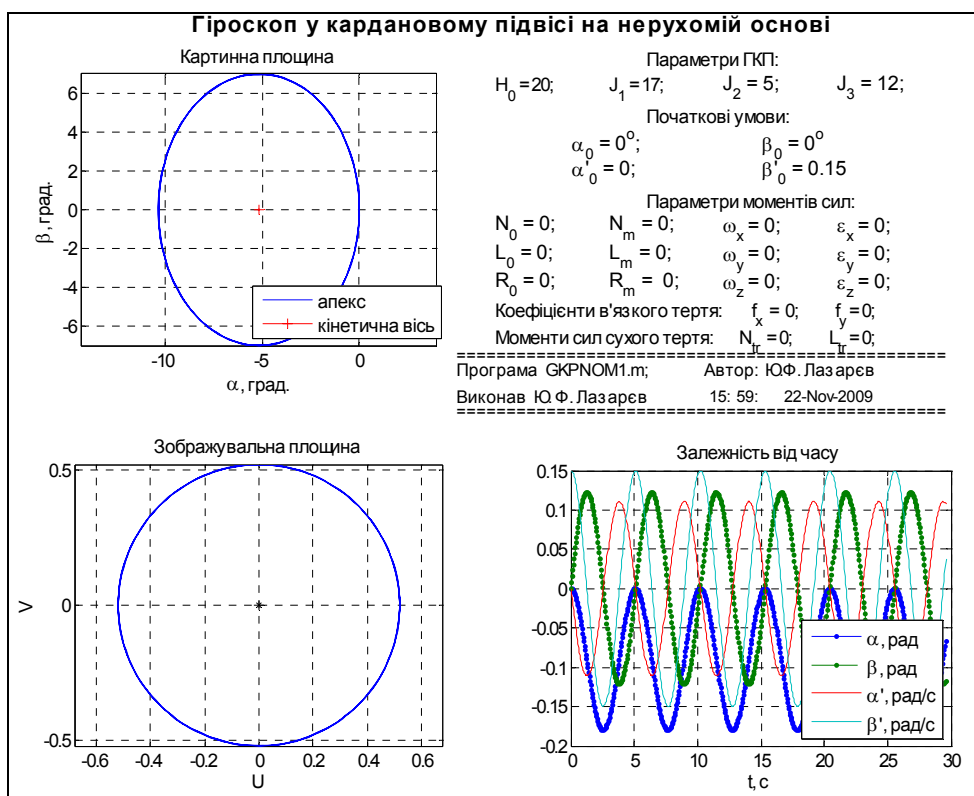


Рис. 9.9. Вільний рух ГКП при $\beta_{cp} = 0$

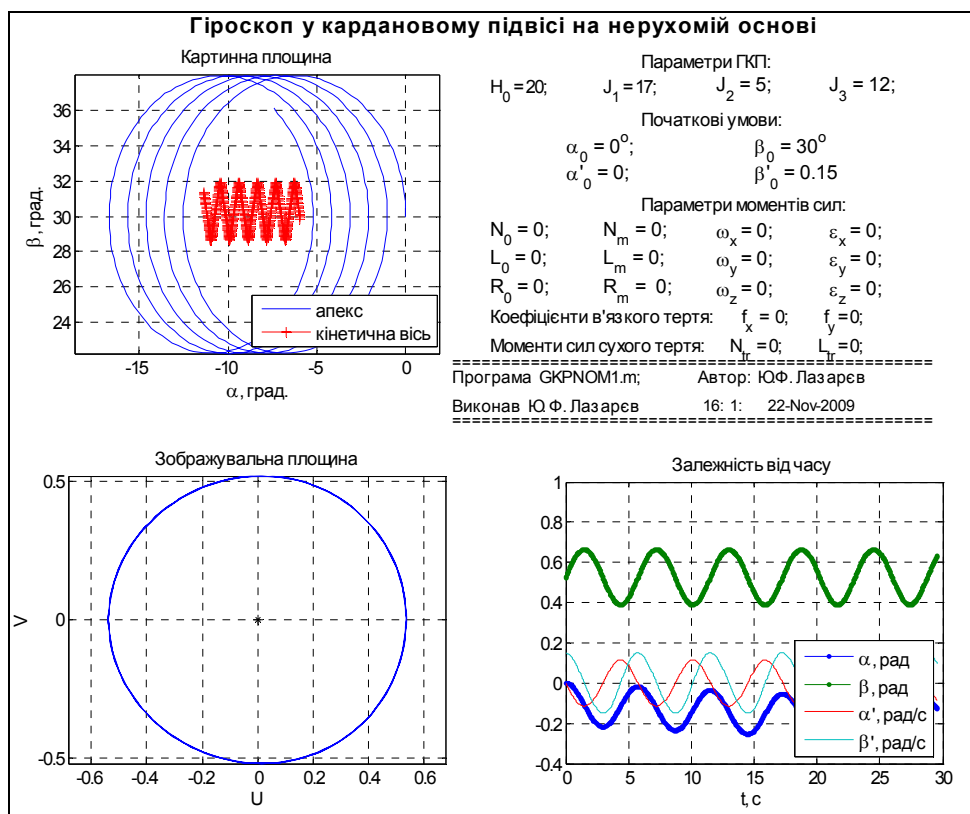


Рис. 9.10. Вільний рух ГКП при $\beta_{cp} = 30^{\circ}$

При зміні напрямку відхилення на протилежний (рис. 9.12) картина змінюється на дзеркальну, дрейф є тим самим за величиною і протилежним за напрямком.

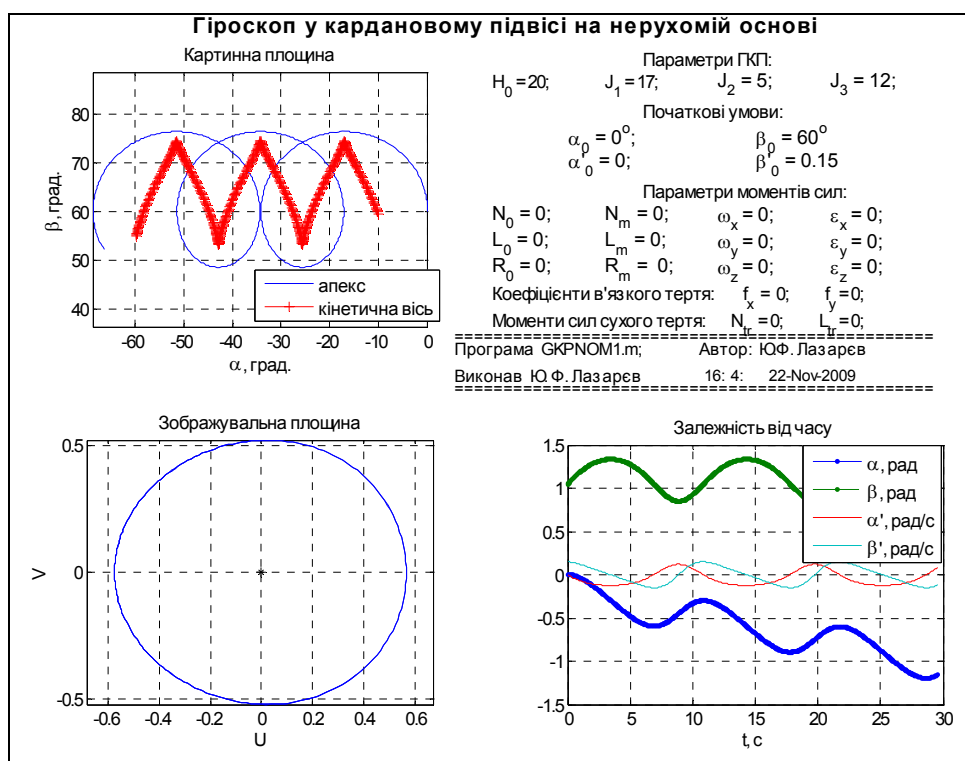


Рис. 9.11. Вільний рух ГКП при $\beta_{cp} = 60^\circ$

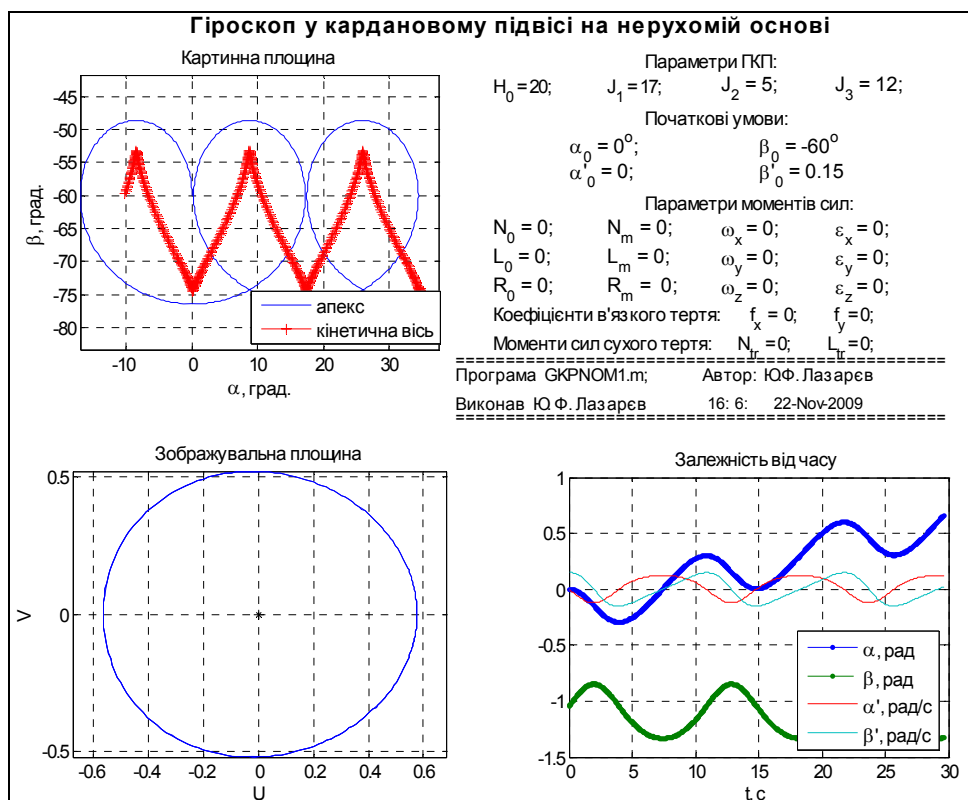


Рис. 9.12. Вільний рух ГКП при $\beta_{cp} = -60^\circ$

На рисунках на картинній площині хрестиками нанесено криву, яка відображує рух у просторі вектора повного кінетичного моменту усіх трьох тіл, що складають ГКП.

9.2. Дія на гіроскоп у кардановому підвісі сталих моментів сил і сил тертя

9.2.1. Рух гіроскопа у кардановому підвісі під дією постійних моментів сил

Нехай на ГКП уздовж осей зовнішньої і внутрішньої рамок карданового підвісу діють постійні моменти:

$$N = N_0 = \text{const}; \quad L = L_0 = \text{const},$$

а моменти вдовж головної осі дорівнюють нулю

$$R = M_{\text{ст}} \equiv 0.$$

Розглянемо рух ГКП у цьому випадку.

Обмежимося вивченням поведінки ГКП за лінеаризованою моделлю і скористаємося для цього методом Ніколаї. За вказаних умов, скориставшись заміною (9.14), рівняння (2.43) можна подати у такій формі:

$$\begin{cases} \dot{u} + \lambda v = n \\ \dot{v} - \lambda u = l \end{cases},$$

де позначено:

$$n = \frac{N_0}{\sqrt{A}}; \quad l = \frac{L_0}{\sqrt{J_3}}.$$

Уводячи нову комплексну змінну $z = u + jv$, дійдемо рівняння

$$\dot{z} - j\lambda z = n + jl. \quad (9.41)$$

Рівняння (9.41) є неоднорідним. Окрім власного руху (нутаційних коливань з частотою λ), гіроскоп здійснює ще й вимушений рух. Повний розв'язок рівняння має вигляд:

$$z = Ce^{j\lambda t} + z^*,$$

де частинний розв'язок z^* визначається рівністю

$$z^* = u^* + jv^* = -\frac{l}{\lambda} + j\frac{n}{\lambda}. \quad (9.42)$$

Враховуючи початкові умови і визначаючи з них сталу інтегрування C , приведемо розв'язок до виду:

$$z - z^* = (z_0 - z^*)e^{j\lambda t}. \quad (9.43)$$

Вираз (9.43) є рівнянням кола на комплексній зображувальній площині. Центр кола міститься у точці z^* , яка визначає вимушений рух. Трасекторія проходить через точку z_0 (рис. 9.13), яка відображує початкове положення зображувальної точки і визначається початковими значеннями швидкостей головної осі гіроскопа. Рух уздовж дуги кола здійснюється проти годинникової стрілки, якщо $\lambda > 0$, і за годинниковою стрілкою, якщо $\lambda < 0$.

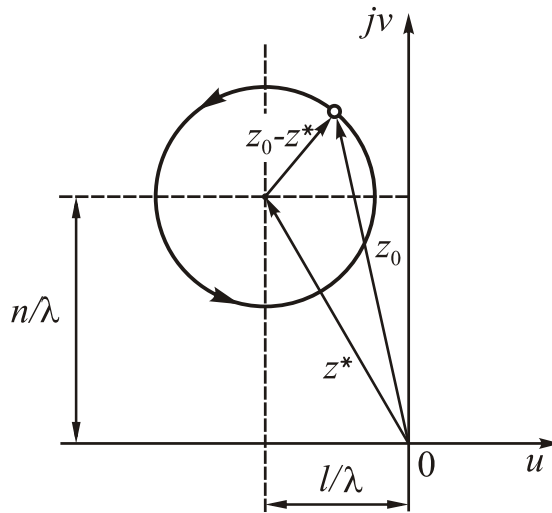


Рис. 9.13. Траєкторія зображувальної точки при дії на ГКП сталих моментів сил

Примітка. Знак величини λ залежить і збігається зі знаком H власного кінетичного моменту гіроскопа. Тому, якщо дивиться на гіроскоп з боку головної осі, то її нутаційні коливання (рух апексу по колу), яким би чином вони не були збуджені, завжди здійснюються у тому самому напрямку, що й власне обертання ротору.

Зміщення центра кола відносно початку координат у зображувальній площині означає, що окрім гармонічних коливань по обох осях, що описуються графічно колом, гіроскоп здійснює також й рух по обох осях з постійними швидкостями

$$u^* = -\frac{l}{\lambda} = -\frac{L\sqrt{A}}{H_0 \cos\beta_{cp}} = \dot{\alpha}^* \sqrt{A}; \quad v^* = \frac{n}{\lambda} = \frac{N\sqrt{J_3}}{H_0 \cos\beta_{cp}} = \dot{\beta}^* \sqrt{J_3},$$

де $\dot{\alpha}^*$, $\dot{\beta}^*$ – кутові швидкості гіроскопа, що відповідають вимушеному рухові.

З цього випливає:

$$\dot{\alpha}^* = -\frac{L}{H_0 \cos\beta_{cp}}; \quad \dot{\beta}^* = \frac{N}{H_0 \cos\beta_{cp}}. \quad (9.44)$$

Отже, **головна вісь ГКП здійснює рух з постійною кутовою швидкістю, на який накладаються нутаційні коливання.**

Картина руху апексу гіроскопа на картинній площині зображена на рис. 9.14.

Якщо початкові умови (початкові швидкості $\dot{\alpha}_0$ і $\dot{\beta}_0$) такі, що

$$z_0 = z^*,$$

то, як це випливає з (9.43), траєкторія зображувальної точки виродиться у точку. У цьому випадку нутаційні коливання не виникнуть, і гіроскоп буде здійснювати лише вимушений рух з постійною швидкістю (9.44). Такий рух називають **вимушеною регулярною прецесією**.

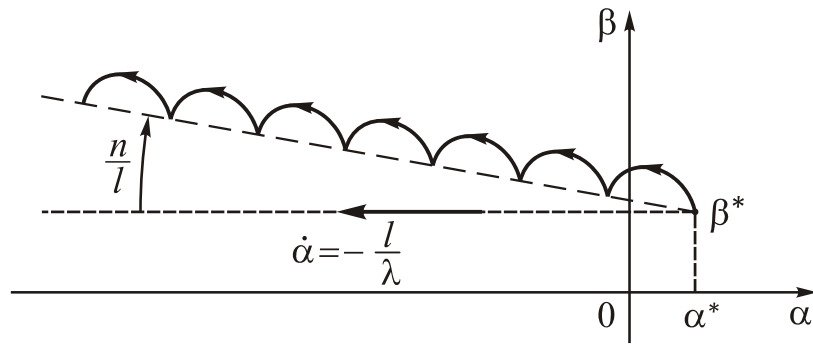


Рис. 9.14. Траєкторія апексу ГКП на картинній площині

На відміну від нього, рух, що описується виразом (9.43), тобто який складається з прецесії і накладених на неї нутаційних коливань, називають *псевдо-регулярною прецесією*.

Розглянемо випадок, що часто трапляється на практиці, коли $z_0 = 0$ (початкові кутові швидкості гіроскопа дорівнюють нулю). Це свідчить про те, що головна вісь гіроскопа перед раптовим стрибкоподібним прикладенням постійних моментів сил перебувала у стані спокою. Траєкторія зображувальної точки пройде у цьому випадку через початок координат, і амплітуда нутаційних коливань буде повністю визначатися прикладеними моментами. Розв'язок (9.43) набуде вигляду

$$z = z^* (1 - e^{j\lambda t}). \quad (9.45)$$

Ураховуючи формулу Ейлера і виділяючи дійсні та уявні частини комплексних величин, можна перетворити вираз (9.45) у такий спосіб:

$$\begin{aligned} u + jv &= (u^* + jv^*)(1 - \cos \lambda t - j \sin \lambda t) = \\ &= [u^*(1 - \cos \lambda t) + v^* \sin \lambda t] + j[v^*(1 - \cos \lambda t) - u^* \sin \lambda t], \end{aligned}$$

звідки випливає

$$u = u^*(1 - \cos \lambda t) + v^* \sin \lambda t; \quad v = v^*(1 - \cos \lambda t) - u^* \sin \lambda t,$$

а тому, повертаючись до кутових швидкостей і враховуючи (9.44), отримаємо

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -\frac{L_0}{H_0 \cos \beta_{cp}} (1 - \cos \lambda t) + \frac{N_0}{H_0 \cos \beta_{cp}} \sqrt{\frac{J_3}{A}} \sin \lambda t; \\ \dot{\beta} &= \frac{N_0}{H_0 \cos \beta_{cp}} (1 - \cos \lambda t) + \frac{L_0}{H_0 \cos \beta_{cp}} \sqrt{\frac{A}{J_3}} \sin \lambda t. \end{aligned}$$

Інтегрування за часом дозволяє дійти остаточних виразів з кутів повороту гіроскопа:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 - \frac{L_0}{H_0 \cos \beta_{cp}} t + \frac{L_0 \sqrt{AJ_3}}{H_0^2 \cos^2 \beta_{cp}} \sin \lambda t + \frac{N_0 J_3}{H_0^2 \cos^2 \beta_{cp}} (1 - \cos \lambda t); \\ \beta &= \beta_0 + \frac{N_0}{H_0 \cos \beta_{cp}} t - \frac{N_0 \sqrt{AJ_3}}{H_0^2 \cos^2 \beta_{cp}} \sin \lambda t + \frac{L_0 A}{H_0^2 \cos^2 \beta_{cp}} (1 - \cos \lambda t). \end{aligned}$$

Оцінімо величину амплітуди нутаційних коливань. Нехай $L_0 = 1 \cdot 10^{-4}$

Н м, $H_0 = 1$ Н м с, $A = 2 \cdot 10^{-3}$ кг м², $J_3 = 9,8 \cdot 10^{-4}$ кг м², $N_0 = 0$, $\beta_{cp} = 0$. Тоді матимемо

$$\alpha_m = \frac{L_0 \sqrt{AJ_3}}{H_0^2} = 1,4 \cdot 10^{-6} = 0,29''; \quad \beta_m = \frac{L_0 A}{H_0^2} = 2,0 \cdot 10^{-6} = 0,41''.$$

Як видно з прикладу, амплітуда нутаційних коливань, що виникають у разі раптового прикладення постійного моменту сил, є вельми малою. Ці коливання не видно неозброєним оком. Рух гіроскопа у цьому випадку сприймається спостерігачем як регулярна прецесія. Цим і пояснюється сенс назви «псевдо-регулярна прецесія».

Оскільки в реальних гіроприладах нутаційні коливання швидко загасають, у кінцевому підсумку рух гіроскопа під дією постійних моментів сил зведеться до вимушеної прецесії

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{N_0 J_3}{H_0^2 \cos^2 \beta_{cp}} - \frac{L_0}{H_0 \cos \beta_{cp}} t; \quad \beta - \beta_0 = \frac{L_0 A}{H_0^2 \cos^2 \beta_{cp}} + \frac{N_0}{H_0 \cos \beta_{cp}} t.$$

Окрім здійснення вимушеної прецесії, гіроскоп також зміщується у напрямку дії моментів на деяку постійну величину. Це зміщення і є тією ниткою, яка пов'язує поведінку гіроскопа і необертового тіла. Дійсно, чим менший є кінетичний момент H (тобто чим ближче гіроскоп до необертового тіла), тим більше (пропорційно квадрату H) гіроскоп зміщується у напрямку дії моменту сил. За нехтовно малого H рух навколо однойменної осі переважатиме над рухом навколо перехресної осі, і гіроскоп за властивостями перетвориться у необертове тіло.

Використаємо раніше подану програмну модель поведінки ГКП (Додаток 5) для ілюстрування руху ГКП у разі раптово прикладеного моменту сил.

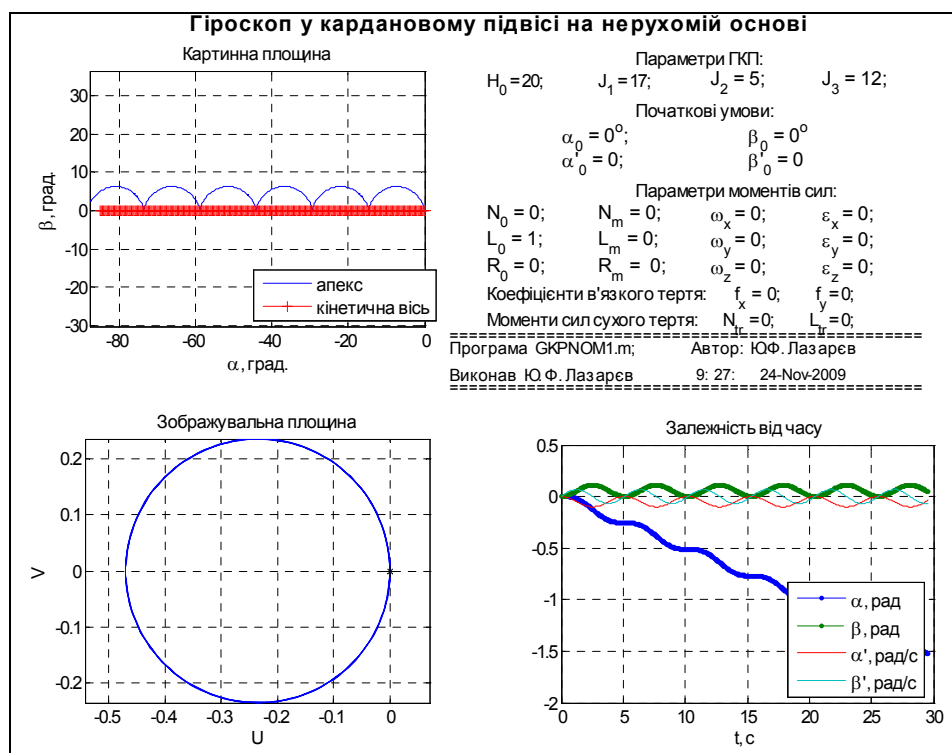


Рис. 9.15. Дія на ГКП раптово прикладеного моменту

Результати моделювання при дії постійного моменту по внутрішній осі наведені на рис. 9.15. Неважко впевнитися, що рух головної осі складається з прецесії навколо зовнішньої осі підвісу з постійною кутовою швидкістю і накладених на неї нутаційних коливань. Величина амплітуди нутації визначається величиною діючого моменту сил. На зображувальній площині траєкторія зображувальної точки є колом, яке проходить через початок координат.

9.2.2. Рух гіроскопа у кардановому підвісі під дією моментів сил в'язкого тертя

Моментами сил в'язкого тертя по осях підвісу гіроскопа називають моменти сил опору обертанню рамок підвісу відносно одна одної, величина яких є пропорційною відповідній кутовій швидкості цього обертання. Так, момент сил в'язкого тертя по зовнішній осі підвісу (N) пропорційний кутовій швидкості $\dot{\alpha}$ повороту зовнішньої рамки відносно корпусу приладу, а момент L по внутрішній осі підвісу пропорційний кутовій швидкості $\dot{\beta}$ повороту внутрішньої рамки відносно зовнішньої:

$$N = -f_2 \dot{\alpha}; \quad L = -f_1 \dot{\beta}. \quad (9.46)$$

Знак мінус показує, що моменти тертя напрямлені протилежно вектору відповідної кутової швидкості. Тут f_2 і f_1 – додатні коефіцієнти тертя.

Лінеаризовані рівняння руху гіроскопа, користуючись методом зображувальної точки Ніколаї, запишемо так

$$\begin{cases} \dot{u} + \lambda v = \frac{N}{\sqrt{A}} \\ \dot{v} - \lambda u = \frac{L}{\sqrt{J_3}} \end{cases}. \quad (9.47)$$

Моменти (9.46) перетворимо у такий спосіб:

$$N = -f_2 \frac{u}{\sqrt{A}} = -\varphi_2 \sqrt{A} u; \quad L = -f_1 \frac{v}{\sqrt{J_3}} = -\varphi_1 \sqrt{J_3} v,$$

де

$$\varphi_2 = \frac{f_2}{A}; \quad \varphi_1 = \frac{f_1}{J_3},$$

Із врахуванням цього рівняння (9.47) можна перетворити до таких

$$\begin{cases} \dot{u} + \varphi_2 u + \lambda v = 0 \\ \dot{v} + \varphi_1 v - \lambda u = 0 \end{cases}. \quad (9.48)$$

Рівняння (9.48) у випадку $\varphi_2 \neq \varphi_1$ не можна «зкомпресувати». Задля спрощення аналізу покладемо $\varphi_2 = \varphi_1 = \varphi$ і застосуємо компресію рівнянь.

Помножимо друге рівняння на уявну одиницю і додамо до першого рівняння. Використовуючи нову змінну $z = u + jv$, отримаємо замість двох диференціальних рівнянь одне диференціальне рівнянь першого порядку:

$$\dot{z} + (\varphi - j\lambda)z = 0. \quad (9.49)$$

Єдиний корінь характеристичного рівняння диференціального рівняння (9.49) дорівнює $p = -\varphi + j\lambda$. Тому розв'язок матиме вигляд:

$$z = z_0 e^{-\varphi t} e^{j\lambda t}. \quad (9.50)$$

Траекторія зображувальної точки на зображувальній площині являє собою східну до початку координат логарифмічну спіраль, яка проходить через початкове положення $z = z_0$ (рис 9.16, нижній лівий графік).

Дійсно, подамо розв'язок (9.50) у показниковій формі:

$$z = R(t)e^{j\varepsilon(t)} = R_0 e^{j\varepsilon_0} e^{-\varphi t} e^{j\lambda t} = R_0 e^{-\varphi t} e^{j(\lambda t + \varepsilon_0)}.$$

Звідси випливає $R(t) = R_0 e^{-\varphi t}$, $\varepsilon(t) = \lambda t + \varepsilon_0$. Інакше кажучи, модуль комплексної величини z зменшується за експоненціальним законом, а її аргумент (кут з додатною дійсною піввіссю) збільшується необмежено пропорційно часу.

Отже, наявність в'язкого тертя по осях підвісу приводить до того, що нутаційні коливання стають загасаючими. Це підтверджується показаними на рис. 9.16 результатами моделювання.

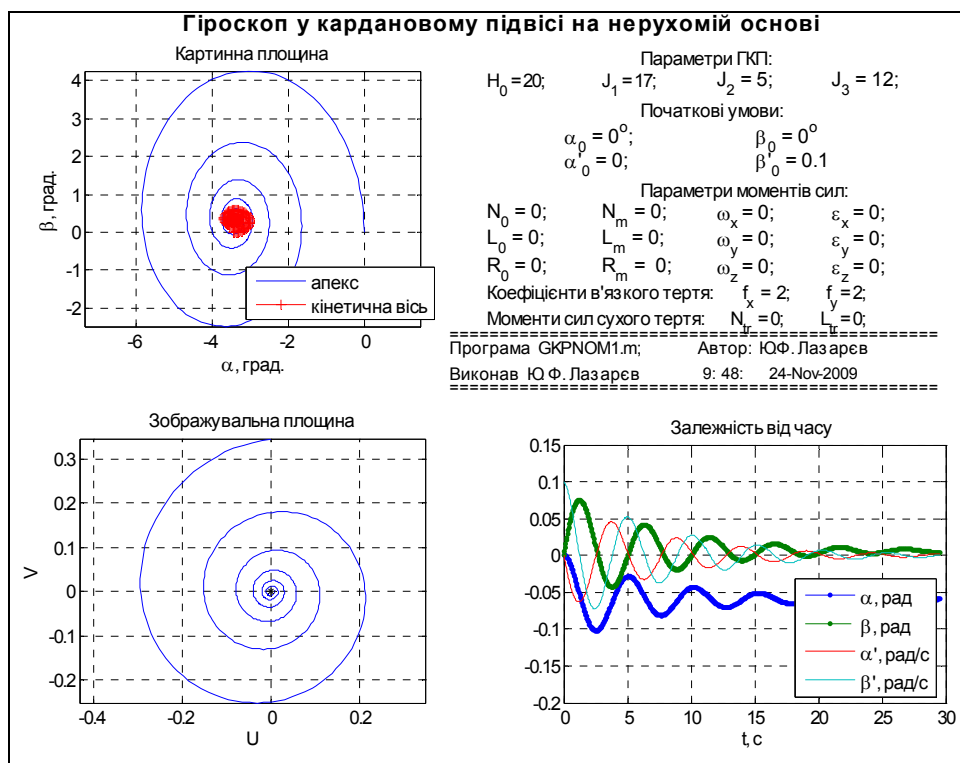


Рис. 9.16. Дія в'язкого тертя на ГКП

Якщо у випадку вільного гіроскопа система перебуває на коливальній межі стійкості, то при введенні в'язкого тертя по осях підвісу власний рух гіроскопа стає асимптотично стійким. Запас стійкості залежатиме від величини коефіцієнтів в'язкого тертя.

У реальному гіроскопі джерелами загасання власних коливань можуть бути:

- моменти сил в'язкого тертя по осях підвісу;
- моменти сил сухого тертя по осях підвісу;
- моменти сил опору з боку навколишнього середовища;
- момент привідного двигуна гіромотора;
- розсіювання енергії за пружних деформацій елементів карданового підвісу, які супроводжують нутаційні коливання.

Експериментальні дослідження показали, що *визначальний вплив справляє саме розсіювання енергії у матеріалі в'язей між рамками карданового підвісу.*

9.2.3. Рух гіроскопа у кардановому підвісі під дією моментів сил сухого тертя. Метод Ніколаї

Моментом сил сухого тертя називають момент сил опору обертанню навколо деякої осі, величина якого не залежить від величини кутової швидкості відносного повороту кілець підшипників, а залежить лише від напрямку відносного обертання, тобто від знака кутової швидкості.

Графік залежності моменту сил сухого тертя по внутрішній осі підвісу від кутової швидкості повороту внутрішньої рамки відносно зовнішньої показано на рис. 9. 16. Тут позначено: L' – значення моменту у разі відносного повороту в один бік, а L'' – у разі повороту у протилежний бік. У загальному випадку $L' \neq L''$.

Аналітично подібного роду залежності прийнято відображувати за допомогою поняття функції знака («сигнум»-функції):

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} +1, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x = 0; \\ -1, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Користуючись цією розривною функцією, момент сил сухого тертя записують у вигляді

$$L = \Delta L - L_{tr} \text{sign } \dot{\beta}. \quad (9.51)$$

Сутність величин ΔL і $\Delta L - L_{tr}$ видно з графіку (рис. 9.17).

Аналогічно можна подати й момент сил сухого тертя по зовнішній осі підвісу:

$$N = \Delta N - N_{tr} \text{sign } \dot{\alpha}. \quad (9.52)$$

Рух гіроскопа під дією моментів сил сухого тертя вивчатимемо за лінеаризованою моделлю і розглядатимемо в зображувальній площині $u - jv$. Відповідні рівняння матимуть вигляд (див. (9.47)):

$$\begin{cases} \dot{u} + \lambda v = \frac{N}{\sqrt{A}} = n = \Delta n - n_{tr} \text{sign}(u) \\ \dot{v} - \lambda u = \frac{L}{\sqrt{J_3}} = l = \Delta l - l_{tr} \text{sign}(v) \end{cases},$$

де позначено:

$$\Delta n = \frac{\Delta N}{\sqrt{A}}; \quad n_{tr} = \frac{N_{tr}}{\sqrt{A}}; \quad \Delta l = \frac{\Delta L}{\sqrt{J_3}}; \quad l_{tr} = \frac{L_{tr}}{\sqrt{J_3}}.$$

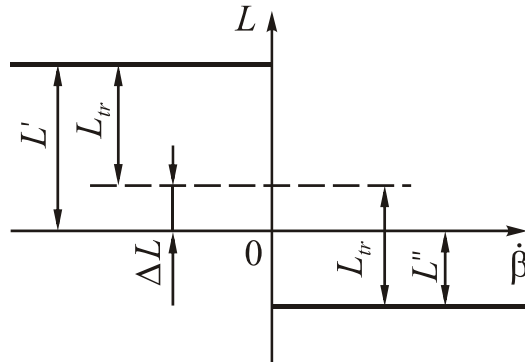


Рис. 9.17. Залежність моменту сухого тертя від кутової швидкості

Відзначимо, що відповідно до (9.51) і (9.52) моменти сил сухого тертя залишаються незмінними доти, доки знак швидкості $\dot{\alpha}$ або $\dot{\beta}$ не змінюється. Інакше кажучи, розглядаючи рух у зображувальній площині, координатами якої є кутові швидкості $\dot{\alpha}$ і $\dot{\beta}$ (зі зміненими масштабами), можна казати, що гіроскоп у кожному квадранті зображувальної площини рухається під дією постійних моментів сил. Тому в кожному квадранті зображувальна точка рухатиметься по дузі кола. Однак як радіус кола, так і його центр змінюватимуться при переході зображувальної точки з одного квадранта в інший.

Картину чергування знаків кутових швидкостей показано на рис. 9.18.

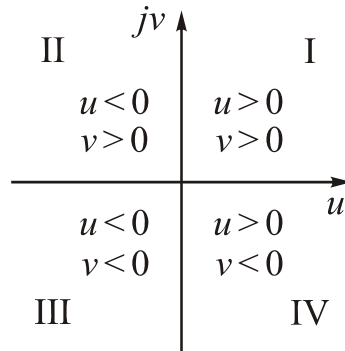


Рис. 9.18. Квадранти зображувальної площини і знаки швидкостей

У кожному з квадрантів траєкторія зображувальної точки описується виразом (див. (9.43)):

$$z - z_k^* = (z_{0k} - z_k^*)e^{j\lambda t}.$$

де величини z_k^* , які характеризують положення центру кола траєкторії у відповідному k -му квадранті, визначаються за формулою (9.42)

$$z^* = u^* + jv^* = -\frac{l}{\lambda} + j\frac{n}{\lambda}$$

і стрибкоподібно змінюються при переході зображуючої точки з одного квадранту в інший. Таблицю координат центрів кіл для кожного з квадрантів наведено у табл. 9.1.

Таблиця 9.1

Координата центра	Квадрант			
	I	II	III	IV
u^*	$-\frac{\Delta l}{\lambda} + \frac{l_{tr}}{\lambda}$	$-\frac{\Delta l}{\lambda} + \frac{l_{tr}}{\lambda}$	$-\frac{\Delta l}{\lambda} - \frac{l_{tr}}{\lambda}$	$-\frac{\Delta l}{\lambda} - \frac{l_{tr}}{\lambda}$
v^*	$\frac{\Delta n}{\lambda} - \frac{n_{tr}}{\lambda}$	$\frac{\Delta n}{\lambda} + \frac{n_{tr}}{\lambda}$	$\frac{\Delta n}{\lambda} + \frac{n_{tr}}{\lambda}$	$\frac{\Delta n}{\lambda} - \frac{n_{tr}}{\lambda}$

Позначимо: 1 – центр траєкторії, яка міститься у першому квадранті, 2 – у другому, 3 – у третьому, 4 – у четвертому квадранті. На рисунку 9.19 зображені ці центри для випадку, коли усі величини Δl , l_{tr} , Δn і n_{tr} є додатними.

Центри 1, 2, 3 і 4 утворюють прямокутник, сторони якого залежать від величини моментів тертя, а центр зміщений відносно початку координат на величину, що визначається постійними складовими моментів (величинами Δl і Δn). Залежно від величини і знака Δl і Δn прямокутник 1–2–3–4 може розміщуватися по всій площині, але орієнтація центрів при цьому змінюватися не буде. Центр 1 завжди буде, наприклад, у нижньому правому куту прямокутника 1–2–3–4, а точка 2 – у верхньому правому куту тощо.

Указавши положення центрів, неважко побудувати траєкторію зображувальної точки (рис. 9.19) графічно, за допомогою циркуля, змінюючи центр і радіус кола кожного разу, коли траєкторія переходить у інший квадрант.

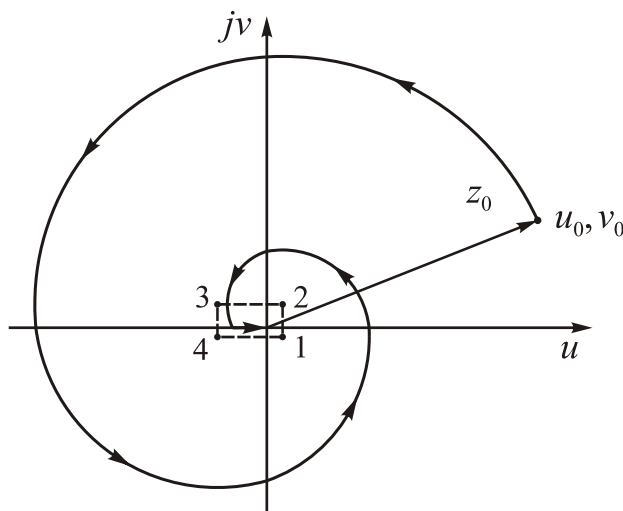


Рис. 9.19. Траєкторія зображувальної точки за умови, що $|\Delta l| < l_{tr}$ і $|\Delta n| < n_{tr}$

Якщо $|\Delta l| \ll l_{tr}$ і $|\Delta n| \ll n_{tr}$, то центр 1 міститиметься у четвертому квадранті, центр 2 – у першому, центр 3 – у другому, а центр 4 – у третьому квадранті (рис. 9.19). У цьому випадку траєкторія зображувальної точки являтиме со-

бою спіраль, яка збігається до початку координат доти, поки вона не перетне одну з координатних осей всередині прямокутника центрів. Після такого перетину траєкторія зображувальної точки стане частиною координатної осі, яку вона перетнула. Зображувальна точка відтепер рухатиметься вздовж цієї осі у напрямку початку координат і до цього початку. Опинившись у початку координат, зображувальна точка зупиниться. Рух гіроскопа припиниться.

Дещо інший вид матиме траєкторія, якщо $|\Delta l| > l_{tr}$ або $|\Delta n| > n_{tr}$. У цьому випадку один з центрів 1, 2, 3 або 4 міститиметься у своєму квадранті (на рис. 9.20 це центр 2).

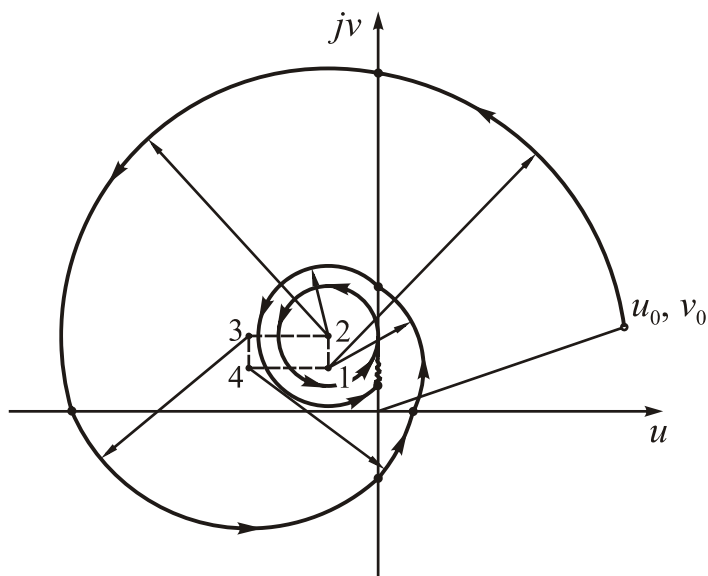


Рис. 9.20. Траєкторія зображувальної точки за умови, що $|\Delta l| > l_{tr}$ і $|\Delta n| > n_{tr}$

При цьому можливі траєкторії у виді кола з цим центром, яке не перетинає координатних осей. Це означає, що в такій системі можливі незгасаючі нутаційні коливання. Більш того, усі зовнішні траєкторії у кінцевому підсумку приводять не до початку координат зображувальної площини, тобто не до припинення руху головної осі, а до межового напівстійкого циклу навколо центру, що міститься у власному квадранті. У цьому випадку рух гіроскопа являє собою прецесію з накладеними на неї нутаційними незгасаючими коливаннями.

Отже, гіроскоп під дією моментів сил сухого тертя рухається по-різному залежно від співвідношення між моментами сил тертя L_{tr} , N_{tr} і постійними моментами ΔL і ΔN . Якщо постійні моменти менші за величиною відповідних моментів сил сухого тертя, гіроскоп здійснює загасаючі нутаційні коливання впритул до повної зупинки головної осі. Якщо ж постійні моменти більші за відповідні моменти сухого тертя, то головна вісь гіроскопа зменшує амплітуду нутаційних лише до певної межі, причому, окрім незгасаючих нутаційних коливань, вона здійснює й вимушений прецесійний рух з постійною швидкістю по обох осях підвісу. Швидкості прецесії при цьому не збігаються зі швидкостями прецесії від постійних частин моментів, а відрізняються від них (у той чи

інший бік) на значення кутової швидкості дрейфу гіроскопа від моментів сил сухого тертя.

Використовуючи раніше створену програмну модель, можна проілюструвати зроблені висновки.

Застосуємо вищезазначену програмну модель для моделювання руху ГКП під дією моментів сил сухого тертя. Результати чисельного інтегрування повних диференціальних рівнянь руху ГКП у разі, коли по осях підвісу діють симетричні моменти сил сухого тертя, тобто постійних складових моментів сил немає, показано на рис. 9.21.

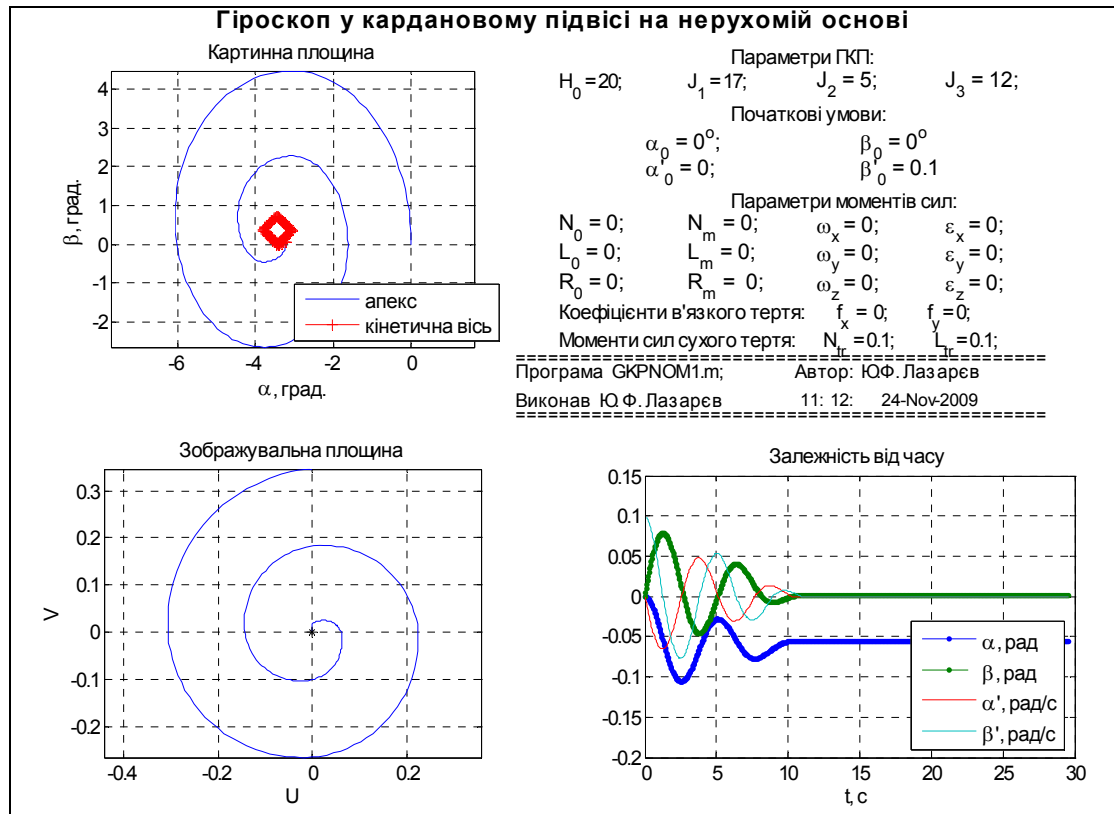


Рис. 9.21. Дія сухого тертя на ГКП

Як бачимо, головна вісь гіроскопа здійснює нутаційні коливання навколо нерухомого положення у просторі, загасаючи по спіралі. Відстань між сусідніми вітками спіралі залишається постійною протягом усього процесу загасання. На відміну від випадку в'язкого тертя, процес загасання має скінченний термін (на рис. 9.21 – 10 с).

Більш складний випадок, коли окрім симетричних і однакових за величиною моментів сил сухого тертя, діють ще постійні моменти, відображено на рис. 9.22.

Можна наочно впевнитися, що нутаційні коливання загасають до певної амплітуди. Остаточні нутаційні коливання накладаються на прецесію гіроскопа. Уважно вивчаючи нижній лівий графік (зображувальну площину), можна помітити так званий «ковзний» режим руху гіроскопа, коли головна вісь гіроскопа повертається навколо тільки однієї (зовнішньої) осі підвісу (на графіку – це відрізок горизонтальної прямої).



Рис. 9.22. Дія на ГКП постійного моменту і сухого тертя

Зверніть увагу на рух кінетичної осі (крива з «плюсів» на верхньому графіку), яка приймає участь у прецесійному рухові, але не приймає участі у нутаційних коливаннях.

9.3. Дія на гіроскоп у кардановому підвісі періодичних моментів сил

У реальних умовах на гіроскопічні прилади, встановлені на рухомих транспортних засобах, діють періодично змінювані моменти сил по осях підвісу гіроскопа, зумовлені різними чинниками. Ці моменти, з одного боку, спричиняють встановлення усталених вимушених коливань гіроскопа, а, з іншого боку, ці коливання можуть призвести до більш небезпечного явища – дрейфів гіроскопа.

9.3.1. Усталені вимушені коливання

У першому наближенні, відповідно до лінеаризованих рівнянь (3.62), ГКП можна розглядати як багатовимірну (див. рис 3.5) лінійну стаціонарну систему з трьома входами – моментами сил по осях підвісу – $N(t)$, $L(t)$ і $R(t)$ і двома вихідними величинами – кутовими швидкостями $\dot{\alpha}(t)$ і $\dot{\beta}(t)$. Поводження ГКП може бути описано за допомогою шести передатних функцій (див. п. 3.2.3. Передатні функції $W_{11}(p)$ і $W_{22}(p)$ характеризують реакцію гіроскопа на

збурення по однойменних осях, тобто рух гіроскопа навколо осі, по якій спрямований збурюючий момент сил. Дві інші передатні функції $W_{12}(p)$ і $W_{21}(p)$ описують в операторній формі реакцію гіроскопа на збурення по перехресних осях.

Відповідні частотні передатні функції (див. вирази (3.25)) характеризують усталену реакцію ГКП на гармонічні збурення, тобто коли збурюючі моменти сил по осях підвісу змінюються з плином часу за синусоїдальним законом з єдиною частотою ω (наприклад, – (3.26)). У кінцевому підсумку (після закінчення перехідного процесу) головна вісь ГКП здійснюватиме усталені вимушені коливання у просторі з частотою змінювання збурювальних моментів.

Графіки АЧХ ГКП відповідні до виразів (3.25) показані у логарифмічному масштабі на рис. 9.23.

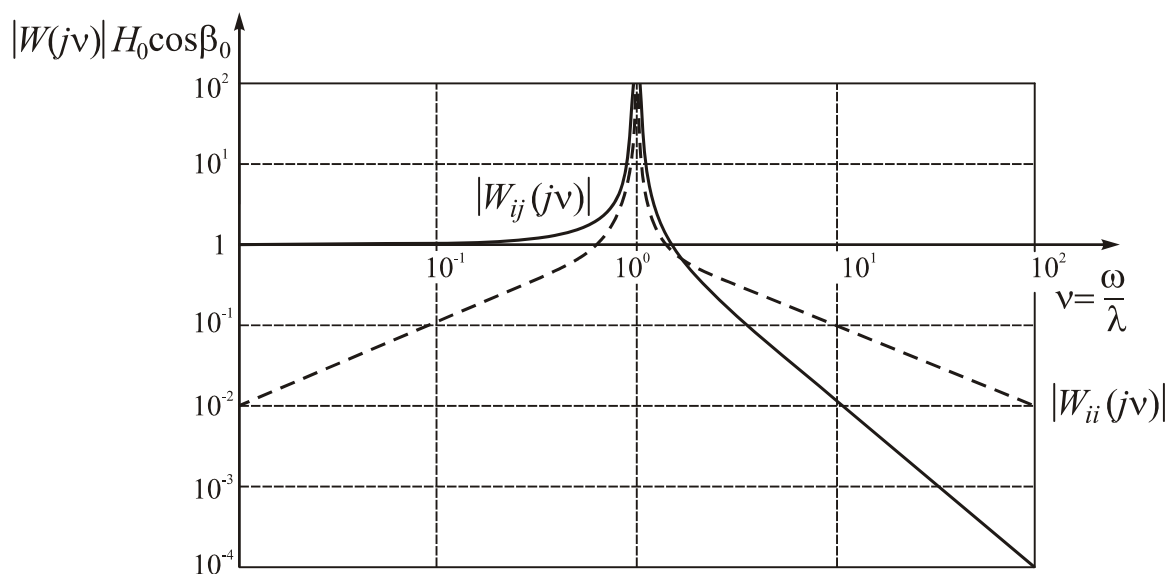


Рис. 9.23. Графіки АЧХ гіроскопа у кардановому підвісі

Із них можна висновувати:

- 1) однойменні збурюючі моменти сил викликають коливання кутової швидкості навколо тієї самої осі, зсунуті по фазі на 90° ;
- 2) перехресні моменти сил завжди викликають лише синфазні коливання, які при переході через нутаційний резонанс ($\nu = 1$) стають протифазними;
- 3) у дорезонансній області ($\nu < 1$, рис. 9.23) визначальний вплив на величину амплітуди коливань гіроскопа оказує перехресний момент сил, що є виявленням саме гіроскопічних властивостей системи;
- 4) зі збільшенням частоти збурення вплив однойменних моментів стає все більш відчутним; в області нутаційного резонансу вплив однойменних і перехресних моментів на амплітуду коливань приблизно однаковий;
- 5) у зарезонансній області ($\nu > 1$) однойменні моменти сил починають відігравати визначальну роль; гіроскоп у цій області при збільшенні частоти збурення все більше наближається за властивостями до звичайного необертового тіла.

В реальних гіроприладах завжди присутні сили опору (тертя), що змінює описану картину. Зокрема, виникає додатковий зсув коливань, який залежить від частоти зовнішньої дії. Однак, все ж відносний коефіцієнт згасання нутаційних коливань є вельми незначним. За експериментальними даними резонансний нутаційний пік сягає величини кількох сотень (у відносних одиницях). Тому реальні АЧХ будуть вельми близькими до побудованих раніше, за виключенням вузької смуги частот при нутаційному резонансі.

Відповідно до виразів (3.27) усталені вимушені коливання ГКП, що виникають внаслідок дії гармонічно змінюваних за законами (3.26) моментів сил, можна подати у вигляді

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}(t) &= \dot{\alpha}_c \cos \omega t + \dot{\alpha}_s \sin \omega t = a \sin(\omega t + \varepsilon); \\ \dot{\beta}(t) &= \dot{\beta}_c \cos \omega t + \dot{\beta}_s \sin \omega t = b \sin(\omega t + \delta),\end{aligned}\tag{9.53}$$

причому сталі коефіцієнти у цих формулах визначаються формулами

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_c &= \frac{1}{H_0 \cos \beta_{cp}} \frac{1}{1-v^2} [v(N_s - R_m \sin \beta_{cp}) \sqrt{\frac{J_3}{A}} - L_c]; \\ \dot{\alpha}_s &= -\frac{1}{H_0 \cos \beta_{cp}} \frac{1}{1-v^2} (vN_c \sqrt{\frac{J_3}{A}} + L_s); \\ \dot{\beta}_c &= \frac{1}{H_0 \cos \beta_{cp}} \frac{1}{1-v^2} (N_c + vL_s \sqrt{\frac{A}{J_3}}); \\ \dot{\beta}_s &= \frac{1}{H_0 \cos \beta_{cp}} \frac{1}{1-v^2} [(N_s - R_m \sin \beta_{cp}) - vL_c \sqrt{\frac{A}{J_3}}].\end{aligned}\tag{9.54}$$

9.3.2. Дрейфи гіроскопа у кардановому підвісі під дією періодичних моментів сил

Для визначення можливих дрейфів ГКП під дією періодичних моментів сил висунемо тимчасово наступну гіпотезу:

причиною дрейфу ГКП під дією періодично змінюваних моментів сил є момент реакції з боку основи, що напрямлений вздовж перпендикуляра до площини зовнішньої рамки.

Як і у випадку дрейфу Магнуса, цей момент через випрямний ефект утворює постійну складову на середнє положення внутрішньої осі підвісу, яка, у свою чергу, зумовлює прецесію (дрейф) гіроскопа навколо зовнішньої осі підвісу. При цьому дрейф, як було показано у п. 9.1.6 визначається з формули (9.40):

$$\langle \dot{\alpha} \rangle = \frac{\langle N_{z2} \Delta \alpha \rangle}{H_0 \cos \beta_{cp}},$$

де $\Delta \alpha$ – поточне відхилення внутрішньої осі підвісу від її середнього положення при вимушених коливаннях.

Візьмемо до уваги вираз (2.42) для моменту N_{Z2} . Як і раніше, припускаємо, що кут β протягом всього терміну руху вельми мало відхиляється від деякого середнього його значення β_{cp} , і тому замінимо тригонометричні функції цього куту у цьому виразі на незмінні їх значення при цьому середньому його значенню. Окрім того, нехтуватимемо складовою $(J_3 - J_2)\dot{\alpha}\dot{\beta}$ у порівнянні з $J_1\ddot{\alpha}tg\beta$. Отже, матимемо:

$$\langle N_{Z2}\Delta\alpha \rangle = \frac{1}{\cos\beta_{cp}} \left[\langle (R - N \sin\beta_{cp})\Delta\alpha \rangle + J_1 \sin\beta_{cp} \langle \ddot{\alpha}\Delta\alpha \rangle \right]. \quad (9.55)$$

Перетворимо цей вираз. Для цього попередньо доведемо дві леми.

Лема 1. Середнє значення від похідної за часом від періодичної величини дорівнює нулю.

Лема 2. Якщо дві величини x і y є періодичними функціями часу з однаковим періодом, то

$$\left\langle \frac{dx}{dt} y \right\rangle = - \left\langle \frac{dy}{dt} x \right\rangle. \quad (9.56)$$

Отже, нехай величина x є періодичною функцією часу з періодом T . Це означає, що $x(t+T) = x(t)$ для будь-якого моменту часу t . Знайдемо середнє значення від похідної за часом від цієї величини:

$$\left\langle \frac{dx(t)}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{dx}{dt} dt = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} dx = \frac{1}{T} [x(t+T) - x(t)] = 0.$$

Це й потрібно було довести. Лему 1 доведено.

Нехай тепер величини x і y є періодичними функціями часу з однаковим періодом. Тоді і їхній добуток теж буде періодичною функцією часу з таким самим періодом. Застосовуючи лему 1 до цього добутку, матимемо:

$$\left\langle \frac{d}{dt}(xy) \right\rangle = \left\langle \frac{dx}{dt} y + x \frac{dy}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{dx}{dt} y \right\rangle + \left\langle x \frac{dy}{dt} \right\rangle = 0.$$

З цього й випливає співвідношення (9.56). Лему 2 доведено.

Застосуємо співвідношення (9.56) до складових виразу (9.55):

$$\langle (R - N \sin\beta_{cp})\Delta\alpha \rangle = - \langle \dot{\alpha} \int (R - N \sin\beta_{cp}) dt \rangle; \quad \langle \ddot{\alpha}\Delta\alpha \rangle = - \langle \dot{\alpha}^2 \rangle.$$

З урахуванням цього вираз (9.55) набуде вигляду:

$$\langle N_{Z2}\Delta\alpha \rangle = - \frac{1}{\cos\beta_{cp}} \left[J_1 \sin\beta_{cp} \langle \dot{\alpha}^2 \rangle + \langle \dot{\alpha} \int (R - N \sin\beta_{cp}) dt \rangle \right]. \quad (9.57)$$

Використовуючи (9.57) у формулі (9.55), дістанемо

$$\langle \dot{\alpha} \rangle = - \frac{1}{H_0 \cos^2\beta_{cp}} \left[J_1 \sin\beta_{cp} \langle \dot{\alpha}^2 \rangle + \langle \dot{\alpha} \int (R - N \sin\beta_{cp}) dt \rangle \right]. \quad (9.58)$$

Така формула дрейфу впливає з прийнятої гіпотези.

Тепер спробуємо застосувати метод збурень.

Для цього розв'язок диференціальних рівнянь (див. (2.33) та (9.5))

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\beta)\ddot{\alpha} + \frac{\partial A(\beta)}{\partial \beta} \dot{\alpha}\dot{\beta} + H\dot{\beta} \cos \beta = N(t) - R(t) \sin \beta \\ J_3 \ddot{\beta} - \frac{1}{2} \frac{\partial A(\beta)}{\partial \beta} \dot{\alpha}^2 - H\dot{\alpha} \cos \beta = L(t) \\ \frac{dH}{dt} = R(t) \end{array} \right. \quad (9.59)$$

шукатимемо у вигляді рядів за степенями малого параметра μ :

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \mu \dot{\alpha}_{(1)}(t) + \mu^2 \dot{\alpha}_{(2)}(t) + \dots; & \beta &= \beta_{\text{cp}} + \mu \beta_{(1)}(t) + \mu^2 \beta_{(2)}(t) + \dots; \\ H &= H_0 + \mu \Delta H(t) + \dots \end{aligned} \quad (9.60)$$

Підставляючи (9.60) у рівняння (9.59), здійснюючи у них заміни $N(t) \rightarrow \mu N(t)$; $L(t) \rightarrow \mu L(t)$; $R(t) \rightarrow \mu R(t)$, розкладаючи складні залежності за степенями малого параметру, сформуємо рівняння першого і другого наближень, збираючи окремо члени першого порядку відносно малого параметра і отримуючи в результаті рівняння першого наближення

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\beta_{\text{cp}})\ddot{\alpha}_{(1)} + H_0 \dot{\beta}_{(1)} \cos \beta_{\text{cp}} = N(t) - R(t) \sin \beta_{\text{cp}}; \\ J_3 \ddot{\beta}_{(1)} - H_0 \dot{\alpha}_{(1)} \cos \beta_{\text{cp}} = L(t); \\ \frac{d\Delta H}{dt} = R(t), \end{array} \right. \quad (9.61)$$

а потім – члени другого порядку мализни, які приводять до рівнянь другого наближення:

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\beta_{\text{cp}})\ddot{\alpha}_{(2)} + H_0 \cos \beta_{\text{cp}} \dot{\beta}_{(2)} = - \left. \frac{\partial A(\beta)}{\partial \beta} \right|_{\beta=\beta_{\text{cp}}} (\ddot{\alpha}_{(1)}\beta_{(1)} + \dot{\alpha}_{(1)}\dot{\beta}_{(1)}) - \\ \quad - (\Delta H \dot{\beta}_{(1)} + R(t)\beta_{(1)}) \cos \beta_{\text{cp}} + H_0 \sin \beta_{\text{cp}} \beta_{(1)} \dot{\beta}_{(1)}; \\ J_3 \ddot{\beta}_{(2)} - H_0 \cos \beta_{\text{cp}} \dot{\alpha}_{(2)} = \left. \frac{1}{2} \frac{\partial A(\beta)}{\partial \beta} \right|_{\beta=\beta_{\text{cp}}} \dot{\alpha}_{(1)}^2 - \\ \quad - H_0 \sin \beta_{\text{cp}} \beta_{(1)} \dot{\alpha}_{(1)} + \Delta H \cos \beta_{\text{cp}} \dot{\alpha}_{(1)}. \end{array} \right. \quad (9.62)$$

Зосередимо увагу на рівняннях другого наближення (9.62), з яких визначимо сталі складові кутових швидкостей гіроскопа навколо осей підвісу. Для цього застосуємо операцію усереднення до обох частин кожного з цих рівнянь. З першого рівняння (9.62) випливає наступне:

$$\begin{aligned} H_0 \cos \beta_{\text{cp}} \langle \dot{\beta}_{(2)} \rangle &= - \left. \frac{\partial A(\beta)}{\partial \beta} \right|_{\beta=\beta_{\text{cp}}} \left\langle \frac{d}{dt} (\dot{\alpha}_{(1)}\beta_{(1)}) \right\rangle - \\ &\quad - \cos \beta_{\text{cp}} \left\langle \frac{d}{dt} (\Delta H \cdot \beta_{(1)}) \right\rangle + \frac{1}{2} H_0 \sin \beta_{\text{cp}} \left\langle \frac{d}{dt} (\beta_{(1)}^2) \right\rangle \end{aligned}$$

Оскільки частинні розв'язки рівнянь першого наближення (9.61) є періодичними внаслідок того, що збурення (праві частини) в цих рівняннях припускаються періодичними, то всі члени правої частини дорівнюють нулю (лема 1).

Отже можна дійти висновку, що *під дією періодичних моментів сил дрейфу ГКП навколо внутрішньої осі підвісу немає:*

$$\langle \dot{\beta} \rangle = \langle \dot{\beta}_{(2)} \rangle = 0.$$

Усереднення другого рівняння (9.62) дає

$$\begin{aligned} -H_0 \cos \beta_{cp} \langle \dot{\alpha}_{(2)} \rangle &= \frac{1}{2} \frac{\partial A(\beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta_{cp}} \langle \dot{\alpha}_{(1)}^2 \rangle - \\ &- H_0 \sin \beta_{cp} \langle \beta_{(1)} \dot{\alpha}_{(1)} \rangle + \langle \Delta H \dot{\alpha}_{(1)} \rangle \cos \beta_{cp} \end{aligned} \quad (9.63)$$

З першого рівняння першого наближення (9.61) виразимо величину $\beta_{(1)}$:

$$\beta_{(1)} = -\frac{A(\beta_{cp})}{H_0 \cos \beta_{cp}} \dot{\alpha}_{(1)} + \frac{1}{H_0 \cos \beta_{cp}} \int (N(t) - R(t) \sin \beta_{cp}) dt$$

і використаємо це для перетворення виразу (9.90):

$$\begin{aligned} -H_0 \cos \beta_{cp} \langle \dot{\alpha}_{(2)} \rangle &= \frac{1}{2} \frac{\partial A(\beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta_{cp}} \langle \dot{\alpha}_{(1)}^2 \rangle + \frac{A(\beta_{cp}) \sin \beta_{cp}}{H_0 \cos \beta_{cp}} \langle \dot{\alpha}_{(1)}^2 \rangle - \\ &- tg \beta_{cp} \langle \dot{\alpha}_{(1)} \int (N - R \sin \beta_{cp}) dt \rangle + \langle \dot{\alpha}_{(1)} \int R dt \rangle \cos \beta_{cp} \end{aligned}$$

Враховуючи тотожність (9.45), остаточно можна записати:

$$\langle \dot{\alpha} \rangle = \langle \dot{\alpha}_{(2)} \rangle = -\frac{1}{H_0 \cos \beta_{cp}} \left\{ J_1 tg \beta_{cp} \langle \dot{\alpha}_{(1)}^2 \rangle + \frac{1}{\cos \beta_{cp}} \langle \dot{\alpha}_{(1)} \int (R - N \sin \beta_{cp}) dt \rangle \right\}. \quad (9.64)$$

Отриманий вираз збігається з формулою (9.58). Це дозволяє дійти висновку, що висловлена *гіпотеза є слушною*.

Уточнимо формулу для дрейфу, використовуючи результати, одержані у п. 3.1.2. Для цього вважатимемо, що моменти змінюються у часі за законами (3.26).

Розв'язок рівнянь першого наближення має вид (9.53), тому середні значення добутоків у правій частині (9.64) дорівнюватимуть:

$$\langle \dot{\alpha}_{(1)}^2 \rangle = \frac{1}{2} (a_s^2 + a_c^2) = \frac{a^2}{2};$$

$$\langle \dot{\alpha}_{(1)} \int (R - N \sin \beta_{cp}) dt \rangle = -\frac{1}{2\omega} [a_c R_m + (a_s N_c - a_c N_s) \sin \beta_{cp}].$$

Тепер вираз (9.64) для дрейфу гіроскопа можна подати так

$$\langle \dot{\alpha} \rangle = -\frac{1}{2H_0 \cos \beta_{cp}} \left\{ J_1 (a_s^2 + a_c^2) tg \beta_{cp} - \frac{1}{\omega} (a_s N_c - a_c N_s) tg \beta_{cp} - \frac{1}{\omega \cos \beta_{cp}} a_c R_m \right\}.$$

Проаналізуємо одержану формулу.

Дрейф ГКП під дією періодичних моментів сил по осях карданового підвісу містить три складові:

$$\langle \dot{\alpha} \rangle_1 = -\frac{J_1 tg \beta_{cp}}{2H_0 \cos \beta_{cp}} a^2; \quad \langle \dot{\alpha} \rangle_2 = \frac{tg \beta_{cp}}{2\omega H_0 \cos \beta_{cp}} (a_s N_c - a_c N_s);$$

$$\langle \dot{\alpha} \rangle_3 = \frac{1}{2\omega H_0 \cos^2 \beta_{cp}} a_c R_m.$$

Перша складова за формулою і властивостями майже збігається з розглянутим раніше дрейфом Магнуса. Вона так само залежить від інерційності рамок карданового підвісу, середнього положення внутрішньої рамки відносно зовнішньої. Єдина, але суттєва відмінність, – вона визначається вимушеними, а не власними коливаннями гіроскопа і тому існує і за наявності сил опору.

Друга складова дрейфу, як бачимо, вже не залежить від інерційності рамок, хоча її залежність від куту β_{cp} залишається такою самою.

Третя складова також не залежить від інерційності рамок і майже не залежить від середнього положення внутрішньої рамки відносно зовнішньої. Ця складова дрейфу існує навіть при взаємно перпендикулярних рамках і не змінює напрямку дрейфу зі зміною знака β_{cp} .

Розглянемо три частотних діапазони: 1) низькочастотний ($\nu \ll 1$); 2) резонансний ($\nu \approx 1$); 3) високочастотний ($\nu \gg 1$).

У низькочастотному діапазоні матимемо (див. (9.54)):

$$a_s \approx -\frac{1}{H_0 \cos \beta_{cp}} L_s; \quad a_c \approx -\frac{1}{H_0 \cos \beta_{cp}} L_c,$$

а тому

$$\langle \dot{\alpha} \rangle_1 \approx -\frac{J_1 \operatorname{tg} \beta_{cp}}{2(H_0 \cos \beta_{cp})^3} L_m^2; \quad \langle \dot{\alpha} \rangle_2 \approx \frac{\operatorname{tg} \beta_{cp}}{2\omega(H_0 \cos \beta_{cp})^2} (L_c N_s - L_s N_c);$$

$$\langle \dot{\alpha} \rangle_3 \approx -\frac{1}{2\omega H_0^2 \cos^3 \beta_{cp}} L_c R_m.$$

Складова типу дрейфу Магнуса у цьому випадку набагато менша за величиною двох інших складових, і тому дрейф при низькочастотних збуреннях можна визначати за таким виразом:

$$\langle \dot{\alpha} \rangle \approx -\frac{1}{2\omega H_0^2 \cos^3 \beta_{cp}} [L_c R_m - (L_c N_s - L_s N_c) \sin \beta_{cp}].$$

Характерною особливістю дрейфу за низькочастотних збурень є його необмежене збільшення в разі зменшення частоти збурення.

В області нутаційного резонансу ($\nu \approx 1$) величина $\frac{1}{H_0 \cos \beta_{cp}} \frac{1}{1-\nu^2}$ стає

дуже великою, дві останні складові дрейфу стають набагато меншими за першу, тому дрейф у цьому випадку можна розраховувати за формулою:

$$\langle \dot{\alpha} \rangle \approx -\frac{J_1 \operatorname{tg} \beta_{cp}}{2(H_0 \cos \beta_{cp})^3} \frac{1}{(1-\nu^2)^2} \left\{ \left(N_c \sqrt{\frac{J_3}{A}} + L_s \right)^2 + \left[(N_s - R_m \sin \beta_{cp}) \sqrt{\frac{J_3}{A}} - L_c \right]^2 \right\}.$$

В зарезонансній області ($\nu \gg 1$) можна наближено вважати:

$$a_S \approx \frac{1}{\nu} \frac{N_c}{H_0 \cos \beta_{cp}} \sqrt{\frac{J_3}{A}} = \frac{N_c}{A\omega};$$

$$a_C \approx -\frac{1}{\nu} \frac{(N_s - R_m \sin \beta_{cp})}{H_0 \cos \beta_{cp}} \sqrt{\frac{J_3}{A}} = -\frac{N_s - R_m \sin \beta_{cp}}{A\omega}.$$

Тут друга і третя складові дрейфу переважатимуть за величиною першу, тому першою складовою можна знехтувати і розраховувати дрейф згідно з виразом

$$\langle \dot{\alpha} \rangle \approx \frac{(N_m^2 + R_m^2) \sin \beta_{cp} - N_s R_m (1 + \sin^2 \beta_{cp})}{2\omega^2 A H_0 \cos^2 \beta_{cp}}.$$

Цей дрейф за тих самих амплітуд збурювальних моментів сил буде набагато меншим за величиною, ніж дрейф при низькочастотних збуреннях.

Графік залежності дрейфу ГКП від частоти змінювання моментів сил для наступних параметрів: $H = 0,4$ Н м с; $N_s = L_c = R_m = 1 \cdot 10^{-3}$ Н м; $J_3 = 1 \cdot 10^{-3}$ кг м² показаний на рис. 9.24.

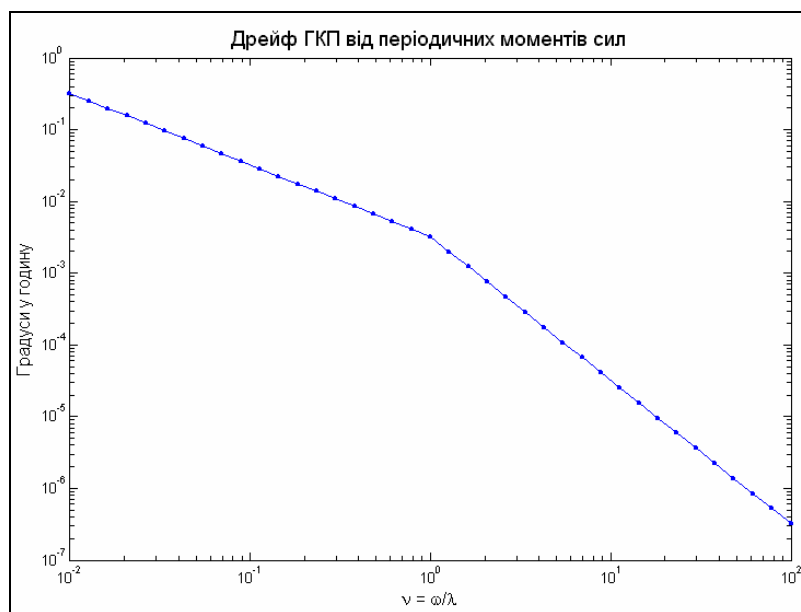


Рис. 9.24. Залежність дрейфу від частоти збурення

Як бачимо, найбільш небезпечним частотним діапазоном збурення з точки зору величини дрейфу є низькочастотний діапазон.

Далі наведені результати моделювання поведінки ГКП за дії на нього гармонічно змінюваних моментів сил, одержані за допомогою програмної моделі, описаної раніше.

Процес усталення вимушених коливань під дією моменту по внутрішній осі при одночасній дії моментів сил в'язкого тертя по осях підвісу ілюструє рис. 9.25. Частота збурення встановлена $0,24$ с⁻¹. За вказаних на рисунках значень параметрів частота власних коливань (нутації) дорівнює $1,231$ с⁻¹. Тому відносне значення частоти збурення $\nu = 0,195$. Дрейф ГКП не спостерігається.

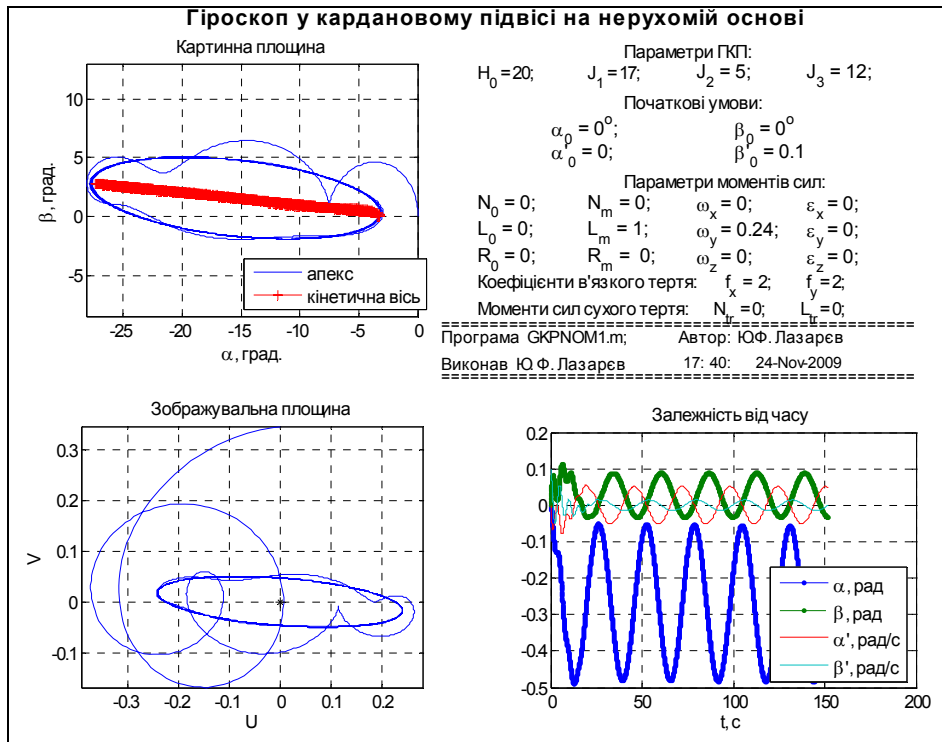


Рис. 9.25. Усталення вимушених коливань ГКП

Якщо початкове положення головної осі відхилити від перпендикуляра до площини зовнішньої рамки на кут 45° , то спостерігатиметься картина руху, показана на рис. 9.26.

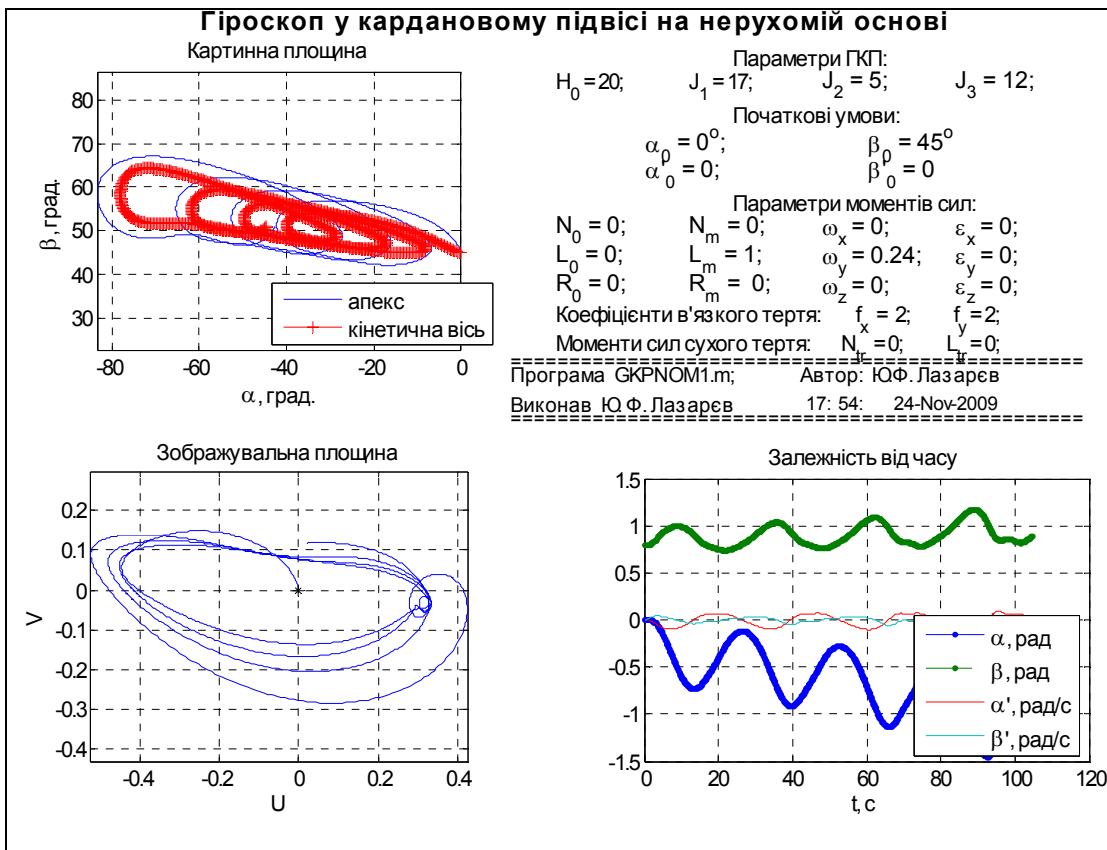


Рис. 9.26. Дрейф ГКП при відхиленні рамок від перпендикулярного положення

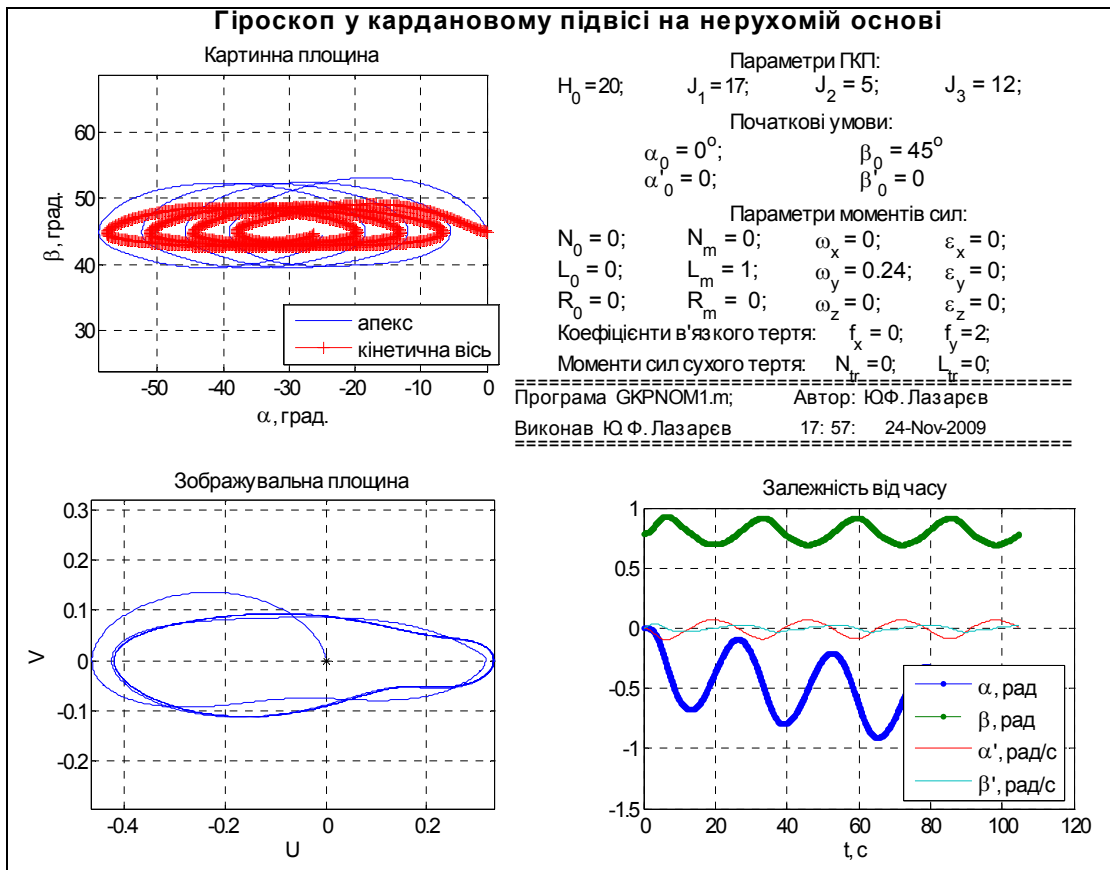


Рис. 9.27. Тертя по зовнішній осі немає

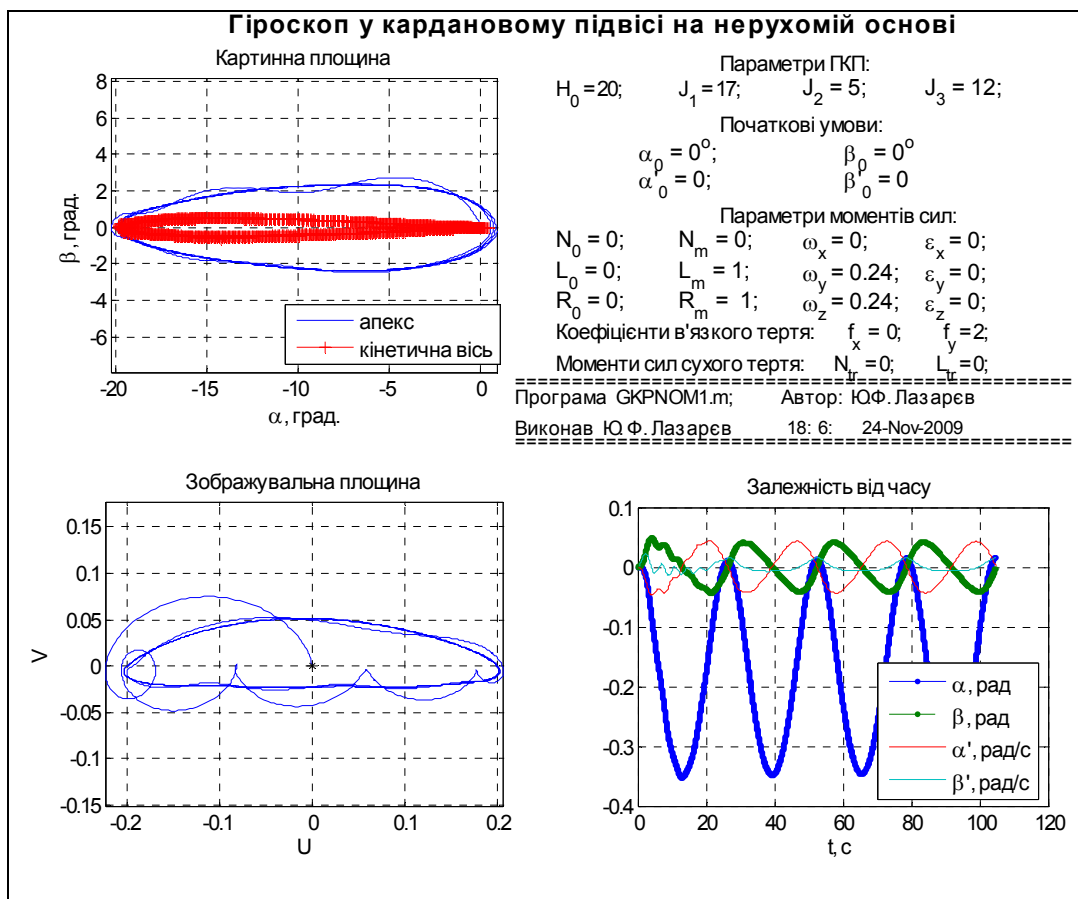


Рис. 9.28. Дія синфазних моментів при перпендикулярних рамках

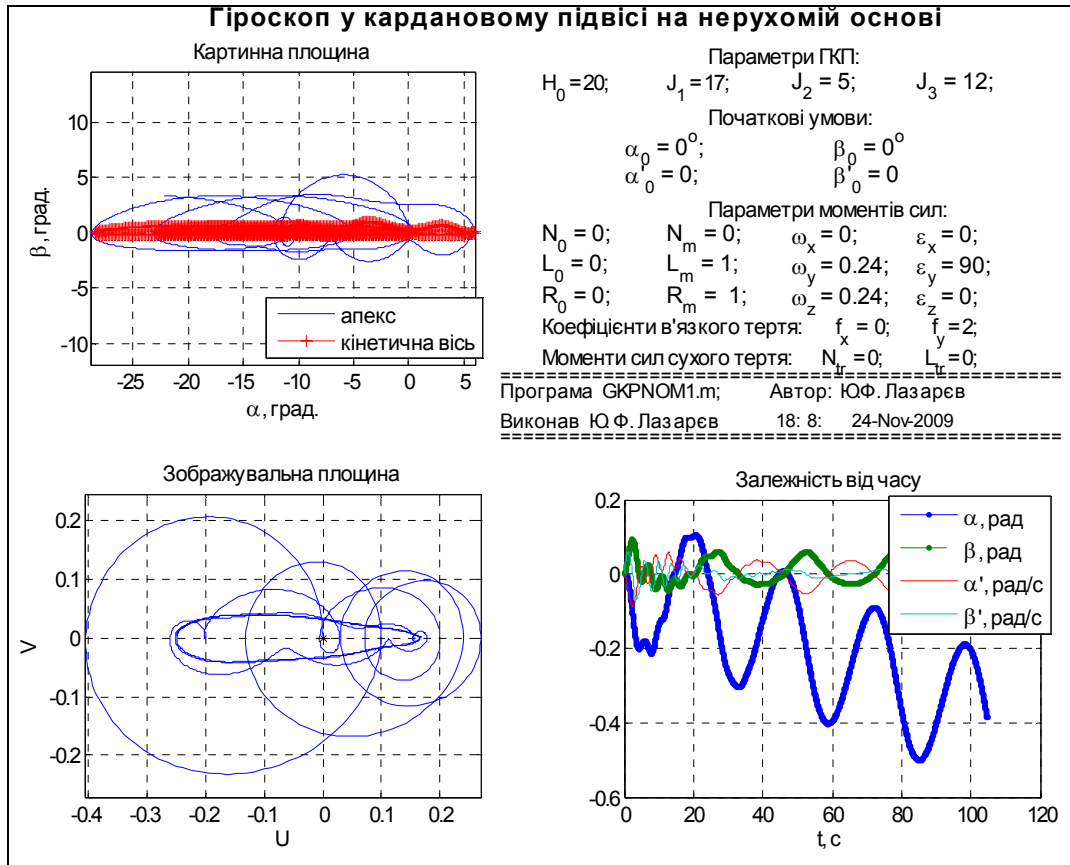


Рис. 9.29. Зсув фаз 90° між моментами при перпендикулярних рамках

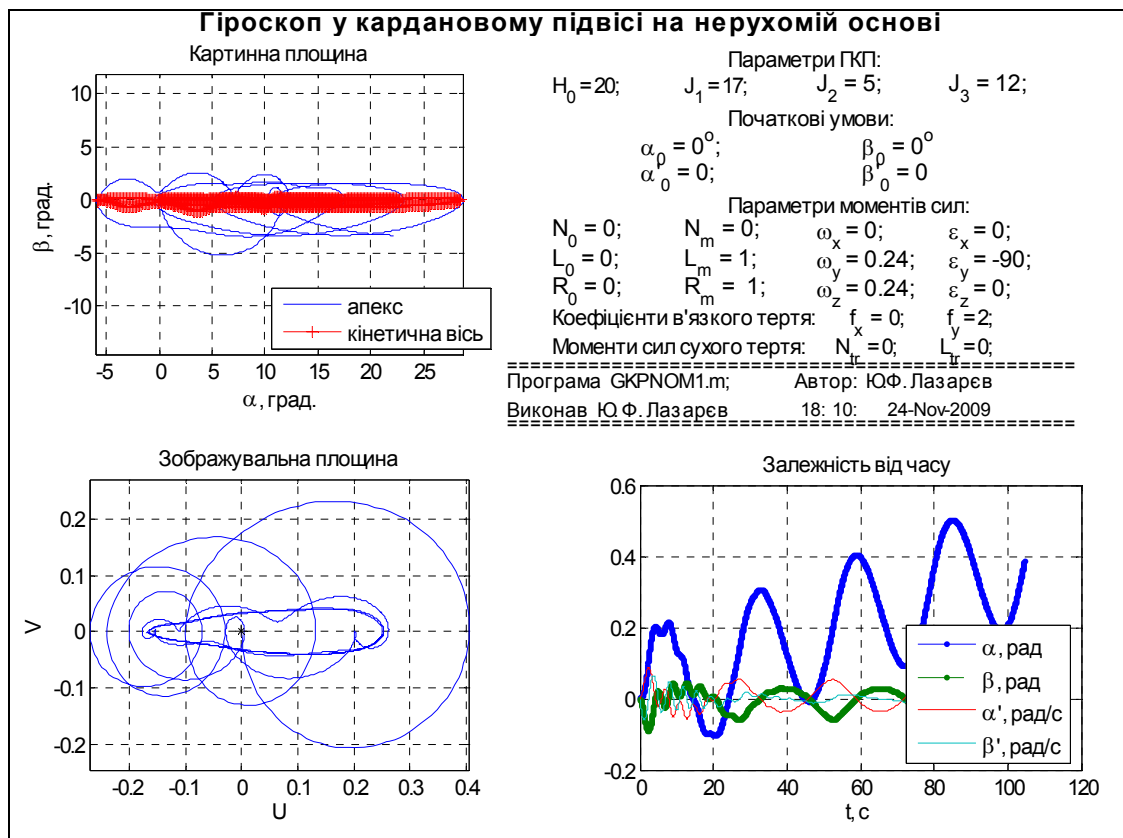


Рис. 9.30. Зсув фаз -90° між моментами при перпендикулярних рамках

Виникає дрейф ГКП навколо зовнішньої осі підвісу. Там же можна бачити й дрейф навколо внутрішньої осі, який не прогнозований теорією. Легко показати, що цей ефект вторинний, він викликаний дрейфом навколо зовнішньої осі, внаслідок чого, за наявності тертя навколо зовнішньої осі буде утворюватися стала складова цього моменту тертя, яка й зумовить систематичний дрейф (вимушену прецесію) навколо внутрішній осі.

Якщо тертя по зовнішній осі немає, то зникає й дрейф навколо внутрішньої осі. Це демонструє рис. 9.27.

На рис. 9.28 – 9.30 показаний результат моделювання руху у разі, коли у початковий момент часу рамки підвісу взаємоперпендикулярні і діють два періодичні моменти сил – уздовж внутрішньої осі і по головній осі гіроскопа. Якщо ці моменти змінюються синфазно, дрейфу ГКП немає, що демонструє рис. 9.28. Якщо коливання моменту по внутрішній осі опереджають за фазою коливання моменту по головній осі на 90° , виникає дрейф одного напрямку (рис. 9.29), а якщо відстають на ту саму величин, дрейф має протилежний напрямок (рис. 9.30).

9.3.3. Дрейф гіроскопа у кардановому підвісі через динамічну незбалансованість ротора

Динамічний дисбаланс – це незбіг головних осей інерції тіла з осями підвісу. Динамічний дисбаланс ротора полягає у тому, що його вісь фігури z не збігається з віссю власного обертання z_1 . У цьому випадку поняття «вісь фігури», «вісь власного обертання», «головна вісь гіроскопа» мають різний зміст. Матеріальну вісь, навколо якої забезпечується швидке обертання ротора відносно внутрішньої рамки, називатимемо головною віссю гіроскопа або віссю власного обертання, а у поняття осі фігури вкладатимемо той самий сенс, що й раніше (п. 1.3.2., Визначення 3).

Припустимо, що вісь фігури Z складає малий кут ε з головною віссю (рис. 9. 30). Рівняння руху ГКП з динамічно незбалансованим ротором складемо, використовуючи формалізм Лагранжа, як і раніше (п. 2.4.1), і зупиняючись лише на тих відмінностях, які обумовлені динамічним дисбалансом.

Як і раніше, кінетична енергія системи визначатиметься як сума кінетичних енергій зовнішньої, внутрішньої рамок і ротора. Кінетичні енергії рамок залишаться тими самими. Кінетичну енергію ротора зручніше виразити через проєкції кінетичного моменту ротора \mathbf{K} на його головні осі інерції, якими є осі XYZ , пов'язані з ним (рис. 9.29):

$$2T = \omega_X K_X + \omega_Y K_Y + \omega_Z K_Z = J\omega_Z^2 + J_e(\omega_X^2 + \omega_Y^2). \quad (9.65)$$

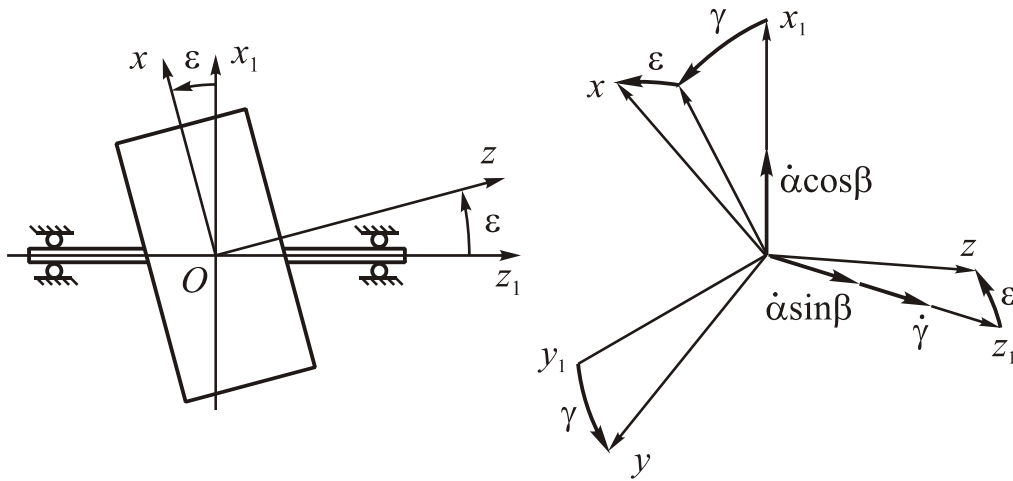


Рис. 9. 31. Динамічний дисбаланс ротора

Відшукаємо проекції кутової швидкості ротора на осі xuz (рис. 9.31):

$$\omega_x = -(\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta) \sin \varepsilon + (\dot{\alpha} \cos \beta \cos \gamma + \dot{\beta} \sin \gamma) \cos \varepsilon ;$$

$$\omega_y = -\dot{\alpha} \cos \beta \sin \gamma + \dot{\beta} \cos \gamma ;$$

$$\omega_z = (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta) \cos \varepsilon + (\dot{\alpha} \cos \beta \cos \gamma + \dot{\beta} \sin \gamma) \sin \varepsilon .$$

Підставляючи у (9.65), одержимо:

$$\begin{aligned} 2T = & (J \cos^2 \varepsilon + J_e \sin^2 \varepsilon)(\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta)^2 + \\ & + (J \sin^2 \varepsilon + J_e \cos^2 \varepsilon)(\dot{\alpha} \cos \beta \cos \gamma + \dot{\beta} \sin \gamma)^2 + \\ & + J_e (\dot{\beta} \cos \gamma - \dot{\alpha} \cos \beta \sin \gamma)^2 + \\ & + 2(J - J_e) \sin \varepsilon \cos \varepsilon (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta)(\dot{\alpha} \cos \beta \cos \gamma + \dot{\beta} \sin \gamma) . \end{aligned}$$

Кінетична енергія динамічно збалансованого ротора дорівнює

$$2T = J(\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta)^2 + J_e(\dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta + \dot{\beta}^2) .$$

Розглянемо той додаток ΔT , який утворюється у кінетичній енергії за рахунок дисбалансу ε за малих його значень. Нехтуючи малими другого і більших порядків мализни відносно ε , дістанемо:

$$\Delta T = (J - J_e) \varepsilon (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta) (\dot{\alpha} \cos \beta \cos \gamma + \dot{\beta} \sin \gamma) . \quad (9.66)$$

Отже, оперуючи додатком (9.66) кінетичної енергії, можна скористатися раніше доведеними рівняннями руху, лише додаючи у праві частини рівнянь інерційні моменти:

$$M_\alpha = -\frac{d}{dt} \frac{\partial \Delta T}{\partial \dot{\alpha}} + \frac{\partial \Delta T}{\partial \alpha} ; \quad M_\beta = -\frac{d}{dt} \frac{\partial \Delta T}{\partial \dot{\beta}} + \frac{\partial \Delta T}{\partial \beta} .$$

З точністю до членів першого порядку мализни ці додаткові моменти можна наближено подати так:

$$M_\alpha \approx \varepsilon (J - J_e) \dot{\gamma}^2 \cos \beta_{cp} \sin \gamma ; \quad M_\beta \approx -\varepsilon (J - J_e) \dot{\gamma}^2 \cos \gamma .$$

Ураховуючи тепер, що у відповідності до третього рівняння $\omega = \dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta_{cp} = \text{const}$, звідки випливає $\dot{\gamma} \approx \omega$; $\gamma \approx \omega t$, можна вважати, що дія динамічного дисбалансу ротора зводиться у першому наближенні до дії на ГКП по осях підвісу двох періодично змінюваних моментів сил:

$$N \approx \varepsilon(J - J_e)\omega^2 \cos\beta_{cp} \sin\omega t; \quad L \approx -\varepsilon(J - J_e)\omega^2 \cos\omega t. \quad (9.67)$$

Розв'язуючи рівняння першого наближення з врахуванням (9.67) і визначаючи сталі складові кутових швидкостей ГКП у другому наближенні, дійдемо формули дрейфу:

$$\langle \dot{\alpha} \rangle = -\varepsilon^2 \omega \frac{J_1(J - J_e)^2 (J_3 + J)^2 \sin\beta_{cp}}{2J(AJ_3 - J^2 \cos^2\beta_{cp})^2}.$$

Для ілюстрації величини дрейфу, спричиненого динамічним дисбалансом ротора, використаємо приклад [3, с. 79]. Розглянемо прилад, який має наступні параметри: $J = 3,3$ сН см c^2 ; $J_e = 2,0$ сН см c^2 ; $J_{1X} = J_{1Y} = 2,2$ сН см c^2 ; $J_{2X} = 8,5$ сН см c^2 ; $J_{1Z} = 2,8$ сН см c^2 . Нехай кутова швидкість власного обертання ротора $\omega = 29100$ обертів у хвилину, тобто 3047 c^{-1} . Задамося значення куту дисбалансу $\varepsilon = 30''$. Такий дисбаланс, як впливає з розв'язків рівнянь першого наближень, приводить до вимушених коливань ГКП з амплітудами: $\alpha_m = 6,6''$; $\beta_m = 14,4''$. У відповідності до (9.107) ці коливання породжують при $\beta_{cp} = 10^\circ$ дрейф гіроскопа навколо зовнішньої осі підвісу з кутовою швидкістю $\langle \dot{\alpha} \rangle = -0,21$ градусів у годину.

Відзначимо особливості дрейфу ГКП внаслідок динамічного дисбалансу ротора:

1) він має такі основні ознаки дрейфу Магнуса:

- та сама залежність від інерційності рамок підвісу;
- та сама залежність від куту між рамками; з зміною знаку кута β_{cp}

змінюється й напрям дрейфу;

2) на відміну від дрейфу Магнуса, він прямо пропорційний кутовій швидкості власного обертання ротору;

3) він суттєво визначається різницею між осьовим і екваторіальним моментами інерції ротора.

9.4. Дія на гіроскоп у кардановому підвісі моментів сил по головній осі

Розглянемо поведження гіроскопа, користуючись прецесійною теорією (див. п. 2.5, (2.46)) з врахуванням моментів сторонніх сил M_{ct} , які діють на ротор по головній осі.

Як відомо, сторонніми називають моменти, що не є моментами сил взаємодії між елементами карданова підвісу. Наприклад, якщо момент R є моментом сил взаємодії внутрішньої рамки з ротором, то сторонній момент M_{ct} не є таким. До нього відносять, головним чином, момент сил опору з боку тієї частини повітря, яка, будучи приведеною у рух ротором, у подальшому не стикається з внутрішньою рамкою. Очевидно, такий момент може існувати лише то-

ді, коли гіромотор є *відкритим* (ротор стикається з зовнішнім середовищем). Якщо гіромотор є закритим, то $M_{ct} = 0$.

У подальшому припускаємо моменти по осях зовнішньої і внутрішньої рамок рівними нулю і врахуємо, що

$$H\dot{\beta} \cos \beta = \frac{d}{dt}(H \sin \beta) - \frac{dH}{dt} \sin \beta.$$

Підставивши це співвідношення у перше рівняння (2.46) і враховуючи третє, одержимо:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(H \sin \beta) = M_{ct} \sin \beta \\ \dot{\alpha} = 0 \\ \frac{dH}{dt} = R + M_{ct} \end{cases} \quad (9.68)$$

Перший висновок, що випливає з розглядання (9.68): *якщо немає моментів по внутрішній і зовнішній осях підвісу, дрейфу ГКП навколо зовнішньої осі спостерігатися не буде.*

9.4.1. Рух гіроскопа у кардановому підвісі з закритим гіромотором

Якщо гіромотор закритий, то сторонній момент навколо головної осі відсутній. У цьому випадку $M_{ct} = 0$. Тому з першого рівняння (9.103) випливає

$$\frac{d}{dt}(H \sin \beta) = 0; \quad \Rightarrow \quad H \sin \beta = H_0 \sin \beta_0. \quad (9.69)$$

Тут H_0 і β_0 – початкові значення кінетичного моменту і кута β .

У відповідності з (9.69) проекція вектора \mathbf{H} на вісь зовнішньої рамки за будь-якого його змінювання залишається незмінною (рис. 9.32).

При розгоні ротора величина H збільшується, при цьому оскільки проекція \mathbf{H} на зовнішню вісь підвісу x_2 залишається незмінною, кут β зменшується за величиною:

$$\sin \beta = \frac{H_0}{H} \sin \beta_0.$$

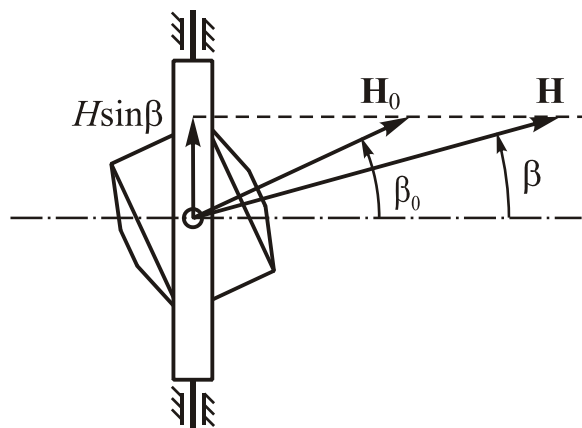


Рис. 9.32. Рух ГКП з закритим гіромотором

При вибігу ротора спостерігається зворотна картина.

Отже висновуємо: *головна вісь ГКП з закритим гіромотором:*

- при розгоні ротора прагне суміститися з перпендикуляром до площини зовнішньої рамки;
- при вибігу ротора прагне суміститися з зовнішньою віссю підвісу;
- при усталеному обертанні ротора залишається нерухомою у просторі.

9.4.2. Розгін ротора асинхронним гіродвигуном

Розглянемо третє рівняння (9.68) – рівняння власного обертання ротора

$$\frac{dH}{dt} = R. \quad (9.70)$$

Момент дії внутрішньої рамки на ротор складається з двох частин – рушійного моменту R_D гіромотора (моменту електромагнітних сил) і моменту R_S сил опору обертанню:

$$R = R_D + R_S.$$

Обидва ці моменти є функціями відносної швидкості $\dot{\gamma}$ обертання ротора і внутрішньої рамки. Момент R_S сил опору обертанню складається з моменту сил тертя у підшипниках ротора і аеродинамічного моменту, пропорційного квадрату відносної швидкості. Моментну характеристику $R_D(\dot{\gamma})$ показано на рис. 9.33. У цілому момент R , що діє на ротор, залежить від $\dot{\gamma}$, як це показано на графіку потовщеною лінією.

Коли рушійний момент зрівноважує момент сил опору, у цілому на ротор не діє момент. Це трапляється за деякого значення $\dot{\gamma}_{уст}$ відносної швидкості. Будь-яке відхилення дійсної швидкості $\dot{\gamma}$ від її усталеного значення $\dot{\gamma}_{уст}$ у той чи інший бік приводить до виникнення моменту, який прагне зменшити різницю $\dot{\gamma} - \dot{\gamma}_{уст}$ за модулем. В результаті в усталеному режимі (завершенні перехідного процесу) кутова швидкість відносного обертання набуває значення $\dot{\gamma}_{уст}$.

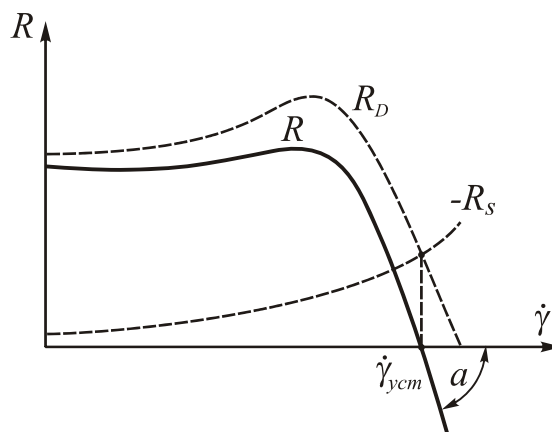


Рис. 9.33. Моментна характеристика асинхронного гіромотора

В околі точки $\dot{\gamma}_{уст}$ сумарну характеристику R можна лінеаризувати:

$$R = R_D + R_S = -a\Delta\dot{\gamma}; \quad (\Delta\dot{\gamma} = \dot{\gamma} - \dot{\gamma}_{уст}).$$

Ураховуючи, що $H \approx J\dot{\gamma}$, тобто $H = H_{уст} + J\Delta\dot{\gamma}$, $\frac{dH}{dt} = J\frac{d\Delta\dot{\gamma}}{dt} = J\Delta\ddot{\gamma}$, проінтегруємо рівняння (9.70) $J\Delta\ddot{\gamma} = -a\Delta\dot{\gamma}$. У результаті одержимо розв'язок

$$H - H_{уст} = (H_0 - H_{уст})e^{-\frac{a}{J}t}. \quad (9.71)$$

До свого усталеного значення від початкового H_0 кінетичний момент наближається за експоненціальним законом.

Підставивши $H(t)$ з (9.71) у (9.69), отримаємо явний вираз закону змінювання куту β у часі.

9.4.3. Рух гіроскопа у кардановому підвісі з відкритим гіромотором

Спочатку розглянемо рух ГКП за усталених обертів ротора.

Вважатимемо гіромотор «повністю відкритим», тобто нехтуватимемо R порівняно з $M_{ст}$. Якщо кутова швидкість власного обертання ротора є постійною величиною, то кінетичний момент гіроскопа також є постійним, тобто $H = H_0 = \text{const}$. Усі моменти по головній осі також будуть незмінними у часі $M_{ст} = M = \text{const}$. З врахуванням зазначеного перетворимо перше рівняння (9.68):

$$H_0 \frac{d(\sin \beta)}{dt} = M \sin \beta,$$

інтегруючи яке, дістанемо

$$\sin \beta = \sin \beta_0 e^{\frac{M}{H_0}t}.$$

Момент сил опору M завжди напрямлений у бік, протилежний кутовій швидкості власного обертання, тому коефіцієнт $k = \frac{M}{H_0}$ завжди від'ємний. Із

цього випливає: **ГКП з відкритим гіромотором при постійному кінетичному моменті прагне сумістити свою головну вісь з перпендикуляром до площини зовнішньої рамки.**

Ця властивість використовують для міжрамкової корекції (гіроагрегат гіроіндукційного компасу).

Визначимо поведження ГКП з відкритим гіромотором за вибігу ротора.

За вибігу гіромотор вимкнений ($R_D = 0$), на ротор діють лише сили опору $R = R_S + M_{ст}$. Рівняння (9.68) у цьому випадку можна подати у виді:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(H \sin \beta) = M_{ст} \sin \beta \\ \frac{dH}{dt} = R \end{cases} \quad (9.72)$$

Будемо вважати, що обидві складові R_S і M_{ct} моменту сил опору R однаково залежать від кутової швидкості власного обертання. Тоді $M_{ct} = mR$, де постійна величина $m \leq 1$ показує, яку частку загального моменту сил опору R становить момент сторонніх сил.

Запишемо тепер (9.72) у формі

$$\begin{cases} \frac{dH}{dt} \sin \beta + H \frac{d(\sin \beta)}{dt} = mR \sin \beta \\ \frac{dH}{dt} = R \end{cases} \quad (9.73)$$

Підставляючи R з другого рівняння (9.73) у перше, отримаємо рівняння

$$H \frac{d(\sin \beta)}{dt} = -(1 - m) \frac{dH}{dt} \sin \beta,$$

проінтегрувавши яке, дійдемо

$$\sin \beta = \sin \beta_0 \left(\frac{H_0}{H} \right)^{1-m}.$$

Якщо гіромотор закритим ($M_{ct} = 0$, $m = 0$), виходить раніше отримана формула (9.69) для закритого гіромотора. Якщо гіромотор повністю відкритий ($m = 1$), то руху з кута β не буде. Тобто *за вибігу ротора головна вісь ГКП з повністю відкритим гіромотором зберігає своє положення незмінним в інерціальному просторі*.

Отже, властивості ГКП з відкритим і закритим гіромотором різко відрізняються.

9.4.4. Фізична причина руху гіроскопа у кардановому підвісі під дією моментів по головній осі

Наявність руху головної осі ГКП під дією моментів, напрямлених по головній осі, є доволі парадоксальним. Річ у тім, що відповідно до закону моментів $\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{M}$ у випадку, коли момент сил \mathbf{M} збігається за напрямком з вектором кінетичного моменту \mathbf{K} , вектор \mathbf{K} змінює лише свою величину, залишаючись незмінним за напрямком у просторі. Саме так веде себе СЗГ.

Але ГКП, як ми впевнилися, може змінювати напрям своєї головної осі під дією моментів, напрямлених лише вздовж неї.

Розв'язок парадоксу полягає у тому, що насправді ГКП перебуває під дією не тільки моментів по осях підвісу, але й під дією моментів реакції в'язів з боку основи, які не входять у рівняння руху ГКП, перш за все – моменту N_{Z2} , направлено вздовж перпендикуляра до площини зовнішньої рамки. Вираз цього моменту (2.42) був отриманий у п. 2.4.2. Залишаючись у рамках наближеної прецесійної моделі поведінки ГКП, цей момент можна подати у спрощеному вигляді:

$$N_{z_2} \approx \frac{R - N \sin \beta}{\cos \beta}.$$

Додамо момент реакції N_{z_2} до діючих на гіроскоп моментів N (уздовж зовнішньої осі підвісу), $N_{y_2} = L$ (уздовж внутрішньої осі) і M_{ct} (уздовж головної осі). Перепроєціюємо ці моменти на осі $x_1 y_1 z_1$, пов'язані з внутрішньою рамкою (рис. 9.34).

В результаті одержимо:

$$M_{x_1} = N \cos \beta - N_{z_2} \sin \beta = \frac{N - R \sin \beta}{\cos \beta}; \quad (9.74)$$

$$M_{z_1} = N \sin \beta + N_{z_2} \cos \beta + M_{ct} = R + M_{cm}. \quad (9.75)$$

Момент M_{z_1} , спрямований вдовж головної осі не може викликати її поворот у просторі. А ось момент M_{x_1} спричиняє прецесію гіроскопа навколо внутрішньої осі підвісу. Якщо $N \equiv 0$, цей момент дорівнює

$$M_{x_1} = -R \operatorname{tg} \beta.$$

Саме він є причиною повороту головної осі у просторі.

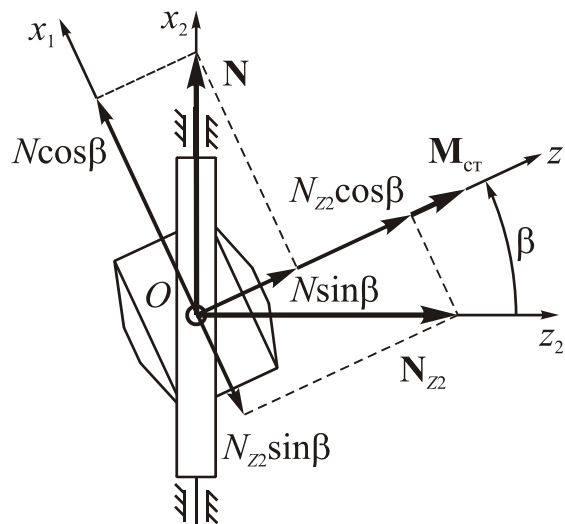


Рис. 9.34. Моменти, що діють на ГКП

Співвідношення (9.74) і (9.75) слід брати до уваги, складаючи прецесійні рівняння руху ГКП, установленого на рухомій основі.

Завдання

Використовуючи програмну модель поведіння гіроскопа у кардановому підвісі на нерухомій основі, наведену у Додатку 5, виконати наступні завдання.

Завдання 9.1. Дослідження вільного руху гіроскопа у кардановому підвісі

1. За вказаною програмною моделлю провести експерименти з вивчення вільного руху ГКП. Для цього установити усі коефіцієнти тертя, сталі складові моментів сил, амплітуди змінювання моментів сил рівними нулю. Варіюючи величиною і напрямком початкового удару, «виміряти» амплітуди і частоти ко-

ливань та кутову швидкість дрейфу гіроскопа. Встановити залежності цих параметрів від величини і напрямку удару. Зіставити отримані висновки з теоретичними. Зробити висновки.

2. Провести аналогічні експерименти, варіюючи а) величиною власного кінетичного моменту; б) величиною початкового кута β_0 від -60 до $+60$ градусів. Зробити висновки.

3. Відповісти на запитання:

- Що називають гіроскопом у кардановому підвісі?
- Що називають «дрейфом Магнуса»? За яких умов він спостерігається?
- Що саме розуміють під рухом ГКП?
- Опишіть вільний рух ГКП. За якими формулами визначається частота вільних коливань, амплітуда цих коливань? Як називають ці коливання?
- Якою формулою описується дрейф Магнуса? Чи підтверджуються ця формула проведеними вами експериментами? Якщо є розбіжності, то у чому ви вбачаєте їх причину?

Завдання 9.2. Дослідження руху гіроскопа у кардановому підвісі за дії постійного моменту сил

1. Провести експерименти з вивчення руху ГКП за дії сталого моменту сил. Для цього встановити сталу складову моменту L_0 рівною одиниці. Решту параметрів моментів сил встановити рівними нулеві. Протягом експериментів фіксувати («вимірювати») амплітуду і частоту коливань, величину і напрямок сталої складової кутової швидкості осі фігури. Варіюючи: а) величиною і напрямком моменту сил, б) величиною початкових кутових швидкостей ГКП, в) величиною власного кінетичного моменту, встановити залежність вимірюваних параметрів від тих, які варіюються. Розрахувати значення початкових швидкостей, за яких нутаційні коливання не виникають. Встановити ці значення і провести експеримент. Зробити висновки за наслідками.

2. Відповісти на запитання:

- Опишіть особливості руху ГКП під дією сталого моменту сил.
- За якими формулами визначаються амплітуда, частота нутаційних коливань, кутова швидкість прецесії?
- Від чого залежать ці параметри руху? Чи підтверджуються ці формули проведеними вами експериментами? Якщо є розбіжності, то у чому ви вбачаєте їхню причину?

Завдання 9.3. Дослідження впливу тертя на рух гіроскопа у кардановому підвісі

1. Провести експерименти з вивчення впливу в'язкого тертя на вільний рух ГКП. Для цього установити коефіцієнти тертя $f_x = f_y = 2$. Решту параметрів моментів сил установити рівними нулю. Вимірювати частоту коливань, величину і напрямок зміщення положення головної осі гіроскопа. Варіювати:

а) коефіцієнтами тертя;

б) кінетичного моменту ГКП

Установити експериментальні залежності між вимірюваними і варійованими величинами. Зіставити їх з отриманими теоретичним шляхом. Зробити висновки.

2. Провести експерименти з вивчення впливу сухого тертя на вільний рух ГКП. Для цього установити моменти сухого тертя $N_{mp} = L_{mp} = 2$. Решту параметрів моментів сил установити рівними нулю. Вимірювати частоту коливань, величину і напрямок зміщення положення головної осі гіроскопа. Варіювати величинами:

а) моментами сил тертя;

б) кінетичного моменту ГКП

установити експериментальні залежності між вимірюваними і варійованими величинами. Зіставити їх з отриманими теоретичним шляхом. Зробити висновки.

3. Провести експерименти з вивчення впливу тертя на рух ГКП під дією сталого моменту сил. Для цього встановити постійний момент $N_0 = 4$, $L_0 = 4$ і повторити експерименти з п.п. 1 і 2. Зіставити ці результати з теоретичними.

4. Відповісти на запитання:

– Опишіть вплив тертя на вільний і вимушений рух ГКП. Чи збігаються теоретичні висновки у цьому випадку з результатами проведених експериментів? Якщо є розбіжності, то у чому ви вбачаєте їхню причину?

– Яку чисельну модель ГКП втілено у програмному забезпеченні цієї лабораторної роботи? Вкажіть, де це зроблено.

Задачі

Задача 9.1. Як зміниться поведінка вільного ГКП на нерухомій основі, якщо у два рази збільшити силу початкового удару і одночасно у два рази зменшити усі моменти інерції гіроскопа?

Задача 9.2. Як зміниться поведінка реального ГКП при ударі (до удару рамки підвісу перпендикулярні), якщо зменшити кутову швидкість власного обертання у два рази (удар – навколо зовнішньої осі підвісу)

Задача 9.3. Як зміниться поведінка ГКП при ударі, якщо збільшити момент інерції зовнішньої рамки у два рази?

Задача 9.4. Як зміниться поведінка ГКП при ударі (до удару рамки підвісу є взаємно перпендикулярними) навколо внутрішньої рамки порівняно з аналогічним ударом навколо зовнішньої осі?

Контрольні запитання

1. Що називають

- гіроскопом у кардановому підвісі?
- зовнішньою віссю підвісу?
- внутрішньою віссю підвісу?

- головною віссю гіроскопа?
 - площиною зовнішньої рамки?
 - власним кінетичним моментом гіроскопа?
2. Що розуміють під
 - моментом сил в'язкого тертя?
 - моментом сил сухого тертя?
 - моментом сторонніх сил?
 3. Який ГКП називають вільним?
 4. Що розуміють під перехресним моментом? однойменним моментом зовнішніх сил?
 5. Наведіть визначення середнього значення змінної величини.
 6. Що називають систематичним дрейфом гіроскопа?
 7. Опишіть рух реального ГКП за дії ударного імпульсу сили.
 8. У чому полягає метод компресії рівнянь?
 9. У чому полягає метод зображувальної точки Ніколаї?
 10. Опишіть вільний рух ГКП.
 11. Охарактеризуйте рух ГКП під дією сил тертя.
 12. Охарактеризуйте рух ГКП під дією постійних моментів сил.
 13. Охарактеризуйте рух за вибігу ротора.
 14. Охарактеризуйте рух за розгону ротора.
 15. Охарактеризуйте рух ГКП за усталених обертів ротора під дією моментів по головній осі.
 16. Опишіть дію на ГКП періодично змінюваних моментів сил по осях підвісу.
 17. Опишіть вплив на ГКП динамічного дисбалансу ротора.
 18. Охарактеризуйте дію на ГКП постійного раптово прикладеного моменту сил.
 19. За яких умов спостерігається дрейф Магнуса?
 20. Який фізичний зміст дрейфу Магнуса?
 21. Яка фізична причина дрейфу ГКП за дії на нього періодичних моментів сил?

Література

[53, с. 388 – 389]; [43]; [25, главы 1, 2];[].

Частина 4. Основи теорії чутливих елементів систем орієнтації

Поняття «чутливий елемент» дуже близьке до поняття «приладу». Єдиною відмінністю є те, що в поняття приладу вкладають зазвичай ще властивість наочної спостережуваності результатів відповідного вимірювання, тобто наявність певних перетворювачів, включаючи шкалу чи реєструвальний пристрій, які дозволяють безпосередньо спостерігати результати вимірювання. Надалі *під чутливим елементом розумітимемо безпосередньо вимірювальний перетворювач*. При цьому питання перетворення вимірної величини у спостережувану залишається без уваги.

На відміну від гіроскопічного пристрою, призначення якого не визначається, а тому поняття його похибок також є невизначеним, гіроскопічний прилад або чутливий елемент має чітко виражене призначення. Для його характеристики вводять нове поняття – похибки, яка характеризує ступінь незбіжності показань приладу з очікуваними через його призначення.

Призначенням чутливих елементів систем орієнтації є вимірювання тих величин, які характеризують поточне кутове положення транспортного засобу, на якому їх встановлено, в інерціальному просторі. Тому основою усіх чутливих елементів систем орієнтації є гіроскопічний пристрій тієї чи іншої конструкції.

Далі розглядаються чутливі елементи побудовані на основі механічного гіроскопу. Саме механічні чутливі елементи дозволяють зручніше за все подати теорію чутливих елементів систем орієнтації, виявити їх загальні особливості і опанувати загальні методи теоретичного дослідження їх поведінки.

На відміну від гіроскопічного пристрою, гіроскопічний чутливий елемент має певне призначення – вимірювати певну фізичну величину, або зберігати положення головної осі незмінним у просторі. Якщо вихідна величина (як це зазвичай і відбувається на практиці) не збігається з вимірюваною, або головна вісь відхиляється від потрібного напрямку, то таке відхилення називають похибкою чутливого елемента. Теорія чутливого елемента – це теорія вивчення його можливих похибок в умовах, наближених до умов експлуатації приладу чи системи орієнтації. Детальне дослідження джерел і властивостей похибок окремих чутливих елементів є завданням спеціальних навчальних дисциплін. Надалі розглядатимуться лише ті чутливі елементи і лише ті особливості їх поведінки, які найбільш значущі і найбільш цікаві у теоретичному сенсі, бо потребують спеціального підходу і специфічних методів дослідження.

Похибки чутливих елементів здебільшого спричиняються моментами зовнішніх сил, які діють на чутливий елемент, а ті, у свою чергу, – рухом транспортного засобу, на якому встановлено чутливий елемент, його поворотами, прискореннями, вібраціями місця встановлення чутливого елемента тощо. Тому побудова теорії передусім потребує вивчення і побудови математичних моде-

лей тих моментів сил, які можуть діяти на чутливий елемент за різних рухів основи.

Варто мати на увазі, що при навігації по поверхні Землі призначенням приладів і систем орієнтації є визначення кутового положення основи не в інерціальному просторі, а відносно саме поверхні Землі, що зумовлює певні обмеження на чутливі елементи і спричиняє додаткові похибки, обумовлені як обертанням Землі, так і переміщенням основи по поверхні Землі. Усі ці питання потребують ретельного вивчення під час теоретичного дослідження чутливих елементів.

Розділ 10. Математичні моделі моментів сил при русі основи

10.1. Момент пружного дисбалансу. Принцип рівної жорсткості

Моментом пружного дисбалансу називають момент сил інерції, який діє на гіроскоп під час руху точки підвісу гіроскопа з прискоренням і який виникає внаслідок пружних деформацій в'язей між елементами карданового підвісу, що супроводжують дію цих сил.

Дисбаланс (статичний) – це зміщення центра мас системи відносно точки підвісу. Причини дисбалансу можуть бути різними. Наприклад, залишковий дисбаланс, зумовлений неминучими похибками статичного балансування приладу, дисбаланс, спричинений наявністю люфтів у з'єднаннях та у в'язях між елементами карданового підвісу.

Пружним називають дисбаланс, який обумовлений пружними деформаціями у в'язях (рис. 10.1). Такі пружні деформації, у свою чергу, можуть виникати за дії гравітаційних сил і руху основи з прискоренням.

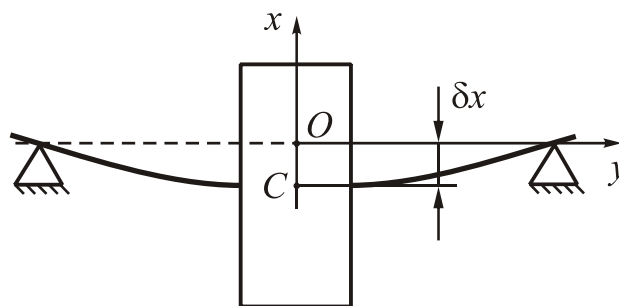


Рис. 10.1. Пружна деформація осі вала

Розглянемо систему, зображену на рис. 10.2.

Система складається з основи, яка рухається періодично з прискоренням уздовж лінії вібрації, нахилений до осей X і Z під кутом 45° , і деякої маси в її середині, яка з'єднана з основою пружинами по осях X і Z . Жорсткості c_x і c_z припускаємо різними, наприклад, $c_x > c_z$. Тоді протягом одного півперіоду

руху основи з прискоренням (униз наліво) сила інерції напрямлена вгору направо зміщує масу теж уверх праворуч відносно основи. При цьому зміщення вдовж осі Z буде більшим від зміщення вдовж осі X (якщо $c_X > c_Z$), і сила інерції \mathbf{F}^{ih} (яка напрямлена уверх) утворює момент проти годинникової стрілки відносно осі Y , перпендикулярній до площини XZ , яка проходить через точку O (підвісу).

Протягом другого півперіоду, коли основа рухається уверх і вправо, а сила інерції напрямлена вниз, картина змінюється на протилежну. Зміщення маси відносно основи вниз визначає момент M_Y сили інерції, який має такий самий напрямок, що й у перший півперіод. Отже, виходить, що протягом усього періоду руху основи момент пружного дисбалансу спрямований в один бік, тобто має постійну складову.

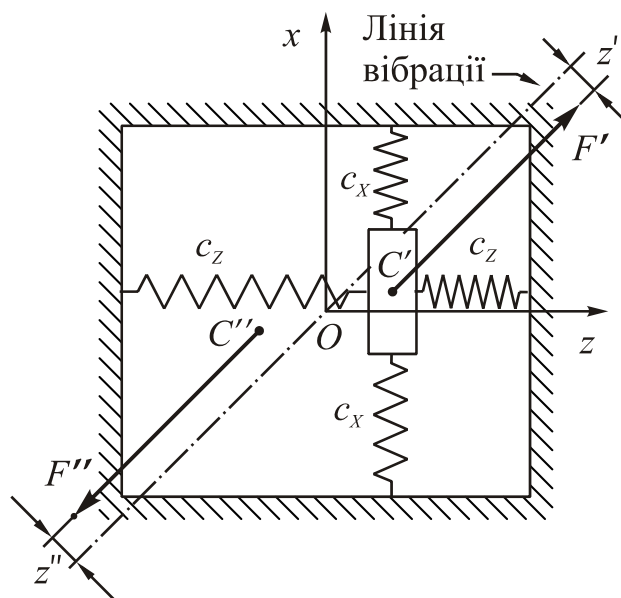


Рис. 10.2. Схема виникнення моменту пружного дисбалансу

Розглянемо більш детально математичну модель виникнення постійної складової моменту пружного дисбалансу.

Момент пружного дисбалансу визначається з відомої формули моменту сили:

$$\mathbf{M}_{nd} = \mathbf{p} \times \mathbf{F}^{ih} = -\mathbf{p} \times \mathbf{F}^R, \quad (10.1)$$

де \mathbf{p} – радіус-вектор пружного зміщення центра мас відносно точки підвісу O ; \mathbf{F}^{ih} – сила інерції, яка прикладена у центрі мас, \mathbf{F}^R – рівна і протилежна їй сила пружної реакції. Проекція моменту (10.1) на вісь Y має вигляд:

$$M_{ndY} = zF_X^{ih} - xF_Z^{ih} = xF_Z^R - zF_X^R, \quad (10.2)$$

де x і z – зміщення вдовж осей X і Z .

Сили пружної реакції визначимо у такий спосіб:

$$F_X^R = -c_X x - f_X \dot{x}; \quad F_Z^R = -c_Z z - f_Z \dot{z}. \quad (10.3)$$

Тут до власне пружних сил додано ще й завжди існуючі сили демпфірування, що виникають при деформації реальних пружно-демпфірувальних елементів.

Підставимо вирази (10.3) у формулу (10.2):

$$M_{п.дY} = -xz(c_Z - c_X) - f_Z \dot{z}x + f_X \dot{x}z, \quad (10.4)$$

Нехай, наприклад, пружні зміщення x і z змінюються за законом:

$$x = x_m \sin \omega t; \quad z = z_m \sin(\omega t + \varepsilon). \quad (10.5)$$

де x_m , z_m – амплітуди, ω – частота коливань, ε – зсув фаз між коливаннями по цих двох напрямках.

Ураховуючи це у виразі моменту, подамо співвідношення (10.4) у вигляді

$$M_{п.дY} = \frac{c_X - c_Z}{2} x_m z_m [\cos \varepsilon - \cos(2\omega t + \varepsilon)] + \\ + \frac{f_X + f_Z}{2} x_m z_m \omega \sin \varepsilon + \frac{f_X - f_Z}{2} x_m z_m \omega \sin(2\omega t + \varepsilon).$$

Як бачимо, момент пружного дисбалансу змінюється з подвійною частотою вібрації основи і має сталу складову (середнє значення за період коливань):

$$\langle M_{п.д} \rangle = \frac{x_m z_m}{2} [(c_X - c_Z) \cos \varepsilon + (f_X + f_Z) \omega \sin \varepsilon]. \quad (10.6)$$

Ця стала складова моменту сил може спричинити значні дрейфи гіроскопа у кардановому підвісі, а отже, й відповідні похибки приладу, основою якого він є.

Зазвичай в літературі розглядається окремий випадок коливань (10.5), коли зсуву коливань між деформаціями з різних напрямків немає ($\varepsilon = 0$). У цьому випадку стала складова (10.6) моменту пружного дисбалансу набуває вигляду:

$$\langle M_{п.д} \rangle = \frac{x_m z_m}{2} (c_X - c_Z).$$

Для зменшення величини моменту пружного дисбалансу потрібно забезпечувати якомога точніше рівність жорсткостей пружних в'язей з різних напрямків. Це твердження називають *принципом рівної жорсткості*.

Видавалося, що з цього твердження можна зробити висновок, що потрібно прагнути досягати ізотропії (однаковості в усіх напрямках) пружних властивостей системи. Але це не так. Більш уважне вивчення виразу (10.6) приводить до висновку, щодо неможливості повністю позбутися моменту пружного дисбалансу (точніше, його сталої складової) за будь-яких вібрацій основи (з довільним зсувом фаз між коливаннями по різних напрямках) через неминуче існування демпфірування при деформуванні. Найбільше впливає демпфірування за *колової вібрації*, коли центр мас описує коло навколо точки підвісу. Тоді $\varepsilon = \pi/2$ і з (10.6) випливає

$$\langle M_{п.д} \rangle = \frac{x_m z_m}{2} (f_X + f_Z) \omega.$$

Оскільки зсув фаз між коливаннями з різних напрямків є величиною неконтрольованою на практиці і може бути довільним, то проектуючи прилади, слід розраховувати і на такий випадок. Це приводить до таких висновків:

1) різницю між жорсткостями у взаємно перпендикулярних напрямках слід зменшувати не більше, ніж до величини:

$$|c_X - c_Z|_{\min} = (f_X + f_Z)\omega;$$

2) прагнути ізотропії пружно-демпфівальних властивостей в'язей між елементами карданового підвісу не має сенсу.

Припустимо як приклад: $c_X = 1 \cdot 10^7 \text{ Н м}^{-1}$, $c_Z = 1 \cdot 10^6 \text{ Н м}^{-1}$, основа здійснює вібрації з амплітудою прискорення $w = 5g$ під кутом 45° до осей X і Z . Маса рухомої частини $m = 1 \text{ кг}$. Амплітуди сил інерції по осях X і Z будуть однакові: $F_{Xm} = F_{Zm} \approx 35,36 \text{ Н}$. Якщо частота вібрації набагато менша за частоту власних коливань системи по вказаних осях, то амплітуди переміщень можна наближено оцінити так:

$$x_m \approx \frac{F_{Xm}}{c_X} \approx 3,54 \cdot 10^{-4} \text{ см}; \quad z_m \approx \frac{F_{Zm}}{c_Z} \approx 3,54 \cdot 10^{-3} \text{ см}.$$

Сталу складову моменту пружного дисбалансу у цьому випадку зручніше визначити із співвідношення, яке впливає з (10.6) при $\varepsilon = 0$:

$$\langle M_{\text{пд}} \rangle = \frac{(c_X x_m) z_m}{2} \frac{c_X - c_Z}{c_X} \approx \frac{F_m^2}{2c_Z} = 6,25 \cdot 10^{-4} \text{ Н м}.$$

Якщо такий момент діє на гіроскоп з кінетичним моментом $H = 0,4 \text{ Н м}$, то він зумовить прецесію з кутовою швидкістю більше за 300 градусів за годину, що є не припустимим для гіроскопічних приладів навіть низької точності.

10.2. Момент сил сухого тертя

Відомо, що сили сухого (кулонового) тертя є пропорційними до сили нормального тиску між тертьовими поверхнями. Тому моменти сил сухого тертя у підшипниках зовнішньої і внутрішньої осей карданового підвісу пропорційні величині сили підтискання один до одного зовнішнього і внутрішнього кілець кожного з підшипників цих двох осей. Якщо вимірювальна вісь (вісь чутливості гіроскопа, вісь підвісу) складає кут ε з напрямком ξ гравітаційної вертикалі (рис. 10.3), то момент сил сухого тертя в опорах цієї осі можна подати у вигляді:

$$\begin{aligned} M_{\text{тр}} &= -\{k_{1R}|F_{1R}| + k_{1R}|F_{1R}| + k_A|F_A|\} \text{sign } \dot{\alpha} = \\ &= -\{k_R|R| + k_A|A|\} \text{sign } \dot{\alpha} = -\{k_R|mg \sin \varepsilon| + k_A|mg \cos \varepsilon|\} \text{sign } \dot{\alpha}, \end{aligned} \quad (10.7)$$

де R – радіальна складова сили тяжіння; A – осьова складова; F_{1R} і F_{2R} – радіальні складові сили підтискання кілець першого і другого підшипників відповідно; F_A – осьова сила підтискання кілець підшипників; k_R і k_A – коефіцієнти пропорційності тертя відповідно до радіального і осьового навантажень.

У загальному випадку сили взаємного підтискання можуть бути зумовлені, окрім гравітаційних сил, силами інерції, що виникають при русі з приско-

ренням, попереднім натягом підшипників при складанні приладу, моментами сил, що діють на гіроскоп.

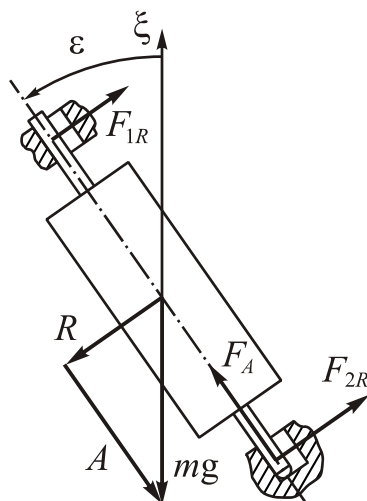


Рис. 10.3. Схема утворення сил підтискання підшипників

Розглянемо картину виникнення радіальних сил підтискання кілець підшипників осей підвісу ГКП (рис. 10.4).

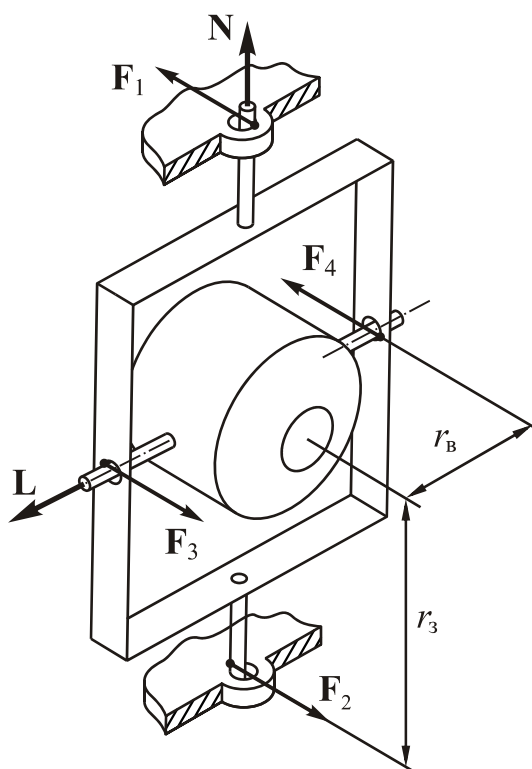


Рис. 10.4. Схема сил підтискання підшипників у невагомості

Якщо на гіроскоп діє момент L уздовж внутрішньої осі підвісу, то на зовнішню рамку діє протилежний йому момент $(-L)$, який зумовлює радіальне підтискання кілець підшипників на зовнішній осі підвісу з силами F_1 і F_2 , показаними на рис. 10.4 і рівними

$$|F_1| = |F_2| = \frac{|L|}{2r_3}. \quad (10.8)$$

Момент N уздовж зовнішньої осі підвісу передається через підшипники на внутрішній осі, в яких при цьому також виникають радіальні сили підтискання F_3 і F_4 (рис. 10.4):

$$|F_3| = |F_4| = \frac{|N|}{2r_B}. \quad (10.9)$$

Така ситуація спостерігається у тому випадку, коли, окрім зазначених моментів сил, немає іншої причини взаємного підтискання кілець підшипників, зокрема, якщо ГКП перебуває у стані невагомості і основа рухається без прискорень.

За дії ж інших моментів, наприклад, у полі гравітації обидві картини, зображені на рис. 10.3 і 10.4, слід сумістити. Величини радіальних сил тепер мають визначатися як *векторна* сума окремих складових для кожного підшипника. З огляду на мализну значень збурювальних моментів сил, що діють на гіроскоп, зазвичай сили підтискання підшипників, зумовлені їх дією (див. (10.8) і (10.9)), набагато менші від аналогічних сил, зумовлених силою тяжіння (10.7).

Наприклад, для гіроскопа масою 1 кг максимальна сила підтискання підшипників коливається від 5 Н (рівномірне навантаження на обидва підшипники) до 10 Н (навантаження на один підшипник). Якщо на гіроскоп діє момент 0,01 Н м (надзвичайно великий для гіроприладу), то на плечі $r_B = r_3 = 5$ см він зумовить підтискання кілець підшипників з силою усього 0,1 Н. Тому вплив збурювальних моментів на момент сил сухого тертя слід враховувати лише при аналізі роботи гіроприладу в невагомості.

Припустимо, що гіроскоп перебуває у невагомості під дією значних за величиною (набагато більших за моменти сил сухого тертя) і повільно змінюваних моментів по осях карданового підвісу. За таких умов можна скористатися прецесійними рівняннями руху ГКП:

$$\begin{cases} H_0 \dot{\beta} \cos \beta = N + M_{\text{тр.з}} \\ -H_0 \dot{\alpha} \cos \beta = L + M_{\text{тр.в}} \end{cases}. \quad (10.10)$$

Врахуємо, що за умовою $M_{\text{тр.з}} \ll N$, $M_{\text{тр.в}} \ll L$. Тому рівняння (10.10) наближено можна подати так:

$$\begin{cases} H_0 \dot{\beta} \cos \beta = N \\ -H_0 \dot{\alpha} \cos \beta = L \end{cases}. \quad (10.11)$$

Підставивши значення моментів N і L з рівнянь (10.11) у вирази (10.8) і (10.9) і взявши до уваги, що в розглядуваному випадку моменти сил сухого тертя визначаються так:

$$M_{\text{тр.з}} = -k_{R_3} |F_1| \text{sign} \dot{\alpha}; \quad M_{\text{тр.в}} = -k_{R_B} |F_3| \text{sign} \dot{\beta},$$

отримаємо

$$M_{\text{тр.з}} = -k_{R_3} \left| \frac{L}{2r_3} \right| \text{sign } \dot{\alpha} = -k_{R_3} \left| \frac{-H_0 \dot{\alpha} \cos \beta}{2r_3} \right| \text{sign } \dot{\alpha} = -\frac{k_{R_3} |H_0| \cos \beta}{2r_3} \dot{\alpha}.$$

$$M_{\text{тр.в}} = -k_{R_B} \left| \frac{N}{2r_B} \right| \text{sign } \dot{\beta} = -k_{R_B} \left| \frac{H_0 \dot{\beta} \cos \beta}{2r_B} \right| \text{sign } \dot{\beta} = -\frac{k_{R_B} |H_0| \cos \beta}{2r_B} \dot{\beta}.$$

Останні вирази свідчать про те, що *в описаних умовах моменти сил сухого тертя по осях підвісу є еквівалентними моментам сил в'язкого тертя*:

$$M_{\text{тр.з}} = -f_2 \dot{\alpha}; \quad M_{\text{тр.в}} = -f_1 \dot{\beta}$$

з коефіцієнтами тертя, які залежать від параметрів гіроскопа

$$f_2 = \frac{k_3 |H_0| \cos \beta}{2r_3}; \quad f_1 = \frac{k_B |H_0| \cos \beta}{2r_B}.$$

Якщо у випадку в'язкого тертя коефіцієнти тертя є постійними величинами, то у випадку дії сил сухого тертя відповідні коефіцієнти є пропорційними до величини кінетичного моменту гіроскопа.

Як приклад обчислимо коефіцієнт тертя для типового шарикопідшипника гіроприладу, у якого радіальне навантаження в 10 Н викликає момент тертя в $1 \cdot 10^{-4}$ Н м. Коефіцієнт k_R у цьому випадку дорівнює $k_R = 1 \cdot 10^{-4} / 10 = 10^{-5}$ м. Нехай кінетичний момент гіроскопа дорівнює $H = 1$ Н м с, а відстань між підшипниками – $2r_3 = 0,1$ м. Тоді еквівалентний коефіцієнт в'язкого тертя дорівнюватиме $f = 10^{-5} \frac{1}{0,1} = 1 \cdot 10^{-4}$ Н м с.

Розглянемо вплив поступальної вібрації основи на величину моменту сил сухого тертя.

Схему пристрою, рух якого вивчається, показано на рис. 10.5.

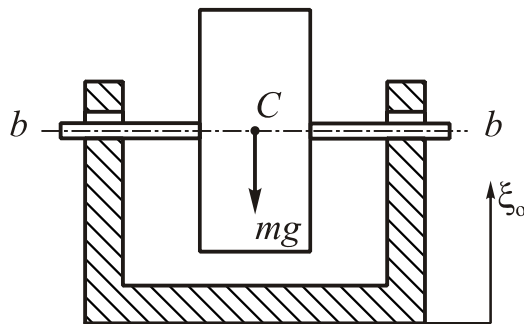


Рис. 10.5. Схема розміщення вимірювального пристрою

Вважатимемо, що напрямок кутової швидкості повороту рухомої частини пристрою навколо вимірювальної осі bb (тобто тієї осі, уздовж який діє шуканий момент сил сухого тертя) залишається увесь час незмінним, тобто

$$M_{tr} = -k|F|. \quad (10.12)$$

Нехай основа вібрує у вертикальному напрямку за законом:

$$\ddot{\xi}_0 = gn_m \sin \omega t,$$

де $\ddot{\xi}_0$ – віброприскорення основи; g – прискорення сили тяжіння; n_m – амплітуда віброперевантаження основи; ω – частота вібрації основи.

У цих умовах сила радіальної реакції у підшипниках вимірювальної осі b визначатиметься сумою сили тяжіння mg рухомої частини і сили інерції $F^{ih} = -m\ddot{\xi}_0$:

$$F = P + F^{ih} = -mg - m\ddot{\xi}_0 = -mg(1 + n_m \sin \omega t).$$

Оскільки поза дією вібрації момент сил тертя визначається формулою

$$M_{tr\ st} = -kmg, \quad (10.13)$$

зручніше перейти до вивчення відношення моменту тертя (10.12) за вібрації до моменту (10.13) без вібрації:

$$\frac{M_{tr}}{M_{tr\ st}} = |1 + n_m \sin \omega t|. \quad (10.14)$$

Якщо амплітуда віброперевантаження основи менша за одиницю, то вираз $1 + n_m \sin \omega t$ залишається протягом часу вібрації додатним, а тому середнє значення за період вібрації моменту сил тертя дорівнює його значенню без вібрації

$$\left\langle \frac{M_{tr}}{M_{tr\ st}} \right\rangle = 1; \quad (n_m < 1).$$

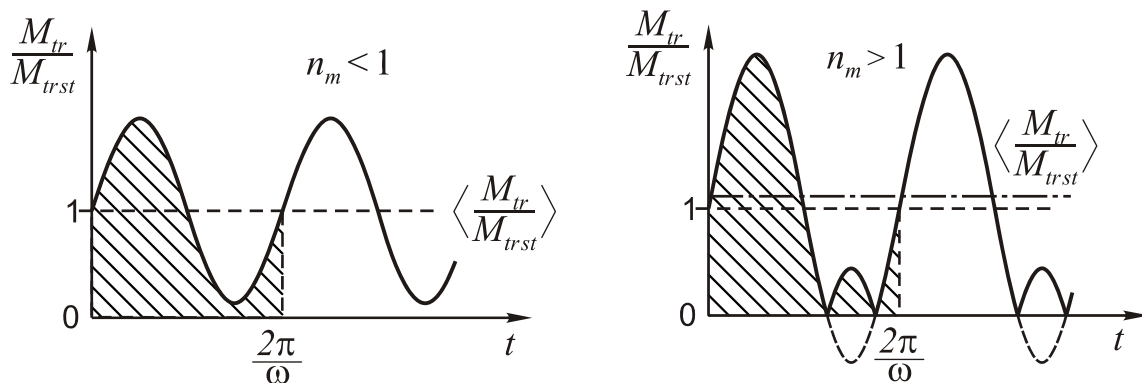


Рис. 10.6. Графіки змінювання з часом модуля моменту сил тертя

Нехай тепер $n_m > 1$. У цьому випадку, як видно з рис. 10.6, середнє значення моменту тертя починає перевищувати «статичний» момент тертя.

Проінтегрувавши функцію (10.17) у межах одного періоду вібрації, дістанемо:

$$\left\langle \frac{M_{tr}}{M_{tr\ st}} \right\rangle = \frac{2}{\pi} \left(\sqrt{n_m^2 - 1} + \arcsin \frac{1}{n_m} \right); \quad (n_m > 1).$$

У цілому графік залежності середнього значення моменту сил сухого тертя від амплітуди віброперевантаження подано на рис. 10.7.

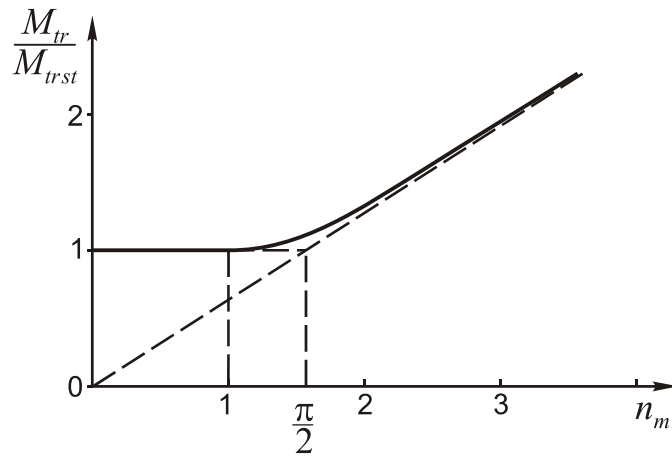


Рис. 10.7. Залежність середнього значення моменту сил сухого тертя від амплітуди віброперевантаження

Отже, у разі вібрації малої інтенсивності середнє значення моменту тертя не змінюється, а за вібрації, амплітуда віброприскорення якої перевищує прискорення сили тяжіння, воно пропорційне амплітуді віброперевантаження:

$$\left\langle \frac{M_{tr}}{M_{trst}} \right\rangle = \frac{2}{\pi} n_m; \quad (n_m > 1).$$

Однак, вібрація основи може не тільки збільшувати, а й зменшувати середнє значення моменту тертя. У ряді праць [35, 36] показано, що опір тертя у деякому напрямку може бути значно зменшений, якщо тіло рухатиметься у перпендикулярному напрямку. Дійсно, сила F_{tr} сухого тертя не залежить від величини швидкості V_{Σ} відносної швидкості взаємного переміщення тертьових поверхонь, але завжди напрямлена у бік, протилежний вектору цієї швидкості. У випадку, коли (рис. 10.8) тіло, що рухається по площині, має складову V швидкості, перпендикулярну до осі x , удовж якої напрямлена шукана сила опору, вектор сумарної швидкості V_{Σ} складає кут α (рис. 10.8) з напрямком осі x ($\operatorname{tg} \alpha = \frac{V}{U}$, де U – складова швидкості взовж осі x).

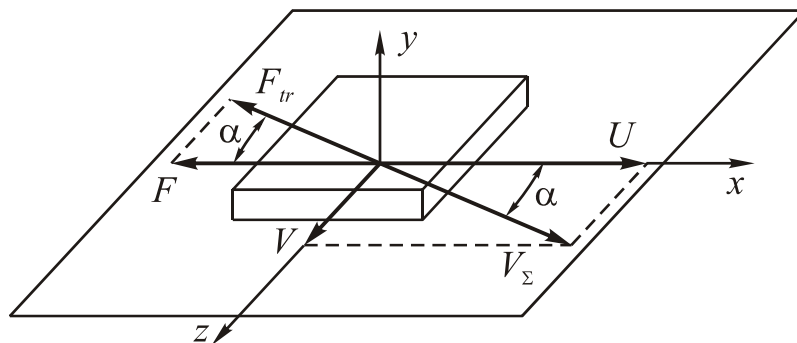


Рис. 10.8. Схема дії сили тертя при переміщенні тіла по площині

Сила F опору переміщенню тіла вздовж осі x (рис. 10.8) визначається у цьому разі співвідношенням:

$$F = F_{tr} \cos \alpha = F_{tr} \frac{U}{\sqrt{U^2 + V^2}},$$

або

$$\frac{F}{F_{tr}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{V}{U}\right)^2}}.$$

Припустимо наразі, що швидкість V змінюється за гармонічним законом, а складова U є постійною:

$$V = V_m \cos \vartheta; \quad (\vartheta = \omega t + \varepsilon); \quad U = \text{const}.$$

Позначивши $k = \frac{V_m}{U}$, знаходимо середнє значення сили опору в напрямку осі x за період коливання швидкості:

$$\left\langle \frac{F}{F_{tr}} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 + k^2 \cos^2 \vartheta}} = \frac{2}{\pi \sqrt{1 + k^2}} K\left(\frac{k^2}{1 + k^2}\right), \quad (10.15)$$

де $K(s) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2 \varphi}}$ – повний еліптичний інтеграл першого роду.

Залежність (10.15) графічно зображено на рис. 10.9.

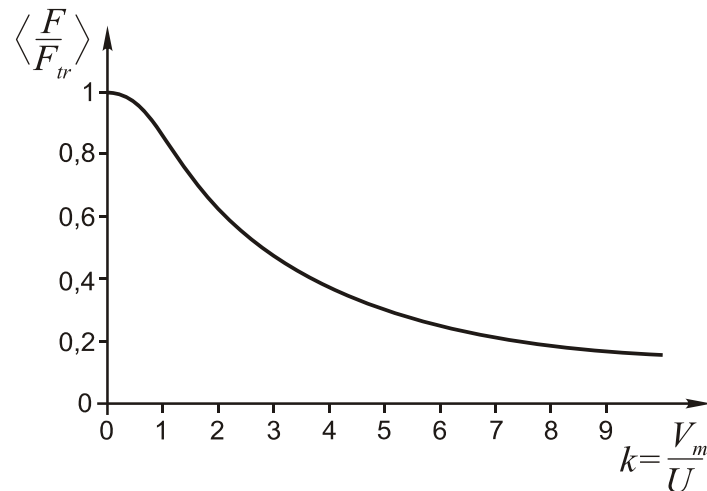


Рис. 10.9. Залежність сили опору від амплітуди перпендикулярної швидкості

Для інженерних цілей зручнішою є формула

$$\left\langle \frac{F}{F_{tr}} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,406k^2}}, \quad (10.16)$$

яка одержана Е. Б. Левенталем [36]. Він виходив з неточного припущення, що

$$\left\langle \frac{F}{F_r} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\langle |V| \rangle}{U} \right)^2}}. \text{ Оскільки середнє значення модуля синусоїдально зміню-}$$

ваної величини дорівнює

$$\langle |V| \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_m |\cos \vartheta| d\vartheta = \frac{2}{\pi} V_m \int_0^{\pi/2} \cos \vartheta \cdot d\vartheta = \frac{2}{\pi} V_m \approx 0,637V_m,$$

виходить формула (10.16).

Зіставлення наближеної формули (10.16) з точною (10.15) показує, що різниця сягає лише одиниць відсотків шуканого середнього значення. Тому для практичних розрахунків доцільно використовувати формулу (10.16).

Зазначена можливість зменшення еквівалентного тертя іноді використовувалася на практиці. Для цього одне з кілець шарикопідшипника штучно змушували здійснювати інтенсивні коливання вдовж осі обертання цього підшипника.

Література

[47, с. 47 – 65]; [36]; [35]; [26].

Розділ 11. Чутливі елементи на основі двоступеневого гіроскопа

Двоступеневим називають гіроскоп, який має лише два ступеня вільності повороту відносно основи, на якій він установлений. Окрім ступеня вільності, що забезпечує власне обертання ротора навколо головної осі гіроскопа, такий гіроскоп має можливість обертатися навколо осі, яку будемо називати *вимірною*, оскільки поворот гіроскопа відносно основи може бути безпосередньо вимірний тільки навколо цієї осі (рис. 11.1)

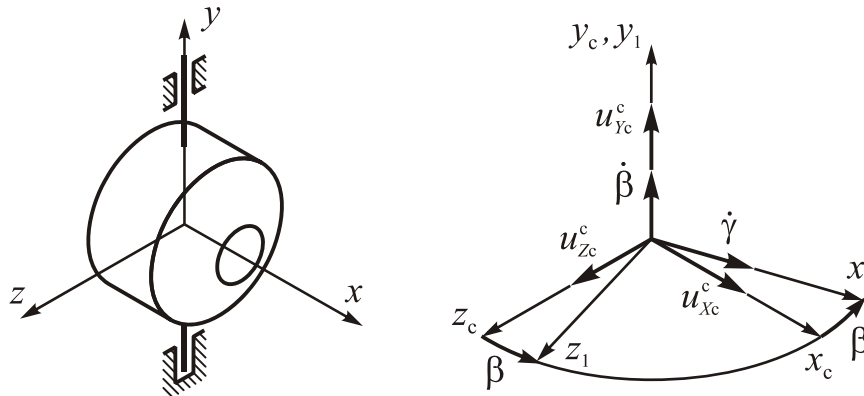


Рис. 11.1. Кінематика двоступеневого гіроскопа

Складаючи математичні моделі чутливих елементів, побудованих на основі двоступеневих гіроскопів, необхідно враховувати наступне.

Двоступеневий гіроскоп не підпадає під загальне визначення гіроскопа, оскільки він не забезпечує повної вільності повороту в просторі осі власного обертання ротора. Тому йому не властива жодна з описаних раніше властивостей гіроскопа. Зокрема, він не здійснює нутаційних коливань після удару, не прецесує під дією зовнішнього моменту, змінює свою орієнтацію в просторі при обертанні основи і т. ін.

Для теоретичного дослідження поведінки двоступеневого гіроскопа не можна користуватися прецесійними (скороченими) рівняннями його руху, а необхідно орієнтуватися на використання повних рівнянь.

Властивості двоступеневого гіроскопа значно відрізняються від властивостей звичайного (треступеневого) гіроскопа й настільки своєрідні, що це дозволило створити на його основі цілий клас гіроскопічних приладів зі специфічними функціями, що набули широкого застосування на практиці.

11.1. Головна властивість двоступеневого гіроскопа

Більшість застосувань двоступеневого гіроскопа є прямим наслідком його основної властивості. Тому грамотне проектування чутливих елементів на основі двоступеневого гіроскопа можливе лише на основі чіткого з'ясування її фізичного змісту. Основна властивість двоступеневого гіроскопа є такою: *головна вісь двоступеневого гіроскопа прагне встановитися паралельно осі проекції аб-*

солотної кутової швидкості основи на площину, перпендикулярну вимірвальній осі. Доведемо це.

Рівняння руху (2.66) двоступеневого гіроскопа запишемо у вигляді

$$J_1(\ddot{\beta} + \dot{u}_{y_c}^c) + (H - J_2 u_{x_1}^c) u_{z_1}^c = M_{y_1}; \quad (11.1)$$

$$\frac{dH}{dt} = M_{x_1}.$$

Тут позначено: $J_1 = J_e + J_{1Y}$; $J_2 = J_e + J_{1Z} - J_{1Z}$ – моменти інерції (див. п. 2.6); $H = J(\dot{\gamma} + u_{x_1}^c)$ – власний кінетичний момент гіроскопа;

$$u_{x_1}^c = u_{x_c}^c \cos \beta - u_{z_c}^c \sin \beta; \quad u_{z_1}^c = u_{z_c}^c \cos \beta + u_{x_c}^c \sin \beta \quad (11.2)$$

– проекції кутової швидкості основи на головну вісь гіроскопа і на вісь, перпендикулярну як до головної, так і до вимірвальної осі.

Для нашої мети зручніше використовувати дещо іншу форму рівнянь.

Нехай \mathbf{u}^c – вектор абсолютної кутової швидкості обертання основи (або системи $x_c y_c z_c$, жорстко з нею зв'язаної, рис. 11.2) – становить із площиною $x_c z_c$, перпендикулярною до вимірвальної осі y_c , кут ε , а його проекція \mathbf{u}_2 на площину $x_c z_c$ – кут β_u з віссю x_c .

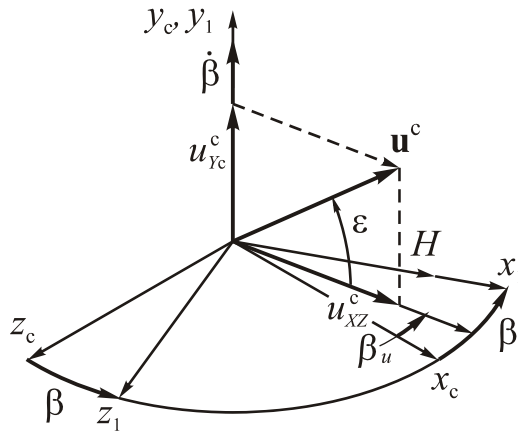


Рис. 11.2. Кінематика двоступеневого гіроскопа на обертальній основі

Тоді матимемо:

$$u_{x_c}^c = u^c \cos \varepsilon \cos \beta_u; \quad u_{y_c}^c = u^c \sin \varepsilon; \quad u_{z_c}^c = -u^c \cos \varepsilon \sin \beta_u. \quad (11.3)$$

З врахуванням цього проекції (11.2) можна подати так

$$u_{x_1}^c = u^c \cos \varepsilon \cos(\beta - \beta_u); \quad u_{z_1}^c = u^c \cos \varepsilon \sin(\beta - \beta_u); \quad u_{y_1}^c = u^c \sin \varepsilon. \quad (11.4)$$

Надалі власний кінетичний момент гіроскопа вважатимемо завжди незмінним у часі ($H = H_0 = \text{const}$). Єдине рівняння (11.1) запишемо у вигляді:

$$J_1(\ddot{\beta} + \dot{u}_{y_c}^c) + [H_0 - J_2 u^c \cos \varepsilon \cos(\beta - \beta_u)] u^c \cos \varepsilon \sin(\beta - \beta_u) = M_{y_1}. \quad (11.5)$$

Для виявлення властивостей двоступеневого гіроскопа припустимо такі «ідеальні» умови його функціонування: збурювальних моментів сил немає, а основа обертається у просторі з постійною кутовою швидкістю

$$M_{y_1} = 0; \quad u^c = \text{const}; \quad \varepsilon = \text{const}.$$

За цих умов рівнянню (11.5) можна надати вигляду:

$$J_1 \ddot{\beta} + [H_0 - J_2 u^c \cos \varepsilon \cos(\beta - \beta_u)] u^c \cos \varepsilon \sin(\beta - \beta_u) = 0. \quad (11.6)$$

Проаналізуємо отримане рівняння. Насамперед знайдемо положення рівноваги головної осі гіроскопа відносно об'єкта, тобто з'ясуємо, чи існує таке положення гіроскопа відносно об'єкта (кут β^*), що, будучи в цьому положенні в стані спокою в початковий момент часу ($\beta(0) = \beta^*$; $\dot{\beta}(0) = 0$), гіроскоп у подальшому не буде рухатися відносно основи ($\ddot{\beta}(t) \equiv 0$). Легко впевнитися, що це можливо, якщо β^* визначить з співвідношення:

$$[H_0 - J_2 u^c \cos \varepsilon \cos(\beta^* - \beta_u)] u^c \cos \varepsilon \sin(\beta^* - \beta_u) = 0. \quad (11.7)$$

Величина у квадратних дужках не може дорівнювати нулю, оскільки кутова швидкість власного обертання гіроскопа в багато разів перевищує кутову швидкість обертання основи ($\dot{\gamma} \gg u^c$). Якщо ж, до того, проекція $u^c \cos \varepsilon$ вектора кутової швидкості основи на площину, перпендикулярну вимірювальній осі, теж не дорівнює нулю, то рівняння (11.7) обертається у тотожність лише за умови

$$\beta^* = \beta_u.$$

Отже, якщо у початковий момент часу головна вісь двоступеневого гіроскопа збігається з проекцією u_r (див. рис. 11.2) кутової швидкості обертання основи на площину, перпендикулярну до вимірювальній осі, то за відсутності початкової відносної швидкості $\dot{\beta}_0$ головна вісь гіроскопа залишиться і надалі у цьому положенні відносно об'єкта.

Щоб дослідити рух гіроскопа в разі відхилення його осі ротора від положення рівноваги, лінеаризуємо рівняння (11.6) щодо кута $\beta - \beta_u$, вважаючи, що

$$\Delta\beta = \beta - \beta_u \ll 1,$$

і нехтуючи величиною $J_2 u^c$ порівняно з H_0 . За цих умов рівняння (11.6) можна подати у формі:

$$J_1 \Delta \ddot{\beta} + H_0 u_r \Delta\beta = 0, \quad (11.8)$$

причому

$$u_r = u^c \cos \varepsilon.$$

Розв'язок рівняння (11.8) можна записати у вигляді

$$\Delta\beta = \beta - \beta_u = C \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

де

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{H_0 u_r}{J_1}} = \sqrt{\frac{H_0 u^c \cos \varepsilon}{J_1}} \quad (11.9)$$

є частотою власних коливань двоступеневого гіроскопа; C і φ – сталі інтегрування, значення яких визначається початковими умовами. За довільних початкових умовах $\beta(0) = \beta_0$, $\dot{\beta}(0) = \dot{\beta}_0$ розв'язок має вигляд:

$$\beta = \beta_u + (\beta_0 - \beta_u) \cos \omega_0 t + \frac{\dot{\beta}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

Тобто у загальному випадку головна вісь гіроскопа здійснює коливання навколо положення рівноваги $\beta^* = \beta_u$ з частотою (11.9).

Приклад. Нехай основа обертається у просторі з кутовою швидкістю один оберт у секунду ($\omega^c = 2\pi \text{ с}^{-1}$), причому кут ε дорівнює нулю. На ній встановлено двоступеневий гіроскоп з параметрами $J_1 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ кг м}^2$ і $H_0 = 1 \text{ Н м с}$. Тоді частота власних коливань (11.14) двоступеневого гіроскопа дорівнюватиме $\omega_0 = 79,27 \text{ с}^{-1} \approx 12,6 \text{ Гц}$. Інакше кажучи, за один оберт основи гіроскоп встигне зробити приблизно 13 власних коливань навколо осі обертання основи.

Якщо вздовж вимірювальної осі діє момент сил в'язкого тертя $M_{Y1} = -f\dot{\beta}$, то рівняння (11.8) набуває вигляду

$$J_1 \Delta \ddot{\beta} + f \dot{\beta} + H_0 u_r \Delta \beta = 0,$$

і матиме розв'язок

$$\beta = \beta_u + C e^{-ht} \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

де

$$h = \frac{f}{2J_1}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{H_0 u_r}{J_1} - \left(\frac{f}{2J_1}\right)^2}.$$

З цього виходить, що коливання головної осі гіроскопа відносно положення рівноваги загасають, і з плином часу головна вісь суміщається з вектором \mathbf{u}_r (рис. 11.2). Інтенсивність загасання визначається величиною h .

Причиною такого руху гіроскопа можна вважати гіроскопічний момент, який виникає через обертання основи, на якій встановлено гіроскоп, навколо перпендикуляра до вимірювальної й головної осей. Нагадаємо, що якщо вивчається відносний рух системи, то до активних зовнішніх сил, що діють на систему, слід відносити також і сили інерції, зумовлені переносним рухом. Це виходить із принципу Даламбера. Тому зазначений гіроскопічний момент треба враховувати як зовнішній, якщо вивчається рух гіроскопа відносно основи.

Отже, за наявності складової кутової швидкості об'єкта, перпендикулярної площині, що містить вимірювальну вісь і вісь ротора гіроскопа, на гіроскоп починає «діяти» гіроскопічний момент

$$\mathbf{M}_{Y1} = \mathbf{H}_0 \times \mathbf{u}_{Z1}^c, \quad (11.10)$$

напрявлений вздовж вимірювальної осі так, що він прагне повернути вектор \mathbf{H}_0 найкоротшим шляхом до вектора \mathbf{u}_{Z1}^c . Під дією цього моменту гіроскоп повертається навколо вимірювальної осі в зазначеному напрямку як звичайне (не обертове) тверде тіло. Поворот відбувається із прискоренням $\ddot{\beta}$, пропорційним гіроскопічному моменту, і зумовить зменшення кута $\beta - \beta_u$, синусу якого пропорційна проекція кутової швидкості об'єкта на вісь Z_1 . Це приводить до зменшення значення гіроскопічного моменту й до відповідного зменшення кутово-

го відносного прискорення $\ddot{\beta}$, хоча збільшення швидкості триває. Коли головна вісь суміститься з віссю складової \mathbf{u}_r , гіроскопічний момент стане рівним нулю, як і відносно прискорення гіроскопа, однак відносна швидкість у цей момент сягає максимального значення, що змушує гіроскоп продовжувати рух по інерції у тому самому напрямку.

Зі зміною знака величини кута $\Delta\beta = \beta - \beta_u$ гіроскопічний момент і відносно прискорення змінюють знак на протилежний. Тепер гіроскопічний момент починає гальмувати відносний рух гіроскопа до його повного припинення. Але нагромаджене за час гальмування відхилення головної осі від проекції вектора кутової швидкості об'єкта на площину, перпендикулярну до вимірювальної осі, зумовить існування гіроскопічного моменту протилежного знака, величина якого пропорційна цьому відхиленню, і весь процес повторюється у зворотному напрямку. У такий спосіб відбуваються коливання двоступеневого гіроскопа навколо положення рівноваги.

Резюмуючи, можна дійти висновку: *при обертанні основи з незмінною кутовою швидкістю головна вісь двоступеневого гіроскопа здійснює коливання навколо проекції кутової швидкості основи на площину, перпендикулярну до вимірювальної осі гіроскопа, які загасають за наявності тертя, в результаті чого головна вісь гіроскопа суміщається із зазначеною проекцією.*

З виразу (11.10) випливає, що «причиною» можливого руху головної осі двоступеневого гіроскопа відносно основи є проекція кутової швидкості основи на вісь z_1 . Можна умовно вважати, що двоступеневий гіроскоп «чує» (реагує на) абсолютне обертання основи навколо цієї осі. Саме тому вісь z_1 , перпендикулярна як головній, так і вимірювальній осі двоступеневого гіроскопа, одержала назву осі чутливості двоступеневого гіроскопа.

11.2. Двоступеневий гірокомпас

Припустимо, що двоступеневий гіроскоп установлено нерухомо на поверхні Землі так, щоб вимірювальна вісь була направлена по вертикалі місця (рис. 11.3). Розглянемо рух такого гіроскопа відносно географічної системи координат (див. рис. 2.10). У такому випадку роль основи відіграє Земля, а географічна система координат $\xi\eta\zeta$ – роль зв'язаної з основою системи координат $x_c y_c z_c$, причому вісь y_c у розглядуваному випадку збігається з вертикаллю η місця, а кут β є відхиленням головної осі гіроскопа від площини $(\xi\eta)$ місцевого меридіана. Земля як тіло обертається в інерціальному просторі з кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}_3$, вектор якої лежить у площині меридіану (рис. 11.3) і нахилений до площини горизонту $\xi\zeta$ під кутом φ_r широти місця.

Проекція кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}_3$ на площину, перпендикулярну до вимірювальної осі y_1 (напрявленої вздовж вертикалі місця η), тобто на горизонтальну площину $\xi\zeta$, збігається з полуденною лінією ξ .

З основної властивості двоступеневого гіроскопа випливає, що за такого встановлення гіроскопа його головна вісь здійснюватиме коливання у горизонтальній площині відносно напрямку на північ, тобто такий гіроскоп можна використовувати як компас для визначення напрямку на географічну північ. Тому такий гіроскоп називають *двоступеневим гірокомпасом* (ДГК). Його називають також гіроскопом Фуко першого роду.

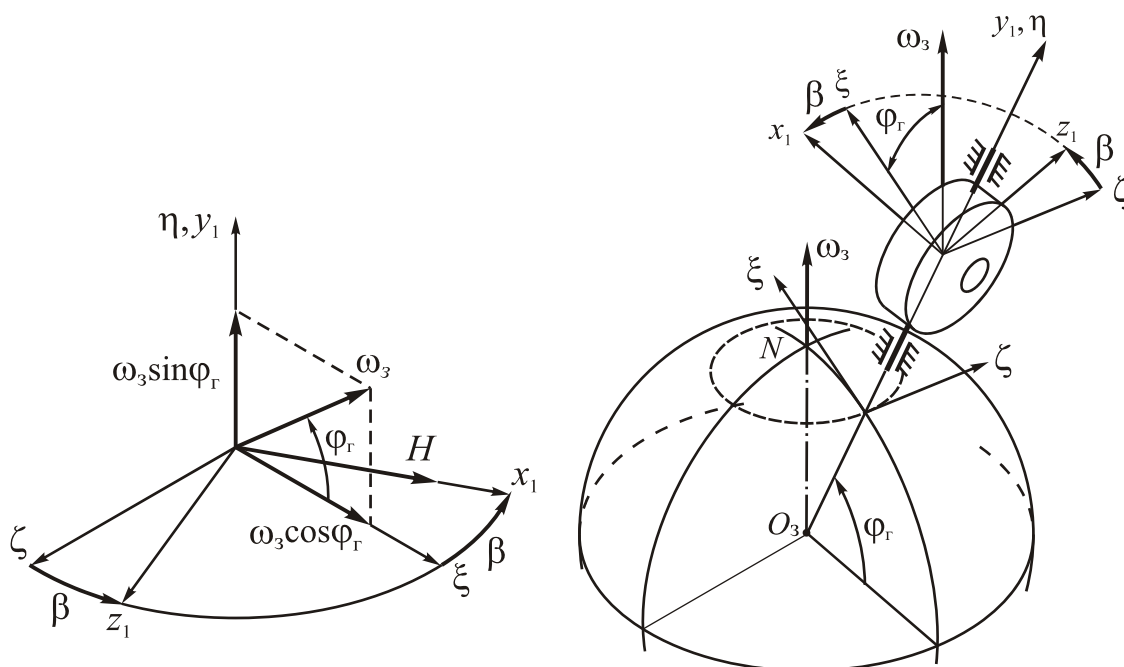


Рис.11.3. Кінематика двоступеневого гірокомпаса

Якщо у такий спосіб встановлений двоступеневий гіроскоп використовується як гірокомпас, то введений раніше кут β характеризуватиме поточну похибку такого гірокомпаса.

Відповідно до рівності (11.9) частота власних коливань двоступеневого гірокомпаса визначиться виразом:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{H_0 \omega_3 \cos \varphi_{\Gamma}}{J_1}}.$$

Наприклад, для гірокомпаса з кінетичним моментом $H = 1 \text{ Н м с}$ і моментом інерції $J_1 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ кг м}^2$, встановленого на екваторі ($\varphi_{\Gamma} = 0$), ураховуючи, що кутова швидкість власного обертання Землі дорівнює

$$\omega_3 = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1} = 15^\circ / \text{год.} = 15' / \text{хв.} = 15'' / \text{с},$$

частота власних коливань дорівнюватиме $\omega_0 \approx 0,27 \text{ с}^{-1}$, тобто період його власних коливань буде рівним $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \approx 23 \text{ с}$. Такий самий гірокомпас на широті

$\varphi_{\Gamma} = 60^\circ$ матиме період $T_0 \approx 32 \text{ с}$.

За малого відхилення вимірювальної осі від вертикалі можна користуватися наближеною формулою

$$\beta^* \approx \sigma \operatorname{tg} \varphi_{\Gamma}.$$

Як бачимо, похибка визначення меридіана двоступеневим гірокомпасом є пропорційною до похибки вертикалізації вимірювальної осі гіроскопа, причому коефіцієнт пропорційності близький до одиниці (у середніх широтах).

Перейдемо до визначення положення рівноваги гірокомпаса у випадку, коли основа переміщується по поверхні Землі. Для спрощення припустимо, що рух основи супроводжується постійним точним збігом вимірювальної осі з вертикаллю (щоб вилучити з розгляду похибку (11.12) через неточну вертикалізацію). За цих умов головна вісь гірокомпаса буде рухатися в площині горизонту $\xi\zeta$, а положення рівноваги – визначатися напрямком проекції повної кутової швидкості \mathbf{u} географічної системи координат $\xi\eta\zeta$ на площину горизонту (див. рис. 11.5).

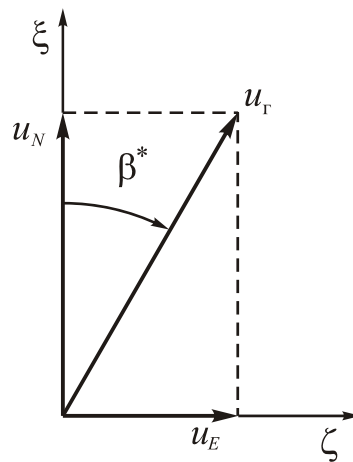


Рис. 11.5. До визначення швидкісної похибки гірокомпаса

У п. 2.5.2 були знайдені проекції (2.51) кутової швидкості географічної системи координат на осі останньої. Звертаючись до рис. 11.5, знайдемо формулу, яка визначає відхилення положення рівноваги від площини меридіана:

$$\operatorname{tg} \beta^* = \frac{u_{\zeta}}{u_{\xi}} = \frac{-\frac{V}{R_3} \cos K}{\omega_3 \cos \varphi_{\Gamma} + \frac{V}{R_3} \sin K} = -\frac{V_N}{R_3 \omega_3 \cos \varphi_{\Gamma} + V_E}. \quad (11.13)$$

Отже, внаслідок руху основи по поверхні Землі виникає похибка, зумовлена переміщенням об'єкта уздовж меридіана й визначена виразом (11.13). Її називають *швидкісною похибкою гірокомпаса*, бо вона визначається передусім швидкістю переміщення основи по поверхні Землі.

Неважко встановити фізичну причину відхилення положення рівноваги від меридіана. Дійсно, головна вісь двоступеневого гірокомпаса встановлюється у напрямку проекції абсолютної кутової швидкості повороту основи на площину горизонту. Якщо об'єкт переміщується уздовж паралелі, то, хоча абсолю-

тна кутова швидкість основи змінюється, напрямок її все одно збігається з вектором кутової швидкості обертання Землі, і положення рівноваги збігається з напрямком на північ. А якщо об'єкт рухається вздовж меридіану, виникає складова кутової швидкості об'єкта, напрямлена по лінії захід – схід. Вона зумовлює зміщення положення рівноваги від напрямку на північ.

Приклад. Нехай основа рухається на північ на широті $\varphi_{\Gamma} = 60^{\circ}$ зі швидкістю $V_N = 72$ км/год. Тоді швидкісна похибка двоступеневого гірокомпаса, встановленого на цій основі, становитиме

$$\operatorname{tg} \beta^* = -\frac{V_N}{R_3 \omega_3 \cos \varphi_{\Gamma}} = -\frac{20 \text{ м с}^{-1}}{6,4 \cdot 10^6 \text{ м } 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1} 0,5} = -4^{\circ},9.$$

Зміщення положення рівноваги двоступеневого гірокомпаса може також спричинятися впливом постійних (неврахованих, неконтрольованих) моментів по вимірювальній осі. Такі моменти можуть бути зумовлені, наприклад, сухим тертям в опорах вимірювальної осі.

Для визначення похибки гірокомпаса, зумовленою постійним вертикальним моментом сил, скористаємося рівнянням (11.5), в якому враховуватимемо, що на ДГК діє постійний збурювальний момент сил M_{Y1} вздовж вимірювальної осі, усі кутові прискорення дорівнюють нулю, і нехтуватимемо відцентровими моментами сил інерції. Тоді рівняння (11.5) набуде вигляду

$$H_0 u^c \cos \varepsilon \sin(\beta^* - \beta_u) = M_{Y1}.$$

Для розглядуваного випадку двоступеневого гірокомпаса це трансформується у вираз

$$\sin \beta^* = \frac{M_{Y1}}{H_0 \omega_3 \cos \varphi_{\Gamma}}.$$

Приклад. Нехай $M_{Y1} = 1 \cdot 10^{-2}$ сН см (надзвичайно малий момент), $H = 1$ Н м с, $\varphi_{\Gamma} = 60^{\circ}$. Тоді зміщення положення рівноваги від меридіана (а, отже, похибка приладу) становитиме

$$\beta^* \approx \frac{10^{-6}}{1,7,3 \cdot 10^{-5} \cdot 0,5} = 2,7 \cdot 10^{-2} \approx 1^{\circ},6.$$

Отже, виявляється, що зміщення положення рівноваги двоступеневого гіроскопа досить відчутно залежить від залишкових шкідливих моментів по вимірювальній осі. Зумовлено це головним чином малою кутовою швидкістю Землі, що приводить до виникнення малого гіроскопічного моменту. Щоб зрівноважити в положенні рівноваги момент збурення M_{Y1} , гірокомпас має відхилитися від колишнього положення рівноваги на великий кут. Лише у цьому випадку гіроскопічний момент збільшиться до значення збурювального моменту.

11.2.2. Вібраційна похибка

Однією з основних похибок двоступеневого гіроскопа, встановленого на рухомій основі, є похибка, зумовлена хитавицею (кутовою вібрацією) основи,

яка виникає завдяки випрямному ефекту, суть якого полягає в появі за певних умов постійної складової похибки при коливаннях основи й приладу.

Для дослідження похибок через випрямні ефекти необхідно вміти використати специфічний математичний апарат. Основні етапи визначення постійних складових похибок, зумовлених випрямним ефектом, є такими:

1) на основі законів механіки складаються рівняння руху гіроприладу в найбільш узагальненій, не конкретизованій формі;

2) з отриманих рівнянь обираються ті, з яких може бути отримана безпосередньо інформація про ті параметри руху приладу, які цікавлять дослідника;

3) до обраних рівнянь застосовується операція усереднення; при цьому передбачається, що як зовнішні збурення, так і кутові рухи гіроскопа являють собою сталі стаціонарні процеси; з урахуванням цього припущення похідні за часом від проекцій основних динамічних величин не будуть мати постійних складових, що дозволяє вже на початковому етапі істотно спростити вирази для визначення потрібних систематичних (постійних) складових похибок;

4) конкретизуються величини, що входять у спрощені співвідношення (швидкості виражаються через узагальнені координати і їхні похідні); співвідношення зводяться до вигляду, розв'язаному відносно постійних складових похибок; при цьому в правій частині слід залишити лише члени, що містять парну кількість добутків стаціонарно коливних величин;

5) складаються лінеаризовані рівняння першого наближення;

6) за лінеаризованими рівняннями руху визначають характеристики усталеного руху (знаходять частинні розв'язки);

7) знайдені розв'язки підставляють у праві частини формул, визначених у п. 4, і здійснюють необхідні усереднення.

Розглянемо застосування цього апарату на прикладі двоступеневого гірокомпаса.

У реальних умовах будь-який рух по поверхні Землі супроводжується кутовими вібраціями основи, що накладаються на основне обертання географічної системи в інерціальному просторі. Такі кутові вібрації можуть приводити до значного зміщення положення рівноваги гірокомпаса в азимуті в результаті випрямного ефекту.

Для дослідження цього явища у випадку двоступеневого гірокомпаса зручно розділити кутовий рух основи на «корисний», з кутовою швидкістю ω_3 , що дозволяє визначити напрямок меридіана, і «перешкоду» – кутові вібрації або хитавицю основи – який зумовлює відхилення положення рівноваги від меридіана:

$$\mathbf{u}^c = \omega_3 + \mathbf{u}^* . \quad (11.14)$$

де \mathbf{u}^* – вектор кутової швидкості коливань корпусу гірокомпаса відносно географічної системи координат.

Рівняння руху (11.1) гіроскопа можна подати у формі

$$J_1 \ddot{\beta} + (H_0 - J_2 u_{x1}^c) u_{z1}^c = 0 ,$$

де не враховується рух основи навколо вимірювальної осі. Врахуємо вираз (11.14) у запису проекцій u_{X1}^c і u_{Z1}^c (див. рис. 11.3):

$$\begin{aligned} u_{X1}^c &= \omega_3 \cos \varphi_r \cos \beta + u_\xi^* \cos \beta - u_\zeta^* \sin \beta; \\ u_{Z1}^c &= \omega_3 \cos \varphi_r \sin \beta + u_\xi^* \cos \beta + u_\zeta^* \sin \beta. \end{aligned}$$

Припустимо, що північна (u_ξ^*) і східна (u_ζ^*) складові відносної кутової швидкості основи змінюються за гармонічним законом з частотою ω :

$$u_\xi^* = u_{Nm} \sin(\omega t + \varepsilon); \quad u_\zeta^* = u_{Em} \sin(\omega t). \quad (11.15)$$

Покладемо кут β відхилення від меридіана малим ($\beta \ll 1$) і будемо розв'язувати задачу методом послідовних наближень. Вважаючи всі кутові швидкості малими, складемо рівняння першого наближення зі членів не вищих від першого порядку мализни:

$$J_1 \ddot{\beta}_{(1)} + H_0 [(\omega_3 \cos \varphi_r) \beta_{(1)} + u_\zeta^*] = 0, \quad (11.16)$$

а в рівнянні другого наближення утримуємо члени до другого порядку мализни, причому величину кута β , що входить у члени другого порядку, замінимо на розв'язок $\beta_{(1)}$ рівняння (11.16):

$$J_1 \ddot{\beta}_{(2)} + [(\omega_3 \cos \varphi_r) \beta_{(2)} + u_\zeta^* + u_\xi^* \beta_{(1)}] [H_0 - J_2 (\omega_3 \cos \varphi_r + u_\xi^* - u_\zeta^* \beta_{(1)})] = 0,$$

Після перетворень і вилучення членів більших від другого порядку отримаємо

$$J_1 \ddot{\beta}_{(2)} + H_0 (\omega_3 \cos \varphi_r) \beta_{(2)} = -H_0 u_\zeta^* - H_0 u_\xi^* \beta_{(1)} + J_2 (\omega_3 \cos \varphi_r u_\zeta^* + u_\xi^* u_\zeta^*), \quad (11.17)$$

Розв'язавши спочатку рівняння (11.16) у формі

$$J_1 \ddot{\beta}_{(1)} + H_0 (\omega_3 \cos \varphi_r) \beta_{(1)} = -H_0 u_\zeta^*, \quad (11.18)$$

і підставивши розв'язок у праву частину рівняння (11.17) та розв'язавши його, можна дістати уточнений розв'язок $\beta_{(2)}$ другого наближення.

Однак, при дослідженні випрямних ефектів інтерес становить не повний розв'язок рівнянь другого наближення, а лише його стала складова $\langle \beta \rangle$ за пері-

од $T = \frac{2\pi}{\omega}$ вібрації (хитавиці), оскільки саме вона визначає сталу складову зміщення положення рівноваги гірокомпаса від меридіана:

$$\langle \beta \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \beta_{(2)}(t) dt.$$

Застосуємо операцію усереднення до обох частин рівняння (11.17). При цьому врахуємо, що вивчається лише та частина розв'язку, яка являє собою усталені стаціонарні коливання, які описуються частинним розв'язком рівнянь першого і другого наближень. З огляду на те, що, як впливає з виразу (11.15)

$$\langle \ddot{\beta}_{(2)} \rangle = 0; \quad \langle u_\zeta^* \rangle = 0,$$

отримаємо

$$\langle \beta_{(2)} \rangle = -\frac{\langle u_{\xi}^* \beta_{(1)} \rangle}{\omega_3 \cos \varphi_r} + \frac{J_2}{H_0} \frac{\langle u_{\xi}^* u_{\zeta}^* \rangle}{\omega_3 \cos \varphi_r}. \quad (11.19)$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (11.18) із врахуванням (11.15) має вигляд:

$$\beta_{(1)} = -\frac{1}{1-v^2} \frac{u_{Em}}{\omega_3 \cos \varphi_r} \sin \omega t, \quad (11.20)$$

де

$$v = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\omega \sqrt{J_1}}{\sqrt{H_0 \omega_3 \cos \varphi_r}}$$

відношення частоти коливань основи до частоти власних коливань гірокомпаса.

Підставляючи (11.20) і (11.15) в (11.19) і усереднюючи, знайдемо постійну складову відхилення положення рівноваги гірокомпаса від меридіана

$$\beta^* = \langle \beta_{(2)} \rangle = \frac{u_{Nm} u_{Em}}{2(\omega_3 \cos \varphi_r)^2} \left(\frac{1}{1-v^2} + \frac{J_2 \omega_3 \cos \varphi_r}{H_0} \right) \cos \varepsilon. \quad (11.21)$$

З отриманої формули випливає, що майже завжди у виразі сталої складової (11.21) можна нехтувати другим доданком у дужках правої частини, що відповідає нехтуванню у вихідному рівнянні відцентровим моментом сил інерції. Тому вібраційну похибку двоступеневого гірокомпаса можна оцінювати за спрощеною формулою:

$$\beta^* = \langle \beta_{(2)} \rangle = \frac{u_{Nm} u_{Em}}{2(\omega_3 \cos \varphi_r)^2} \frac{1}{1-v^2} \cos \varepsilon. \quad (11.22)$$

Оскільки частота власних коливань двоступеневого гірокомпаса є досить малою величиною (нагадаємо, що період цих коливань складає величину порядку півхвилини), то майже всі реальні кутові коливання основи слід віднести до високочастотних, бо їхня частота набагато перевищує частоту коливань гірокомпаса ($v \gg 1$). З врахуванням цього формулу (11.22) можна замінити на таку наближену

$$\beta^* = -\frac{u_{Nm} u_{Em}}{2(v \omega_3 \cos \varphi_r)^2} \cos \varepsilon = -\frac{H_0 \varphi_{Nm} \varphi_{Em}}{2J_1 \omega_3 \cos \varphi_r} \cos \varepsilon. \quad (11.23)$$

Тут величини $\varphi_{Nm} = \frac{u_{Nm}}{\omega}$ і $\varphi_{Em} = \frac{u_{Em}}{\omega}$ мають сенс амплітуд кутів хитавиці (вібрації) основи відповідно навколо осей «північ-південь» і «схід-захід».

За таких самих умов амплітуда β_m вимушених коливань гірокомпаса визначиться виразом (див. (11.20)):

$$\beta_m = \varphi_{Em} \frac{H_0}{J_1 \omega}. \quad (11.24)$$

При проектуванні гіроскопічних компасів потрібно враховувати певні обставини, що впливають із аналізу (11.23).

1. Стала складова відхилення головної осі гірокомпасу від площини меридіану є максимальною за величиною у випадку синхронних ($\varepsilon = 0$) коливань основи навколо напрямків північ-південь і захід-схід.

2. Відхилення β^* немає, якщо коливання по цих двох напрямках зсунуті по фазі на 90° один відносно іншого.

3. Стала складова вібраційної похибки двоступеневого гірокомпасу не залежить від частоти вібрації.

4. Через мализну «корисної» складової кутової швидкості стала складова відхилення положення рівноваги гірокомпаса від меридіана може досягати великих значень навіть при доволі незначній кутовій вібрації.

Приклад. Нехай $H_0 = 1 \text{ Н м с}$, $J_1 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ кг м}^2$, $\varphi_r = 60^\circ$. Легко впевнитися, що для такого гірокомпаса достатньо кутової вібрації основи з амплітудою $\varphi_{Nm} = \varphi_{Em} = 0',93$, щоб середнє положення коливань головної осі гіроскопа відхилилося від меридіана на кут один радіан ($\approx 58^\circ$).

Отже, кутові коливання основи є вельми значущим чинником впливу на точність двоступеневого гірокомпасу. Саме з цієї причини двоступеневий гірокомпас не набув застосування на рухомих (транспортних) об'єктах.

Цікаво з'ясувати, як пов'язані між собою амплітуда вимушених коливань гірокомпаса з максимально можливою за таких коливань сталою складовою відхилення від напрямку на північ. Для цього скористаємося виразами (11.23) і (11.24):

$$\frac{\beta^*}{\beta_m} = \frac{\varphi_{Nm} \omega}{2\omega_3 \cos \varphi_r} = \frac{u_{Nm}}{2\omega_3 \cos \varphi_r}.$$

Як бачимо, це відношення визначається передусім амплітудою кутової швидкості хитавиці основи навколо напрямку північ-південь. Якщо ця амплітуда лише удвічі перевищує кутову швидкість Землі (тобто понад $0,5 \text{ } \prime/\text{с}$), то стала складова перевищує амплітуду вимушених коливань, зумовлених тією самою хитавицею.

Покажемо, що причиною виникнення сталої складової похибки двоступеневого гірокомпаса за кутових коливань основи є момент N_{z1} реакції в опорах вимірювальної осі, направлений вздовж осі чутливості гіроскопа. Цей момент спричиняє сталу складову похибки ДГК через механізм *випрямного ефекту*.

Дійсно, якщо двоступеневий гіроскоп (рис. 11.6) повертається навколо вимірювальної осі y_1 з кутовою швидкістю $\dot{\beta}$, то гіроскопічний момент, зумовлений цим поворотом, буде напрямлений по осі чутливості z_1 , і дорівнюватиме $M_{z1}^{\text{rip}} = H_0 \dot{\beta}$. Він спричинить виникнення моменту реакції M_{z1} у підшипниках вимірювальної осі, напрямленого в протилежний бік:

$$M_{z1} = -M_{z1}^{\text{rip}} = -H_0 \dot{\beta}.$$

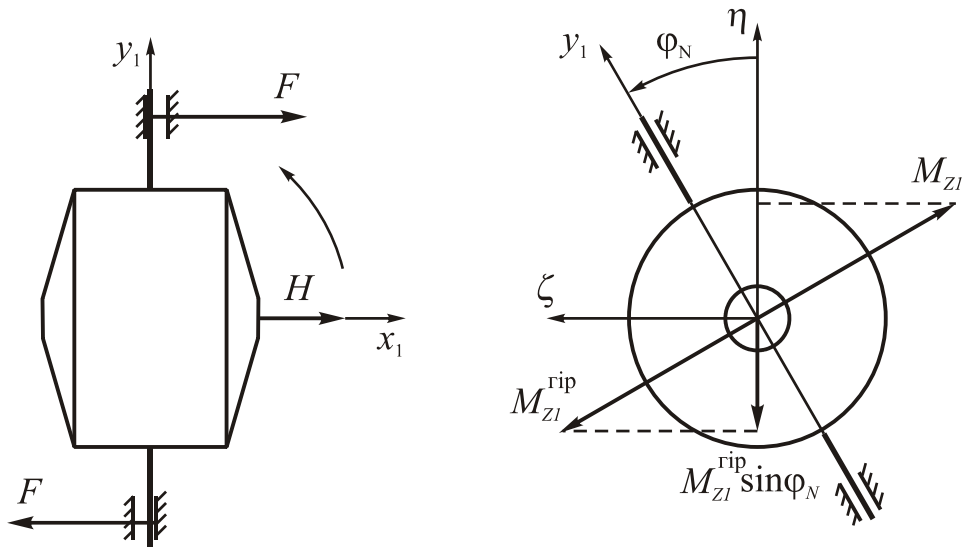


Рис. 11.6. Схема сил і моментів, що діють на двоступеневий гіроскоп

Під час коливань у просторі вимірювальної осі (кут φ_N) навколо лінії північ-південь момент реакції M_{Zl} утворює проекцію на середнє положення η вимірювальної осі Y_1 :

$$M_\eta = -M_{Zl} \sin \varphi_N \approx -M_{Zl} \varphi_N = H_0 \dot{\beta} \varphi_N.$$

Якщо φ_N й $\dot{\beta}$ змінюються періодично й синхронно, то можливо виникнення постійної складової моменту по вертикальній осі

$$\langle M_\eta \rangle \approx H_0 \langle \dot{\beta} \varphi_N \rangle = -H_0 \langle \dot{\varphi}_N \Delta \beta \rangle = -H_0 \langle u_\xi^* \Delta \beta \rangle.$$

Отже, навколо вертикалі діятиме постійний момент сил, який має бути зрівноваженим гіроскопічним моментом, який виникає внаслідок обертання основи з «корисною» кутовою швидкістю обертання Землі. З умови такого зрівноваження й визначається відхилення середнього положення головної осі від меридіана:

$$(H_0 \omega_3 \cos \varphi_r) \beta^* = \langle M_\eta \rangle,$$

звідки випливає

$$\beta^* = \frac{\langle M_\eta \rangle}{H_0 \omega_3 \cos \varphi_r} = -\frac{\langle u_\xi^* \Delta \beta \rangle}{\omega_3 \cos \varphi_r}.$$

Ця формула збігається з раніше отриманої (11.19), якщо знехтувати впливом відцентрового моменту сил інерції.

11.2.3. Моделювання поведінки двоступеневого гірокомпаса

Перейдемо до моделювання поведінки двоступеневого гірокомпаса (ДГК). Для цього розроблено програму (для середовища Matlab), яка здійснює чисельне інтегрування рівняння (11.1), у якому до моментів сил навколо вимірювальної осі ДГК включені моменти сил в'язкого і сухого тертя.

Керувальна програма **DGK_upr** здійснює присвоювання значень усім параметрам рівняння, організовує цикл чисельного інтегрування за допомогою

процедури *rko4* методу Рунге-Кутта четвертого порядку і виведення результатів інтегрування у графічне вікно. Процедура *DGK* обчислює значення правих частин диференціальних рівнянь двоступеневого гірокомпаса, зведених до форми Коші. На неї спирається процедура *rko4* методу чисельного інтегрування. Тексти програм подані у Додатку 6.

Наведемо деякі результати роботи цих програм, які ілюструють теоретичні висновки.

Усталення головної осі ДГК у площину меридіану, коли вона у початковий момент часу відхилена від цієї площини на кут 20° , демонструє рис. 11.7. Усталення зумовлює дія досить великого моменту сил в'язкого тертя по вимірювальній осі. Головна вісь здійснює загасаючі симетричні коливання навколо меридіана, встановлюючись у кінцевому підсумку у площину меридіана.

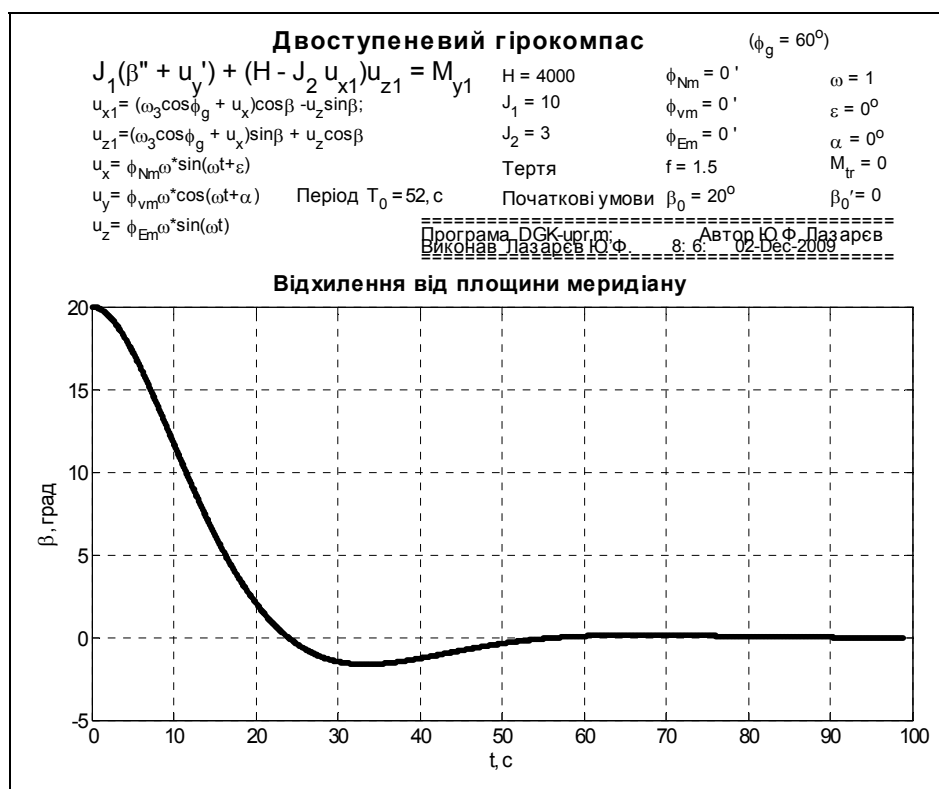


Рис. 11.7. Усталення головної осі ДГК у площину меридіану

Дещо по-іншому впливає на ДГК сухе тертя (рис. 11.8). Тепер головна вісь ДГК встановлюється не у площину меридіана, а у положення, відхилене від неї на кут близько (-4°) . Величина кута цього відхилення суттєво залежить від початкових умов. Наприклад, за початкового відхилення у протилежний бік, усталене положення також змінює свій напрямок (залишаючись таким самим за величиною).

Вплив на поведінку ДГК постійного моменту сил величиною $1 \cdot 10^{-2}$ сН см ілюструє рис. 11.9. У початковий момент часу головна вісь ДГК була у площині меридіана. Під дією зазначеного моменту сил вона відхиляється від меридіана і встановлюється у положення, відхилене від цієї площини на кут близько 4° .

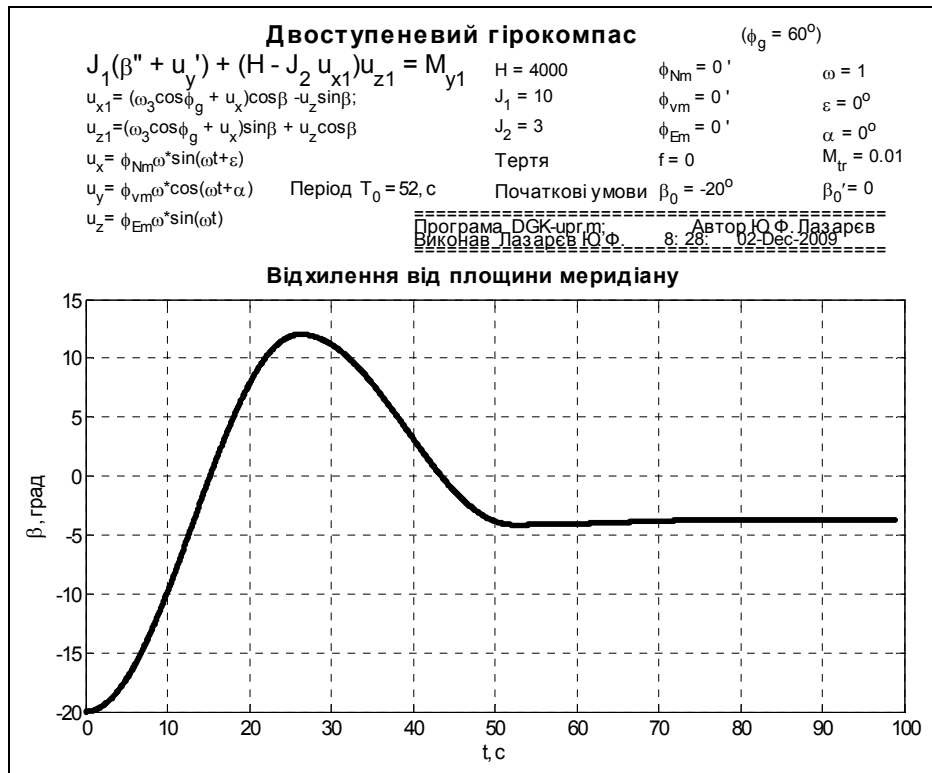


Рис. 11.8. Вільні коливання ДГК з сухим тертям

Подальші рисунки показують вплив на ДГК хитавиці основи.

Рис. 11.10 показує рух ДГК при синхронній кутовій вібрації навколо горизонтальної північно-східної осі з частотою, більшою за частоту власних коливань приблизно у 8 разів, і амплітудою пів-хвилини. Видно, що ДГК здійснює коливання як з власною, так і з частотою вібрації. Коливання з власною частотою, як і раніше, швидко загасають, і у кінцевому підсумку залишаються лише вимушені коливання, причому середнє положення головної осі виявляється відхиленням від напрямку на північ на кут близько $6,5^\circ$.

На рисунку 11.11 проілюстрована та обставина, що стала складова вібраційної похибки ДГК практично не залежить від частоти хитавиці. На ньому показане поведіння ДГК при частоті вібрації у 52 рази більшій за частоту власних коливань. При цьому стала складова похибки, як і у попередньому випадку, становить ті самі $6,5^\circ$.

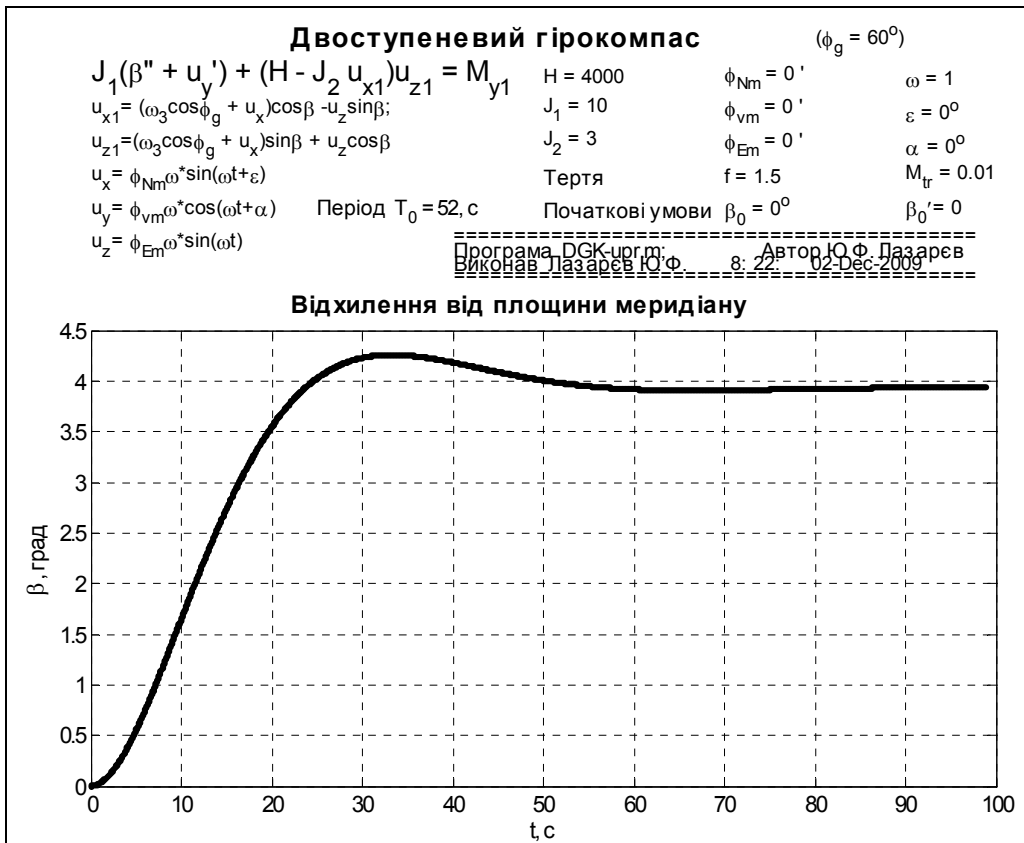


Рис. 11.9. Дія на ДГК постійного моменту сил

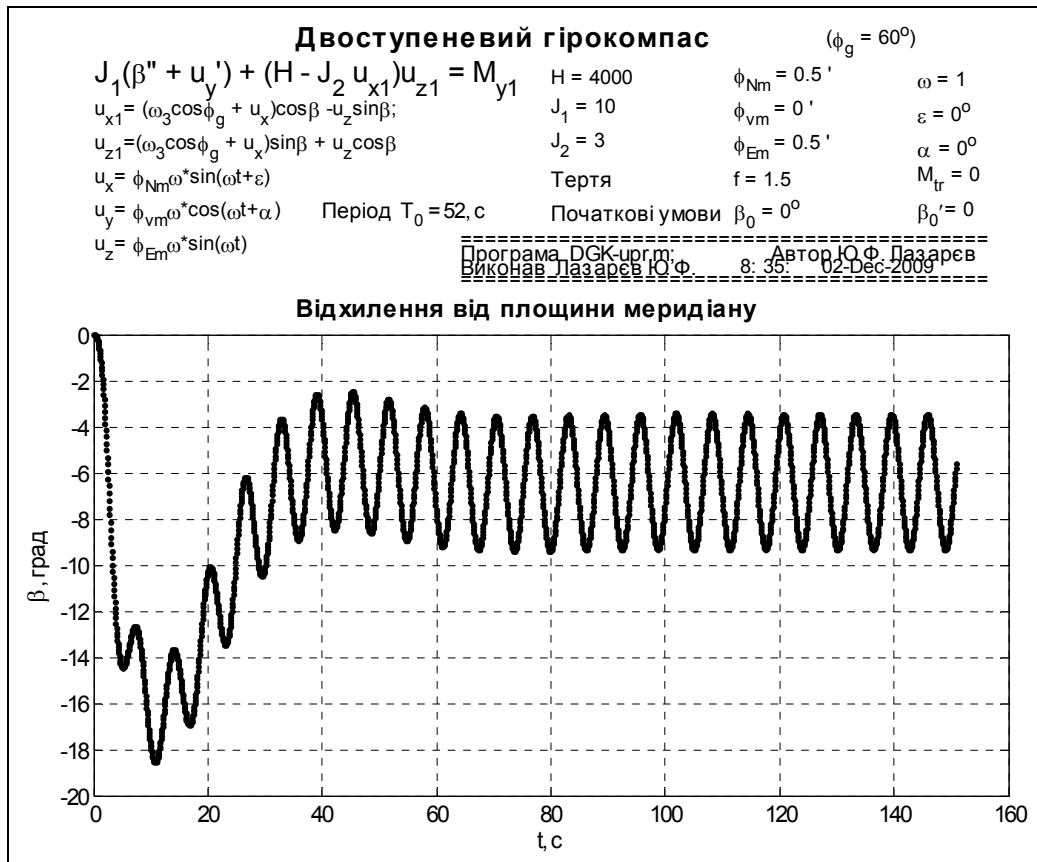


Рис. 11.10. Вплив хитавиці основи на ДГК

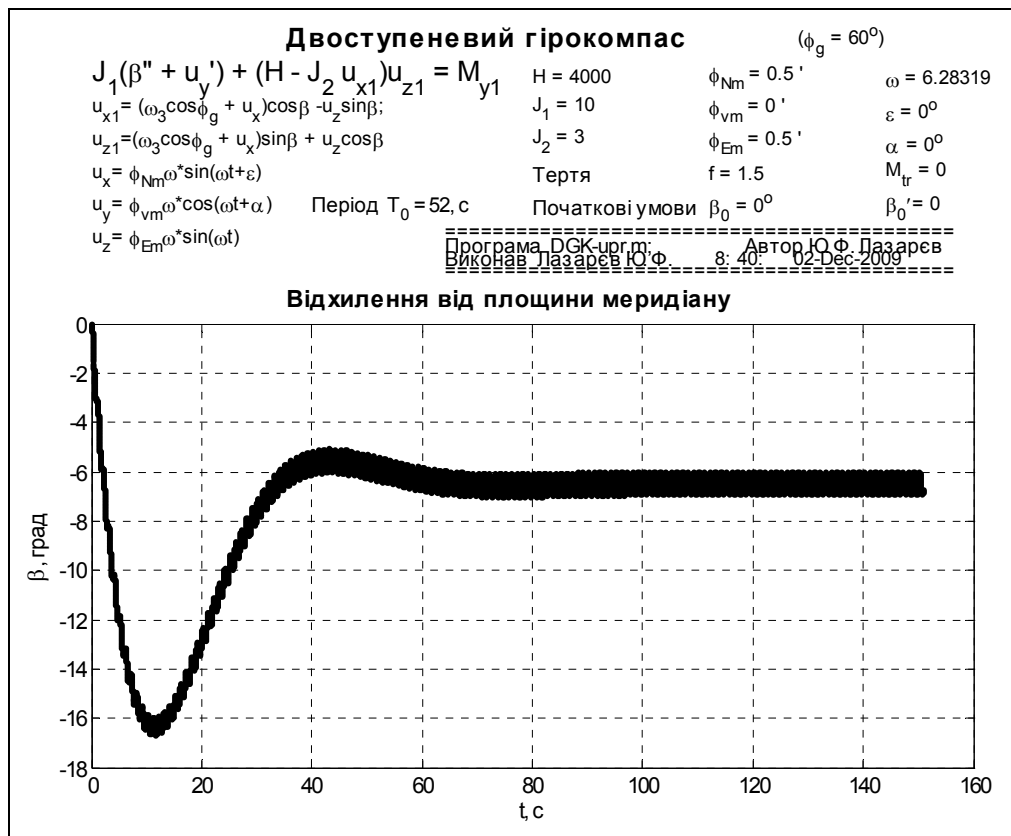


Рис. 11.11. Вплив на ДГК хитавиці з більшою частотою

Як впливає на похибку ДГК збільшення амплітуди хитавиці у 2 рази показує рис. 11.12. З нього випливає, що головна вісь ДГК у середньому відхиляється на кут 20° , тобто збільшується приблизно у три рази.

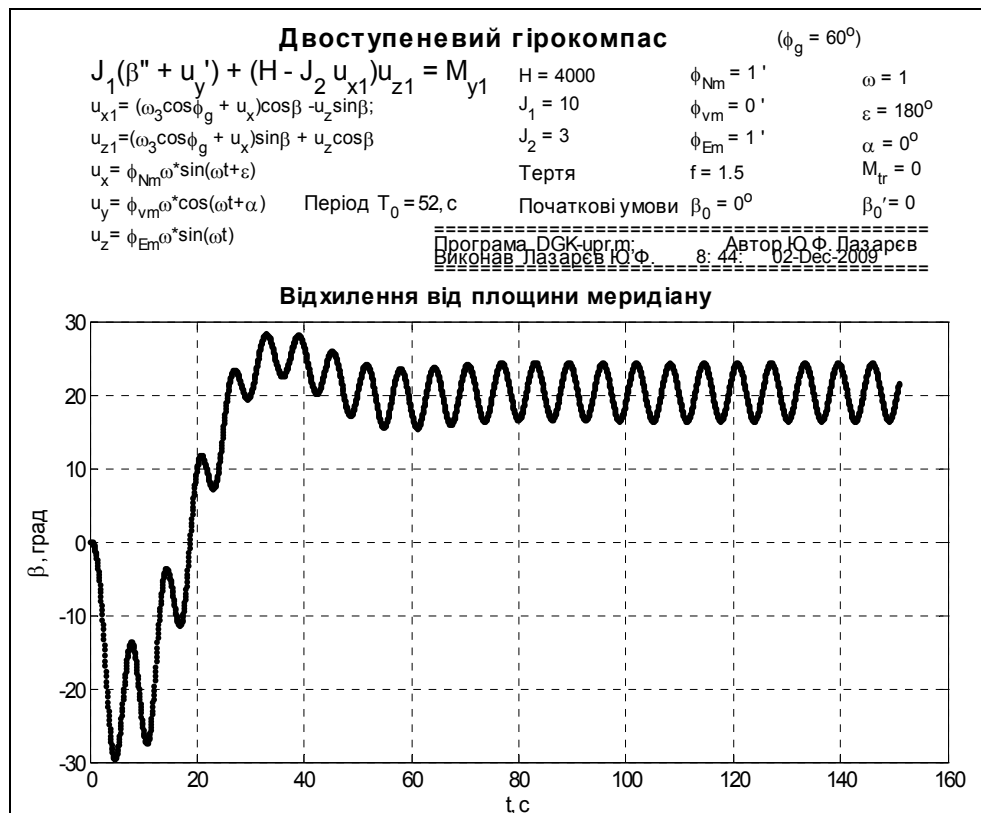


Рис. 11.12. Вплив на ДГК хитавиці з більшою амплітудою

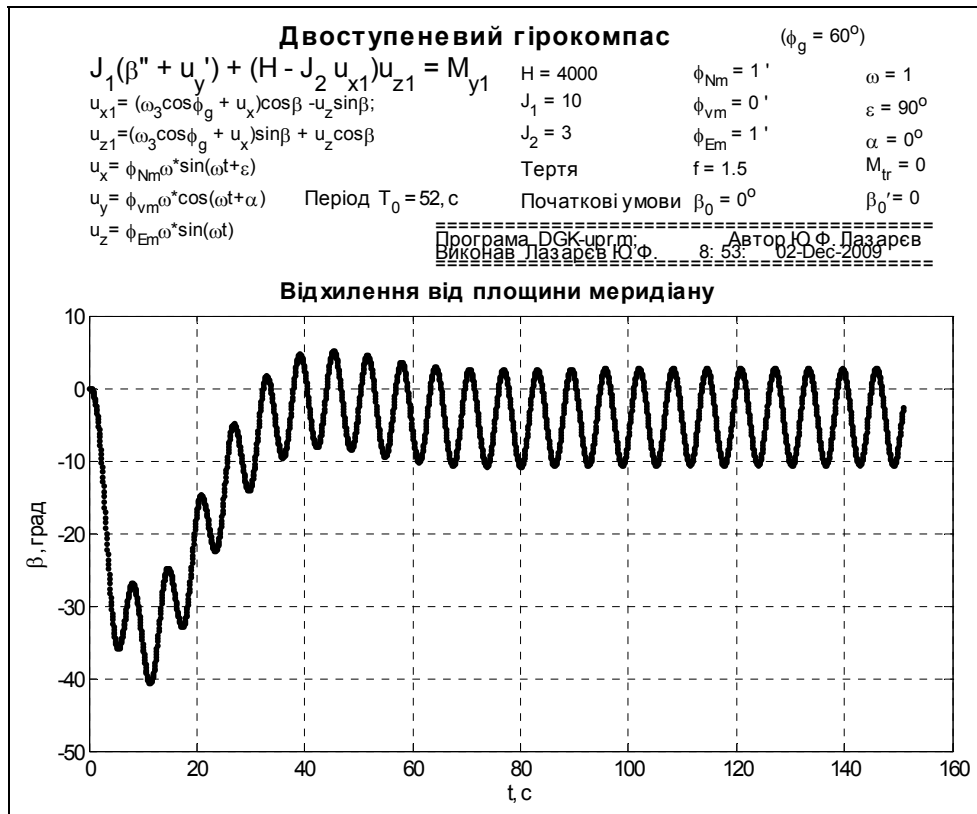


Рис. 11.13. Вплив на ДГК колової хитавиці

У випадку колової вібрації, тобто такої, при якій коливання навколо двох взаємно перпендикулярних осей зсунуті один від одного за фазою на 90° , вимірювальна вісь гірокомпаса описує у просторі конічну поверхню навколо вертикалі. З рис. 11.13 стає наочним те, що у цьому випадку сталої складової похибки майже немає. Незначну сталу похибку (близько 4°) можна пояснити значним демпфіруванням, завдяки чому коливання з куту β виявляються зсунутими за фазою відносно коливань кутової швидкості u_ξ^* на кут, дещо відмінний від 90° .

Як впливає на ДГК кутова вібрація його корпусу навколо вимірювальної вертикальної осі показано на рис. 11.14. Внаслідок наявності по цій осі тертя, ДГК починає коливатися відносно площини меридіана з частотою коливань основи.

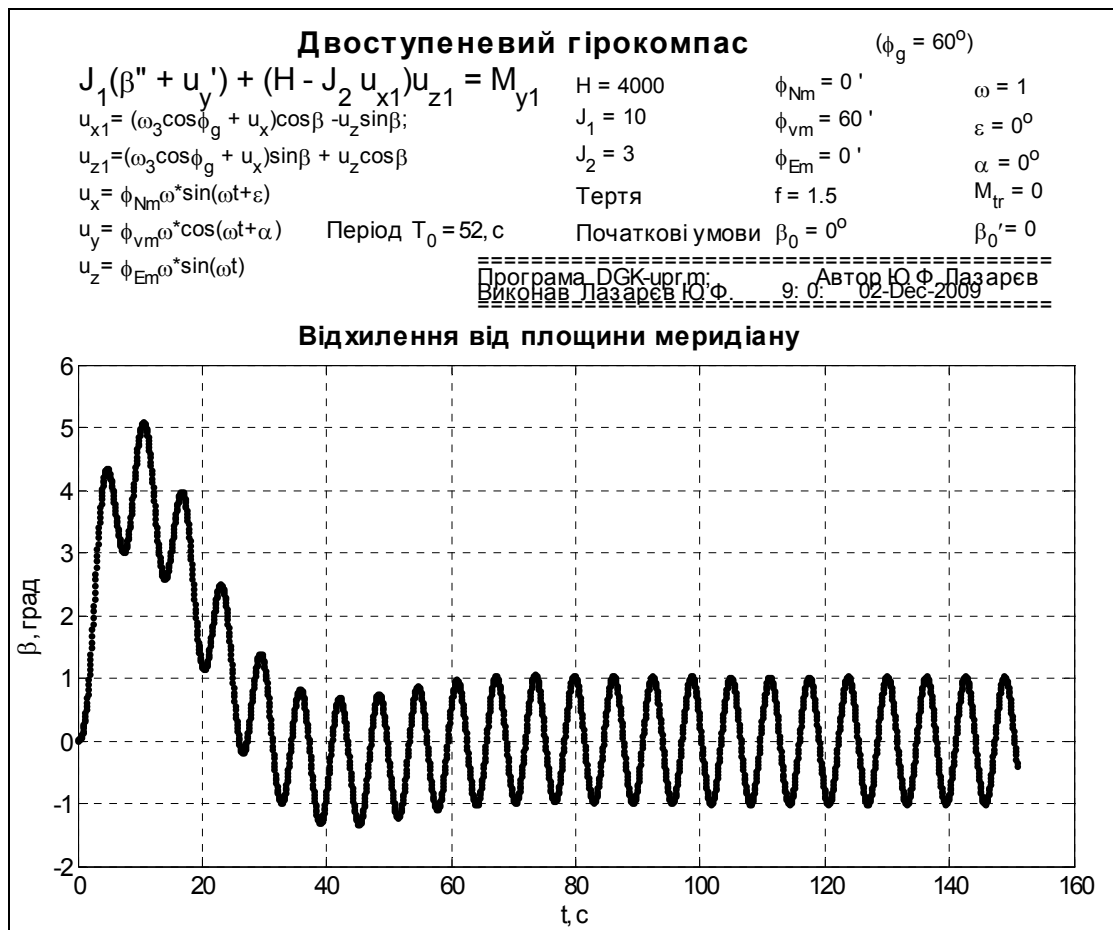


Рис. 11.14. Вплив на ДГК хитавиці навколо вертикальної осі

11.3. Гіротахометр

Розглянемо двоступеневий гіроскоп, на вимірювальній осі якого встановлено пружину, яка утворює відновлюючий момент (рис. 11.15)

$$M_{y1} = -c\beta, \quad (11.25)$$

де c – кутова жорсткість пружини. Такий прилад може служити вимірювачем абсолютної кутової швидкості основи, тому його називають гіротахометром (ГТ).

Рівняння руху гіротахометра можна записати так (див. (11.1)):

$$J_1 \ddot{\beta} + f \dot{\beta} + c\beta = -H_0 u_{z1}^c - J_1 \dot{u}_{y_c}^c + J_2 u_{x1}^c u_{z1}^c + M_{y1}^*. \quad (11.26)$$

Тут M_{y1}^* – зовнішній збурювальний момент по вимірювальній осі, тобто момент, який не містить відновлювального (11.25) і демпфірувального $M_{y1}^* = -f \dot{\beta}$ моменти, які враховані в лівій частині.

При обертанні основи с постійною кутовою швидкістю ($\dot{u}^c = 0$), відсутності збурювальних моментів ($M_{y1}^* = 0$) і нехтуванні відцентровим моментом сил інерції ($J_2 u_{x1}^c u_{z1}^c$) положення рівноваги гіротахометра ($\dot{\beta} = 0$; $\ddot{\beta} = 0$)) визначиться рівністю:

$$\beta^* = -\frac{H_0}{c} (u_{z_c}^c \cos \beta + u_{x_c}^c \sin \beta).$$

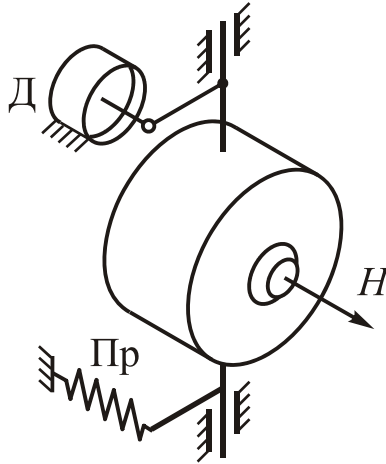


Рис. 11.15. Гіротахометр

За досить жорсткої пружини $c \gg |H_0 u_{\max}|$ значення β^* можна визначити простішою формулою

$$\beta_{\text{ід}} = -\frac{H_0}{c} u_{z_c}^c, \quad (11.27)$$

звідки випливає, що кут повороту головної осі гіротахометра відносно основи несе інформацію про складову абсолютної кутової швидкості основи навколо її осі z_c . У загальному випадку, як випливає з рівняння (11.26), гіротахометр здійснює навколо цього середнього положення загасаючі (за наявності демпфівального моменту сил) власні коливання з частотою

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{J}}. \quad (11.28)$$

Причини можливих зміщень положення рівноваги від «ідеального», визначеного співвідношенням (11.27), зумовлені (математично) членами правої частини рівнянь, зокрема, постійними складовими збурювальних моментів M_{y1}^* .

Для теоретичного дослідження похибок гіротахометра зручно використовувати як вихідну величину не кут β його повороту відносно основи, а величину, пов'язану з ним співвідношенням:

$$x = -\frac{c}{H_0} \beta. \quad (11.29)$$

Перевага застосування цієї величини полягає у тому, що вона має ту саму фізичну розмірність, що й вимірювана величина $u_{z_c}^c$, а окрім цього, в ідеальному випадку, коли $\beta = \beta_{\text{ід}}$ ця величина дорівнює вимірюваній

$$x_{\text{ід}} = -\frac{c}{H_0} \beta_{\text{ід}} = u_{z_c}^c.$$

Здійснюючи заміну змінних (11.29) у рівнянні (11.26) у припущенні мализни кута β і нехтуючи членами вище за другий порядок мализни, дістанемо рівняння

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = \omega_0^2u_{z_c}^c - \lambda u_{x_c}^c x + \frac{\omega_0^2}{\lambda} \dot{u}_{y_c}^c - \frac{J_2}{J_1} \frac{\omega_0^2}{\lambda} u_{x_c}^c u_{z_c}^c - \frac{\omega_0^2}{\lambda} \frac{M_{y_1}^*}{J_1}. \quad (11.30)$$

Тут позначено:

$$\lambda = \frac{H_0}{J_1}; \quad \zeta = \frac{f}{2\sqrt{cJ_1}}.$$

Доцільно також використовувати «безрозмірний» час τ , який пов'язаний зі звичайним часом рівністю:

$$\tau = \omega_0 t.$$

З урахуванням цієї заміни аргументу рівняння (11.30) суттєво спроститься за рахунок зменшення кількості коефіцієнтів:

$$x'' + 2\zeta x' + x = u_{z_c}^c - \frac{\lambda}{\omega_0^2} u_{x_c}^c x + \frac{\omega_0}{\lambda} u_{y_c}^c - \frac{J_2}{J_1} \frac{1}{\lambda} u_{x_c}^c u_{z_c}^c - \frac{1}{\lambda} \frac{M_{y_1}^*}{J_1}.$$

Штрих позначає похідну за безрозмірним часом.

В ідеальному випадку (відсутні шкідливі моменти сил, обертання основи тільки навколо осі z_c і досить велика жорсткість пружини) вихідна величина збігається з $u_{z_c}^c$. Похибка приладу визначиться як різниця між реальним і ідеальним значенням вихідної величини, тобто

$$\Delta u_z = x - x_{ид} = x - u_{z_c}^c.$$

Наприклад, похибка гіротахметра внаслідок дії постійного моменту сил вдовж вимірювальної осі визначиться виразом:

$$(\Delta u_z)_{M_y} = -\frac{1}{\lambda} \frac{M_{y_1}^*}{J_1} = -\frac{M_{y_1}^*}{H_0}.$$

Якщо $M_{y_1}^*$ являє собою момент сил сухого тертя, то знайдена формула визначає поріг чутливості гіротахметра, тобто ту мінімальну величину вимірюваної кутової швидкості основи, на яку здатен реагувати гіротахметр.

У подальшому докладно зупинимося лише на дослідженні явища виникнення в гіротахметрі сталої складової похибки вимірювання кутової швидкості через кутову вібрацію основи (хитавиці).

Нехай основа здійснює кутові коливання у просторі навколо деякої нерухомої осі (див. рис. 11.2) за законом

$$u^c = u_m \sin \omega t = u_m \sin \nu \tau, \quad (11.31)$$

де $\nu = \frac{\omega}{\omega_0}$ являє собою відношення частоти коливань основи до частоти влас-

них коливань гіротахметра. Проекції кутової швидкості основи на осі x_1, y_1 і z_1 гіроскопа визначаються виразами (11.4), а у проекціях на осі x_c, y_c, z_c – (11.3).

Нехтуючи збурювальними моментами M_{Y1}^* , вважаючи кутові швидкості та вихідну величину малими, можна, залишаючи лише члени до першого порядку мализни, отримати рівняння першого наближення

$$x_{(1)}'' + 2\zeta x_{(1)}' + x_{(1)} = u_{Zc}^c + \frac{\omega_0}{\lambda} u_{Yc}'^c.$$

Частинний розв'язок цього рівняння має вигляд:

$$x_{(1)} = x_S \sin v\tau + x_C \cos v\tau;$$

$$x_S = \frac{(1-v^2)A_S + 2\zeta v A_C}{(1-v^2)^2 + 4\zeta^2 v^2}; \quad x_C = \frac{(1-v^2)A_C - 2\zeta v A_S}{(1-v^2)^2 + 4\zeta^2 v^2}, \quad (11.32)$$

де

$$A_S = -u_m \cos \varepsilon \sin \beta_u; \quad A_C = u_m \frac{\omega}{\lambda} \sin \varepsilon.$$

Метою дослідження у другому наближенні буде не сам розв'язок $x_{(2)}$ рівняння другого наближення

$$x_{(2)}'' + 2\zeta x_{(2)}' + x_{(2)} = -\frac{\lambda}{\omega_0^2} u_{Xc}^c x_{(1)} - \frac{J_2}{J_1} \frac{1}{\lambda} u_{Xc}^c u_{Zc}^c, \quad (11.33)$$

а його постійна складова за період коливань основи. Тому, усереднюючи рівняння (11.33) і припускаючи, що $\langle x_{(2)}'' \rangle = 0$, $\langle x_{(2)}' \rangle = 0$, одержуємо вираз для середньої величини вихідної величини гіротахметра

$$\langle x \rangle = \langle x_{(2)} \rangle = -\frac{\lambda}{\omega_0^2} \langle u_{Xc}^c x_{(1)} \rangle - \frac{J_2}{J_1} \frac{1}{\lambda} \langle u_{Zc}^c u_{Xc}^c \rangle. \quad (11.34)$$

Підставляння (11.31) і (11.4) у (11.34) й усереднення правих частин дозволяє одержати наступне співвідношення:

$$\langle x \rangle = -\frac{\lambda u_m}{2\omega_0^2} x_S \cos \varepsilon \cos \beta_u + \frac{J_2}{J_1} \frac{u_m^2}{4\lambda} \cos^2 \varepsilon \sin 2\beta_u.$$

Оскільки у розглядуваному випадку середнє значення вимірюваної величини $u_{Zc}^c = -u_m \cos \varepsilon \sin \beta_u \sin \omega t$ дорівнює нулю, середнє значення вихідної величини є постійною похибкою вимірювання. Позначимо похибку через Δu_Z . Тоді, використовуючи знайдений вираз (11.32), дістанемо такий вираз сталої складової похибки:

$$\langle \Delta u_Z \rangle = -\frac{u_m^2}{\omega_0} \frac{\zeta v^2}{(1-v^2)^2 + 4\zeta^2 v^2} \sin \varepsilon \cos \varepsilon \cos \beta_u +$$

$$+ \frac{\lambda u_m^2}{2\omega_0^2} \left(\frac{1-v^2}{(1-v^2)^2 + 4\zeta^2 v^2} + \frac{J_2}{J_1} \frac{\omega_0^2}{4\lambda^2} \right) \cos^2 \varepsilon \sin 2\beta_u. \quad (11.35)$$

Аналіз (11.35) дозволяє дійти таких висновків:

– величина $\frac{\lambda}{\omega_0}$ зазвичай значно більше одиниці, тому головний внесок у

загальну похибку вносить друга складова (11.35), а в ній – перший доданок у дужках;

– остання складова набуває найбільшого значення при $\varepsilon = 0$ і $\beta_u = \pm \frac{\pi}{4}(2k + 1)$.

Тому оцінювати вібраційну похибку гіротахометра бажано за формулою:

$$\langle \Delta u_z \rangle = \frac{\lambda u_m^2}{2\omega_0^2} \frac{1 - v^2}{(1 - v^2)^2 + 4\zeta^2 v^2} = \frac{H_0 u_m^2}{2c} \frac{1 - v^2}{(1 - v^2)^2 + 4\zeta^2 v^2}.$$

Зазвичай демпфірування гіротахометра забезпечують таке, щоб в усьому робочому (дорезонансному) діапазоні частот змінювання кутової швидкості основи забезпечувався однаковий (по можливості) коефіцієнт передачі. За таких умов знаменник $(1 - v^2)^2 + 4\zeta^2 v^2$ у формулі наближено (з похибкою не більше 18%) дорівнює одиниці за будь якого значення частоти збурення v від нуля до одиниці. Тому у цьому діапазоні частот можна використовувати спрощений вираз сталої складової вібраційної похибки:

$$\langle \Delta u_z \rangle \approx \frac{H_0 u_m^2}{2c} (1 - v^2).$$

Як очевидно, найбільших значень похибка набуває при низькочастотних змінюваннях кутової швидкості основи, коли частота цього змінювання є набагато меншою за частоту (11.28) власних коливань гіротахометра.

Фізичний зміст появи похибки гіротахометра при кутових коливаннях основи той самий, що й у випадку двоступеневого гірокомпаса: *вона обумовлена випрямним ефектом моменту реакції в опорах вимірювальної осі, спрямованого по осі чутливості.*

11.4. Інші двоступеневі чутливі елементи

Якщо розташувати двоступеневий гіроскоп нерухомо на Землі так, що його вимірювальна вісь буде горизонтальна й суміщатиметься з лінією захід – схід, то вектор ω_3 кутової швидкості основи лежатиме у площині відносного повороту гіроскопа, а отже, головна вісь гіроскопа буде встановлюватися по вектору кутової швидкості обертання Землі.

Вимірюючи в сталому положенні гіроскопа кут між головною віссю й площиною обрїю $\xi\zeta$ можна одержати інформацію про географічну широту місця. Тому такий прилад одержав назву гіроширот. Його називають також гіроскопом Фуко другого роду.

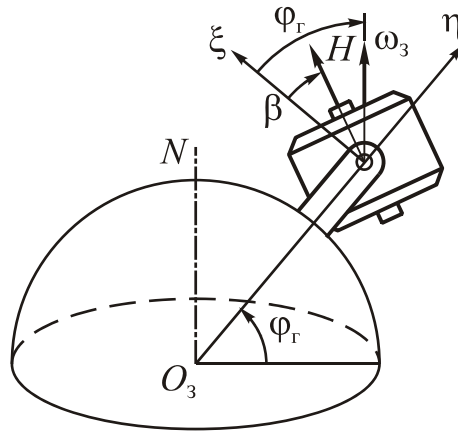


Рис. 11.16. Гіроширот

Гіроширот не знайшов практичного застосування з тих самих причин, що й двоступеневий гірокомпас. Похибки його аналогічні розглянутим в п. 11.2.

Ще одне застосування двоступеневого гіроскопа – *інтегрувальний гіроскоп*. Ним називають *двоступеневий гіроскоп, по вимірювальній осі якого діє демпфівальний момент сил*. Рівняння руху інтегрувального гіроскопа можна записати так (див. (11.26)):

$$J_1 \ddot{\beta} + f\dot{\beta} = -H_0 u_{Z1}^c - J_1 \dot{u}_{Yc}^c + J_2 u_{X1}^c u_{Z1}^c + M_{Y1}^*$$

В ідеальному випадку, коли шкідливих моментів сил по вимірювальній осі не діють, а основа, на який встановлено прилад, обертається з незмінною кутовою швидкістю, усталений рух інтегрувального гіроскопа описується наближеним рівнянням

$$\dot{\beta} = -\frac{H_0}{f} u_{Z1}^c \quad \Rightarrow \quad \Delta\beta = -\frac{H_0}{f} \int_0^t u_{Z1}^c dt.$$

Як бачимо, кут повороту рухомої частини приладу відносно основи пропорційний інтегралу від кутової швидкості обертання основи навколо осі чутливості. Цим і пояснюється назва приладу. Фактично інтегрувальний гіроскоп вимірює кут повороту основи навколо його осі чутливості, причому коефіцієнт передачі з цього кута має велике значення $\frac{H_0}{f}$, тобто такий прилад є дуже чутливим вимірювачем куту повороту основи. Інтегрувальний гіроскоп здобув широке застосування у системах керування гіростабілізованими платформами, положення яких стабілізується в інерціальному просторі за допомогою гіроскопів.

Завдання

Застосовуючи програмне забезпечення, подане у Додатку 6, виконати наступні завдання.

Завдання 11.1. Дослідження вільного руху двоступеневого гірокомпаса

1. Провести експериментальні дослідження (за зазначеною програмною моделлю):

- 1.1) залежності частоти власних коливань від величини кінетичного моменту і екваторіального моменту інерції;
 - 1.2) залежності положення рівноваги гірокомпаса від швидкості переміщення основи відносно поверхні Землі і постійного моменту сил по вертикальній осі;
 - 1.3) впливу в'язкого і сухого тертя на поведінку головної осі гірокомпаса.
2. Порівняти експериментально одержані результати з тими, що впливають з теоретичного дослідження. Зробити висновки з адекватності програмної і теоретичної моделей.
 3. Відповісти на запитання:
 - які рівняння руху двоступеневого гірокомпаса чисельно інтегруються у програмній моделі? в яких саме програмних продуктах вони реалізовані?
 - які можливості з імітування руху основи надає застосоване програмне забезпечення? які обмеження накладає воно на рух основи?
 - чи збігаються результати експериментальних досліджень з теоретичними передбаченнями? якщо спостерігаються розходження, то що його спричиняє?
 - напишіть формули частоти власних коливань маятникового гірокомпаса, швидкісної похибки і похибки через вертикальний момент сил.

Завдання 11.2. Дослідження впливу кутової вібрації основи на рух двоступеневого гірокомпаса

1. Користуючись вищезазначеними програмами, провести експериментальні дослідження залежності усталеного відхилення головної осі двоступеневого гірокомпаса від площини меридіану при вібрації основи від:
 - 1.1) амплітуди кутової вібрації;
 - 1.2) частоти вібрації;
 - 1.3) зсуву фаз між коливаннями основи навколо ліній північ-південь і схід-захід.
2. Порівняти експериментально одержані результати з тими, що впливають з теоретичного дослідження. Зробити висновки з адекватності програмної і теоретичної моделей.
3. Відповісти на запитання:
 - як впливають кутові коливання основи на двоступеневий гірокомпас?
 - як впливають поступальні коливання основи на двоступеневий гірокомпас?
 - чи збігаються результати експериментальних досліджень з теоретичними передбаченнями? якщо спостерігаються розходження, то що є їхньою причиною?
 - напишіть формулу вібраційної похибки гірокомпаса.

Контрольні запитання

1. Що являє собою двоступеневий гіроскоп?
2. Яка основна властивість двоступеневого гіроскопа?
3. Коли двоступеневий гіроскоп можна використовувати у якості гірокомпасу?
4. Чим викликається швидкісна похибка гірокомпасу ?
5. Як зміниться частота власних коливань двоступеневого гіроскопа, якщо його кінетичний момент збільшити в 2 рази?
6. Опишіть основні етапи відшукування постійних складових похибок, викликаних випрямним ефектом у двоступеневому гіроскопі?
7. Коли двоступеневий гіроскоп можна використовувати у якості гіротахметра?
8. Як буде поводити себе двоступеневий гірокомпас, якщо його рухатимемо по меридіану?
9. Як зміниться період власних коливань двоступеневого гіроскопа, якщо його момент інерції збільшити у 3 рази?
10. Як зміниться відхилення головної осі двоступеневого гіроскопа, якщо виникнуть кутові коливання основи?
11. Як зміниться відхилення головної осі двоступеневого гіротахметра при хитавиці, якщо момент інерції зменшити у 2 рази?
12. Охарактеризуйте похибку двоступеневого гірокомпасу з причини неточного горизонтування.
13. Опишіть швидкісну похибку гірокомпасу.
14. Охарактеризуйте вплив на двоступеневий гірокомпас моменту сил сухого тертя по вимірювальній осі.
15. Опишіть поведження гіротахметра при рівномірному обертанні основи.
16. Внаслідок яких причин виникає стала складова похибки двоступеневого гірокомпасу?
17. Як зміниться частота власних коливань двоступеневого гірокомпасу, якщо його розташувати на Місяці?
18. Як зміниться частота власних коливань гіротахметра, якщо його розташувати на Місяці?
19. Як зміниться швидкісна похибка двоступеневого гірокомпасу, якщо його розташувати на Місяці?
20. Як зміниться вібраційна похибка двоступеневого гірокомпасу, якщо його розташувати на Місяці?

Література

[15, с. 32 –42]; [46]; [65, с. 163 –180]; [29, с. 42–61].

Розділ 12. Чутливі елементи на основі триступеневого гіроскопа в кардановому підвісі

Астатичний гіроскоп у кардановому підвісі (ГКП) використовують як чутливий елемент багатьох сучасних гіроскопічних приладів, що встановлюють на літаках, ракетах, торпедах, космічних апаратах. Такими приладами є:

– «вільні» гіроприлади, призначені вимірювати кути орієнтації основи, які так називають з причини, що вони не мають корегувальних пристроїв, що накладають корегувальні моменти сил;

– гіроскопи напрямку, призначені вимірювати кут рискання транспортного засобу, і споряджені системами горизонтальної і азимутальної корекції;

– у певному розумінні, – також і гіровертикалі (прилади, призначенням яких є вимірювання кутів відхилення основи від вертикалі), для коригування яких використовується система радіальної корекції.

Завданням теоретичного аналізу поведінки таких чутливих елементів є здебільшого виявлення їх можливих похибок в умовах їх експлуатації, передусім – унаслідок впливу руху основи. Оскільки частоти руху основи через її значну інерційність набагато менші за частоту власних (нутаційних) коливань гіроскопа, вплив моментів, що виникають унаслідок кутового руху основи, можна вивчати за прецесійними рівняннями (див. п. 2.5).

Для побудови математичних моделей систем орієнтації транспортних засобів, що переміщуються по поверхні Землі, слід використовувати опорні системи координат, зокрема географічну, і спеціальні опорні кутові координати головної осі гіроскопа (див. п.п. 2.5.2 і 2.5.3). При цьому доцільно користуватися рівняннями (2.57), виведеними для кінематики відносних поворотів, зображеної на рис. 12.1, і (2.58) – для кінематики гіроскопа в опорній системі координат, наведеної на рис. 12.2.

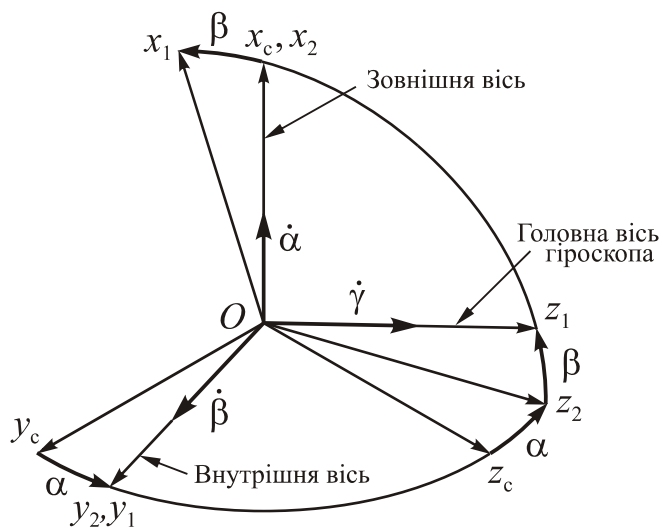


Рис. 12.1. Кінематика відносних поворотів

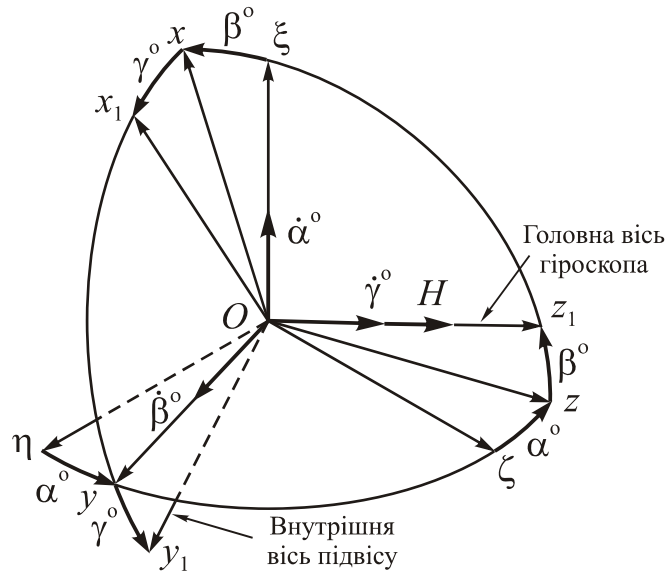


Рис. 12.2. Кінематика поворотів гіроскопа в опорній системі координат

Прецесійні рівняння руху ГКП у відносних кутових координатах мають вигляд:

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = -u_{x_c}^c + (u_{z_c}^c \cos \alpha - u_{y_c}^c \sin \alpha) \operatorname{tg} \beta - \frac{L}{H \cos \beta}; \\ \frac{d\beta}{dt} = -(u_{y_c}^c \cos \alpha + u_{z_c}^c \sin \alpha) + \frac{N - R \sin \beta}{H \cos \beta}; \\ \frac{dH}{dt} = R + M_{\text{ст}}. \end{cases} \quad (12.1)$$

Прецесійні рівняння руху ГКП в опорних кутових координатах мають вигляд:

$$\begin{cases} \frac{d\alpha^0}{dt} = -u_{\xi} + (u_{\zeta} \cos \alpha^0 - u_{\eta} \sin \alpha^0) \operatorname{tg} \beta^0 - \frac{L}{H \cos \beta^0} \cos \gamma^0 - \frac{N - R \sin \beta}{H \cos \beta^0 \cos \beta} \sin \gamma^0; \\ \frac{d\beta^0}{dt} = -(u_{\eta} \cos \alpha^0 + u_{\zeta} \sin \alpha^0) + \frac{N - R \sin \beta}{H \cos \beta} \cos \gamma^0 - \frac{L}{H} \sin \gamma^0; \\ \frac{dH}{dt} = R + M_{\text{ст}}. \end{cases} \quad (12.2)$$

Для аналізу динаміки гіроскопа вимушено використовують обидві ці системи рівнянь, при цьому перша система зазвичай інтегрується (вивчається) першою, бо за її розв'язками відшукуються кути α і β відносних поворотів рамок підвісу, а також їхні похідні $\dot{\alpha}$ і $\dot{\beta}$, якими визначаються моменти сил взаємодії рамок по осях підвісу. У такий спосіб стають відомими як функції часу моменти сил, що входять у другу систему (12.2). Розв'язуючи її, знаходять похибки α^0 і β^0 чутливого елемента. Такий спосіб теоретичного дослідження похибок виявляється найбільш ефективним і наочним.

12.1. Гіроскоп у кардановому підвісі на обертовій основі під впливом моментів сил тертя

Вивчення поведінки ГКП на рухомій основі почнемо з виявлення особливостей руху його головної осі під дією сил тертя під час обертання основи у просторі з постійною кутовою швидкістю.

Припустимо, що основа обертається в інерціальному просторі з незмінною як за значенням, так і за напрямком кутовою швидкістю ω , опорна система координат $\xi\eta\zeta$ є нерухомою ($\mathbf{u} = 0$), а в початковий момент часу зв'язана $(x_c y_c z_c)$ з основою і опорна $(\xi\eta\zeta)$ системи координат збігаються. Тоді

$$\mathbf{u}^c = \omega = \text{const}; \quad \mathbf{u} = 0. \quad (12.3)$$

Задамо кутовими координатами α_ω і β_ω положення вектора кутової швидкості основи в інерціальному просторі (системі $\xi\eta\zeta$), рис. 12.3.

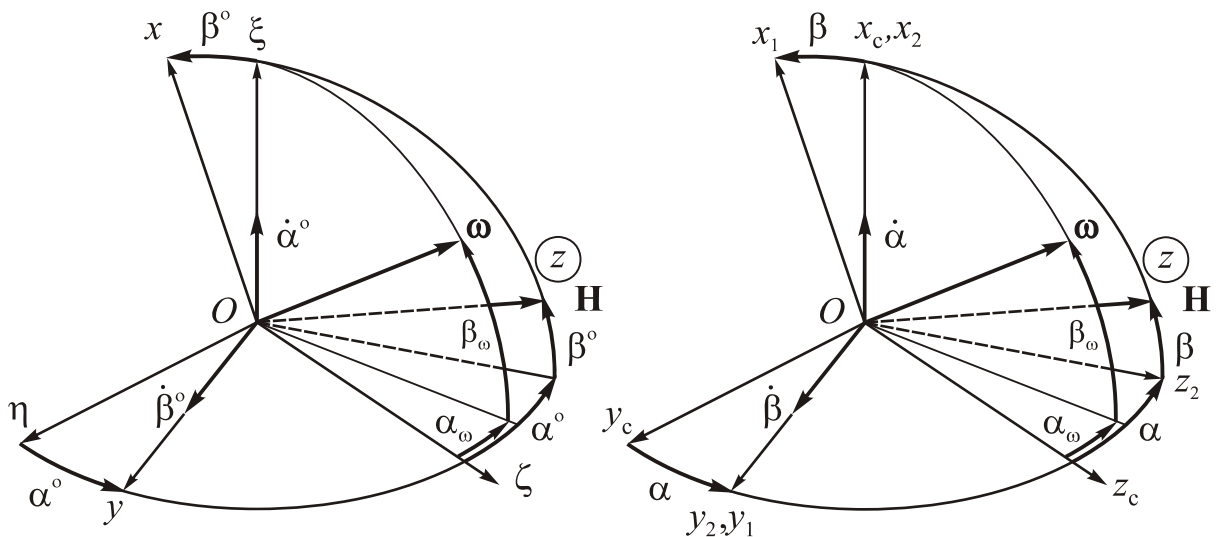


Рис. 12.3. Кінематика ГКП на обертовій основі

Таке саме кутове положення, за умовою, буде займати вектор ω і відносно зв'язаної системи. Більше того, через сталість напрямку цього вектора в просторі, він буде нерухомий й у системі координат $x_c y_c z_c$, яка обертається з цією кутовою швидкістю, тобто α_ω й β_ω є постійними кутовими координатами положення вектора ω й у зв'язаній системі (рис. 12.3.).

Оскільки вектор $\mathbf{u}^c = \omega$ незмінний в обох системах, у них будуть постійними й усі його проекції, тому

$$u_{x_c}^c = \omega \sin \beta_\omega = \text{const}; \quad u_{y_c}^c = -\omega \cos \beta_\omega \sin \alpha_\omega = \text{const};$$

$$u_{z_c}^c = \omega \cos \beta_\omega \cos \alpha_\omega = \text{const}.$$

Урахуємо також, що

$$u_{x_2}^c = u_{x_c}^c; \quad u_{y_2}^c = u_{y_c}^c \cos \alpha + u_{z_c}^c \sin \alpha; \quad u_{z_2}^c = u_{z_c}^c \cos \alpha - u_{y_c}^c \sin \alpha,$$

а тому

$$u_{x_2}^c = \omega \sin \beta_\omega; \quad u_{y_2}^c = \omega \cos \beta_\omega \sin(\alpha - \alpha_\omega); \quad u_{z_2}^c = \omega \cos \beta_\omega \cos(\alpha - \alpha_\omega). \quad (12.4)$$

Для визначення абсолютного й відносного (відносно основи $x_c y_c z_c$) рухів головної осі гіроскопа z скористаємося прецесійними рівняннями.

Нехай на гіроскоп по осях його підвісу не діють моменти сил, тобто $N \equiv L \equiv R \equiv M_{ct} \equiv 0$. Тоді, з урахуванням виразу (12.3), прецесійні рівняння (12.2) в «абсолютних» координатах α° й β° приводять до рівностей

$$\alpha^\circ = \alpha_0^\circ = \text{const}; \quad \beta^\circ = \beta_0^\circ = \text{const}; \quad H = H_0 = \text{const},$$

фізично інтерпретуючи які, дійдемо тривіального висновку, що *головна вісь гороскопа зберігає незмінним своє положення в інерціальному просторі*.

Рівняння відносного руху (12.1) перетворюються до вигляду (див. (12.4)):

$$\frac{d\beta}{dt} = -\omega \cos \beta_\omega \sin(\alpha - \alpha_\omega); \quad \frac{d\alpha}{dt} = -\omega \sin \beta_\omega + \omega \cos \beta_\omega \cos(\alpha - \alpha_\omega) \text{tg} \beta. \quad (12.5)$$

Аналіз цих рівнянь свідчить про те, що в загальному випадку під час обертання основи положення головної осі гіроскопа відносно основи буде змінюватися. Цього руху не буде, якщо в початковий момент головна вісь збігається з вектором кутової швидкості обертання основи:

$$\alpha_0 = \alpha_\omega; \quad \beta_0 = \beta_\omega.$$

У цьому неважко переконатися, підставивши $\alpha_\omega, \beta_\omega$ у рівняння (12.5).

Покажемо, що рівняння (12.5) еквівалентні умові сталості кута між головною віссю гороскопа й вектором кутової швидкості обертання основи. Знайдемо косинус кута між цими векторами за теоремою косинусів сферичної тригонометрії, опираючись на трикутник $\omega x_c \mathbf{H}$ (рис. 12.3):

$$\cos(\omega, \mathbf{H}) = \sin \beta_\omega \sin \beta + \cos \beta_\omega \cos \beta \cos(\alpha - \alpha_\omega). \quad (12.6)$$

Якщо кут між ω й \mathbf{H} є постійним протягом усього часу руху гіроскопа, то, диференціюючи за часом (12.6), маємо отримати нуль:

$$\dot{\beta} [\sin \beta_\omega \cos \beta_\omega - \cos \beta_\omega \sin \beta_\omega \cos(\alpha - \alpha_\omega)] - \dot{\alpha} \cos \beta_\omega \cos \beta \sin(\alpha - \alpha_\omega) = 0. \quad (12.7)$$

Рівняння (12.7) легко звести до такого

$$\frac{\dot{\beta}}{\cos \beta_\omega \sin(\alpha - \alpha_\omega)} = \frac{\dot{\alpha}}{\sin \beta_\omega - \cos \beta_\omega \cos(\alpha - \alpha_\omega) \text{tg} \beta},$$

яке дійсно тотожно виконується відповідно до рівнянь (12.5).

Отже, *головна вісь гіроскопа рухається відносно основи по поверхні колового конуса з центральною віссю, що збігається з вектором кутової швидкості обертання основи*. Розхил кута при вершині конуса дорівнює початковому куту між векторами \mathbf{H} й ω .

У разі малих відхилень осі фігури від вектора кутової швидкості основи, тобто за умови $\alpha - \alpha_\omega \ll 1$ і $\beta - \beta_\omega \ll 1$, рівняння (12.1) можна лінеаризувати за змінними

$$x = \alpha - \alpha_\omega; \quad y = \beta - \beta_\omega. \quad (12.8)$$

У результаті виходить система рівнянь

$$\begin{cases} \frac{d(\alpha - \alpha_\omega)}{dt} = \frac{\omega}{\cos \beta_\omega} (\beta - \beta_\omega) - \frac{L}{H_0 \cos \beta_\omega}; \\ \frac{d(\beta - \beta_\omega)}{dt} = -\omega \cos \beta_\omega (\alpha - \alpha_\omega) + \frac{N}{H_0 \cos \beta_\omega}, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} - \frac{\omega}{\cos \beta_\omega} y = -\frac{L}{H_0 \cos \beta_\omega}; \\ \frac{dy}{dt} + \omega \cos \beta_\omega x = \frac{N}{H_0 \cos \beta_\omega}. \end{cases} \quad (12.9)$$

Тут і надалі вважатимемо, що моменти сил по головній осі підвісу не діють, а отже, власний кінетичний момент залишається незмінним ($H = H_0 = \text{const}$).

Якщо усі моменти сил, що діють на гіроскоп по осях карданового підвісу дорівнюють нулю, то система рівнянь (12.9) набуває вигляду:

$$\begin{cases} \dot{x} - \frac{\omega}{\cos \beta_\omega} y = 0; \\ \dot{y} + \omega \cos \beta_\omega x = 0, \end{cases}$$

яка має розв'язок

$$x = C \sin(\omega t + \delta); \quad y = C \cos \beta_\omega \cos(\omega t + \delta).$$

Графік траєкторії апексу гіроскопа у картинній площині, зв'язаній з обертовою основою, показаний на рис. 12.4.

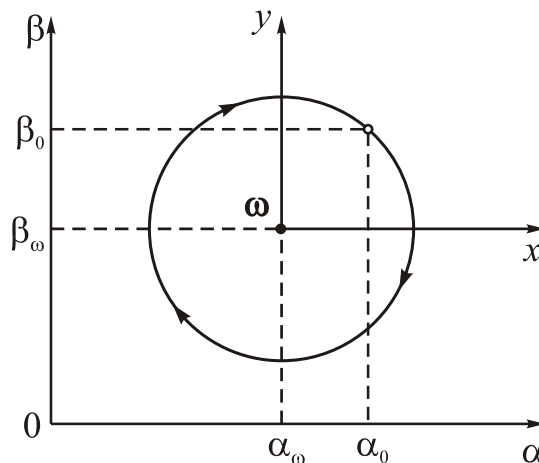


Рис. 12.4. Траєкторія вершини ГКП у відносному русі при обертанні основи

З нього випливає, що головна вісь гіроскопа у відносному русі здійснює рівномірне обертання по конусу навколо вектора кутової швидкості основи в напрямку, зворотному обертанню основи.

Тепер припустимо, що по осях підвісу діють моменти сил в'язкого тертя

$$L = -f_1 \dot{\beta}; \quad N = -f_2 \dot{\alpha}. \quad (12.10)$$

Дослідження здійснюватимемо у відносних координатах за умов $\alpha - \alpha_\omega \ll 1$; $\beta - \beta_\omega \ll 1$, використовуючи позначення (12.8). Рівняння прецесійного руху будуть відрізнятися від (12.9) лише правими частинами

$$\dot{x} - \frac{\omega}{\cos\beta_\omega} y = \frac{f_1}{H_0 \cos\beta_\omega} \dot{y}; \quad \dot{y} + \omega \cos\beta_\omega x = -\frac{f_2}{H_0 \cos\beta_\omega} \dot{x}. \quad (12.11)$$

Щоб застосувати компресію рівнянь, запишемо рівняння (12.11) інакше:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(x \cos\beta_\omega) - \omega y = \frac{f_1}{H_0} \frac{dy}{dt}; \\ \frac{dy}{dt} + \omega(x \cos\beta_\omega) = -\frac{f_2}{H_0} \frac{d}{dt}(x \cos\beta_\omega), \end{cases} \quad (12.12)$$

зробимо припущення

$$\frac{f_1}{H_0} = \frac{f_2}{H_0 \cos^2\beta_\omega} = \varphi,$$

та введемо комплексну змінну

$$z = x \cos\beta_\omega + jy. \quad (12.13)$$

Помноживши друге рівняння (12.12) на уявну одиницю і склавши почленно з першим рівнянням, зведемо систему рівнянь (12.12) до одного рівняння першого порядку

$$\dot{z}(1 + j\varphi) + j\omega z = 0. \quad (12.14)$$

Характеристичне рівняння $p(1 + j\varphi) + j\omega = 0$, яке відповідає отриманому диференціальному рівнянню, має розв'язок

$$p = -\omega \frac{\varphi}{1 + \varphi^2} - j \frac{\omega}{1 + \varphi^2}.$$

Тому загальний розв'язок рівняння (12.14) можна подати у такий спосіб:

$$z = z_0 e^{-\frac{\omega\varphi}{1+\varphi^2}t} e^{-j\frac{\omega}{1+\varphi^2}t}, \quad (12.15)$$

де

$$z_0 = x_0 \cos\beta_\omega + jy_0 = (\alpha_0 - \alpha_\omega) \cos\beta_\omega + j(\beta_0 - \beta_\omega).$$

Траєкторії головної осі ГКП на картинній площині, що відповідають додатному й від'ємному значенням ω у рівнянні (12.15), показано на рис. 12.5. Додатне значення ω відповідає малому куту між напрямками векторів кінетичного моменту \mathbf{H} гіроскопа й кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}$ основи, а від'ємне – куту, близькому до розгорнутого (тобто напрямку обертання основи, протилежному напрямку власного обертання ротора гіроскопа).

Аналіз отриманих результатів дозволяє дійти таких висновків.

1. За наявності опору відносному руху гіроскопа, якщо обертання основи відбувається в одному напрямку із власним обертанням гіроскопа, вектор кутової швидкості власного обертання гіроскопа наближується до вектора кутової швидкості абсолютного обертання основи.

2. Якщо основа обертається у бік, протилежний власному обертанню ротора, то кут між віссю фігури й віссю обертання основи неперервно збільшується

(нестійкий рух). Але якщо врахувати, що в цьому випадку вектори \mathbf{H} й $\boldsymbol{\omega}$ утворюють між собою кут, близький до розгорнутого, то виявляється, що й у цьому випадку кут між векторами власної кутової швидкості гіроскопа й кутової швидкості обертання основи увесь час зменшується.

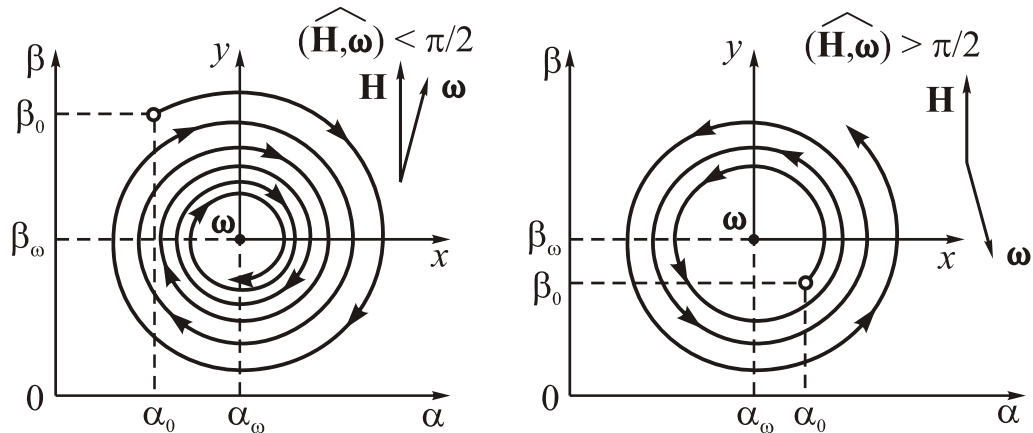


Рис. 12.5. Траєкторія апексу ГКП у відносному русі при наявності в'язкого тертя

3. В умовах в'язкого тертя швидкість загасання або наростання коливань пропорційна кутовій швидкості ω обертання основи.

Отже, *опір відносному руху гіроскопа зумовлює поворот гіроскопа до напрямку, в якому його власне обертання збігається з обертанням основи.*

На практиці часто спостерігається прояви цієї властивості. Саме завдяки їй в Північній півкулі стійкими є лише ті вихрові атмосферні явища (наприклад, циклони, тайфуни, смерчі), обертання мас повітря усередині яких відбувається проти годинникової стрілки при погляді зверху. У Південній півкулі спостерігається зворотна картина.

Запишемо розв'язок (12.15) у відносних координатах

$$\alpha - \alpha_{\omega} = \left[(\alpha_0 - \alpha_{\omega}) \cos \omega_0 t + \frac{\beta_0 - \beta_{\omega}}{\cos \beta_{\omega}} \sin \omega_0 t \right] e^{-ht};$$

$$\beta - \beta_{\omega} = \left[(\beta_0 - \beta_{\omega}) \cos \omega_0 t + (\alpha_0 - \alpha_{\omega}) \cos \beta_{\omega} \sin \omega_0 t \right] e^{-ht},$$

де

$$h = \frac{\omega \varphi}{1 + \varphi^2}; \quad \omega_0 = \frac{\omega}{1 + \varphi^2}.$$

Швидкість змінювання відносних координат можна знайти, диференціюючи знайдені вирази:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= e^{-ht} \left[\frac{(\beta_0 - \beta_{\omega}) \omega_0}{\cos \beta_{\omega}} - h(\alpha_0 - \alpha_{\omega}) \right] \cos \omega_0 t - \left[(\alpha_0 - \alpha_{\omega}) \omega_0 + h \frac{\beta_0 - \beta_{\omega}}{\cos \beta_{\omega}} \right] \sin \omega_0 t; \\ \dot{\beta} &= \left\{ [(\alpha_0 - \alpha_{\omega}) \omega_0 \cos \beta_{\omega} - h(\beta_0 - \beta_{\omega})] \cos \omega_0 t + \right. \\ &\quad \left. - [(\beta_0 - \beta_{\omega}) \omega_0 - h(\alpha_0 - \alpha_{\omega}) \cos \beta_{\omega}] \sin \omega_0 t \right\} e^{-ht}. \end{aligned} \quad (12.16)$$

За малої відмінності в напрямках осі фігури гіроскопа й осі обертання основи можна вважати

$$\dot{\gamma}^\circ \approx \omega \quad \Rightarrow \quad \gamma^\circ = \omega t. \quad (12.17)$$

Підставивши розв'язки (12.16) у вирази (12.10), а потім отриманий вираз у рівняння (12.2), з використанням (12.17), дістанемо рівняння повороту гіроскопа в абсолютних кутових координатах

$$\dot{\alpha}^\circ = -e^{ht} \varphi \omega_0 (\alpha - \alpha_\omega); \quad \dot{\beta}^\circ = -e^{ht} \varphi \omega_0 (\beta_0 - \beta_\omega),$$

інтегруючи які, можна знайти залежність від часу абсолютних кутових координат

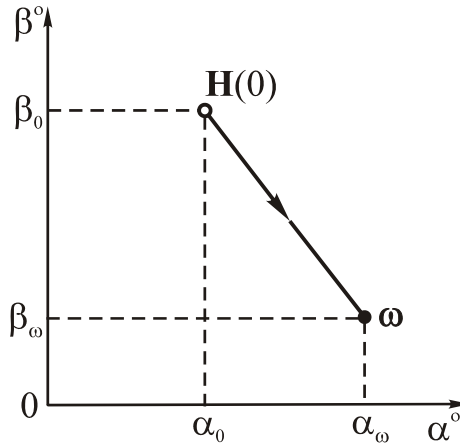
$$\alpha^\circ = \alpha_0 + (\alpha_0 - \alpha_\omega)(e^{-ht} - 1); \quad \beta^\circ = \beta_0 + (\beta_0 - \beta_\omega)(e^{-ht} - 1). \quad (12.18)$$


Рис 12.6. Траєкторія вершини ГКП в інерціальній системі координат

З розв'язків (12.18) випливає, що під дією сил опору відносному рухові головної осі гіроскопа вектор \mathbf{H} власного кінетичного моменту гіроскопа переміщується в абсолютному просторі по найкоротшому шляху до вектора ω абсолютної кутової швидкості основи (рис. 12.6).

Для дослідження руху ГКП під дією моментів сил сухого тертя доцільно використати метод зображувальної точки Є. Л. Ніколаї і компресію рівнянь.

Нехай на гіроскоп діють моменти сил сухого тертя

$$N = -N_m \operatorname{sign} \dot{\alpha}; \quad L = -L_m \operatorname{sign} \dot{\beta}. \quad (12.19)$$

Рівняння відносного руху (12.12) у такому випадку набудуть вигляду:

$$\dot{x} \cos \beta_\omega - \omega y = \frac{L_m}{H_0} \operatorname{sign} \dot{y}; \quad \dot{y} + \omega \cos \beta_\omega x = -\frac{N_m}{H_0 \cos \beta_\omega} \operatorname{sign} \dot{x}.$$

Позначаючи

$$l_m = \frac{L_m}{H_0}; \quad n_m = \frac{N_m}{H_0 \cos \beta_\omega},$$

з врахуванням позначення (12.13), зведемо рівняння до одного

$$\dot{z} + j\omega z = l_m \operatorname{sign} \dot{y} - jn_m \operatorname{sign}(\dot{x} \cos \beta_\omega).$$

Власний рух гіроскопа в площині xu зобразиться у вигляді дуги кола, по якому апекс гіроскопа переміщується (при $\omega > 0$) за годинниковою стрілкою навколо центра z^* , який визначається співвідношенням

$$z^* = \frac{l_m \operatorname{sign} \dot{y} - j n_m \operatorname{sign}(\dot{x} \cos \beta_\omega)}{j\omega} = -\frac{n_m}{\omega} \operatorname{sign}(\dot{x} \cos \beta_\omega) - j \frac{l_m}{\omega} \operatorname{sign} \dot{y}.$$

Розглянемо можливі значення величини z^* , якщо апекс рухається по колу за годинниковою стрілкою. Назвемо квадрантом I область правої верхньої чверті кола, II – ліву верхню чверть площини від центра кола й т.д. у відповідності до рис. 12.7.

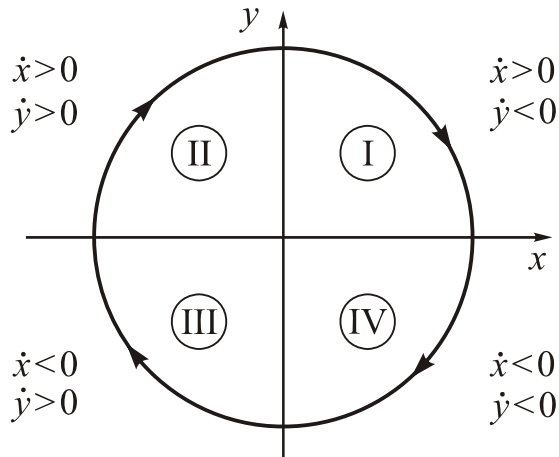


Рис. 12.7. Квадранти і знаки кутових швидкостей ГКП у них

У квадранті I значення збільшується, отже $\dot{x} > 0$, а значення y зменшується ($\dot{y} < 0$). Аналогічно можна простежити знаки швидкостей \dot{x} і \dot{y} для решти квадрантів. Їх показано на рис. 12.7. Відповідно до цього координати центрів кола можна подати у вигляді таблиці (табл. 12. 1):

Таблиця 12.1

Координати центра	Квадранти			
	1	2	3	4
$x^* = \operatorname{Re}(z^*)$	$-\frac{n_m}{\omega}$	$-\frac{n_m}{\omega}$	$\frac{n_m}{\omega}$	$\frac{n_m}{\omega}$
$y^* = \operatorname{Im}(z^*)$	$\frac{l_m}{\omega}$	$-\frac{l_m}{\omega}$	$-\frac{l_m}{\omega}$	$\frac{l_m}{\omega}$

Нанесемо ці центри на площину xu , відзначивши їх номером відповідного квадранта (рис. 12.8). Там же нанесемо межі ділянок (квадрантів), у яких знаки швидкостей \dot{x} й \dot{y} залишаються незмінними. Рух у кожній з цих ділянок відбувається по колу з центром у розі цієї ділянки. Чотирикутник 1–2–3–4 називають чотирикутником застою. Коли апекс переходить з однієї ділянки в іншу, стрибком змінюється радіус кола (змінюється її центр). Рух же триває (вже навколо нового центра) проти годинникової стрілки. В цілому траєкторія являє собою збіжну спіраль при $\omega > 0$ (рис. 12.8) й розбіжну при $\omega < 0$ (у цьому випадку змінюється на-

прямою переміщення зображувальної точки на протилежне – проти годинникової стрілки, у той час, як усі ділянки й центри зберігаються попередніми, рис. 12.9.).

У разі попадання апекса у чотирикутник застою відносний рух гіроскопа припиняється. Тобто якщо апекс знаходиться всередині, або на межі чотирикутника 1–2–3–4, то він залишається надалі нерухомим відносно основи (застигає). Саме цим зумовлено назву чотирикутника застою

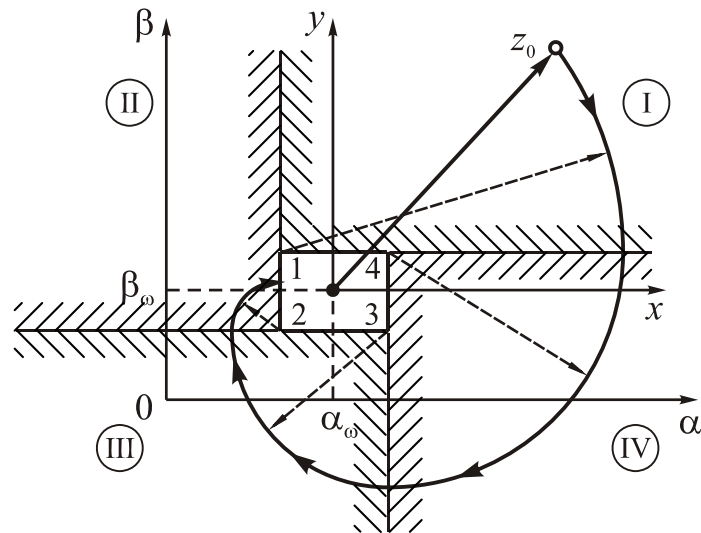


Рис. 12.8. Траєкторія відносного руху вершини ГКП при дії сухого тертя

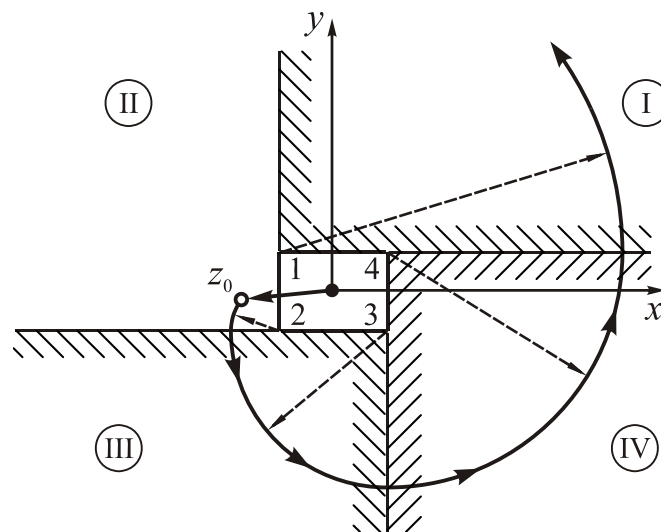


Рис. 12.9. Траєкторія відносного руху при $\omega < 0$

У цілому рух ГКП має ті самі основні особливості, що були виявлені при вивченні впливу в'язкого тертя. Основною відмінністю впливу сухого тертя є припинення відносного руху з досягненням апексом чотирикутника застою. У цьому разі головна вісь гіроскопа нібито «захоплюється» силами сухого тертя й починає обертатися в абсолютному просторі разом з основою з кутовою швидкістю ω . У результаті траєкторія головної осі гіроскопа в інерціальній системі координат має вигляд кривої, показаної на рис. 12.10.

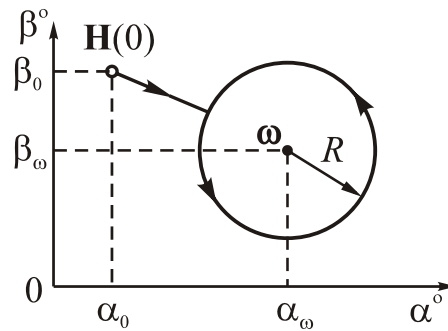


Рис. 12.10. Траєкторія вершини гіроскопа в опорній системі координат

Радіус R кола, який описує апекс гіроскопа на картинній площині, визначається шириною зони застою і являє собою максимальне значення кута між векторами кінетичного моменту гіроскопа й кутової швидкості основи, за якого гіроскоп «захоплюється» силами сухого тертя. Більш точно ширина зони застою по кутах α і β (α^* і β^*) визначиться з рівнянь (12.1) з врахуванням (12.4):

$$\sin(\alpha^* - \alpha_\omega) = \frac{N_m}{H_0 \omega \cos \beta_\omega \cos \beta^*}; \quad \sin(\beta^* - \beta_\omega) \approx \frac{L_m}{H_0 \omega}, \quad (12.20)$$

з яких видно, що зона застою визначається рівновагою між гіроскопічним моментом, що «діє» на гіроскоп через обертання в просторі його вектора кінетичного моменту \mathbf{H} з кутовою швидкістю ω обертання основи, й моментом сил сухого тертя.

За умови, що моменти сил тертя перевищують цей гіроскопічний момент

$$N_m > |H_0 \omega|; \quad L_m > |H_0 \omega|, \quad (12.21)$$

область застою охоплює весь простір, див. (12.20). У цьому випадку, яке б кутове положення не займала у просторі головна вісь гіроскопа, вона повністю втрачає властивість зберігати у просторі незмінним свій напрямок й обертається разом з основою як жорстко пов'язана з нею.

З виразів (12.21) випливає, що за відомого тертя в осях підвісу й кінетичного моменту гіроскопа існує таке значення кутової швидкості основи

$$\omega^* = -\frac{L_m}{|H|}; \quad (L_m < N_m),$$

що при обертанні основи з кутовою швидкістю, меншою за це значення, гіроскоп повністю втрачає гіроскопічні властивості. Фактично ω^* характеризує собою точність (вірніше, кутову швидкість дрейфу) гіроскопа, з якою він зберігає в просторі заданий напрямок.

Приклад. Нехай гіроскоп з кінетичним моментом $H = 1$ Н м с встановлено нерухомо на обертовій Землі ($\omega = 7,3 \cdot 10^{-5}$ рад/с). Якщо по осях підвісу діють моменти сил сухого тертя $N_m = L_m = 1 \cdot 10^{-5}$ Н м, то вони зумовлять, з одного боку, постійне зближення осі ротора ГКП із віссю обертання Землі зі швидкістю близько одного градуса за годину, а з іншого боку – припинення цього зближення при зменшенні кута між віссю світу й головною віссю гіроскопа до значення, див. (12.20):

$$\alpha^* - \alpha_\omega \approx \beta^* - \beta_\omega = \frac{1 \cdot 10^{-5}}{1 \cdot 7,3 \cdot 10^{-5}} \approx 0,14 \approx 7^\circ,85.$$

У кінцевому підсумку такий гіроскоп буде нерухомим відносно Землі, а головна його вісь буде відхилена від осі світу на кут близько 8° у будь-якому напрямку, якщо сухе тертя є по обох осях підвісу.

Цікаво відзначити, що ГКП можна (принципово) використовувати як гірокомпас і гіроширот одночасно, але для цього потрібно виконати наступні умови:

- корпус ГКП має бути нерухомим відносно поверхні Землі;
 - мають бути зменшені до припустимої величини моменти сил сухого тертя;
 - має бути значне в'язке тертя по осях чутливості приладу.
- Період власних коливань такого приладу становитиме добу.

12.2. Дрейфи гіроскопа в кардановому підвісі за хита-виці основи

12.2.1. Аналіз похибок гіроскопа в кардановому підвісі як вказівника напрямку

Для теоретичного вивчення похибок триступеневого вказівника заданого напрямку в опорній системі координат скористаємося прецесійними рівняннями руху гіроскопа (12.2) в опорних кутових координатах, оскільки, за припущенням, гіроскоп призначений для втримання своєю головною віссю незмінного напрямку ζ в опорній системі координат, а кути α° та β° характеризують поточне відхилення головної вісі від цього заданого напрямку, тобто фактично, шукану похибку.

Вирази (12.2) являють собою значення швидкостей дрейфу гіроскопа від заданого напрямку ζ . У цілому ці дрейфи можна розбити на дві групи:

а) кінематичні, або удавані дрейфи

$$\dot{\alpha}_{\text{кін}}^\circ = -u_\xi + (u_\zeta \cos \alpha^\circ - u_\eta \sin \alpha^\circ) \operatorname{tg} \beta^\circ; \quad \dot{\beta}_{\text{кін}}^\circ = -(u_\eta \cos \alpha^\circ + u_\zeta \sin \alpha^\circ).$$

б) динамічні дрейфи

$$\dot{\alpha}_{\text{дин}}^\circ = -\frac{L}{H_0 \cos \beta^\circ} \cos \gamma^\circ - \frac{N - R \sin \beta}{H_0 \cos \beta^\circ \cos \beta} \sin \gamma^\circ; \quad (12.22)$$

$$\dot{\beta}_{\text{дин}}^\circ = \frac{N - R \sin \beta}{H_0 \cos \beta} \cos \gamma^\circ - \frac{L}{H_0} \sin \gamma^\circ,$$

Удавані дрейфи зумовлені поворотом в інерціальному просторі опорної системи координат з кутовою швидкістю \mathbf{u} . Якщо на гіроскоп не діють моменти ($N = L = R = 0$), то головна вісь гіроскопа зберігає незмінний напрямок в інерціальному просторі і внаслідок обертання опорної системи обертається відносно опорної системи у зворотний бік. Так, якщо спрямувати головну вісь гіроскопа на яку-небудь зірку, то стежачи за цією зіркою, напрямок якої незмінний в інерція-

льному просторі, вісь ротора опише за добу конус (якщо основа нерухома відносно Землі) навколо напрямку на Полюс Світу – Полярну зірку.

Зазвичай для того, щоб змусити гіроскоп зберігати заданий напрямок не в інерціальному просторі, а в опорній системі координат, вживають спеціальних заходів щодо усунення удаваних дрейфів: або вводять керувальні моменти по осях підвісу, які компенсують видимий дрейф, або просто враховують цей дрейф яким-небудь способом.

Надалі припускати мемо, що удавані дрейфи повністю скомпенсовані, і якщо на гіроскоп не діють ніякі збурювальні моменти (окрім тих, що компенсують кінематичні дрейфи), то головна вісь зберігає своє положення незмінним вже в *опорній системі координат*. У цьому випадку єдиною причиною відхилень осі ротора від заданого напрямку в опорній системі координат будуть збурювальні моменти N , L , R , і дрейфи гіроскопа в опорній системі визначаються рівняннями (12.22).

Аналіз (12.22) показує, що в загальному випадку за довільних кутових рухів об'єкта ($\gamma^\circ \neq 0$) на дрейфи гіроскопа у площині $\eta\zeta$ (див. рис 12.2) й від цієї площини (тобто з кутів α° та β° відповідно) впливають моменти по усіх осях підвісу (N , L та R). Наприклад, на рух гіроскопа в площині $\eta\zeta$ (з куту α°), навіть у випадках, коли зовнішня вісь підвісу в середньому залишається перпендикулярною до цієї площини, можуть вплинути не тільки «перехресні» моменти L , які зумовлюють прецесію головної осі в площині $\eta\zeta$, але й «однойменні» моменти N по зовнішній осі й моменти R по головній осі. Саме «однойменні» моменти, які діють навколо осей, у середньому збіжних із напрямком шуканої кутової швидкості дрейфу, можуть приводити до постійних дрейфів у випадках, коли самі моменти є знакозмінними функціями, якщо їхня дія супроводжується синхронним похитуванням основи навколо головної осі (з куту γ°). Цей ефект у гіроскопічній літературі називають «випрямним» або ефектом детектування.

Розглянемо фізичний зміст такого ефекту на прикладі появи постійної складової дрейфу $\dot{\alpha}^\circ$ осі ротора гіроскопа (див. рис. 12.2) при дії періодичного моменту N по зовнішній осі підвісу x_2 (x_c , рис. 12.1) і одночасній синхронній і синфазній з цим моментом хитанні основи навколо перпендикуляра до площини зовнішньої рамки z_2 . Хитання основи приводить до того, що синхронно зі значенням моменту N змінюється його напрямок (момент N напрямлений по зовнішній осі підвісу, яка хитається сумісно з основою).

Як видно з рис.12.11, таке синхронне та синфазне змінювання значення моменту N і його напрямку (кута γ°) приводить до появи незмінної по напрямку складової цього моменту, що лежить у площині $\eta\zeta$ (якщо $\alpha^\circ \ll 1$ – майже збіжній з віссю η). Ця складова викличе прецесію гіроскопа в площині $\eta\zeta$. Інакше кажучи, буде відбуватися постійне обертання головної осі навколо осі ξ (тобто виникне постійна складова $\langle \dot{\alpha}^\circ \rangle$ дрейфу гіроскопа навколо цієї осі).

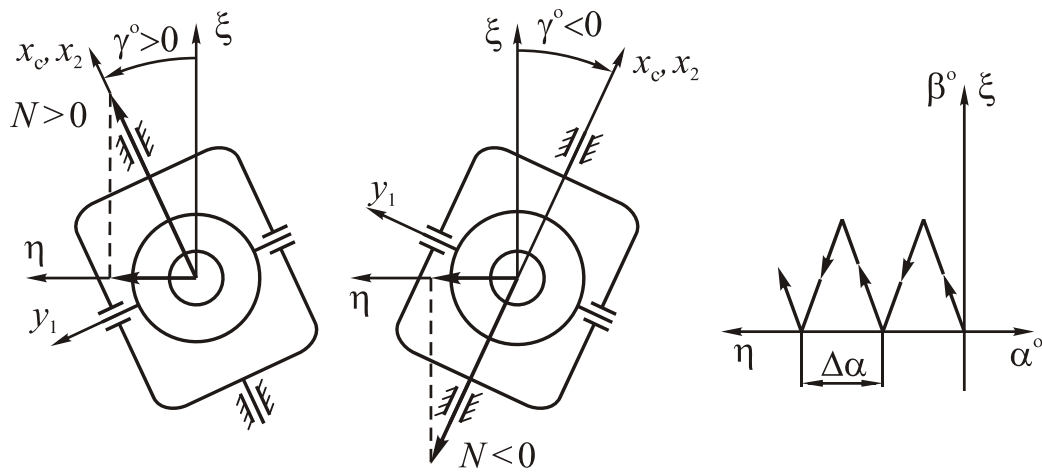


Рис. 12.11. Фізична картина випрямного ефекту при хитанні основи.

Слід зазначити, що через те, що діючий момент спрямований по зовнішній осі, кутова швидкість прецесії гіроскопа навколо зовнішньої осі буде у кожному мить хитамиці дорівнювати нулю. Гіроскоп буде прецесувати лише навколо внутрішньої осі. Протягом першого півперіоду хитамиці, коли кут γ° є додатним (отже, й момент N є також додатним) (див. рис.12.11) прецесія приводить до підйому головної осі (врахуємо, що вектор кінетичного моменту спрямований по додатному напрямку осі z) у площині нахиленої вліво. У другому півперіоді, коли площина прецесії нахилена вправо, рух головної осі буде відбуватися вниз. У цілому за період (рис.12.11) гіроскоп не змінить свого положення щодо площини $\eta\xi$, але повернеться на деякий кут $\Delta\alpha$ в самій цій площині (навколо осі ξ).

Аналогічно міркуючи, можна переконатися, що при періодичному змінюванні моменту L по внутрішній осі, супроводжуваному хитамицею основи з куту γ° , буде спостерігатися дрейф гіроскопа навколо внутрішньої осі підвісу.

Отже, характерними рисами випрямного ефекту при хитамиці основи є такі:

- 1) він призводить до появи постійних складових дрейфу по тій осі, навколо якої спрямований вектор моменту сил, тобто *він спричиняє «однойменні» дрейфи* гіроскопа, на відміну від постійного моменту, який спричиняє дрейф (поворот) гіроскопа навколо «перехресної» осі (перпендикулярної до площини, що проходить через вектор моменту та головну вісь гіроскопа);
- 2) він обумовлений насамперед хитамицею основи навколо головної осі; за відсутності такої хитамиці дрейфу немає;
- 3) дрейф гіроскопа значною мірою визначається зсувом фаз між коливаннями величини моменту й кута між поточним і середнім напрямком осі його дії; при синфазному змінюванні цих величин дрейф є максимальним; він перетворюється в нуль при зсуві фаз, рівному 90° .

Поділимо динамічні дрейфи (12.22) на дві групи, властивості яких різко відрізняються. До першої групи віднесемо звичайні дрейфи через дію «перехресних» моментів

$$\dot{\alpha}^\circ_{\text{пер}} = -\frac{L}{H \cos \beta^\circ} \cos \gamma^\circ; \quad \dot{\beta}^\circ_{\text{пер}} = \frac{N - R \sin \beta}{H \cos \beta} \cos \gamma^\circ.$$

У другу групу включимо дрейфи спричинені дією «однойменних» моментів

$$\dot{\alpha}^{\circ}_{\text{одн}} = -\frac{N - R \sin \beta}{H \cos \beta \cos \beta^{\circ}} \sin \gamma^{\circ}; \quad \dot{\beta}^{\circ}_{\text{одн}} = -\frac{L}{H} \sin \gamma^{\circ}. \quad (12.23)$$

У подальшому зосередимо увагу на визначенні дрейфів гіроскопа через випрямні ефекти, які спричиняються однойменними моментами. Для їхнього вивчення використаємо рівняння руху гіроскопа у формі (12.23).

Для малих кутів γ° ці рівняння можна записати так:

$$\dot{\alpha}^{\circ}_{\text{одн}} = -\frac{N - R \sin \beta}{H \cos \beta \cos \beta^{\circ}} \gamma^{\circ}; \quad \dot{\beta}^{\circ}_{\text{одн}} = -\frac{L}{H} \gamma^{\circ}. \quad (12.24)$$

Випрямний ефект буде спостерігатися, наприклад, при синхронних гармонічних коливаннях моментів і кута хитавиці основи γ° :

$$\begin{aligned} N &= N_m \sin(\omega t + \delta_N); & R &= R_m \sin(\omega t + \delta_R); \\ L &= L_m \sin(\omega t + \delta_L); & \gamma &= \gamma_m \sin \omega t. \end{aligned} \quad (12.25)$$

Підставляючи (12.25) у рівняння (12.24) і здійснюючи осереднення, одержимо, у припущенні малого змінювання кутів β і β° :

$$\langle \dot{\alpha}^{\circ} \rangle = -\frac{N_m \cos \delta_N - R_m \sin \beta_{\text{cp}} \cos \delta_R}{2H_0 \cos \beta_{\text{cp}} \cos \beta^{\circ}_{\text{cp}}} \gamma_m; \quad \langle \dot{\beta}^{\circ} \rangle = -\frac{L_m}{2H_0} \gamma_m \cos \delta_L. \quad (12.26)$$

Дрейфи (12.26) залежать від кутів зсувів фаз δ_N, δ_R та δ_L збурень по відношенню до куту хитавиці основи навколо головної осі підвісу й перетворюються в нуль при зсуві фаз, рівному $\frac{(2k+1)\pi}{2}$. Максимальні по величині дрейфи спостерігаються при збуреннях, синфазної або протифазної хитавиці з куту γ° .

Як приклад розглянемо дрейф гіроскопа при хитавиці основи з куту γ° з амплітудою $\gamma_m = 0.1 \approx 6^{\circ}$ і дії по зовнішній осі підвісу гармонічно змінюваного моменту сил з амплітудою $1 \cdot 10^{-4}$ Н м (такий, наприклад, момент сил тертя в шарикопідшипникових опорах гіроприладів). Якщо кінетичний момент гіроскопа $H = 1$ Н м с, то дрейф його навколо зовнішньої осі підвісу буде дорівнювати $\langle \dot{\alpha}^{\circ} \rangle \approx -5 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1} \approx -1^{\circ},03$ у годину.

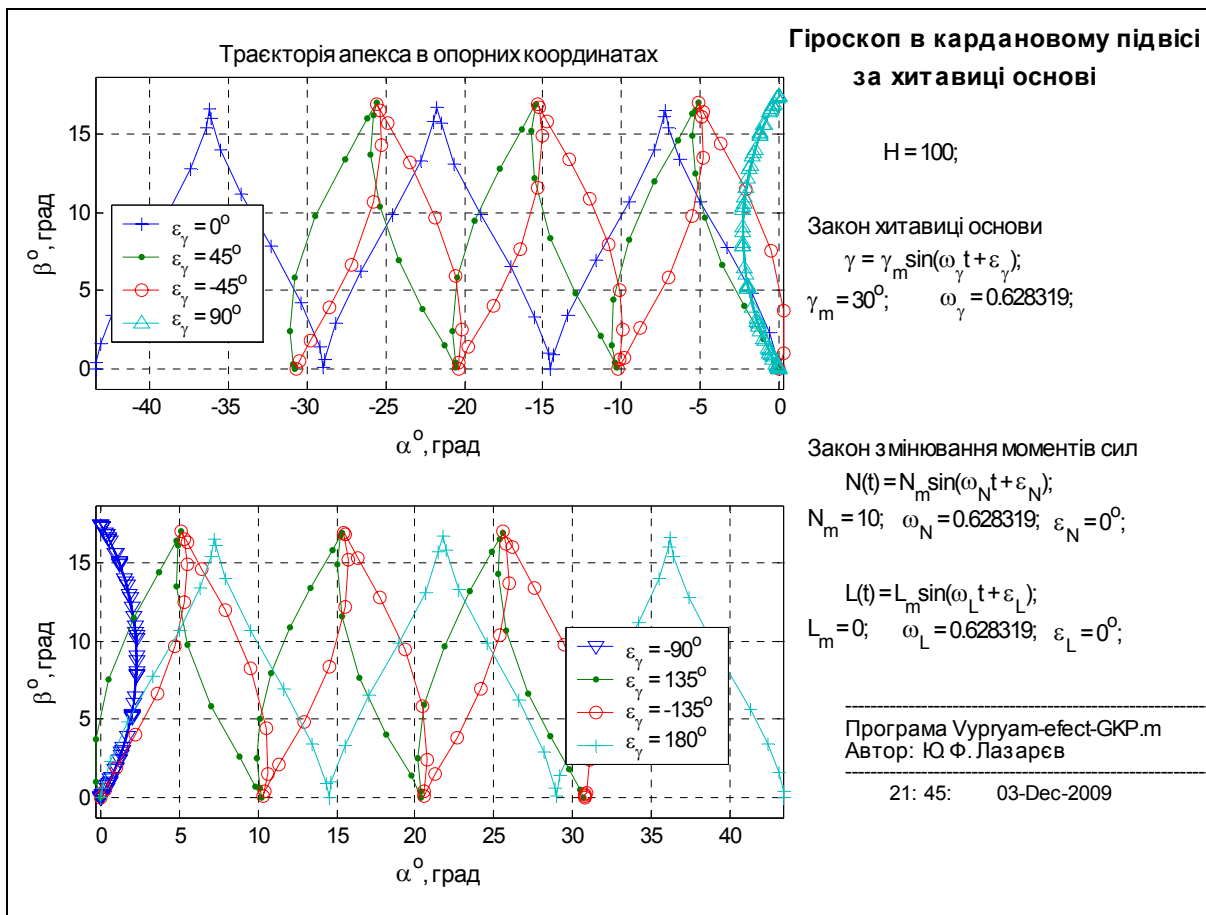


Рис. 12.12. Траекторії апекса гіроскопа під дією гармонічно змінюваного моменту вдовж зовнішньої осі при хитавиці основи

На рис. 12.12 наведені траекторії апексу гіроскопа при хитавиці основи навколо головної осі гіроскопа і дії гармонічно змінюваного (синхронно з хитавицею) моменту по зовнішній осі підвісу. Траекторії розраховані чисельним інтегруванням диференціальних рівнянь (12.23) за програмною моделлю *Vupryam_effect_GKP*. Інтегрування здійснюється застосуванням вбудованої процедури *ode45* системи Matlab, яка спирається на використання процедури *GKP_po_Hytavits*. Тексти цих двох програм наведені у Додатку 7. Прийнято кінетичний момент гіроскопа $H_0 = 100$, амплітуда змінювання моменту $N_m = 10$, амплітуда хитавиці $\gamma_m = 30^\circ$. Траекторії побудовані для різних значень зсуву фаз між коливаннями з куту хитавиці γ° і моменту сил.

Як бачимо, дрейф суттєво визначається вказаним зсувом фаз. У залежності від значення зсуву він може змінюватися як за величиною, так і за напрямком, обертаючись у нуль за зсуву фаз $\pm 90^\circ$ і приймаючи максимальне за величиною значення при синфазних або протифазних коливаннях.

12.2.2. Дрейф за хитавиці через тертя по осях

Нехай по осях підвісу діють моменти сил в'язкого тертя (12.10). Інші моменти будемо вважати рівними нулю. Тоді рівняння (12.24) можна звести до вигляду

$$\dot{\alpha}^\circ = \frac{\Phi_2}{\cos \beta^\circ \cos \beta} (\dot{\alpha} \gamma^\circ); \quad \dot{\beta}^\circ = -\frac{\Phi_1}{\cos \beta} (\dot{\beta} \gamma^\circ), \quad (12.27)$$

де $\varphi_2 = f_2 / H_0$; $\varphi_1 = f_1 / H_0$, причому кінетичний момент у цьому випадку будемо вважати постійним. Для визначення відносних швидкостей гіроскопа в першому наближенні можна знехтувати абсолютним його рухом і покласти у правих частинах рівнянь (12.1) $\dot{\alpha} = \dot{\beta} = u_{\xi} = u_{\eta} = u_{\zeta} = 0$. В результаті одержимо

$$\dot{\alpha} = -u_{x2}^c + u_{z2}^c \operatorname{tg} \beta; \quad \dot{\beta} = -u_{y2}^c; \quad \dot{\gamma}^{\circ} = \frac{u_{z2}^c}{\cos \beta}. \quad (12.28)$$

З останньої рівності, інтегруючи в припущенні малого змінювання кута β , знайдемо кут γ° :

$$\gamma^{\circ} = \frac{1}{\cos \beta_{\text{cp}0}} \int_0^t u_{z2}^c dt. \quad (12.29)$$

Підставимо (12.28) і (12.29) у (12.27) та усереднимо:

$$\begin{aligned} \langle \dot{\alpha}^{\circ} \rangle &= \frac{\varphi_2}{\cos \beta_{\text{cp}}^{\circ} \cos^2 \beta_{\text{cp}}} \left(- \left\langle u_{x2}^c \int_0^t u_{z2}^c dt \right\rangle + \operatorname{tg} \beta_{\text{cp}} \left\langle u_{z2}^c \int_0^t u_{z2}^c dt \right\rangle \right); \\ \langle \dot{\beta}^{\circ} \rangle &= \frac{\varphi_1}{\cos^2 \beta_{\text{cp}}} \left\langle u_{y2}^c \int_0^t u_{z2}^c dt \right\rangle \end{aligned} \quad (12.30)$$

Тут, як і раніше, враховано мале змінювання кутів β і β° , тому їхні значення замінені на середні β_{cp} й $\beta_{\text{cp}}^{\circ}$ за період хитавиці.

Другий доданок у дужках (12.30) завжди дорівнює нулю: $\left\langle u_{z2}^c \int_0^t u_{z2}^c dt \right\rangle = 0$,

оскільки будь-яка періодична змінна величин та її швидкість некорельовані між собою. Тому

$$\langle \dot{\alpha}^{\circ} \rangle = - \frac{\varphi_2}{\cos \beta_{\text{cp}}^{\circ} \cos^2 \beta_{\text{cp}}} \left\langle u_{x2}^c \int_0^t u_{z2}^c dt \right\rangle; \quad \langle \dot{\beta}^{\circ} \rangle = \frac{\varphi_1}{\cos^2 \beta_{\text{cp}}} \left\langle u_{y2}^c \int_0^t u_{z2}^c dt \right\rangle. \quad (12.31)$$

Припустимо синхронне змінювання всіх складових кутової швидкості \mathbf{u}^c об'єкта:

$$u_{x2}^c = u_{mX} \cos(\omega t + \delta_X); \quad u_{y2}^c = u_{mY} \cos(\omega t + \delta_Y); \quad u_{z2}^c = u_{mZ} \cos \omega t. \quad (12.32)$$

Через те, що

$$\int_0^t u_{z2}^c dt = \frac{u_{mZ}}{\omega} \sin \omega t, \quad (12.33)$$

то, після підставлення у (12.31) виразів (12.33), (12.32) й усереднення дійдемо формул

$$\langle \dot{\alpha}^{\circ} \rangle = \frac{\varphi_2 u_{mX} u_{mZ}}{2\omega \cos \beta_{\text{cp}}^{\circ} \cos^2 \beta_{\text{cp}}} \sin \delta_X; \quad \langle \dot{\beta}^{\circ} \rangle = - \frac{\varphi_1}{\cos^2 \beta_{\text{cp}}} \frac{u_{mY} u_{mZ}}{2\omega} \sin \delta_Y,$$

звідки випливає:

– в'язке тертя по осі підвісу може привести при хитавиці основи до дрейфу гіроскопа навколо тієї самої осі;

– такий дрейф виникає тоді, коли основа коливається навколо кількох осей з однаковою частотою (синхронно);

– величина дрейфу суттєво залежить від зсуву фаз між коливаннями осей навколо відповідних осей; при синхронній хитавиці навколо трьох ортогональних осей дрейфи гіроскопа відсутні; дрейф гіроскопа є максимальним за величиною при зсуві фаз $\delta_X = \delta_Y = \pi/2$, тобто коли або зовнішня, або внутрішня вісь підвісу описують у просторі конус.

Тепер розглянемо вплив моментів сил сухого тертя (12.19).

У цьому випадку рівняння (12.24) набувають виду:

$$\dot{\alpha}^\circ = \frac{n_m}{\cos \beta^\circ \cos \beta} (\gamma^\circ \operatorname{sign} \dot{\alpha}); \quad \dot{\beta}^\circ = -\frac{l_m}{\cos \beta^\circ} (\gamma^\circ \operatorname{sign} \dot{\beta}), \quad \left(n_m = \frac{N_m}{H_0}; \quad l_m = \frac{L_m}{H_0} \right).$$

За тих самих припущень, маючи на увазі, що

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T a \sin \omega t \operatorname{sign}[b \sin(\omega t + \varepsilon)] dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a \sin(\psi - \varepsilon) \operatorname{sign}(\sin \psi) d\psi = \\ &= \frac{a}{2\pi} \left\{ \sin \varepsilon \int_0^{2\pi} \cos \psi \operatorname{sign}(\sin \psi) d\psi - \cos \varepsilon \int_0^{2\pi} \sin \psi \operatorname{sign}(\sin \psi) d\psi \right\} = -\frac{2a}{\pi} \cos \varepsilon; \\ & \quad (\psi = \omega t + \varepsilon), \end{aligned}$$

та усереднюючи $\dot{\alpha}^\circ$ за період хитавиці $T = \frac{2\pi}{\omega}$, дійдемо формул

$$\begin{aligned} \langle \dot{\alpha}^\circ \rangle &= \frac{2}{\pi} \frac{n_m \gamma_m}{\cos \beta_{\text{cp}}^\circ \cos \beta_{\text{cp}}} \frac{u_{mX} \sin \delta_X}{\sqrt{u_{mX}^2 \sin^2 \delta_X + (u_{mZ} \operatorname{tg} \beta_{\text{cp}} - u_{mX} \cos \delta_X)^2}}; \\ \langle \dot{\beta}^\circ \rangle &= -\frac{2}{\pi} \frac{l_m \gamma_m}{\cos \beta_{\text{cp}}^\circ} \sin \delta_Y. \end{aligned}$$

Основні властивості дрейфів через сухе тертя – ті самі, що й дрейфів від в'язкого тертя. Особливістю є незалежність від частоти качки (при фіксованій амплітуді γ_m кута хитавиці навколо головної осі) і від амплітуд качки навколо осей підвісу.

Приклад. Нехай по зовнішній осі підвісу гіроскопа з кінетичним моментом $H = 10^4$ сН см с діє момент сил сухого тертя $N_m = 5$ сН см. За хитавиці основи з параметрами $\gamma_m = 0,1 \text{ рад} \approx 5^\circ,8$; $\beta_{\text{cp}} = 0$; $\delta_X = 90^\circ$, дрейф гіроскопа навколо зовнішньої осі підвісу дорівнюватиме близько $6,6^\circ/\text{год}$.

12.2.3. Дрейф за хитавиці через момент привідного двигуна гіромотора

Розглянемо рух гіроскопа, нехтуючи всіма моментами сил по осях підвісу, окрім моменту R по головній осі гіроскопа.

У цьому випадку до рівнянь руху головної осі

$$\dot{\alpha}^\circ = \frac{R \operatorname{tg} \beta}{H \cos \beta^\circ} \sin \gamma^\circ; \quad \dot{\beta}^\circ = 0 \quad (12.34)$$

необхідно додати рівняння руху ротора навколо головної осі

$$\frac{dH}{dt} = R, \quad (12.35)$$

де у розглядуваному випадку

$$H = J(\dot{\gamma} + \dot{\alpha}^\circ \sin \beta^\circ + \dot{\gamma}^\circ). \quad (12.36)$$

Впливом руху головної осі гіроскопа (величиною $\dot{\alpha}^\circ \sin \beta^\circ$ у виразі (12.36)) на змінювання кінетичного моменту H можна знехтувати і записати рівняння (12.35) у вигляді

$$\ddot{\gamma} - \frac{R}{J} = -\frac{\dot{u}_{z2}^c}{\cos \beta_{cp}}. \quad (12.37)$$

Тут використані співвідношення (12.29).

Асинхронний гіродвигун. Будемо розглядати обертання ротора в околі усталеної швидкості обертання $\dot{\gamma}_{уст}$. В цьому випадку можна прийняти наступну залежність моменту приводного асинхронного двигуна від кутової швидкості $\dot{\gamma}$ ротора

$$R = -R_a \Delta \dot{\gamma} = -R_a (\dot{\gamma} - \dot{\gamma}_{уст}).$$

Рівняння обертання ротора (12.37) можна тепер подати у такий спосіб

$$\Delta \ddot{\gamma} + \frac{R_a}{J} \Delta \dot{\gamma} = \frac{u_{mz} \omega}{\cos \beta_{cp}} \sin \omega t. \quad (12.38)$$

Через вплив хитавиці навколо головної осі відносно змінювання швидкості $\Delta \dot{\gamma}$ обертання ротора відповідно до рівняння (12.38) буде залежати від часу так:

$$\Delta \dot{\gamma} = \frac{J u_{mz} \omega}{R_a \cos \beta_{cp}} \frac{1}{1 + \left(\frac{J \omega}{R_a}\right)^2} \left(\sin \omega t - \frac{J \omega}{R_a} \cos \omega t \right).$$

Це змінювання приведе до відповідного змінювання у часі моменту по головній осі

$$R = \frac{J u_{mz} \omega}{\cos \beta_{cp}} \frac{1}{1 + \left(\frac{J \omega}{R_a}\right)^2} \left(\sin \omega t - \frac{J \omega}{R_a} \cos \omega t \right).$$

Припустимо, що кути γ° , β° та β змінюються настільки незначно, що тригонометричні функції першого з них можна лінеаризувати, а двох інших – замінити їх середніми значеннями. Тоді з рівняння (12.34) знайдемо вираз для дрейфу ГКП через момент асинхронного гіромотора

$$\langle \dot{\alpha}^\circ \rangle = \frac{tg \beta_{cp}}{H \cos \beta_{cp}^\circ} \langle R \gamma^\circ \rangle = -\frac{J u_{mz}^2}{2H} \frac{\sin \beta_{cp}}{\cos^3 \beta_{cp} \cos \beta_{cp}^\circ} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega J}{R_a}\right)^2}.$$

Синхронний гіродвигун. Для синхронного двигуна характерна інша залежність моменту R від кута відхилення ротора та від кута $\gamma_{ел}$ обертання вектора електромагнітного поля, а саме

$$R = -R_c \Delta\gamma = -R_c (\gamma - \gamma_{\text{ел}}).$$

Тому рівняння (12.37) обертання ротора набуває виду

$$\Delta\ddot{\gamma} + \frac{R_c}{J} \Delta\gamma = \frac{u_{mZ}\Omega}{\cos\beta_{\text{cp}}} \sin \omega t.$$

Його розв'язок такий

$$\Delta\gamma = \frac{J}{R_c} \frac{u_{mZ}\Omega}{\cos\beta_{\text{cp}}} \frac{1}{1 - \frac{J}{R_c} \omega^2} \sin \omega t.$$

Це означає, що момент R по головній осі змінюється за законом

$$R = -R_c \Delta\gamma = -\frac{u_{mZ}\Omega}{\cos\beta_{\text{cp}}} \frac{J}{1 - \frac{J}{R_c} \omega^2} \sin \omega t$$

За тих самих припущень, що й для асинхронного двигуна, знайдемо дрейф

$$\langle \dot{\alpha}^{\circ} \rangle = -\frac{u_{mZ}^2}{2H} \frac{\sin\beta_{\text{cp}}}{\cos^3\beta_{\text{cp}} \cos\beta_{\text{cp}}^{\circ}} \frac{J}{1 - \frac{\omega^2 J}{R_c}}.$$

Отже, момент привідного двигуна гіромотора у разі хитавиці основи навколо головної осі гіроскопа може спричинити постійний дрейф гіроскопа навколо зовнішньої осі підвісу. Цей дрейф пропорційний синусу кута відхилення середнього положення головної осі від перпендикуляра до площини зовнішньої рамки. Якщо змінюється знак цього кута, змінюється й напрямок дрейфу. Кутова швидкість дрейфу залежить від інтенсивності хитавиці (вібрації) основи. Найнебезпечнішим для синхронного гіродвигуна є збіг частоти хитавиці із частотою власних коливань ротора відносно магнітного поля статора.

Приклад. Нехай кінетичний момент гіроскопа дорівнює $H = 10^4$ сН см, осьовий момент інерції $J = 3$ сН см с^2 , а середнє значення кута повороту внутрішньої рамки щодо зовнішньої є таким, що $\frac{\sin\beta_{\text{cp}}}{\cos^3\beta_{\text{cp}} \cos\beta_{\text{cp}}^{\circ}} = 1$. Припустимо, що основа хитається навколо головної

осі гіроскопа з амплітудою $0,1$ рад $\approx 6^{\circ}$ та частотою $0,5$ Гц ≈ 3 рад/с. Тоді дрейф гіроскопа з асинхронним гіромотором ($R_a = 10$ сН см с) становитиме $1,4^{\circ}/\text{год}$, а з синхронним гіродвигуном – при $R_c = 100$ сН см – дрейф буде в $2,5$ рази більшим – $3,5^{\circ}/\text{год}$.

12.2.4. Моделювання поведження гіроскопа в кардановому підвісі

Аналогічні результати можна отримати безпосереднім чисельним інтегруванням прецесійних рівнянь (12.1) і (12.2). Для цього утворимо комплекс програм і процедур в середовищі Matlab.

Комплекс програм моделювання поведження ГКП при русі основи і дії моментів сил тертя і горизонтальної корекції складається з головної програми *Vypryam_efect_GN*, і процедур *GN_PO_precession* та *Ug_Dv_Ob*.

Головна (керувальна) програма *Vypryam_efect_GN.m* виконує такі дії:

- присвоювання чисельних значень параметрам руху основи, гіроскопа і діючих моментів;
- підготовка (обчислення) початкових значень відносних координат гіроскопа по прийнятих початкових значень опорних його координатах;
- звернення до процедури *ode45* чисельного інтегрування диференціальних рівнянь, яка, у свою чергу, звертається до процедури *GN_PO_precession*, яка обчислює праві частини прецесійних рівнянь гіроскопа, приведених до форми Коші;
- виведення графіків отриманих результатів і їх текстове оформлення.

Процедура *GN_PO_precession* враховує два види моментів сил, що діють на гіроскоп, – моменти сил в'язкого тертя по осях підвісу і момент міжрамкової горизонтальної корекції. Обидві попередні програми спираються на використання процедури *Ug_Dv_Ob*, яка обчислює поточні значення кутів повороту основи відносно опорної системи координат і проекції кутової швидкості основи на осі, пов'язані з основою. При цьому закони змінювання кутів повороту основи прийняті наступними:

$$\psi(t) = \psi_0 + \Omega_\psi t + \psi_m \sin(\omega_\psi t + \varepsilon_\psi);$$

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 + \vartheta_m \sin(\omega_\vartheta t + \varepsilon_\vartheta);$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \Omega_\varphi t + \varphi_m \sin(\omega_\varphi t + \varepsilon_\varphi),$$

що дозволяє досліджувати вплив хитавиці по усіх трьох кутах і обертання основи навколо вертикальної осі і навколо поздовжньої осі основи.

Розглянемо спочатку вплив моментів сил в'язкого тертя у разі обертання основи з постійною кутовою швидкістю. Для цього введемо такі дані руху основи:

- руху з кута ристання немає; поздовжня вісь основи відхилена від напрямку головної осі гіроскопа на кут 45° ;
- руху з куту тангажа немає; поздовжня вісь основи відхилена від горизонтальної площини на кут 30° ;
- основа обертається навколо поздовжньої осі з постійною кутовою швидкістю $\Omega_\varphi = 2\pi/10$.

Кінетичний момент гіроскопа прийнятий рівним $H = 100$ сН см с.

Якщо моменти сил в'язкого тертя по зовнішній і внутрішній осях підвісу є однаковими, рух гіроскопа буде таким, як це показано на рис. 12.13. Результати моделювання для випадку, коли момент сил в'язкого тертя діє лише по зовнішній осі підвісу, наведені на рис. 12.14, а рис. 12.15 подає рух гіроскопа від дії моменту лише по внутрішній осі підвісу. Можна впевнитися, що, з одного боку, подані результати повністю підтверджують теоретичні висновки, а, з другого, – перерозподіл моментів тертя по осях підвісу незначно впливає на загальну картину руху головної осі гіроскопа.

Перейдемо до вивчення поведінки гіроскопа під дією моментів сил тертя у разі хитавиці основи. Вважатимемо, що основа хитається з усіх трьох кутів з однаковою частотою $\omega = 0,2\pi$ с⁻¹ (тобто синхронно) і з однаковою амплітудою $\psi_m = \vartheta_m = \varphi_m = 10^\circ$. Якщо усі ці три коливання є ще й синфазними, то, як впливає з попереднього теоретичного аналізу, систематичних дрейфів гіроскопа не виникає. Це підтверджують і результати моделювання (рис. 12.16).

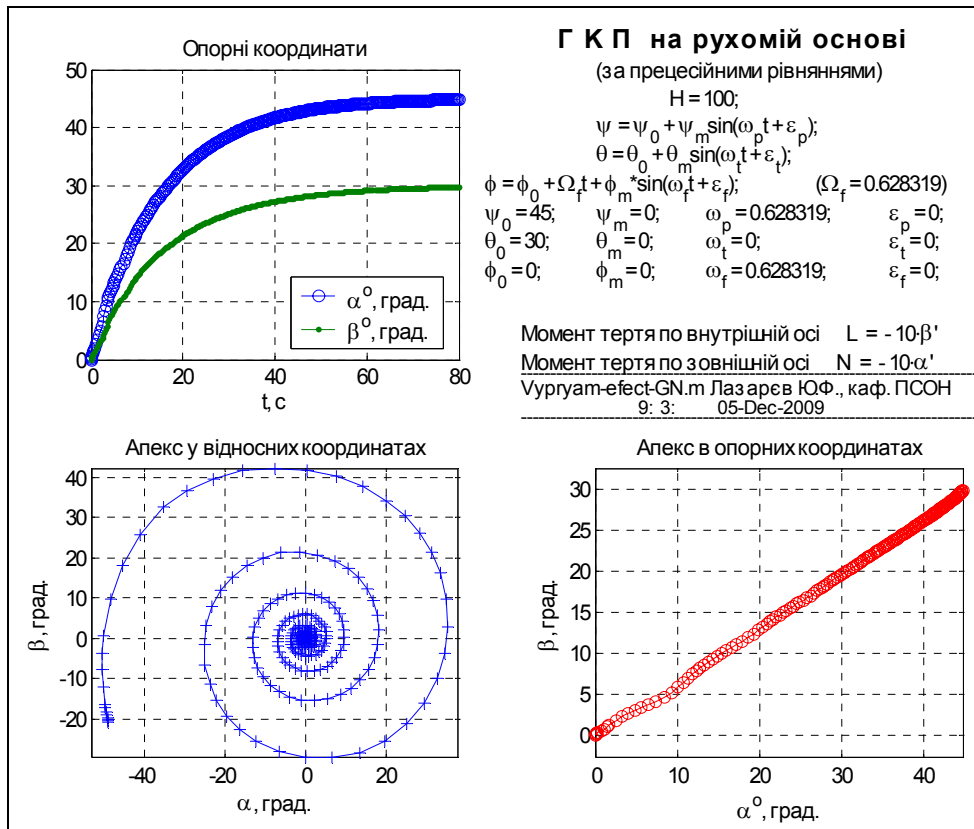


Рис. 12.13. Рух ГКП при обертанні основи під дією моментів сил тертя по обох осях підвісу

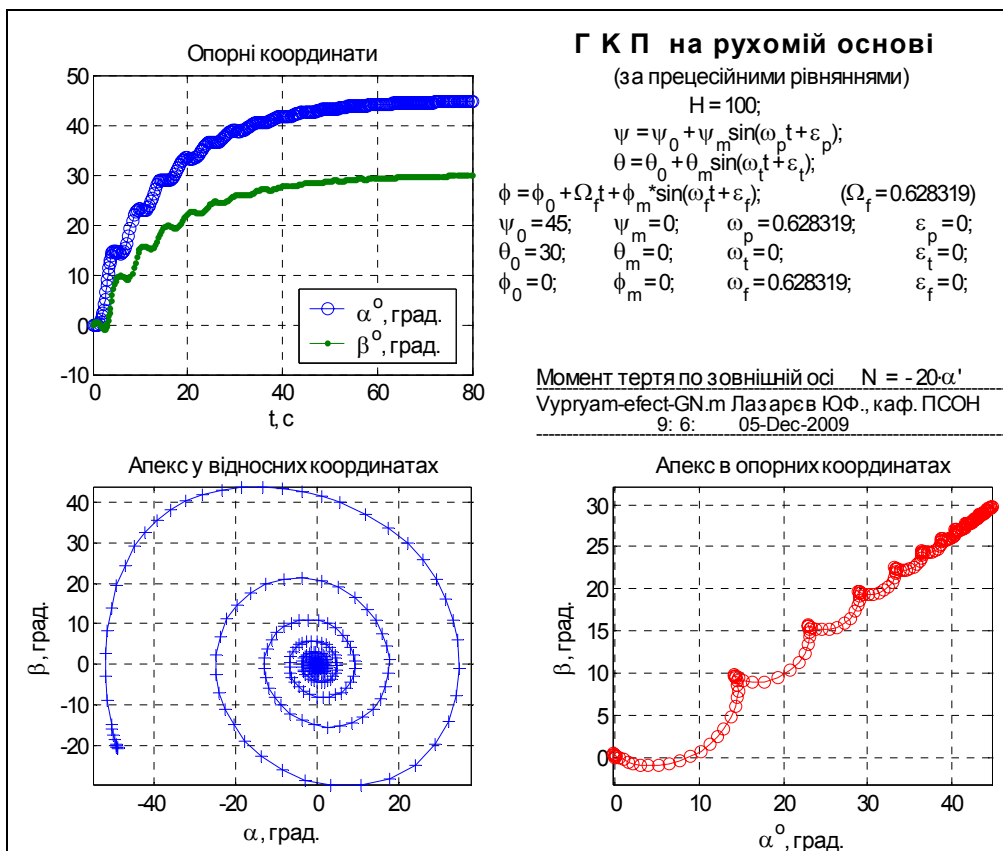


Рис. 12.14. ГКП при обертанні основи під дією моменту сил тертя по зовнішній осі підвісу

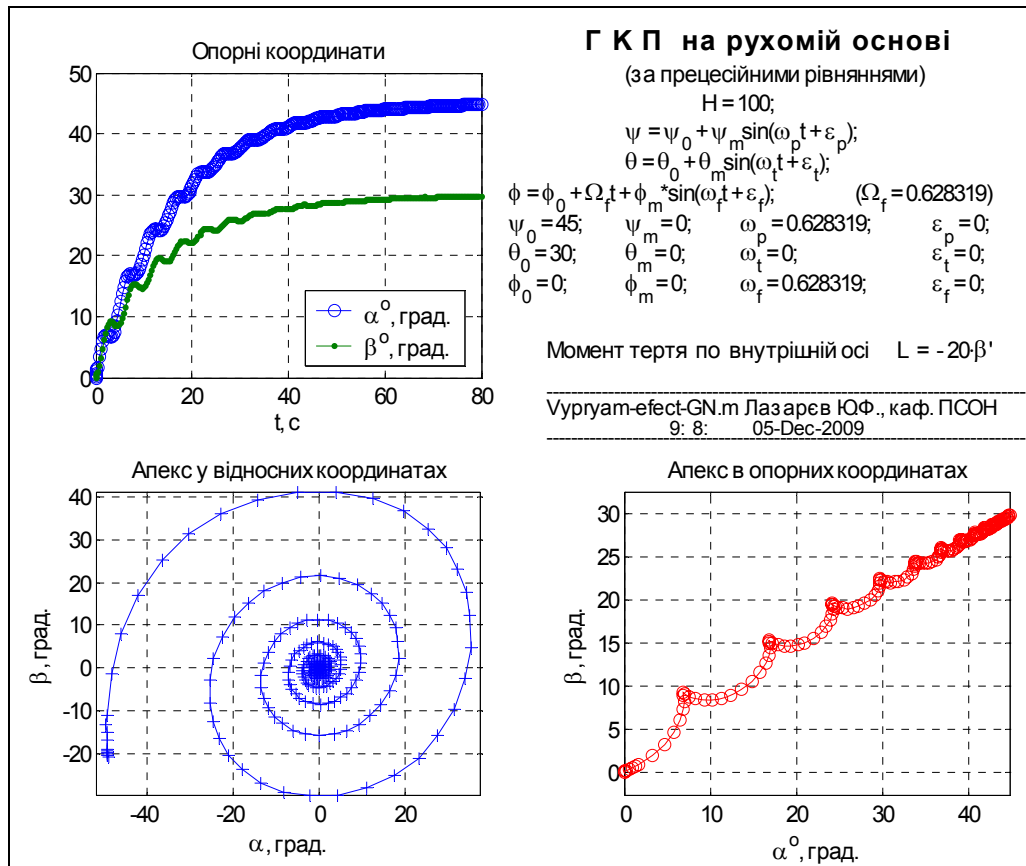


Рис. 12.15. ГКП при обертанні основи під дією моменту сил тертя по внутрішній осі підвісу

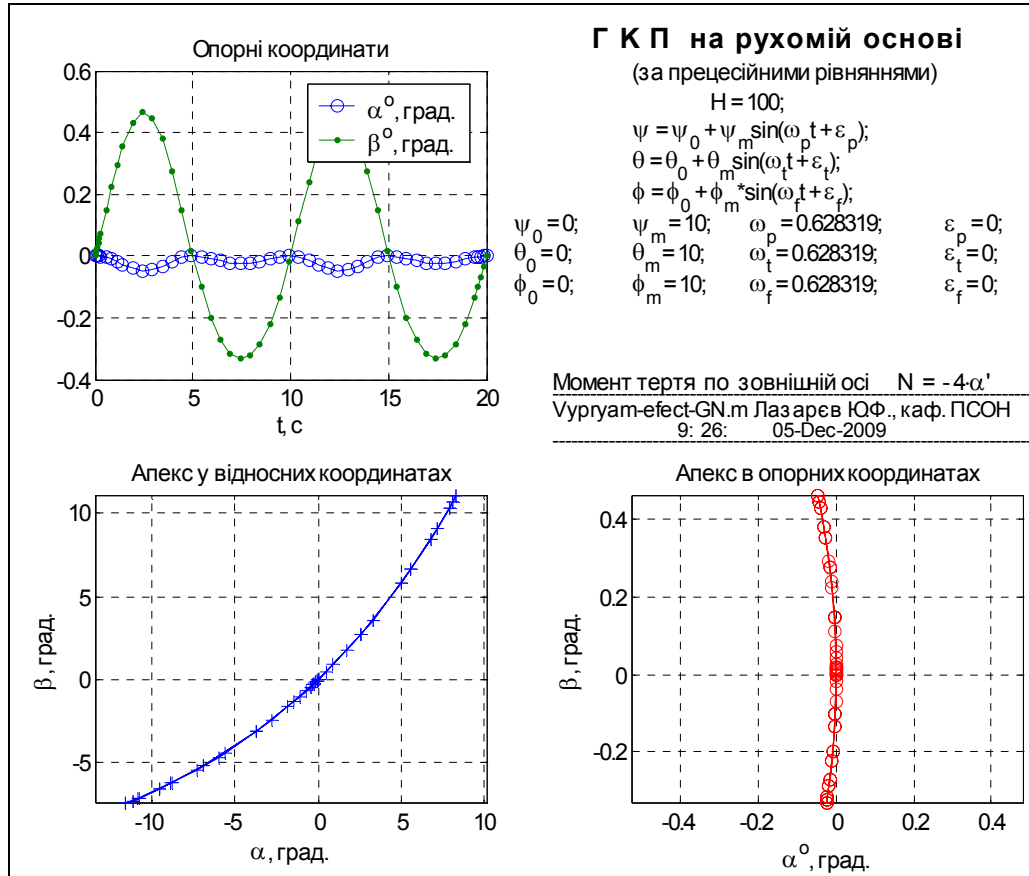


Рис. 12.16. Дія тертя по зовнішній осі при синхронній і синфазній хитавиці

Але якщо зсув фаз коливань з крену відносно двох інших кутів становить 90° , картина суттєво змінюється (рис. 12.17).

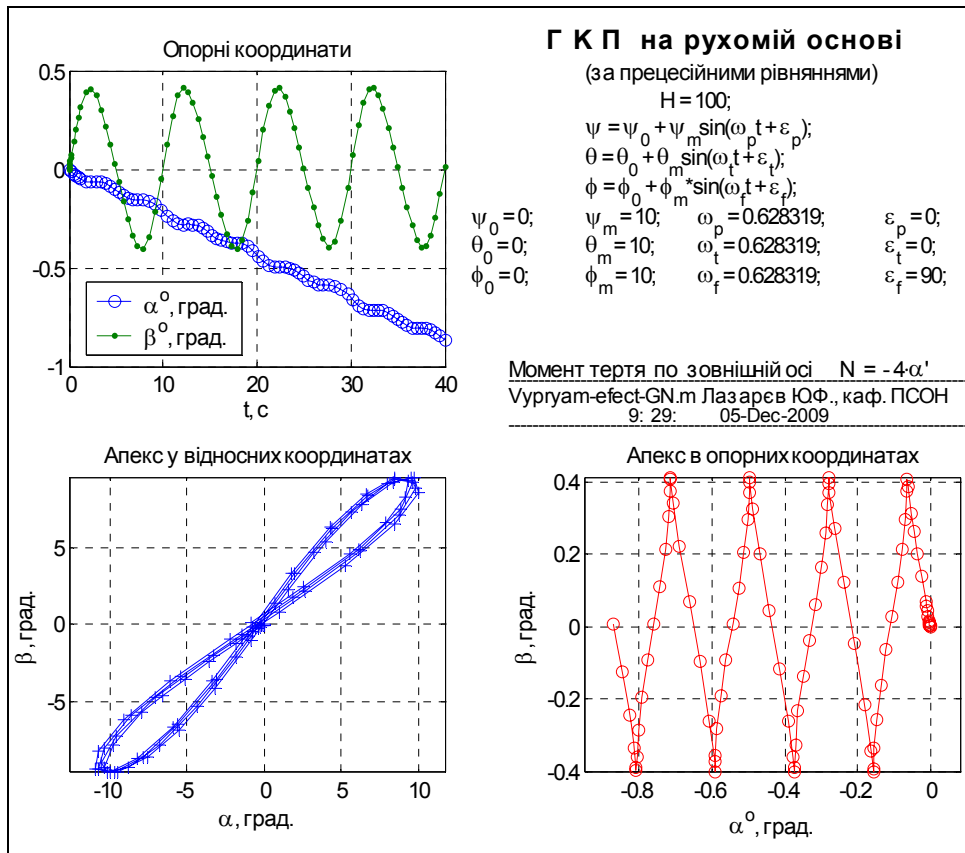


Рис. 12.17. Дія тертя по зовнішній осі при коловій хитавиці

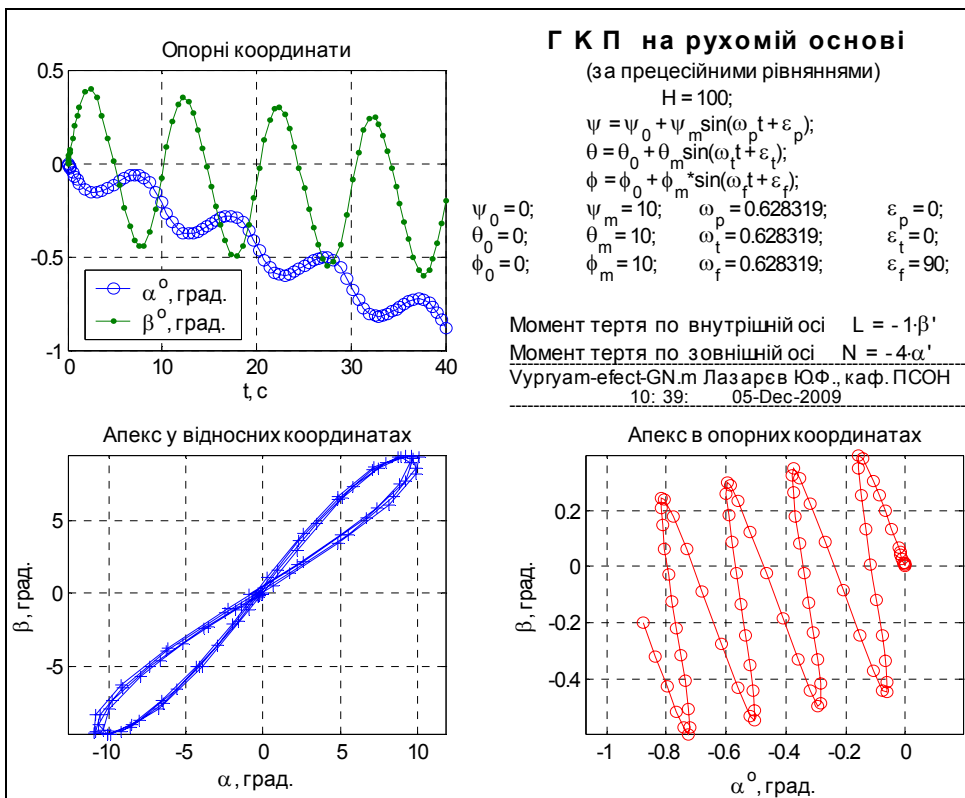


Рис. 12.18. Дія тертя по зовнішній і внутрішній осях при коловій хитавиці

Виникає систематичний дрейф гіроскопа, причому головна вісь при цьому повертається саме навколо тієї осі, по якій напрямлений момент, що його спричиняє. У тих самих умовах тертя по внутрішній осі підвісу приводить до виникнення дрейфу і навколо внутрішній осі підвісу (рис. 12.18).

12.3. Гіроскоп напрямку

Гіроскопом напрямку зазвичай називають гіроскопічний прилад на основі триступеневого астатичного ГКП, призначений для вимірювання куту рискання ψ (рис. 12.19) транспортного засобу, на якому його встановлено.

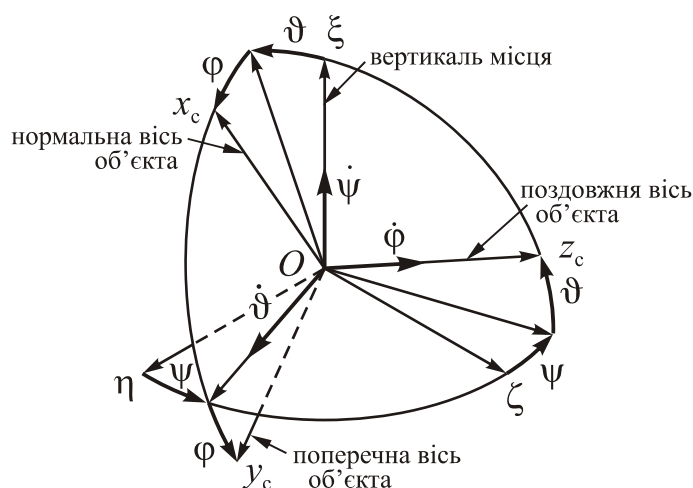


Рис. 12.19. Кінематика поворотів рухомого об'єкту

Для цього зовнішню вісь x_2 карданового підвісу суміщають з нормальною віссю x_c об'єкта (див. рис. 12.1). Інформацію про кут рискання одержують, вимірюючи кут α повороту зовнішньої рамки відносно основи.

Аналіз похибок некоректованих гіроприладів як і практика їх використання показують, що головним недоліком таких приладів є швидке нагромадження відхилень головної осі від заданого напрямку й збільшення кута β між віссю ротора й перпендикуляром до площини зовнішньої рамки, що у свою чергу збільшує швидкості дрейфу гіроскопа під дією збурень. Якщо кут β близький до $\pm \pi/2$, гіроскоп втрачає свої гіроскопічні властивості і перестає бути працездатним. Без коригування дрейфів ГКП як прилад є працездатним протягом часу, що не перевищує десятки хвилин.

Важливим засобом підвищення точності й збільшення терміну роботи гіроприладів є введення такої системи корекції, яка забезпечувала б протягом необмеженого часу утримування головної осі у середньому у перпендикулярному положенні відносно зовнішньої осі підвісу. Оскільки зовнішня вісь гіроскопа напрямку, збіжна з нормальною віссю об'єкта, зазвичай при русі об'єкта у середньому є вертикальною, то корекція, яка забезпечує у середньому горизонтальне положення головної осі, одержала назву системи *горизонтальної корекції*.

Наразі відомі дві схеми горизонтальної корекції гіроскопа напрямку (рис. 12.20):

– *міжрамкова*, чутливим елементом якої є датчик куту (на схемі – ДК) на внутрішній осі підвісу, який вимірює кут β відносного повороту рамок підвісу (звідси назва – міжрамкова);

– *маятникова*, чутливим елементом якої є фізичний маятник (на схемі – ФМ), встановлений на кожусі гіромотора (внутрішній рамці), який вимірює кут відхилення головної осі гіроскопа від осі фізичного маятника.

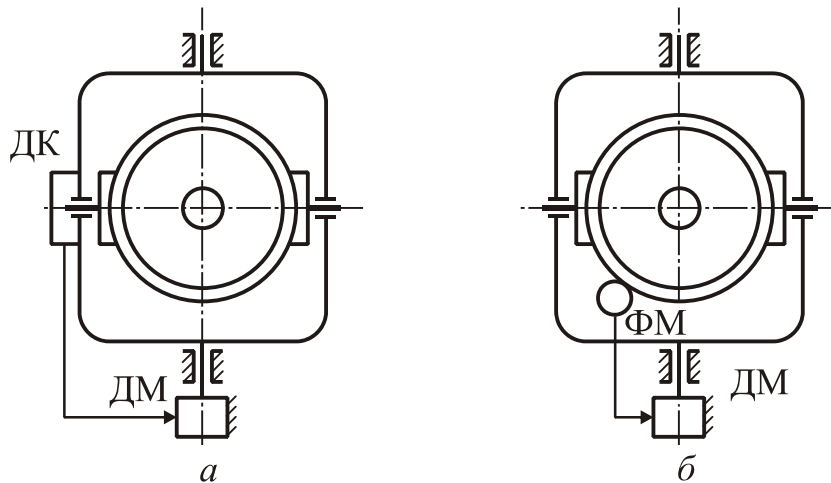


Рис. 12.20. Схеми горизонтальної корекції

В обох схемах горизонтальної корекції електричний сигнал з чутливого елемента надходить до датчика моменту (на схемі – ДМ), який розташований на зовнішній осі підвісу і накладає на гіроскоп відповідний коригувальний момент у такий спосіб, щоб в результаті прецесії під його дією головна вісь зменшувала відхилення від бажаного напрямку (рис. 12.20).

Як впливає з першого рівняння (12.2), головна вісь гіроскопа напрямку може відхилитися від заданого положення (осі ζ) в опорній системі координат не тільки внаслідок дії збурювальних моментів сил по осях підвісу, а й через обертання опорної системи координат з кутовою швидкістю \mathbf{u} в інерціальному просторі, внаслідок чого виникають розглянуті раніше удавані дрейфи (12.22).

Для гіроскопа напрямку найбільше значення має азимутальна похибка, яка описується кутом α° . Для зменшення удаваного азимутального дрейфу $\dot{\alpha}_{\text{кін}}^0$ в гіроскопах напрямку застосовують *азимутальну корекцію*, призначення якої – компенсувати удаваний дрейф гіроскопа напрямку через вертикальну складову кутової швидкості Землі.

Реалізувати азимутальну корекцію можна двояко: або враховуючи поворот Землі відносно вертикалі, віднімаючи його з повороту зовнішньої рамки навколо зовнішньої осі підвісу (*кінематична корекція*), або накладаючи постійний момент сил по внутрішній осі підвісу такий, щоб прецесія гіроскопа під його дією здійснювалася у той самий бік і з тією самою швидкістю, що й поворот Землі (*моментна корекція*).

Схему кінематичної корекції зображено на рис. 12.21, а. Керувальна напруга U_{AK} азимутальної корекції формується в обчислювальному пристрої ОП, надається на керувальну обмотку електричного двигуна Дв, швидкість обертання вихідного валу якого є пропорційною до величини керувальної напруги. Це обертання через редуктор передається статору датчика кута ДК ристання, внаслідок чого статор датчика кута обертається у напрямку удаваного дрейфу гіроскопа навколо вертикальної осі зі швидкістю цього дрейфу.

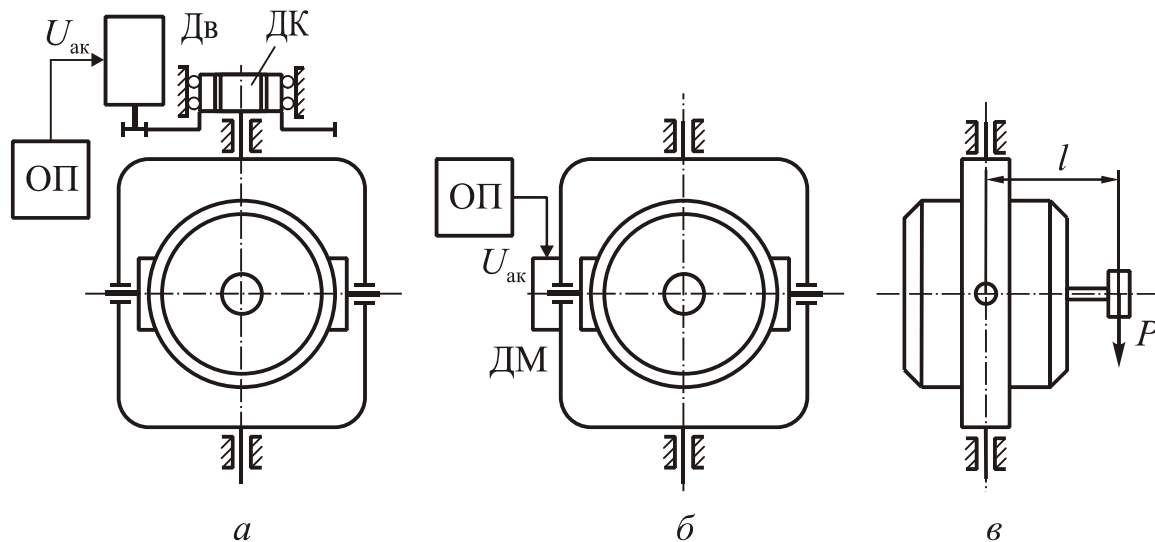


Рис. 12.21. Схеми азимутальної корекції

Моментну азимутальну корекцію можна здійснити або подаючи певний постійний електричний сигнал на датчик моменту, що розташований на внутрішній осі підвісу (моментна корекція, рис. 12.21, б), або зміщуючи центр мас гіромотора вздовж головної осі на певну величину (вантажкова корекція, рис. 12.21, в). У разі застосування датчика моменту корегувальна напруга U_{AK} , сформована в обчислювальному пристрої ОП (рис. 12.21, б), надходить на керувальну обмотку датчика моменту ДМ, який розміщений на внутрішній осі підвісу. Датчик моменту утворює момент електромагнітної дії по внутрішній осі підвісу, величина якого пропорційна величині керувальної напруги. Цей момент змушує гіроскоп прецесувати навколо зовнішньої осі підвісу зі швидкістю, рівною швидкості удаваного азимутального дрейфу гіроскопа, але у протилежному напрямку, внаслідок чого головна вісь гіроскопа утримується у незмінному азимутальному положення відносно поверхні Землі.

Так само рухається гіроскоп й у разі застосування вантажкової корекції (рис. 12.21, в), але момент відносно внутрішньої осі підвісу утворюється за рахунок зміщення центру мас внутрішньої рамки вздовж головної осі гіроскопа переміщенням в цьому напрямку спеціальних вантажків. Цей вид азимутальної корекції є найпростішим, бо не потребує таких досить складних пристроїв як датчик моментів або електричний двигун. Але недоліком його є негнучкість при необхідності перенастроїти систему корекції на іншу географічну широту.

Власне *гіроскопом напрямку* називають *треступеневий астатичний гіроскоп у кардановому підвісу, споряджений системами горизонтальної і азимутальної корекції*.

Введення коригування у значній мірі змінює поведження курсового гіроскопу. Так, у силу вибірковості по відношенню до площини горизонту, гіроскоп напрямку не матиме систематичних дрейфів від площини горизонту. Однак, внаслідок того, що гіроскоп напрямку, як і раніше, позбавлений вибірковості з азимуту, то його похибка у вимірюванні кута рискання може, як і у випадку некоректованого гіроскопа, нагромаджуватися. При цьому наявність значного моменту сил по зовнішній осі підвісу (моменту системи горизонтальної корекції) може привести (внаслідок випрямного ефекту при хитавиці основи) до додаткових дрейфів, які специфічними саме для гіроскопа напрямку.

12.3.1. Карданова похибка

Розглянемо, як у загальному випадку пов'язані між собою опорні і відносні координати гіроскопа напрямку.

Для цього відшукаємо матриці напрямних косинусів. З рис. 12.19 випливає:

A	X_c	Y_c	Z_c
ξ	$a_{11} = \cos \vartheta \cos \varphi$	$a_{12} = -\cos \vartheta \sin \varphi$	$a_{13} = \sin \vartheta$
η	$a_{21} = \cos \psi \sin \varphi +$ $+ \sin \psi \cos \varphi \sin \vartheta$	$a_{22} = \cos \psi \cos \varphi -$ $- \sin \psi \sin \varphi \sin \vartheta$	$a_{23} = -\sin \psi \cos \vartheta$
ζ	$a_{31} = \sin \psi \sin \varphi -$ $- \cos \psi \cos \varphi \sin \vartheta$	$a_{32} = \sin \psi \cos \varphi +$ $+ \cos \psi \sin \varphi \sin \vartheta$	$a_{33} = \cos \psi \cos \vartheta$

Аналогічно, відповідно до рис. 12.1 і 12.2 матимемо:

B	X	Y	Z
X_c	$b_{11} = \cos \beta \cos \gamma^\circ$	$b_{12} = \cos \beta \sin \gamma^\circ$	$b_{13} = \sin \beta$
Y_c	$b_{21} = -\cos \alpha \sin \gamma^\circ +$ $+ \sin \alpha \cos \gamma^\circ \sin \beta$	$b_{22} = \cos \alpha \cos \gamma^\circ +$ $+ \sin \alpha \sin \gamma^\circ \sin \beta$	$b_{23} = -\sin \alpha \cos \beta$
Z_c	$b_{31} = -\sin \alpha \sin \gamma^\circ -$ $- \cos \alpha \cos \gamma^\circ \sin \beta$	$b_{32} = \sin \alpha \cos \gamma^\circ -$ $- \cos \alpha \sin \gamma^\circ \sin \beta$	$b_{33} = \cos \alpha \cos \beta$

C	X	Y	Z
ξ	$c_{11} = \cos \beta^\circ$	$c_{12} = 0$	$c_{13} = \sin \beta^\circ$
η	$c_{21} = \sin \beta^\circ \sin \alpha^\circ$	$c_{22} = \cos \alpha^\circ$	$c_{23} = -\cos \beta^\circ \sin \alpha^\circ$
ζ	$c_{31} = -\sin \beta^\circ \cos \alpha^\circ$	$c_{32} = \sin \alpha^\circ$	$c_{33} = \cos \beta^\circ \cos \alpha^\circ$

Ці три матриці зв'язані між собою рівністю

$$C = A B.$$

Визначимо з неї матрицю B :

$$B = A^T C,$$

з чого випливає таке співвідношення між елементами матриці B і елементами матриць A і C :

$$b_{ij} = a_{1i}c_{1j} + a_{2i}c_{2j} + a_{3i}c_{3j}.$$

Користуючись цим співвідношенням, можна виразити відносні кути α , β і кут γ° через опорні кутові координати α° , β° і кути повороту основи ψ , ϑ і φ . Для цього спочатку з матриці B визначимо залежності цих кутів від елементів цієї матриці. Маємо:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{b_{23}}{b_{33}}; \quad \sin \beta = b_{13}; \quad \operatorname{tg} \gamma^\circ = \frac{b_{12}}{b_{11}}. \quad (12.39)$$

Тепер вирази (12.39) можна перетворити у такі:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= -\frac{a_{12}c_{13} + a_{22}c_{23} + a_{32}c_{33}}{a_{13}c_{13} + a_{23}c_{23} + a_{33}c_{33}} = \\ &= \frac{-\sin(\psi - \alpha^\circ) \cos \varphi - \cos(\psi - \alpha^\circ) \sin \varphi \sin \vartheta + \operatorname{tg} \beta^\circ \cos \vartheta \sin \varphi}{\cos(\psi - \alpha^\circ) \cos \vartheta + \operatorname{tg} \beta^\circ \sin \vartheta} \\ \sin \beta &= a_{11}c_{13} + a_{21}c_{23} + a_{31}c_{33} = \\ &= [\sin(\psi - \alpha^\circ) \sin \varphi - \cos(\psi - \alpha^\circ) \cos \varphi \sin \vartheta] \cos \beta^\circ - \cos \vartheta \cos \varphi \sin \beta^\circ; \\ \operatorname{tg} \gamma^\circ &= \frac{a_{11}c_{12} + a_{21}c_{22} + a_{31}c_{32}}{a_{11}c_{11} + a_{21}c_{21} + a_{31}c_{31}} = \\ &= \frac{\cos(\psi - \alpha^\circ) \sin \varphi + \sin(\psi - \alpha^\circ) \cos \varphi \sin \vartheta}{\cos \vartheta \cos \varphi \cos \beta^\circ - [\sin(\psi - \alpha^\circ) \sin \varphi - \cos(\psi - \alpha^\circ) \cos \varphi \sin \vartheta] \sin \beta^\circ}. \end{aligned}$$

З отриманих виразів одразу випливає, що зв'язок між відносними і опорними координатами головної осі гіроскопа напрямку у загальному випадку є досить складним. За наявності ефективною горизонтальною корекції можна користуватися наближеними, але все ж достатньо точними виразами, припускаючи у отриманих співвідношеннях $\beta^\circ = 0$:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg}(\psi - \alpha^\circ) \frac{\cos \varphi}{\cos \vartheta} - \sin \varphi \operatorname{tg} \vartheta; \quad (12.40)$$

$$\sin \beta = \sin(\psi - \alpha^\circ) \sin \varphi - \cos(\psi - \alpha^\circ) \cos \varphi \sin \vartheta; \quad (12.41)$$

$$\operatorname{tg} \gamma^\circ = \operatorname{tg} \varphi \frac{\cos(\psi - \alpha^\circ)}{\cos \vartheta} + \operatorname{tg} \vartheta \sin(\psi - \alpha^\circ). \quad (12.42)$$

Вихідною величиною гіроскопа напрямку є кут α повороту зовнішньої рамки відносно корпусу приладу. При вертикальному положенні зовнішньої осі підвісу ($\vartheta = \varphi = 0$) маємо з (12.40)

$$\operatorname{tg} \alpha_{\text{верт}} = -\operatorname{tg}(\psi - \alpha^\circ) \quad \Rightarrow \quad \alpha_{\text{верт}} = -\psi + \alpha^\circ.$$

Отже, коли зовнішня вісь набуває вертикального положення, кут повороту зовнішньої рамки відносно основи дорівнює вимірюваному куту рискання об'єкта. При цьому похибкою вимірювання є лише кут α° азимутального відхилення головної осі гіроскопа від заданого положення.

Якщо ж зовнішня вісь підвісу відхиляється від вертикалі, у куті α виникає додаткова похибка, яку можна визначити з такого співвідношення:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \Delta\alpha &= \operatorname{tg}(\alpha - \alpha_{\text{верт}}) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha_{\text{верт}}}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha_{\text{верт}}} = \\ &= \frac{\operatorname{tg}(\psi - \alpha^\circ) \left(1 - \frac{\cos \varphi}{\cos \vartheta}\right) - \sin \varphi \operatorname{tg} \vartheta}{1 + \left[\operatorname{tg}(\psi - \alpha^\circ) \frac{\cos \varphi}{\cos \vartheta} + \sin \varphi \operatorname{tg} \vartheta \right] \operatorname{tg}(\psi - \alpha^\circ)}. \end{aligned} \quad (12.43)$$

Похибка $\Delta\alpha$ вимірювання куту рискання, яка визначається виразом (12.43), називається *кардановою похибкою* гіроскопа напрямку. Легко зрозуміти, що вона має суто геометричний характер і повністю зникає, якщо зовнішня вісь стає паралельною вертикалі місця.

Складемо програму **CardanO**, яка обчислює значення карданової похибки за формулою (12.43) і керувальну програму **CardanOsh**, яка формує масив кутів повороту об'єкта у просторі і використовує першу програму для розрахунків поточних значень карданової похибки (див. Додаток 7).

Використаємо цю програму для побудови графіка залежності карданової похибки від кута рискання при здійсненні літаком віражу з креном 45° . Графік наведений на рис. 12.22.

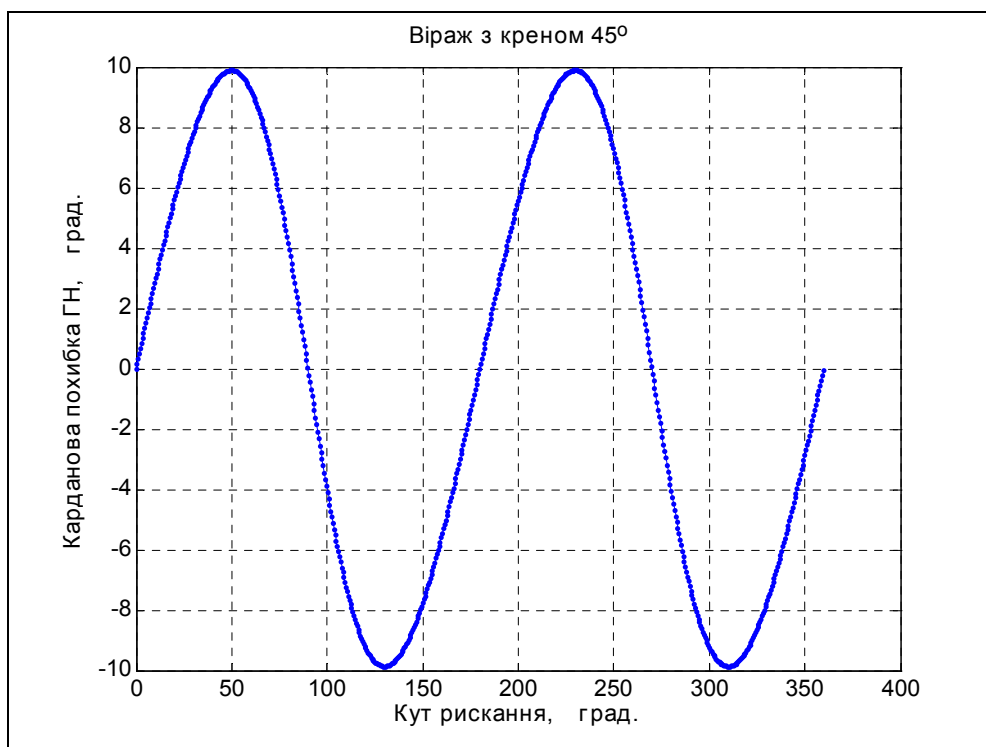


Рис. 12.22. Карданова похибка ГН при віражі літака

Як бачимо, похибка сягає величини 10° і є максимальною за величиною при $\psi = 180^\circ k \pm 50^\circ$ ($k = 0, 1, \dots$).

Графік змінювання карданової похибки у часі при хитавиці основи з кута крену при горизонтальному положенні поздовжньої осі основи з кутом рискання 50° показаний на рис 12. 23. Амплітуда хитавиці – 20° , період – 1 с.

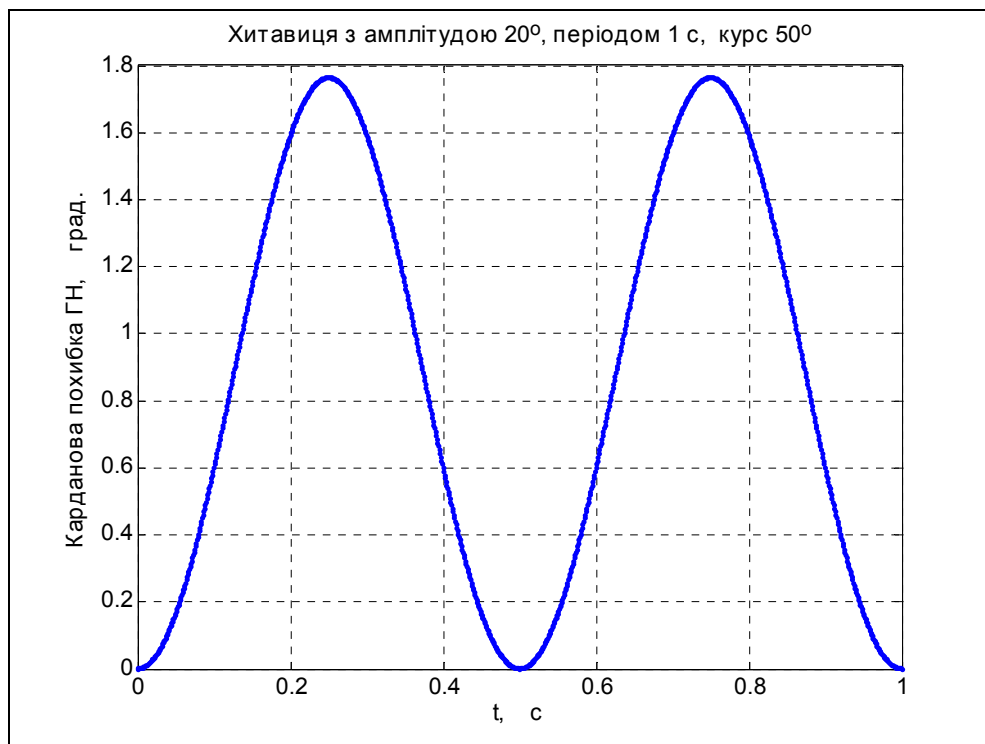


Рис. 12.23. Карданова похибка ГН за хитавиці літака

Зверніть увагу, що карданова похибка у цьому випадку, по-перше, змінюється з подвійною частотою хитавиці, а по-друге, має сталу складову близько $0,9^\circ$. Якщо літак за такої хитавиці автоматично керується гіроскопом напрямку, така похибка призведе, окрім дійсного «рискання» з курсу, ще до нагромадження відхилення від заданої цілі. Наприклад, у разі горизонтального польоту дальністю 100 км карданова похибка призведе до відхилення 1,57 км від цілі.

12.3.2. Забезпечення стійкості власних коливань

Розглянемо спочатку власний рух гіроскопа під дією моментів горизонтальної корекції й сил в'язкого тертя з метою виявлення особливостей власного руху коректованого гіроскопа напрямку. Для цього необхідно скористатися повними (точніше, технічними) рівняннями гіроскопа на нерухомій основі:

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha} + f_2\dot{\alpha} + H_0\dot{\beta} + k_2\beta &= 0; \\ J_3\ddot{\beta} + f_1\dot{\beta} - H_0\dot{\alpha} &= 0. \end{aligned} \quad (12.44)$$

Тут використано припущення:

- 1) система горизонтальної корекції є міжрамковою і пропорційною, тобто коректувальний момент N_k пов'язаний з кутом β повороту внутрішньої рамки відносно зовнішньої залежністю

$$N_k = -k_2\beta;$$

2) по внутрішній і зовнішній осях підвісу діють моменти сил в'язкого тертя.

Визначимо умови стійкості власного руху. Для цього запишемо рівняння у матрично-операторній формі:

$$\begin{bmatrix} Ap + f_2 & H_0p + k_2 \\ -H_0 & J_3p^2 + f_1p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}(p) \\ \beta(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

з нього випливає характеристичне рівняння:

$$a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0 = 0, \quad (12.45)$$

де позначено

$$a_3 = AJ_3; \quad a_2 = J_3f_2 + Af_1; \quad a_1 = H_0^2 + f_1f_2; \quad a_0 = H_0k_2.$$

Відповідно до теореми Гурвіца [7, с. 454], дійсні частини всіх коренів цього кубічного рівняння матимуть від'ємні дійсні частини (тобто система з характеристичним рівнянням (12.45) буде асимптотично стійкою), якщо виконані наступні умови:

$$a_0 = H_0k_2 > 0;$$

$$D_1 = a_1 = H_0^2 + f_1f_2 > 0;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_0a_3 = (H_0^2 + f_1f_2)(J_3f_2 + Af_1) - H_0k_2AJ_3 > 0;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0.$$

Перша нерівність рівносильна умові: *коефіцієнт пропорційності моменту горизонтальної корекції має бути того самого знака, що й кінетичний момент гіроскопа.*

Друга умова виконується завжди завдяки додатним значенням коефіцієнтів тертя.

Якщо виконується третя умова, то четверта зводиться до додатності величини $a_3 = AJ_3$, що також завжди виконується, бо моменти інерції є суто додатними величинами.

Отже головною стає третя умова, яка пов'язує коефіцієнт корекції з величиною сил тертя:

$$\frac{f_2}{A} + \frac{f_1}{J_3} > \frac{|H_0k_2|}{(H_0^2 + f_1f_2)}. \quad (12.46)$$

За цієї умови радіальна корекція привносить у гіроскоп нестійкість, яку можна подолати лише за рахунок введення досить великого тертя по осях підвісу.

Проілюструємо цей результат. Для цього використаємо програми *KoreniGN* і *GyroNap* (див. Додаток 7) для розрахунку коренів і чисельного інтегрування диференціальних рівнянь (12.44).

Нехай гіроскоп напрямку має такі характеристики (приклад суто ілюстративний):

$$H_0 = 100 \text{ сН см с}; \quad A = 10 \text{ сН см с}^2; \quad J_3 = 6 \text{ сН см с}^2; \quad k_2 = 40 \text{ сН см.}$$

Тоді при відсутності демпфірування $f_1 = f_2 = 0$ корені характеристичного рівняння системи (12.45) будуть такими: $p_{1,2} \approx 0,2 \pm j12,9$, $p_3 \approx -0,4$. Як видно, дійсні частини пари комплексно спряжених комплексних коренів додатні, тому рух гіроскопа є нестійким. Причому нестійкими є саме нутаційні коливання гіроскопа, а не його прецесійний рух під дією моменту сил корекції. Інтегрування системи диференціальних рівнянь (12.45) приводить до перехідного процесу, наведеного на рис. 12.24. Як бачимо, нутаційні коливання у цьому випадку розходяться. Гіроскоп напрямку є нестійким.

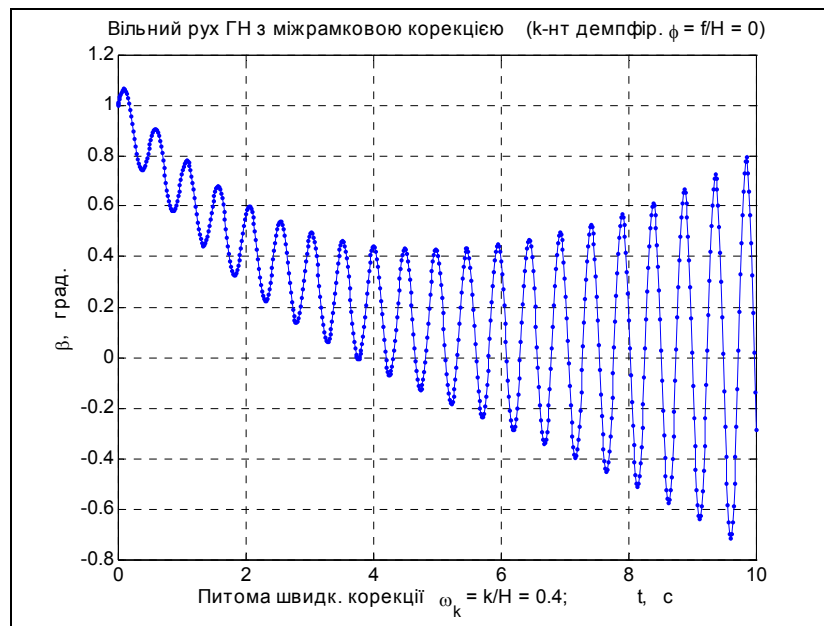


Рис. 12.24. Перехідний процес ГН без демпфірування

Перехідний процес з коефіцієнтами демпфірування $f_1 = f_2 = 5 \text{ сН см с}$ показаний на рис. 12.25.

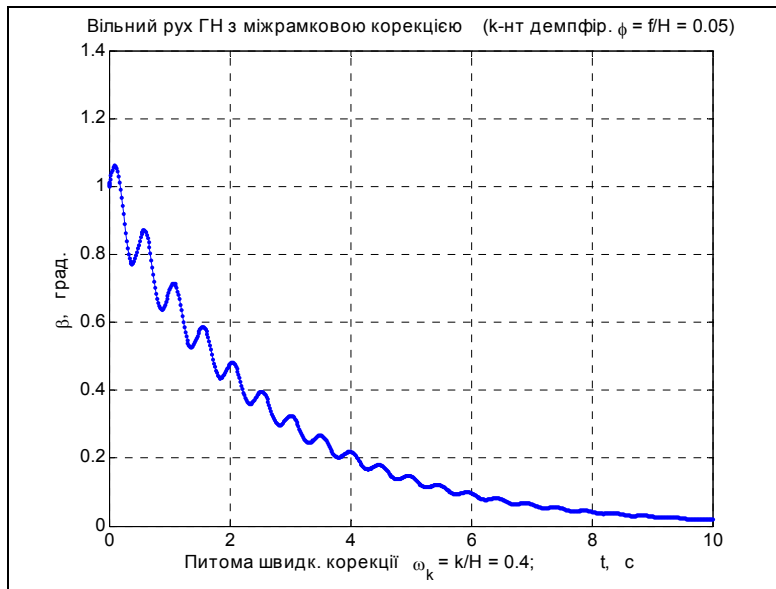


Рис. 12.25. Перехідний процес ГН з демпфіруванням

Тепер корені характеристичного рівняння стають такими: $p_{1,2} \approx -0,47 \pm j12,9$, $p_3 \approx -0,4$. Усі дійсні частини стають від'ємними. Нутаційні коливання загасають. Гіроскоп напрямку стає стійким.

Отже, проектуючи систему горизонтальної корекції, треба пам'ятати про умову (12.46) і забезпечувати належне демпфірування.

12.3.3. Віражна похибка

Момент системи горизонтальної корекції, крім виконання корисної функції, у деяких режимах призводить до додаткових похибок гіроскопа напрямку, які проявляються в азимутальному дрейфі головної осі. Одним з таких режимів є віраж літака. Похибку показань гіроскопа напрямку на віражі, зумовлену моментом сил горизонтальної корекції, називають *віражною похибкою*.

Віраж – це фігура пілотажу, коли літак з постійним кутом крену φ_0 здійснює політ у горизонтальній площині по колу з постійною швидкістю і з кутом тангажа, що дорівнює нулю. При цьому корпус гіроскопа напрямку обертається у просторі з постійною кутовою швидкістю ω_B , напрямленою вздовж вертикалі місця, тобто у цьому випадку маємо $u_{\xi}^c = \omega_B$; $u_{\eta}^c = u_{\zeta}^c \equiv 0$, а проєкції кутової швидкості основи на осі основи визначаються так:

$$u_{x_c}^c = \omega_B \cos \varphi_0 \approx \omega_B; \quad u_{y_c}^c = -\omega_B \sin \varphi_0 \approx -\omega_B \varphi_0; \quad u_{z_c}^c = 0.$$

Задля спрощення вважатимемо, що кут крену малий, опорна система координат нерухома ($\mathbf{u} = 0$), а головна вісь гіроскопа у нульовому наближенні збігається з віссю ζ ($\alpha^0 = \beta^0 = 0$). Тоді з виразів (12.40) – (12.42) випливає

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= -\operatorname{tg} \psi \cos \varphi_0 & \Rightarrow & \alpha \approx -\psi; \\ \sin \beta &= \sin \psi \sin \varphi_0 & \Rightarrow & \beta \approx \varphi_0 \sin \psi; \\ \operatorname{tg} \gamma^0 &= \operatorname{tg} \varphi_0 \cos \psi & \Rightarrow & \gamma^0 \approx \varphi_0 \cos \psi. \end{aligned}$$

Якщо ж до того додати, що у цьому випадку

$$\psi = \psi_0 + \omega_B t,$$

то, нехтуючи малими членами вищими за перший порядок мализни і враховуючи лише дію моменту N_k горизонтальної корекції, прецесійні рівняння (12.1) і (12.2) можна записати у такий спосіб:

$$\frac{d\beta}{dt} = \omega_B \varphi_0 \cos(\omega_B t + \psi_0) + \frac{N_k}{H_0}; \quad \frac{d\alpha^0}{dt} = -\frac{N_k}{H_0} \varphi_0 \cos(\omega_B t + \psi_0); \quad (12.47)$$

$$\frac{d\beta^0}{dt} = \frac{N_k}{H_0}.$$

Міжрамкова пропорційна корекція. Якщо система корекції є міжрамковою і пропорційною, то момент корекції є пропорційним куту β між рамками карданового підвісу:

$$N_k = -k \beta.$$

Перше рівняння системи (12.47) тепер набуде вигляду

$$\frac{d\beta}{dt} + \varepsilon \beta = \omega_B \varphi_0 \cos(\omega_B t + \psi_0).$$

Величину $\varepsilon = \frac{k}{H_0}$ називають *питомою швидкістю корекції*. Частинний розв'язок рівняння має таку форму:

$$\beta = A_S \sin(\omega_B t + \psi_0) + A_C \cos(\omega_B t + \psi_0),$$

де

$$A_S = \frac{\omega_B^2}{\omega_B^2 + \varepsilon^2} \varphi_0; \quad A_C = \frac{\omega_B \varepsilon}{\omega_B^2 + \varepsilon^2} \varphi_0.$$

Використаємо його для визначення швидкості азимутального дрейфу з другого рівняння (12.47)

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha^0}{dt} &= -\varepsilon \beta \varphi_0 \cos(\omega_B t + \psi_0) = \\ &= -\varepsilon \varphi_0 \cos(\omega_B t + \psi_0) [A_S \sin(\omega_B t + \psi_0) + A_C \cos(\omega_B t + \psi_0)] = \\ &= -\frac{\omega_B \varepsilon \varphi_0^2}{2(\omega_B^2 + \varepsilon^2)} [\varepsilon + \omega_B \sin(2\omega_B t + 2\psi_0) + \varepsilon \cos(2\omega_B t + 2\psi_0)]. \end{aligned}$$

Як бачимо, швидкість азимутального дрейфу змінюється періодично з частотою, удвічі більшою за частоту віражу. Окрім того, що є найважливішим, виникає також систематичний дрейф

$$\left\langle \frac{d\alpha^0}{dt} \right\rangle = -\frac{\omega_B \varepsilon^2 \varphi_0^2}{2(\omega_B^2 + \varepsilon^2)}. \quad (12.48)$$

Цей дрейф є характеристикою неусувної нагромаджувальної похибки гіроскопа напрямку.

Зручною характеристикою віражної похибки є також кут азимутального повороту головної осі за час, що дорівнює терміну одного повного віражу:

$$\Delta \alpha = \left\langle \dot{\alpha} \right\rangle \frac{2\pi}{\omega_B} = -\pi \frac{\varepsilon^2}{(\omega_B^2 + \varepsilon^2)} \varphi_0^2.$$

Залежності цієї віражної похибки від відносної інтенсивності системи горизонтальної корекції, під якою можна розуміти відношення питомої швидкості корекції до кутової швидкості віражу ε / ω_b , подані на рис. 12.26.

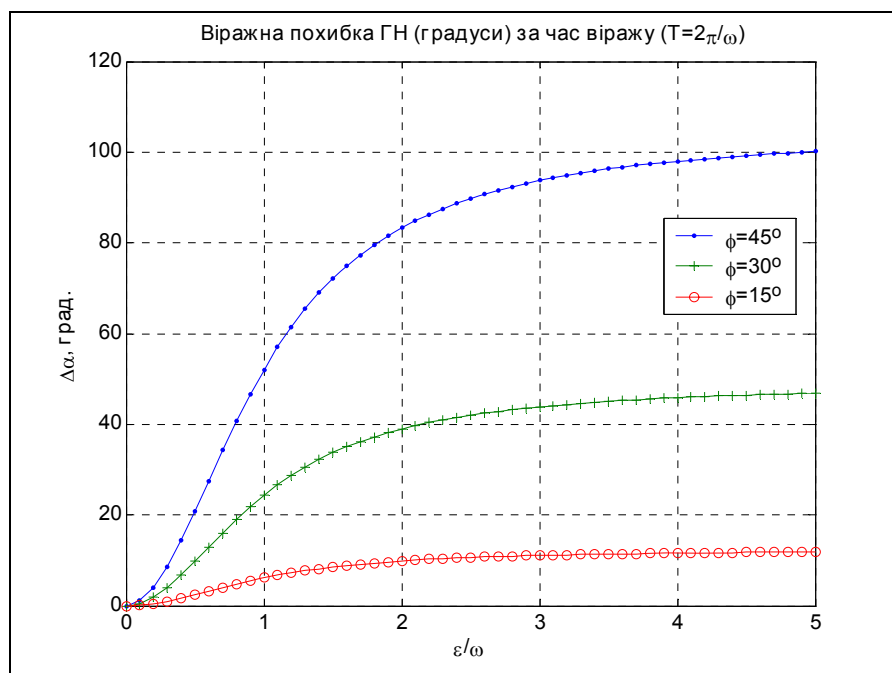


Рис. 12.26. Віражна похибка ГН за час одного повного віражу

Розрахунок і побудова графіків здійснена за допомогою програми *Virag* (див. Додаток 7).

Якщо відносна інтенсивність (ε / ω_b) системи корекції набагато більша за одиницю, систему корекції називають *сильною*. Для сильної корекції характерно, що протягом усього часу віражу головна вісь гіроскопа встигає повернутися сумісно з основою так, що кут повороту β внутрішньої рамки відносно зовнішньої увесь час залишається майже рівним нулю. У зворотному випадку *слабкої корекції*, навпаки, головна вісь гіроскопа при віражі майже не повертається в опорній системі.

Користуючись програмою *Vypryam_effect_GN*, проілюструємо поведінку гіроскопа напрямку при віражі літака.

Рисунок 12.27 показує поведінку головної осі ГН при досить слабкій горизонтальній корекції $\varepsilon / \omega_b = 0,08$.

Систематичний дрейф гіроскопа напрямку в азимуті складає, як впливає з графіків, $0,0375^\circ$ у секунду.

Наступний рис. 12.28 відбиває рух ГН при сильній корекції $\varepsilon / \omega_b = 1,6$. У цьому випадку дрейф збільшився до $3^\circ,75$ градусів у секунду, тобто у 100 разів.

Відображення впливу тертя здійснено на рис. 12.29.

Головний ефект, що спостерігається у цьому випадку, – зміщення середнього положення головної осі від перпендикуляра до площини зовнішньої рамки (на кут близько $7,5^\circ$), який є наслідком протидії моменту горизонтальної корекції

постійній складовій моменту сил тертя по зовнішній осі підвісу при віражі. Азимутальний дрейф залишився попереднім (маємо випадок слабкої корекції).

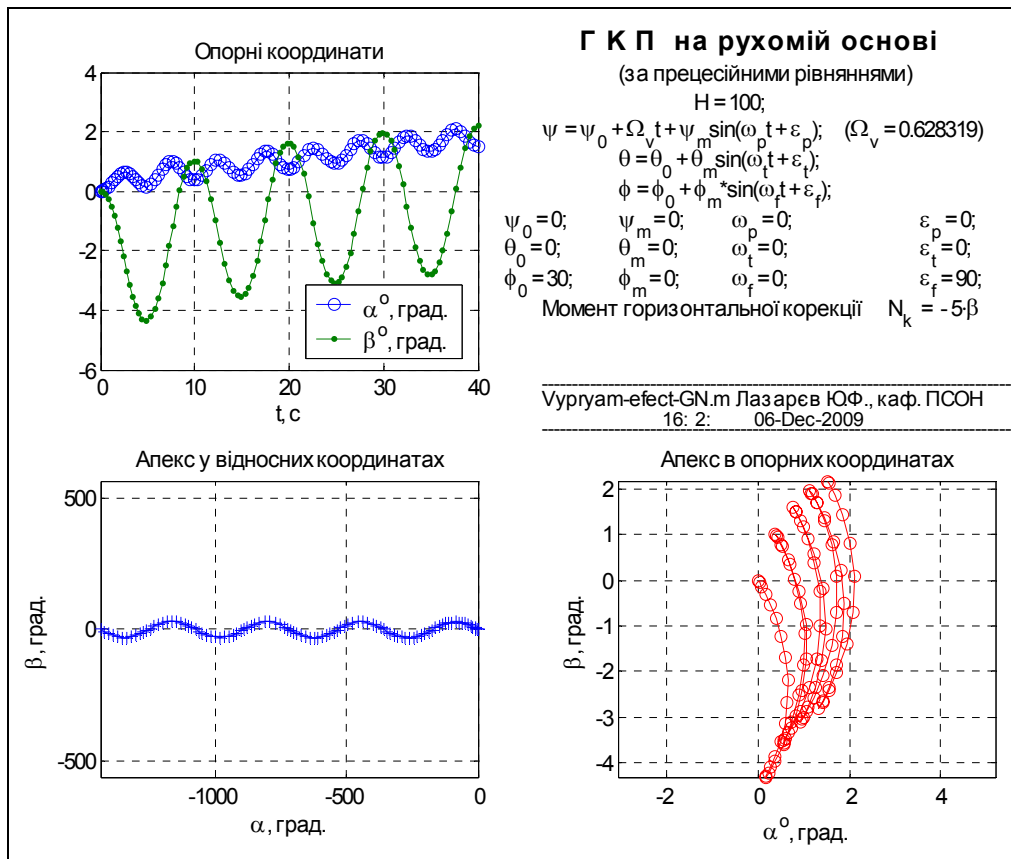


Рис. 12.27. Віражна похибка ГН за слабкої корекції

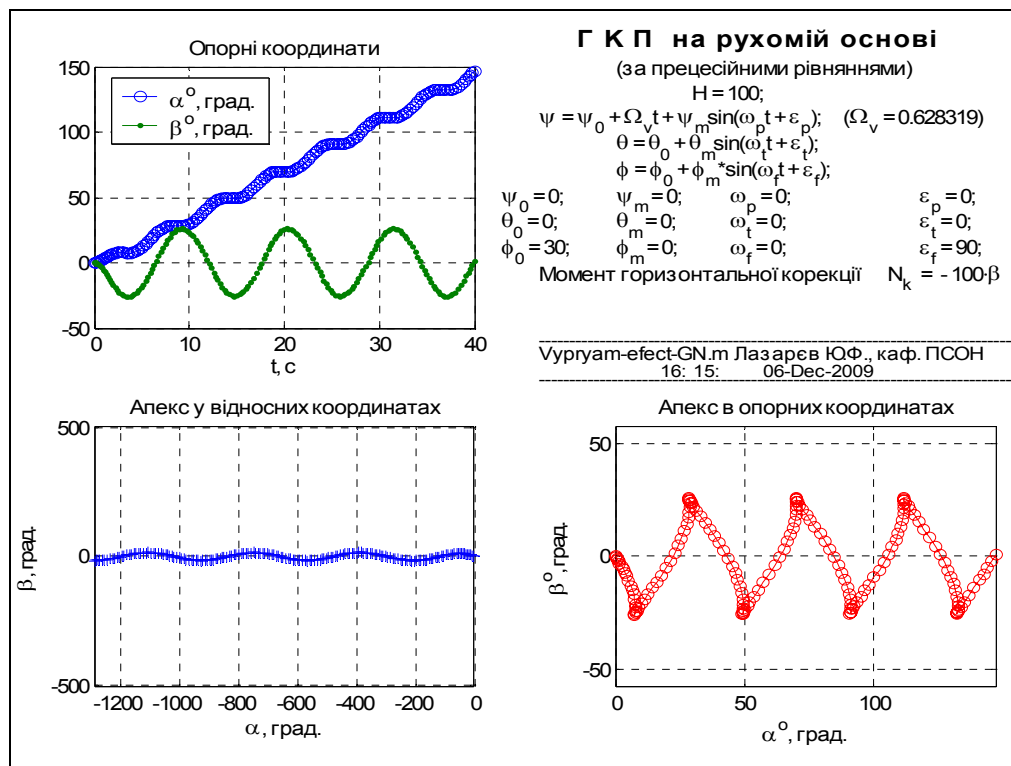


Рис. 12.28. Віражна похибка ГН за сильної корекції

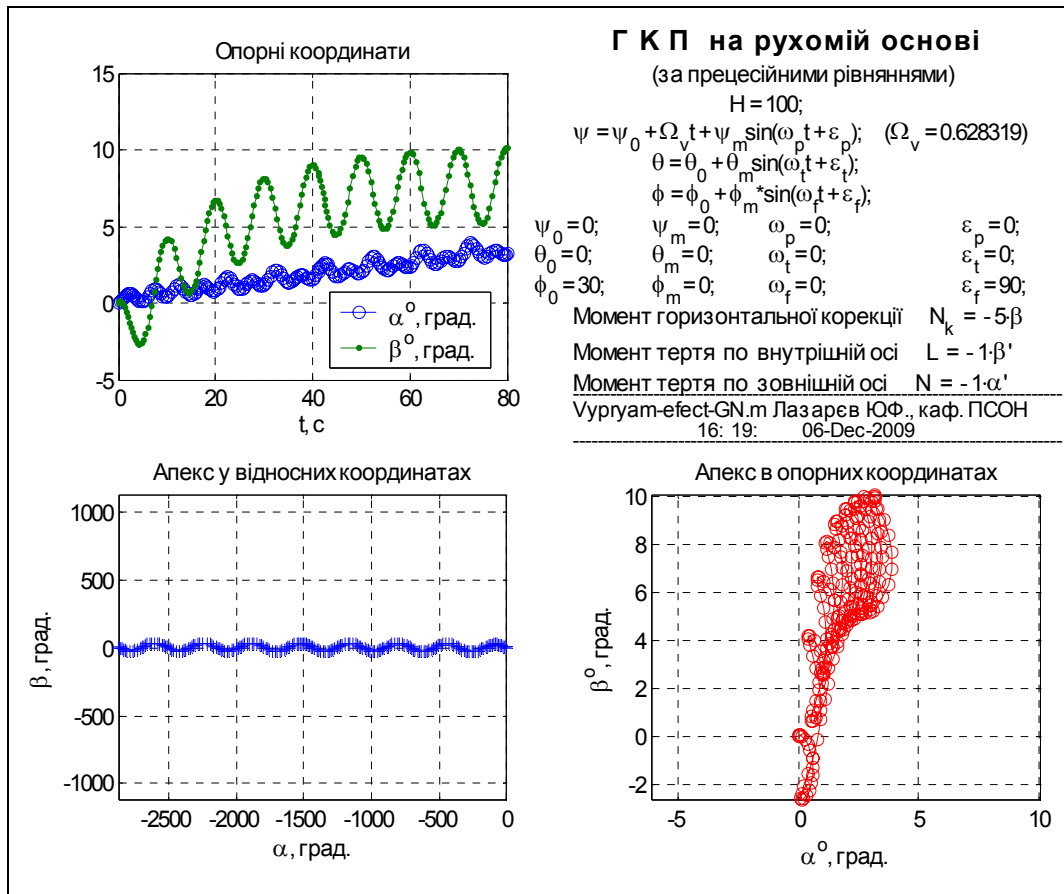


Рис. 12.29. Віражна похибка ГН за наявності тертя

Маятникова пропорційна корекція. На відміну від міжрамкової корекції, збурення якої є суто кінематичними, маятникова корекція не реагує на зміну куту між рамками підвісу при здійсненні літаком віражу. Натомість джерелом її збурювання стають лінійні прискорення, з якими може рухатися точка підвісу гіроскопа, точніше, – сили інерції, що виникають при русі основи з прискоренням, і які можна розглядати як зовнішні сили при аналізі відносного руху маятника – чутливого елемента системи горизонтальної корекції. У разі віражу літака такою силою є відцентрова сила інерції, яка спричиняє відхилення маятника від вертикалі.

Відцентрове прискорення, яке під час віражу напрямлене у бік, протилежний відхиленню (кут крена φ) нормальної осі літака від вертикалі, лежить у горизонтальній площині і дорівнює $w_{вц} = R_B \omega_B^2$, де R_B – радіус віражу, ω_B – його кутова швидкість. Проекція цього прискорення на напрямок проекції головної осі z гіроскопа на площину горизонту дорівнюватиме (рис. 12.30):

$$w_{z^*} = w_{вц} \sin(\psi - \alpha^0) = R_B \omega_B^2 \sin(\psi - \alpha^0). \quad (12.49)$$

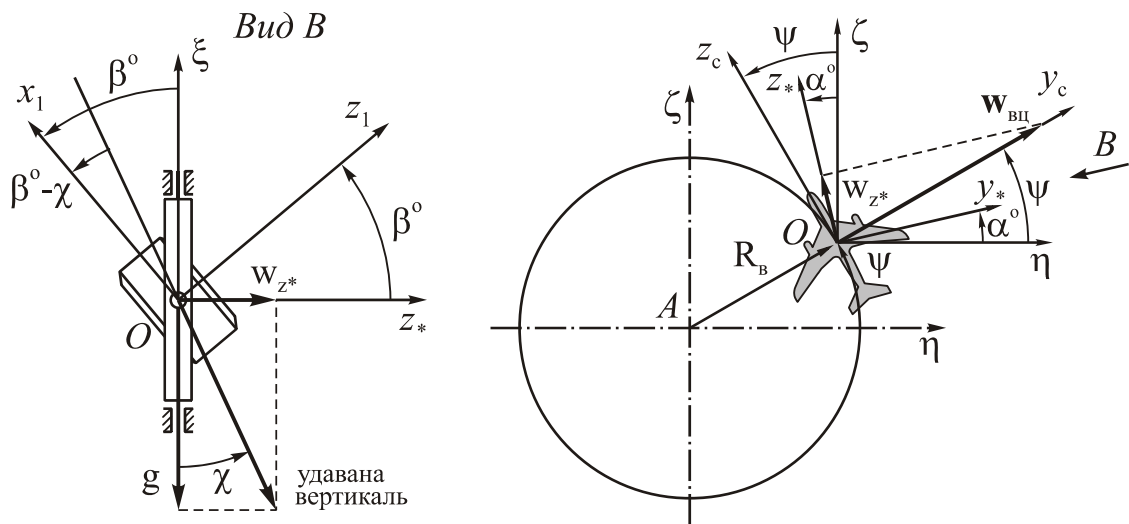


Рис. 12.30. Кінематика при віражі ($\varphi < 0$)

Саме ця складова прискорення спричинить поворот маятника – чутливого елемента системи горизонтальної корекції – навколо осі y^* , вздовж якої напрямлений вектор похідної від опорної координати β^0 .

Припустимо, що під час віражу у кожний момент часу вісь маятника встигає зайняти положення удаваної вертикалі (тобто рівнодійної сили тяжіння і відцентрової сили). Як видно з рис. 12.30, ця рівнодійна відхиляється від вертикалі у площині «головна вісь гіроскопа-вертикаль» на кут $\chi = -\arctg \frac{w_{z^*}}{g}$, де g – прискорення сили тяжіння. Тут враховано також, що напрямок відхилення при додатному куті крену є зворотним до того, що наведений на рисунку.

Вважаючи цей кут малим, з урахуванням виразу (12.49), для обчислення кута χ застосуємо наближену формулу:

$$\chi \approx -\frac{R_B \omega_B^2}{g} \sin(\psi - \alpha^0).$$

За правильного віражу нормальна вісь літака весь час збігається з удаваною вертикаллю, тому $\frac{R_B \omega_B^2}{g} \approx \varphi_0$, а отже

$$\chi \approx -\varphi_0 \sin(\psi - \alpha^0).$$

Вважатимемо, що маятниковим чутливим елементом системи корекції безпосередньо вимірюється кут між віссю x (рис. 12.30) і поточним положенням осі цього маятника (яке, як було зазначено, збігається з положенням удаваної вертикалі), тобто кут $\beta^0 - \chi$. Якщо припустити систему корекції пропорційною, то електричний сигнал, що надходить на вхід датчика моментів по зовнішній осі підвісу, пропорційний саме цьому куту, тобто момент горизонтальної корекції визначиться рівністю:

$$N_k = -k(\beta^0 - \chi). \quad (12.50)$$

Для виявлення закону змінювання у часі цього моменту використаємо третє рівняння (12.47)

$$\frac{d\beta^{\circ}}{dt} = -\varepsilon(\beta^{\circ} - \chi),$$

яке простіше розв'язувати відносно координати $(\beta^{\circ} - \chi)$, тобто подавати рівняння у вигляді:

$$\frac{d(\beta^{\circ} - \chi)}{dt} + \varepsilon(\beta^{\circ} - \chi) = -\dot{\chi} \approx \varphi_0 \omega_B \cos(\omega_B t + \psi_0).$$

Це рівняння за формою збігається з рівнянням з кута β за міжрамкової корекції. Тому легко впевнитися, що відшукуючи його розв'язок, потім використовуючи його для визначення закону змінювання моменту корекції (12.50), підставляючи результат у друге рівняння (12.47) і відшукуючи сталу складову азимутального дрейфу, ми знову одержимо ту саму формулу (12.48).

Тому все, що було сказане про поведінку гіроскопа напрямку з міжрамковою корекцією, можна поширити і на маятникову систему корекції (із застереженням, що йдеться про правильний вираз).

12.3.4. Похибка за хитавиці

Під час хитавиці основи система горизонтальної корекції також буде збурюватися (чи кінематично, чи силами інерції) і призводити до додаткових похибок гіроскопа напрямку.

У загальному випадку, як впливає з рис. 12.19, матимемо:

$$u_{\chi_c}^c = \dot{\psi} \cos \vartheta \cos \varphi + \dot{\vartheta} \sin \varphi; \quad u_{\gamma_c}^c = -\dot{\psi} \cos \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi; \quad u_{z_c}^c = \dot{\phi} + \dot{\psi} \sin \vartheta.$$

Якщо припустити кути тангажа ϑ і крену φ , а також кутову швидкість основи малими, то у першому наближенні можна вважати:

$$u_{\chi_c}^c \approx \dot{\psi}; \quad u_{\gamma_c}^c \approx \dot{\vartheta}; \quad u_{z_c}^c \approx \dot{\phi}.$$

Обмежимося урахуванням дії моменту міжрамкової пропорційної системи корекції, нехтуючи рештою моментів сил по осях підвісу.

Тоді азимутальний дрейф гіроскопа напрямку можна визначити, як і раніше, із співвідношення

$$\langle \dot{\alpha}^{\circ} \rangle = \varepsilon \langle \beta(t) \gamma^{\circ}(t) \rangle, \quad (12.51)$$

яке впливає з першого рівняння (12.2).

Розглянемо окремий випадок, коли хитавиця здійснюється лише навколо поздовжньої осі літака, тобто тільки з кута крена

$$\varphi(t) = \varphi_m \sin(\omega t + \varepsilon_{\varphi}).$$

Для визначення закону змінювання кута γ° використаємо співвідношення (12.42). Матимемо

$$\gamma^{\circ}(t) \approx \varphi \cos \psi_0 = \varphi_m \cos \psi_0 \sin(\omega t + \varepsilon_{\varphi}). \quad (12.52)$$

Визначення $\beta(t)$ здійснимо за допомогою другого рівняння (12.1), яке подамо у виді

$$\frac{d\beta}{dt} + \varepsilon\beta = \dot{\varphi} \sin \psi_0 = \varphi_m \omega \sin \psi_0 \cos(\omega t + \varepsilon_\varphi).$$

Частинний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$\beta(t) = \frac{\varphi_m \omega}{\omega^2 + \varepsilon^2} \sin \psi_0 [\omega \sin(\omega t + \varepsilon_\varphi) + \varepsilon \cos(\omega t + \varepsilon_\varphi)]. \quad (12.53)$$

Використовуючи (12.52) і (12.53) у (12.51), дістанемо:

$$\langle \dot{\alpha}^o \rangle = \frac{\varepsilon \omega^2}{2(\omega^2 + \varepsilon^2)} \varphi_m^2 \sin \psi_0 \cos \psi_0 = \frac{\varepsilon \omega^2}{4(\omega^2 + \varepsilon^2)} \varphi_m^2 \sin 2\psi_0. \quad (12.54)$$

Вираз (12.54) азимутального дрейфу гіроскопа напрямку дещо нагадує дрейф (12.48) цього приладу під час віражу. Але є й важливі відмінності.

По-перше, дрейф за кренової хитавиці суттєво залежить від куту ψ_0 між головною віссю гіроскопа і поздовжньою віссю літака. Якщо вісь хитавиці збігається з напрямом головної осі гіроскопа, або перпендикулярна їй, азимутальний дрейф гіроскопа напрямку через момент горизонтальної корекції зникає. Найбільшого значення азимутальний дрейф набуває у випадках, коли вісь хитавиці утворює кут 45° з віссю гіроскопа. Це максимальне значення визначається формулою:

$$\langle \dot{\alpha}^o \rangle_{\max} = \frac{\varepsilon \omega^2}{4(\omega^2 + \varepsilon^2)} \varphi_m^2.$$

По-друге, залежність дрейфу від питомої швидкості корекції ε є дещо іншою. За слабкої корекції ($\varepsilon/\omega \ll 1$) дрейф можна визначити формулою

$$\langle \dot{\alpha}^o \rangle_{\max} = \frac{\varepsilon}{4} \varphi_m^2,$$

при сильній ($\varepsilon/\omega \gg 1$) він наближено дорівнює

$$\langle \dot{\alpha}^o \rangle_{\max} = \frac{\omega^2}{4\varepsilon} \varphi_m^2.$$

Отже, якщо корекція є слабкою, то з підвищенням інтенсивності корекції дрейф збільшується, а коли інтенсивність корекції досягає великого значення значною, тобто корекція стає сильною, подальше її збільшення приводить до зменшення дрейфу. Отже, існує певне значення питомої швидкості корекції, при якому дрейф набуває максимального значення. Це відбувається, коли питома швидкість корекції дорівнює частоті хитавиці $\varepsilon_{\text{opt}} = \omega$, а максимально можливе значення

$$\text{дрейфу дорівнює } \langle \dot{\alpha}^o \rangle_{\max} = \frac{\omega}{8} \varphi_m^2.$$

Далі наводяться результати моделювання поведінки гіроскопа напрямку при хитавиці основи за програмною моделлю *Vypryam_efect_GN* (Додаток 7).

Графіки, що ілюструють залежність азимутального дрейфу від куту між головною віссю гіроскопа і віссю хитавиці наведені на рис. 12.31 – 12.33. Поводження гіроскопа при $\psi_0 = 45^\circ$ відображений на рис. 12.31, при $\psi_0 = 5^\circ$ – на рис. 12.32, а при $\psi_0 = -45^\circ$ – на рис. 12.33. Результати моделювання дають змогу впевнитися, що максимальний дрейф виникає за $\psi_0 = 45^\circ$ і $\psi_0 = -45^\circ$, причому змі-

нювання знака куту ψ_0 приводить до змінювання напрямку дрейфу. Найменший дрейф має місце при мінімальному значенні куту ψ_0 . Усі ці три випадки відповідають слабкій корекції ($\varepsilon/\omega = 0,16$).

Наступні два рисунки відбивають рух в умовах такої самої хитавиці, що й відображена на рис. 12.31, але з більшою питомою швидкістю корекції. Так, на рис. 12.34 показаний випадок, коли $\varepsilon/\omega = 1$, коли питома швидкість корекції є такою, при якій дрейф є максимальним за величиною. Ще більшою є питома швидкість корекції у випадку, поданому на рис. 12.35. Вона відповідає $\varepsilon/\omega = 3,2$.

Як легко впевнитися, найбільший дрейф спостерігається за значення питомої швидкості корекції, що дорівнює частоті хитавиці. Збільшення чи зменшення інтенсивності корекції порівняно з цим значенням приводить до зменшення дрейфу.

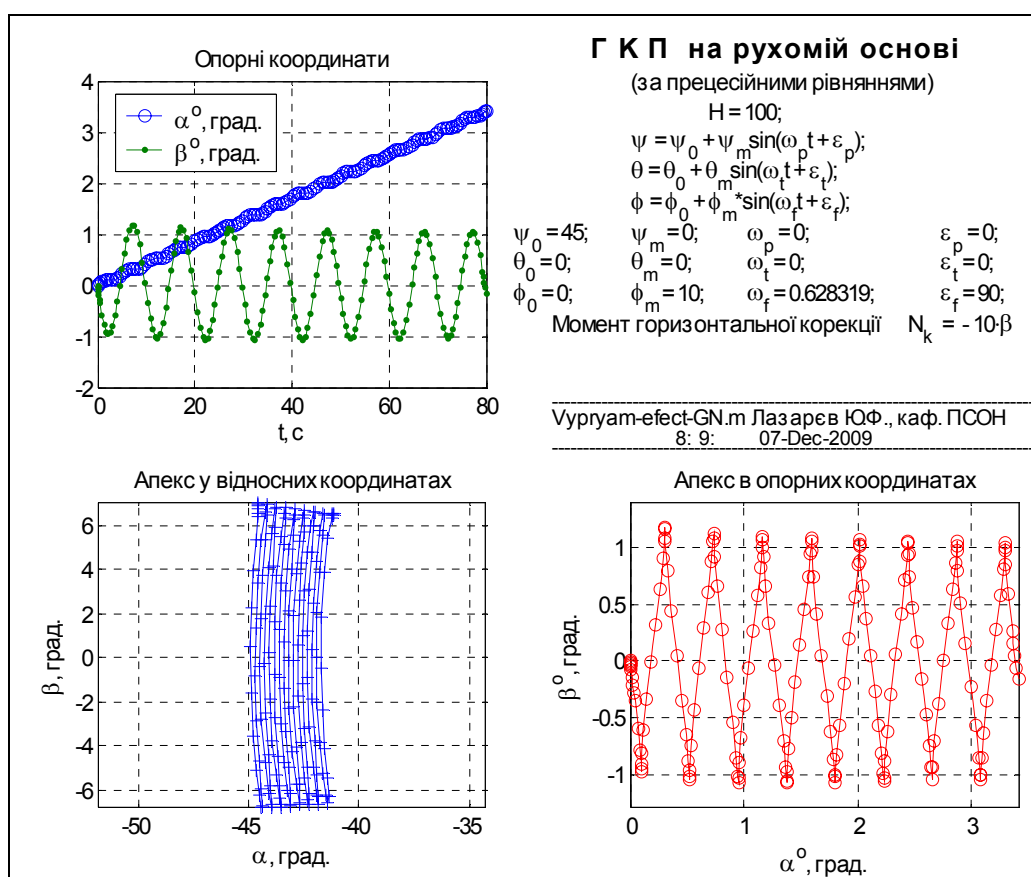


Рис. 12.31. Похибка ГН при хитавиці з крену при $\psi_0 = 45^\circ$

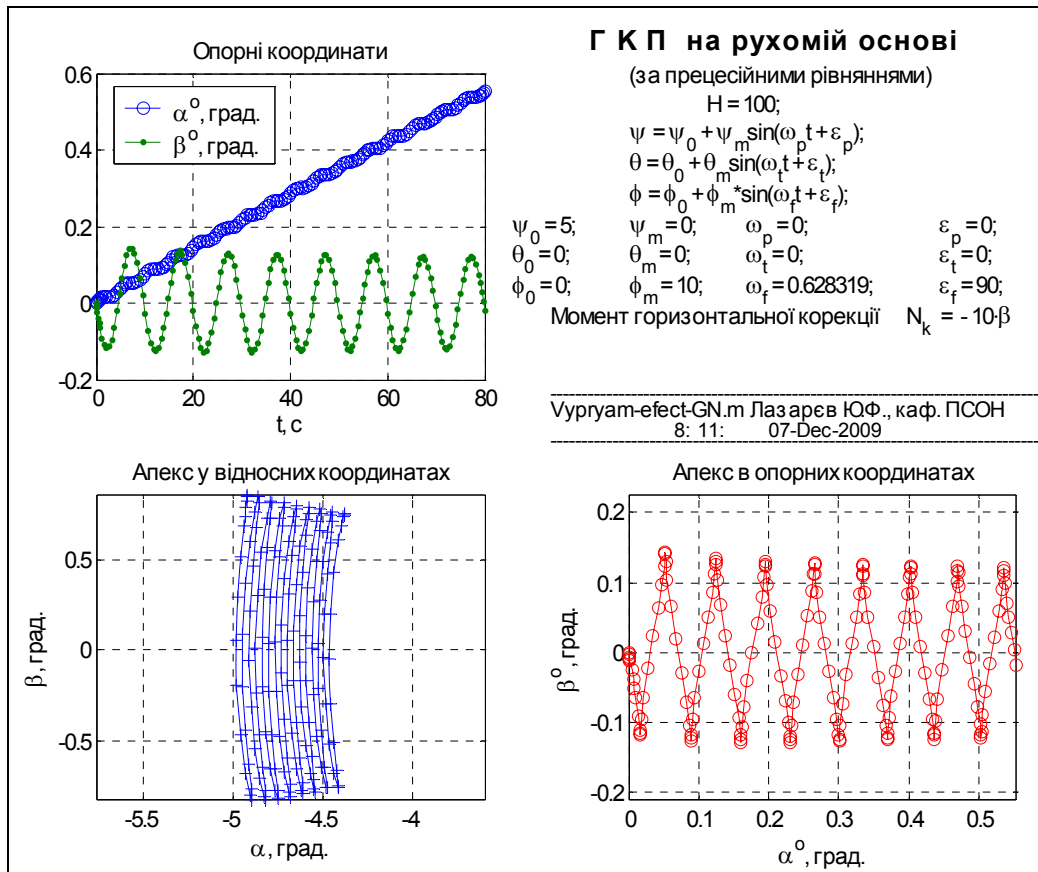


Рис. 12.32. Похибка ГН при хитавиці з крену при $\psi_0 = 5^\circ$

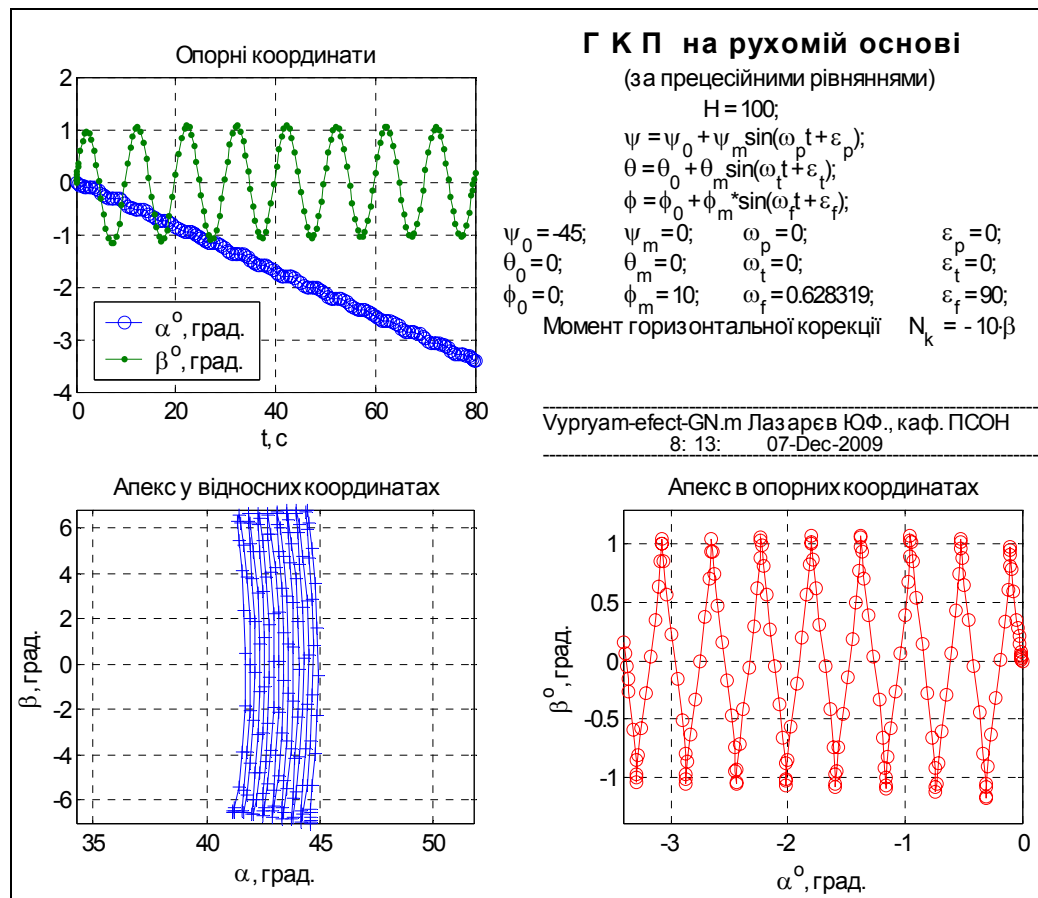


Рис. 12.33. Похибка ГН при хитавиці з крену при $\psi_0 = -45^\circ$

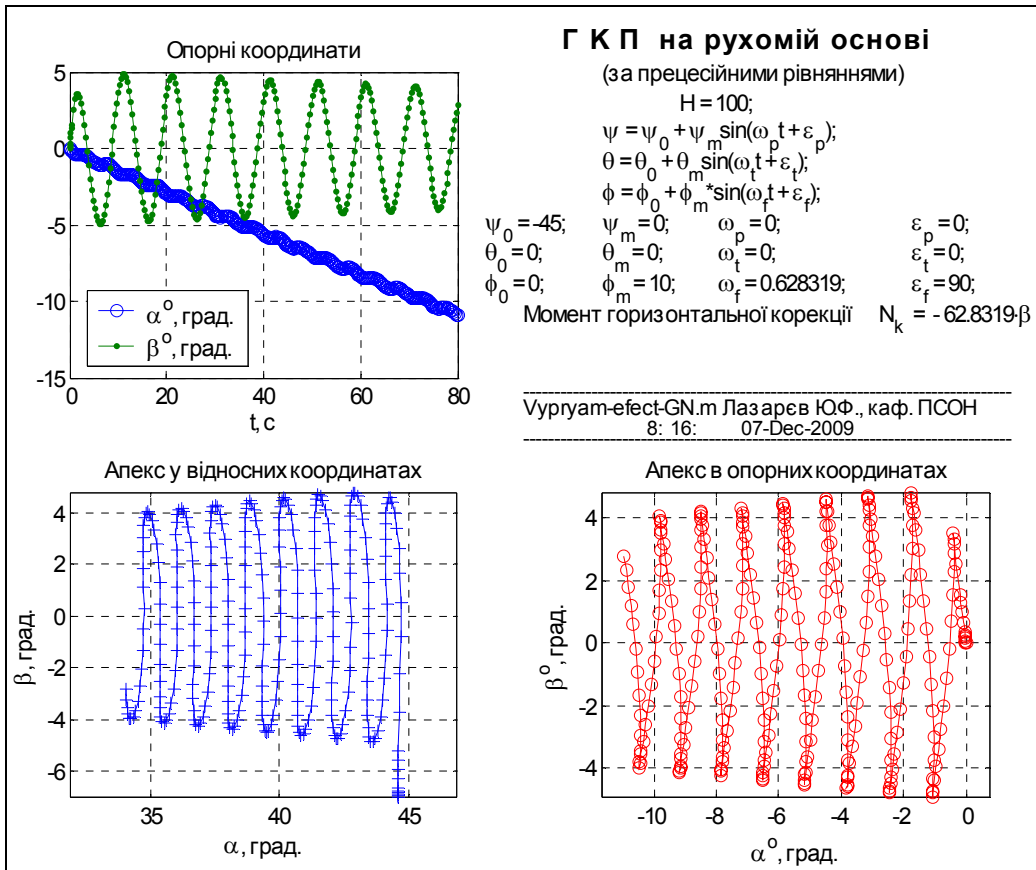


Рис. 12.34. Максимальна похибка ГН за хитавиці

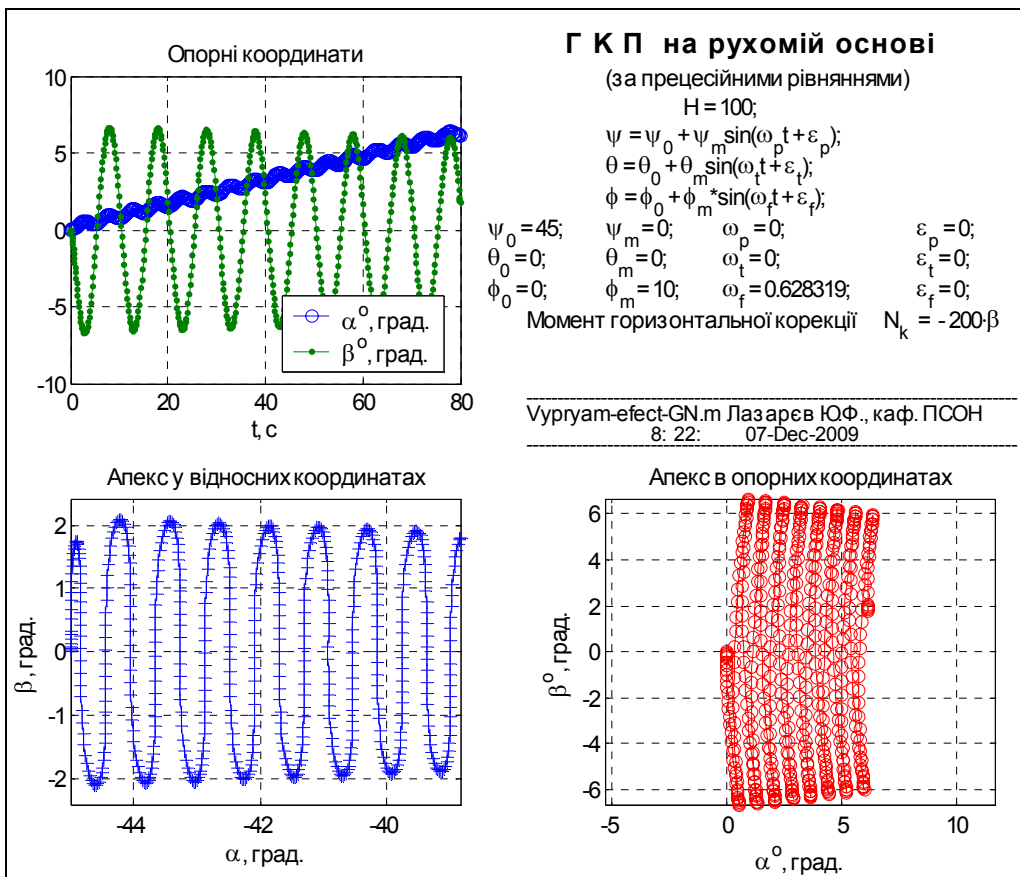


Рис. 12.35. Похибка ГН при сильній корекції

Вплив тертя, яке завжди є в осях підвісу, на поведінку гіроскопа напрямку, демонструють рис. 12.36 і 12.37.

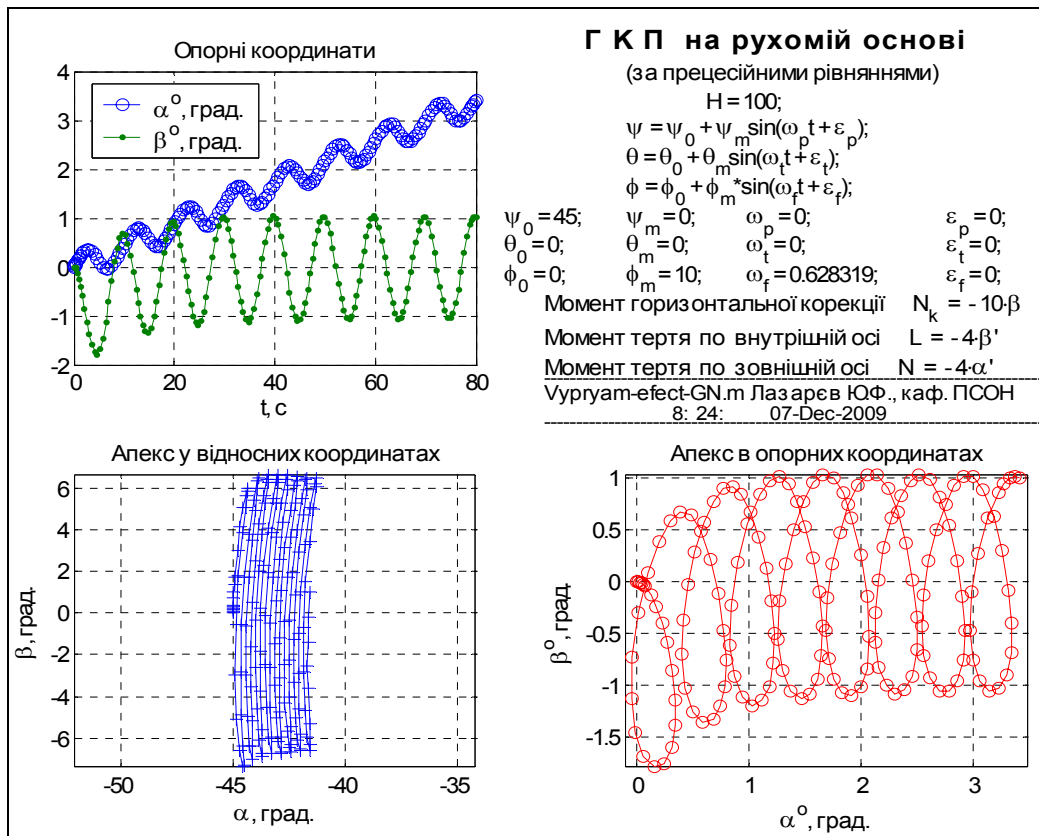


Рис. 12.36. Похибка ГН при хитавиці з крену з врахуванням тертя

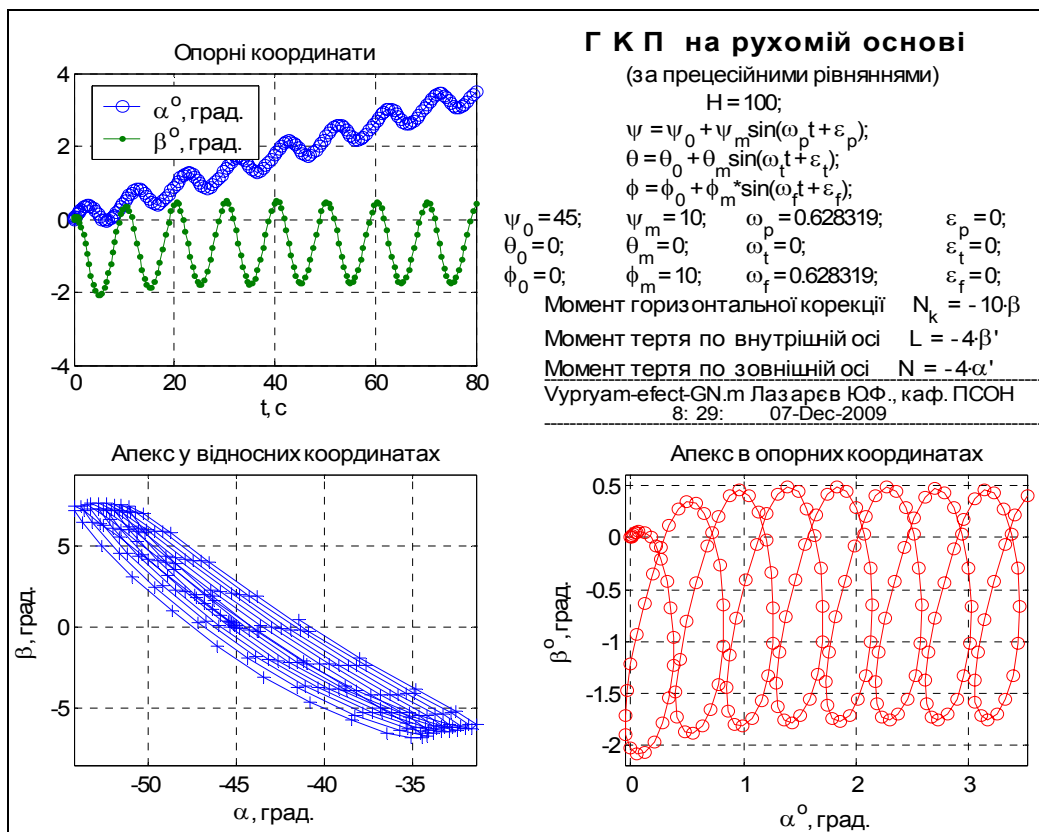


Рис. 12.37. Похибка ГН при хитавиці з крену і ристканню

З рис. 12.36, який відображує випадок, аналогічний поданому на рис. 12.31, за виключенням того, що додатково по осях підвісу діють однакові моменти сил в'язкого тертя, можна зробити висновок, що тертя впливає лише на форму траєкторії апекса, майже не впливаючи на головні параметри руху (величину і напрямок дрейфу, амплітуди вимушених коливань тощо). Якщо ж, окрім хитавиці з куту крену, літак здійснює коливання ще й навколо вертикалі, то тертя приводить ще й до помітного відхилення середнього положення головної осі від перпендикуляра до площини зовнішньої рамки. Це видно з рис. 12.37.

12.3.5. Застосування теореми про тілесний кут

Кутову швидкість дрейфу, виражену кінематичними збуреннями, досить просто визначити, використовуючи *теорему про тілесний кут* (уперше доведена О. Ю. Ішлинським у 1952 р. [12, с. 57]).

Розглянемо сутність цієї теореми [12, с. 59].

Теорема про тілесний кут. Якщо тіло рухається так (рис. 12.38), що деяка вісь u , жорстко з'єднана з ним, описує замкнену конічну поверхню у просторі за час T , то кут φ_u , на який повернеться у просторі тіло навколо цієї осі наприкінці такого руху визначиться формулою

$$\varphi_u = \int_0^T \omega_u(t) dt + S_u,$$

де ω_u – проекція абсолютної кутової швидкості твердого тіла на вісь u ; S_u – сферичний кут у стерadianах, утворений віссю u в інерціальному просторі за час T , узятий з урахуванням знака.

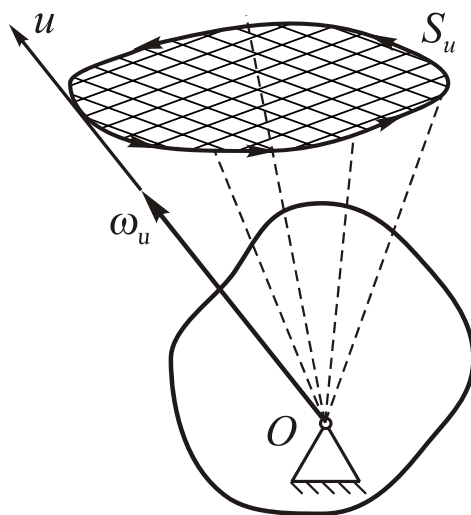


Рис. 12.38. Кінематика повороту твердого тіла

При цьому, якщо ця площа описується віссю u проти годинникової стрілки (при погляді з кінця осі u), вона вважається додатною, а якщо за годинниковою стрілкою – від'ємною.

Теорема про тілесний кут суттєво спрощує процес пошуку похибки (або дрейфу) гіроскопа у випадку, коли міжрамкова корекція є сильною. У цьому випадку головну вісь гіроскопа можна вважати перпендикулярною зовнішній осі підвісу за будь яких рухів основи, а отже вважати, що вона утворює з цією віссю одне тверде тіло. Тоді для визначення руху головної осі у просторі можна застосувати теорему про тілесний кут.

Розглянемо кінематику ГКП, подану на рис. 12.39. Визначимо середню кутову швидкість дрейфу гіроскопа навколо зовнішньої осі підвісу x_2 (тобто з координати α), застосовуючи теорему до осі x_2 , вважаючи, що вона здійснює у просторі замкнений рух з періодом T .

Визначимо положення системи координат $x_2 y_2 z_2$ (в якій вісь z_2 збігається з головною віссю гіроскопа (міжрамкова корекція вважається сильною), а вісь y_2 є внутрішньою віссю підвісу) у просторі за допомогою кутів ϑ , γ° і α (див. рис. 12.39). При цьому кут α і є тим кутом навколо зовнішньої осі підвісу, приріст якого за період замкненого руху осі x_2 потрібно визначити.

Проекція повної кутової швидкості системи $x_2 y_2 z_2$ на вісь x_2 дорівнює $\omega_{x_2} = \dot{\alpha} + \dot{\vartheta} \sin \gamma^\circ$. З цього випливає

$$\Delta\alpha = \int_0^T \omega_{x_2} dt - \int_0^T \dot{\vartheta} \sin \gamma^\circ dt = \int_0^T \omega_{x_2} dt + \oint_K (-\sin \gamma^\circ) d\vartheta, \quad (12.55)$$

де останній інтеграл береться по замкненому контуру конічної поверхні, яку описує у просторі вісь x_2 .

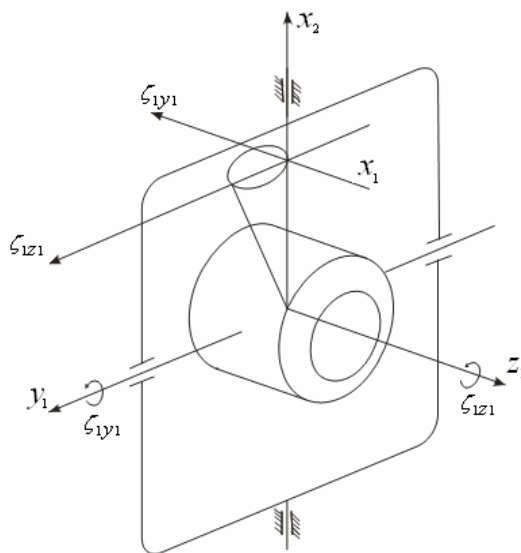


Рис. 12.39. Кінематика гіроскопа з сильною міжрамковою корекцією

Для перетворення останнього контурного інтегралу в подвійний інтеграл по поверхні сфери одиничного радіуса застосуємо теорему Гріна:

$$\oint_K P du + Q dv = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) dudv.$$

У розглядуваному випадку маємо:

$$u = \vartheta; \quad v = \gamma^0; \quad P = -\sin \gamma^0; \quad Q = 0, \quad (12.56)$$

а тому

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = -\frac{\partial P}{\partial \gamma^0} = \cos \gamma^0.$$

Отже

$$\oint_K (-\sin \gamma^0) d\vartheta = \iint_S \cos \gamma^0 d\gamma^0 d\vartheta. \quad (12.57)$$

Доведемо, що останній інтеграл є площею частини сфери одиничного радіуса, яка вирізається на ній конічною поверхнею, по якій рухається вісь x_2 .

З математики відомо [60, с. 256], що якщо прямокутні координати ξ , η і ζ поверхні задані як функції двох криволінійних координат u і v , то площа цієї поверхні, обмежена деяким замкненим контуром, визначається формулою:

$$S = \iint_S \sqrt{EG - F^2} dudv,$$

де позначено

$$E = \left(\frac{\partial \xi}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial u} \right)^2; \quad G = \left(\frac{\partial \xi}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial v} \right)^2;$$

$$F = \left(\frac{\partial \xi}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial v} \right) + \left(\frac{\partial \eta}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial v} \right) + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial \zeta}{\partial v} \right).$$

У розглядуваному випадку величини u і v визначаються виразами (12.56), а координати ξ , η і ζ є координатами сліду E зовнішньої осі підвісу гіроскопа на сфері одиничного радіуса з центром у точці підвісу і тому пов'язані з першими співвідношеннями (див. рис 12.39):

$$\xi = \cos \gamma^0 \cos \vartheta; \quad \eta = \sin \gamma^0; \quad \zeta = -\cos \gamma^0 \sin \vartheta.$$

Виконуючи відповідні дії, можна впевнитися, що $\sqrt{EG - F^2} = \cos \gamma^0$, а тому інтеграл (12.57) дійсно є площею поверхні на сфері, яка обмежена замкненою конічною поверхнею, що описується у просторі зовнішньою віссю підвісу гіроскопа при русі основи. Тому (12.55) може бути поданою у виді:

$$\Delta \alpha = \int_0^T \omega_{x_2} dt + S_{x_2}, \quad (12.58)$$

де S є, з одного боку, вказаною площею, а, з іншого – це є величина відповідного тілесного куту у стерadianах.

Щоб визначити середній дрейф гіроскопа навколо його зовнішньої осі при такому русі основи достатньо поділити вираз (12.58) на період, протягом якого здійснюється цей замкнений рух:

$$\langle \dot{\alpha}^0 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \omega_{x_2} dt + \frac{S_{x_2}}{T}. \quad (12.59)$$

Найбільш ефективно використовувати теорему про тілесний кут у випадку, коли навколо внутрішньої осі підвісу не діють моменти сил ($L \equiv 0$). З прецесійних рівнянь руху гіроскопа випливає, що кутова швидкість гіроскопа навколо зовнішньої осі підвісу x_2 за цих умов увесь час дорівнюватиме нулю, незалежно від руху в просторі самої цієї осі

$$\omega_{x_2} \equiv 0.$$

При цьому з співвідношення (12.58) випливає

$$\Delta\alpha = S_{x_2},$$

тобто кут повороту гіроскопа навколо зовнішньої осі дорівнює за величиною куту (у стерадіанах), який описує у просторі ця вісь.

Як бачимо, у цьому випадку оцінювати можливу похибку можна без інтегрування диференціальних рівнянь гіроскопа, розраховуючи лише площу на сфері одиничного радіуса, яку описує зовнішня вісь. Це значно спрощує аналіз похибок. Нагадаємо, що така можливість виникає внаслідок двох обставин:

1) дії значного моменту міжрамкової корекції, який забезпечує постійне підтримування у взаємно-перпендикулярному положенні головної осі гіроскопа і зовнішньої осі підвісу;

2) відсутності проекції кутової швидкості гіроскопа на зовнішню ось, що виконується при відсутності моментів сил по внутрішній осі.

З формули (12.59) випливає:

– дрейф гіроскопа не виникає, якщо хитавиця зовнішньої осі підвісу у просторі здійснюється навколо незмінної осі;

– дрейф гіроскопа не виникає й тоді, коли зовнішня вісь описує на сфері «вісімку», бо у цьому випадку «додатна» площа компенсується «від'ємною» площею у другу половину періоду хитавиці;

– максимальним за величиною буде дрейф, коли коливання основи по кутах ϑ і γ° здійснюються синхронно (з однією частотою) і з зсувом фаз 90° (при коловій, або еліптичній вібрації зовнішньої осі); зокрема найбільшим є й дрейф при віражі літака.

Це дозволяє при розрахунку дрейфу позбутися необхідності розв'язувати диференціальні рівняння, а іноді і зовсім позбавлятися необхідності розрахунків, якщо є змога безпосередньо оцінювати (або порівнювати з чимось) величину площі, яку за заданого руху основи описує її вісь, що збігається з зовнішньою віссю підвісу гіроскопа.

Завдання

За програмою *Vupryam_efect_GN* моделювання поведження ГКП, текст якої наведений у Додатку 7, виконати наступні дослідження.

Завдання 12.1. Дослідження впливу тертя на рух триступеневого астатичного гіроскопа

1. Користуючись вищезазначеними програмними засобами, провести експериментальні дослідження впливу моментів сил тертя по осях карданового підвісу на поведження гіроскопа у кардановому підвісі:

- 1.1) при обертанні основи навколо нерухомої у просторі по-здовжньої осі об'єкту, варіюючи: а) величиною кутової швидкості обертання основи, б) напрямом вектору цієї кутової швидкості у просторі, в) величиною коефіцієнтів тертя по обох осях карданова підвісу;
 - 1.2) при хитавиці основи, варіюючи: а) величиною амплітуд хитавиці по трьох осях, б) величиною зсуву фаз між коливаннями основи навколо різних осей, в) частотою хитавиці.
2. Порівняти експериментально одержані результати з тими, що впливають з теоретичного дослідження. Зробити висновки з адекватності програмної і теоретичної моделей.
 3. Відповісти на запитання:
 - які рівняння руху гіроскопа у кардановому підвісі чисельно інтегруються у програмній моделі? в яких саме програмних продуктах вони реалізовані?
 - які можливості з імітування руху основи надає застосоване програмне забезпечення? які обмеження накладає воно на рух основи?
 - які можливості з імітування моментів сил опору надає застосоване програмне забезпечення? які обмеження накладає воно на сили опору?
 - чи збігаються результати експериментальних досліджень з теоретичними передбаченнями? якщо спостерігаються розходження, то що є їхньою причиною?
 - яка загальна тенденція руху в інерціальному просторі під дією сил опору головної осі триступеневого гіроскопа при обертанні основи? чим викликаний такий рух?
 - яка фізична причина виникнення дрейфу гіроскопа через тертя при хитавиці основи? за яких умов цей дрейф набуває максимального за величиною значення? за яких умов він дорівнюватиме нулеві?

Завдання 12.2. Дослідження впливу моменту горизонтальної корекції на рух гіроскопа напрямку

1. Користуючись вказаним програмним забезпеченням, провести експериментальні дослідження впливу на поведінку гіроскопа напрямку (перш за все – його азимутальний дрейф) моменту сил горизонтальної корекції:
 - 1.1) при віражі основи, варіюючи: а) величиною питомої швидкості корекції; б) величиною куту крену літака при віражі; в) величиною кутової швидкості віражу.
 - 1.2) при хитавиці літака з крену, варіюючи: а) величиною куту між головною віссю гіроскопа і поздовжньою віссю літака, б) величиною питомої швидкості корекції, в) амплітудою і частотою хитавиці.

2. Порівняти експериментально одержані результати з тими, що випливають з теоретичного дослідження. Зробити висновки з адекватності програмної і теоретичної моделей.
3. Відповісти на запитання:
 - які можливості з імітування моментів сил горизонтальної корекції надає застосоване програмне забезпечення? які обмеження накладає воно на ці моменти?
 - чи збігаються результати експериментальних досліджень з теоретичними передбаченнями? якщо спостерігаються розходження, то що є їхньою причиною?
 - яка фізична причина виникнення дрейфу гіроскопа через момент горизонтальної корекції при віражі основи? при хитавиці основи?

Контрольні запитання

1. Які корисні властивості мають опорні кутові координати гіроскопа?
2. Як рухається головна вісь вільного ГКП під дією в'язкого тертя по осях підвісу?
3. Яка основна причина уходів гіроскопа при хитавиці навколо головної осі гіроскопу?
4. Як зміниться поведження ГКП на основі, що обертається, якщо кутову швидкість його власного обертання зменшити у два рази?
5. Як зміниться поведінка ГКП на основі, що обертається, якщо збільшити його кінетичний момент у два рази, не змінивши величину моментів сил сухого тертя на осях підвісу?
6. Чи можна використовувати триступеневий астатичний гіроскоп як гірокомпас на нерухомій відносно Землі основі? Чим визначатиметься межева похибка такого гірокомпаса?
7. Як зміниться поведження ГКП під дією моментів сил сухого тертя по осях його підвісу, якщо встановити його на поверхні Місяця?

Література

[7, с. 451 – 458]; [47]; [25, с. 171 – 205]; [16, с. 106 – 117]; [12, с. 57 – 59]; [18, с. 236-241]; [60, с. 253 – 257] .

Розділ 13. Чутливі елементи на основі маятникових гіроскопів

Значну частину застосовуваних на практиці приладів складають прилади, основою яких є триступеневі гіроскопи, центр мас яких зміщений відносно точки підвісу у тому чи іншому напрямку. Такі прилади називають маятниковими, бо їх головна особливість – визначальний вплив на їх поведінку моменту сил тяжіння (маятникового моменту сил). Серед маятникових гіроприладів найбільшого розповсюдження набули гіромаятник і маятниковий гірокомпас, теорію яких і викладено далі.

13.1. Гіромаятник як гіровертикаль

Гіромаятником (ГМ) називають гіроскоп, центр мас якого зміщений відносно точки підвісу гіроскопа вздовж його головної осі. Такий гіроскоп можна використовувати на рухомій основі як вказівник місцевої вертикалі завдяки його властивості, за якою його головна вісь під дією моментів сил тертя самостійно встановлюється у положення вертикалі. Тому його можна використовувати як прилад – гіровертикаль, головним призначенням якої є постійне зберігання головною віссю гіроскопа вертикального положення. Це дає змогу, вимірюючи кути повороту між елементами карданового підвісу, отримувати на борту рухомого об'єкта інформацію про кути крена і диферента основи.

Головна мета теоретичного дослідження гіромаятника як гіровертикалі – вивчення впливу руху основи на його похибки. При цьому як похибки можна розглядати кути відхилення головної осі гіромаятника від вертикалі. Потрібні для цього прецесійні рівняння руху гіромаятника (2.62) були отримані раніше. Відповідна кінематика поворотів, що використана при складанні рівнянь, наведена на рис 13.1.

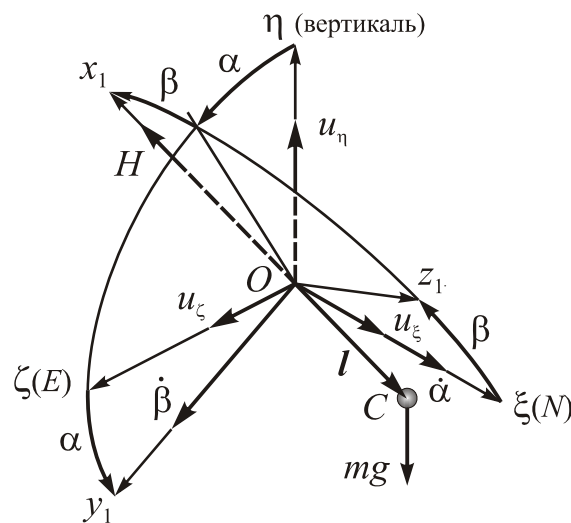


Рис. 13.1. Кінематика гіромаятника як гіровертикалі

Тут позначено: $\xi\eta\zeta$ – географічна опорна система координат, вісь η якої напрямлена вздовж геоцентричної вертикалі місця, вісь ξ горизонтальна і направ-

лена на північ, ζ напрямлена на схід; α – кут відхилення головної осі гіромаятника від вертикалі на схід (у вертикальній площині «схід-захід»); β – кут відхилення головної осі гіромаятника від вертикалі на південь у вертикальній площині «південь-північ». Кути α і β – це дві складові поточної похибки гіромаятника. Отже, вивчаючи, як змінюються у часі ці два кути, можна скласти повне уявлення про точність гіромаятника як гіровертикалі.

13.1.1. Швидкісна похибка і перехідний процес

Для проектування гіроскопічних маятників важливо вміти оцінювати у порівняльному плані поведінку гіромаятника на рухомій і нерухомій основах. Однією з характерних відмінностей є виникнення на рухомій основі особливих похибок, зумовлених швидкістю руху точки опори.

Розглянемо рух гіромаятника в таких умовах (див. рівняння (2.62)):

1) основа рухається по поверхні Землі рівномірно, а тому

$$\dot{V}_{aN} = \dot{V}_{aE} \equiv 0;$$

2) по осях підвісу діють тільки моменти сил тертя, пропорційні кутовим швидкостям $\dot{\alpha}$ і $\dot{\beta}$:

$$M_{y1} = -f_1 \dot{\beta}; \quad M_{\zeta} = -f_2 \dot{\alpha}. \quad (13.1)$$

Позначаючи

$$\varphi_1 = f_1 / H_0; \quad \varphi_2 = f_2 / H_0,$$

зведемо рівняння руху (2.62) гіромаятника до виду

$$\begin{cases} \dot{\alpha} + \varphi_1 \dot{\beta} + \omega'_0 \beta = -\frac{V_{aE}}{R_3}; \\ \dot{\beta} - \varphi_2 \dot{\alpha} - \omega'_0 \alpha = \frac{V_{aN}}{R_3}, \end{cases} \quad (13.2)$$

де швидкості основи – V_{aN} і V_{aE} – незмінні величини.

Положення рівноваги гіромаятника визначається частинним розв'язком системи (13.2), обумовленим наявністю в правих частинах постійних членів V_{aN} / R_3 і V_{aE} / R_3 :

$$\alpha^* = -\frac{V_{aN}}{\omega'_0 R_3}; \quad \beta^* = -\frac{V_{aE}}{\omega'_0 R_3}, \quad (13.3)$$

а з урахуванням позначень (2.61) ці рівності більш розгорнуто запишуться так:

$$\begin{aligned} \alpha^* &= -\frac{V_N}{R_3 \left(\frac{mgl}{H} + \omega_3 \sin \varphi_r + \frac{V_E}{R_3} \operatorname{tg} \varphi_r \right)}; \\ \beta^* &= -\frac{V_E + R_3 \omega_3 \cos \varphi_r}{R_3 \left(\frac{mgl}{H} + \omega_3 \sin \varphi_r + \frac{V_E}{R_3} \operatorname{tg} \varphi_r \right)}. \end{aligned} \quad (13.4)$$

Згідно з формулами (13.4), можна зробити наступні висновки.

1. Головна вісь гіромаятника під час руху в просторі об'єкта, на якому він розміщений, не встановлюється точно по вертикалі місця. В усталеному положенні вона буде відхилена від вертикалі на кути α^* , β^* , визначені виразами (13.4).

2. Сталі похибки гіромаятника (13.3) пропорційні до абсолютних швидкостей V_{aE} і V_{aN} руху об'єкта (точки підвісу) у східному і північному напрямках. Тому їх називають **швидкісними** похибками гіромаятника.

3. Усталене відхилення гіромаятника в площині «захід-схід» (з кута α) виникає лише у випадку руху об'єкта вздовж меридіана, тобто за наявності складової V_N швидкості об'єкта. Під час руху об'єкта вздовж паралелі цієї складової похибки не буде.

4. Відхилення головної осі гіромаятника від вертикалі в площині «північ – південь» визначається складовою абсолютної швидкості об'єкта, напрямленою по паралелі. Воно не дорівнює нулю навіть якщо основа не рухається відносно Землі:

$$\beta^* = -\frac{\omega_3 \cos \varphi_r}{\frac{mgl}{H} + \omega_3 \sin \varphi_r} \approx -\frac{H\omega_3 \cos \varphi_r}{mgl}. \quad (13.7)$$

Як бачимо, вектор кінетичного моменту гіромаятника, нерухомо встановленого на обертовій Землі, відхиляється від вертикалі до півночі у площині меридіана. Так, на екваторі ($\varphi_r = 0$) гіромаятник, налагоджений на період Шюлера

($\omega_0 = \frac{mgl}{H} = \sqrt{\frac{g}{R_3}} \approx 1,24 \cdot 10^{-3} \text{ c}^{-1}$) відхилиться від вертикалі на кут $\beta^* = -0,059 = -3,37^\circ$.

Встановимо фізичну причину швидкісної похибки. Якщо головна вісь гіромаятника близька до вертикалі і нерухома в географічній системі координат з початком у точці підвісу гіромаятника, то, очевидно, вона обертається в інерціальному просторі з кутовою швидкістю \mathbf{u} географічної системи. Вісь ротора гіроскопа прагне утримати незмінним своє положення в інерціальній системі. Щоб змусити її обертатися (прецесувати) у цій системі, необхідно до гіроскопа прикласти зовнішній момент по осі, перпендикулярній як до осі ротора (вектора \mathbf{H}), так і до осі обертання географічної системи (\mathbf{u}):

$$\mathbf{M} = \mathbf{u} \times \mathbf{H}. \quad (13.5)$$

Такий зовнішній момент може бути утворений лише силою тяжіння гіромаятника внаслідок розбіжності центра мас і точки підвісу, якщо тільки головна вісь гіромаятника в шуканому положенні рівноваги відхилена від вертикалі:

$$\mathbf{M} = m\mathbf{l} \times \mathbf{g}. \quad (13.6)$$

Щоб момент (13.5) дорівнював моменту (13.6), необхідно, щоб усі чотири вектори \mathbf{u} , \mathbf{H} , \mathbf{l} і \mathbf{g} лежали в одній площині. Вектори \mathbf{H} і \mathbf{l} за умовою колінеарні (при $H > 0$ – напрямлені у протилежні боки). Звідси випливає, що в усталеному положенні (положенні рівноваги) головна вісь гіромаятника завжди буде лежати у вертикальній площині, що проходить через вектор кутової швидкості абсолютно-

го обертання географічної системи (рис. 13.2), тобто у площині меридіану місця. При цьому буде виконуватися співвідношення

$$u H \sin(\mathbf{u}, \mathbf{H}) = mgl \sin(\mathbf{l}, \mathbf{g}).$$

Звідси випливає

$$\sin(H, \eta) = \frac{u H \sin(\mathbf{u}, \mathbf{H})}{mgl}.$$

Так, для випадку нерухомої відносно Землі основи матимемо (рис. 13.2)

$$u = \omega_3; \quad \sin(\mathbf{u}, \mathbf{H}) = \sin(\omega_3, \mathbf{H}) \approx \cos \varphi_r; \quad \sin(H, \xi) = -\sin \beta^*. \quad (13.8)$$

Із врахуванням цього з (13.8) випливає (13.7).

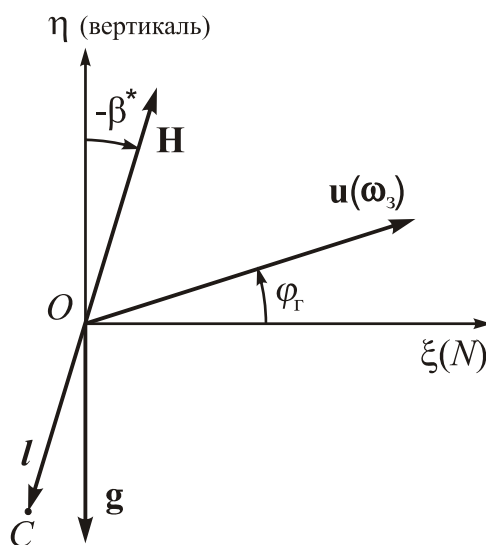


Рис. 13.2. Розташування векторів $\mathbf{U}, \mathbf{H}, \mathbf{l}, \mathbf{g}$ в усталеному положенні

Резюмуючи, дійдемо такого висновку.

5. Швидкісна похибка гіромаятника зумовлена відхиленням головної осі гіромаятника від вертикалі, що спричиняє дію на нього такого за значенням і напрямком моменту сил тяжіння, що він призводить до прецесії головної осі в просторі з кутовою швидкістю географічної системи, завдяки чому головна вісь залишається нерухомою в географічній системі координат.

Далі розглянемо перехідний процес, тобто процес переходу осі ротора гіромаятника з довільного в усталене положення, яке визначається рівностями (13.6). Нехай x і y – відхилення головної осі гіромаятника від положення рівноваги:

$$\alpha = \alpha^* + x; \quad \beta = \beta^* + y. \quad (13.9)$$

Рівняння руху (13.2) у нових координатах x і y будуть мати вигляд однорідних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x} + \varphi_1 \dot{y} + \omega'_0 y = 0 \\ \dot{y} - \varphi_2 \dot{x} - \omega'_0 x = 0 \end{cases} \quad (13.10)$$

де $\omega'_0 = \frac{mgl}{H} + u_\eta$ – частота власних коливань гіромаятника.

Задля спрощення покладемо

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi.$$

За цієї умови для розв'язання системи (13.10) можна застосувати компресію рівнянь.

Уводячи комплексну змінну

$$z = x + jy, \quad (13.11)$$

перейдемо від системи (13.10) до одного рівняння першого порядку

$$\dot{z}(1 - j\varphi) - j\omega'_0 z = 0. \quad (13.12)$$

Характеристичне рівняння, відповідне диференціальному рівнянню (13.12), має вигляд

$$p(1 - j\varphi) - j\omega'_0 = 0,$$

а його єдиний корінь дорівнює

$$p = \frac{j\omega_0}{1 - j\varphi} = -\frac{\omega_0\varphi}{1 + \varphi^2} + j\frac{\omega_0}{1 + \varphi^2}.$$

Тому розв'язок рівняння (13.12) можна записати так:

$$z = C \exp\left(-\frac{\omega_0\varphi}{1 + j\varphi^2} t\right) \exp\left(j\frac{\omega_0}{1 + \varphi^2} t\right). \quad (13.13)$$

Нехай початкові умови описуються співвідношеннями

$$t = 0: \quad \alpha = \alpha_0; \quad \beta = \beta_0,$$

тобто

$$z(0) = z_0 = (\alpha_0 - \alpha^*) + j(\beta_0 - \beta^*).$$

Використовуючи їх, розв'язок рівняння (13.12) можна подати у формі

$$z = (R_0 - R^*)e^{-at} e^{jbt},$$

де

$$R_0 = \alpha_0 + j\beta_0; \quad R^* = \alpha^* + j\beta^*; \quad a = \frac{\omega_0\varphi}{1 + \varphi^2}; \quad b = \frac{\omega'_0}{1 + \varphi^2}.$$

Траєкторію вершини гіромаятника (вид зверху) зображено на рис. 13.3. Тут R_0 являє собою радіус-вектор початкового положення головної осі гіромаятника, R^* – радіус-вектор усталеного її положення, $R_0 - R^*$ – радіус-вектор початкового положення відносно усталеного; a характеризує інтенсивність зменшення радіуса-вектора спіралі з часом, b – кутову швидкість обертання радіуса-вектора вершини гіромаятника навколо усталеного її положення.

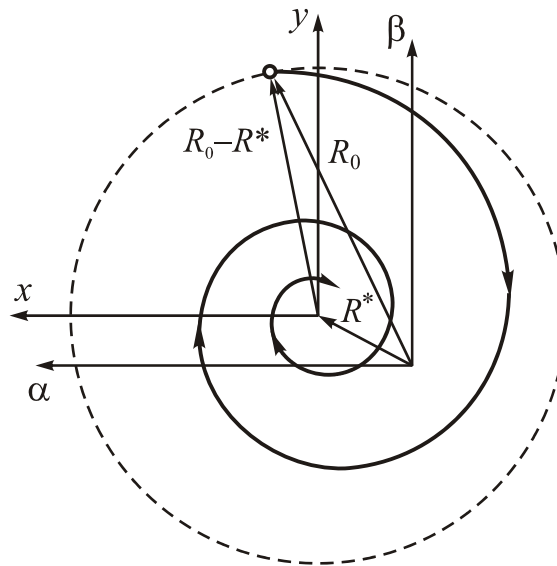


Рис. 13.3. Траєкторія вершини гіромаятника (перехідний процес, $\omega_0 > 0$)

Запишемо a і b з врахуванням позначень (13.1) і (2.61)

$$a \approx \frac{mgl f}{H^2(1+\varphi^2)}; \quad b \approx \frac{mgl}{H(1+\varphi^2)}.$$

Оскільки завжди

$$f > 0; \quad mg > 0; \quad H^2 + f^2 > 0; \quad 1 + \varphi^2 > 0,$$

то знак величини b , яка визначає напрямок обертання вершини гіроскопа навколо її устанавленого положення, залежить від знака «маятниковості» (l) і кінетичного моменту (H), а знак величини a визначається лише знаком «маятниковості». За нижньої «маятниковості» ($l > 0$) спіраль, описувана вершиною гіромаятника, з часом сходиться, а за верхньої – розходиться. Якщо напрямки вектора \mathbf{l} зміщення центра мас гіромаятника і \mathbf{H} кінетичного моменту протилежні, рух апексу по спіралі відбувається за годинниковою стрілкою (при погляді зверху). Це відповідає або $H > 0$ і $l > 0$, або $H < 0$ і $l < 0$ (рис. 13.4, а, г). В останньому випадку спіраль розходиться. Якщо ж напрямки векторів \mathbf{l} і \mathbf{H} однакові (це відповідає або $l > 0$ і $H < 0$, або $l < 0$ і $H > 0$) рух відбувається у зворотний бік (рис. 13.4, б, в)

Отже, можна зробити такі висновки.

1. *Перехідний процес гіромаятника з верхньою «маятниковістю» (коли центр мас лежить вище від точки підвісу) є нестійким.*

2. *Під дією тертя по осях карданового підвісу центр мас гіромаятника завжди опускається, поки не займе нижнього положення рівноваги.*

Результати безпосереднього чисельного інтегрування нелінеаризованих (але прецесійних) рівнянь гіромаятника за програмою **GM_PO_upr** (текст якої наведений у Додатку 8) відображені у наступних графіках. Програма здійснює чисельне інтегрування диференціальних рівнянь гіромаятника за допомогою вбудованої процедури Matlab **ode45**, яка у власну чергу спирається на процедуру **GM_PO** обчислення поточних значень правих частин прецесійних рівнянь гіромаятника з врахуванням руху основи і опорної системи координат.

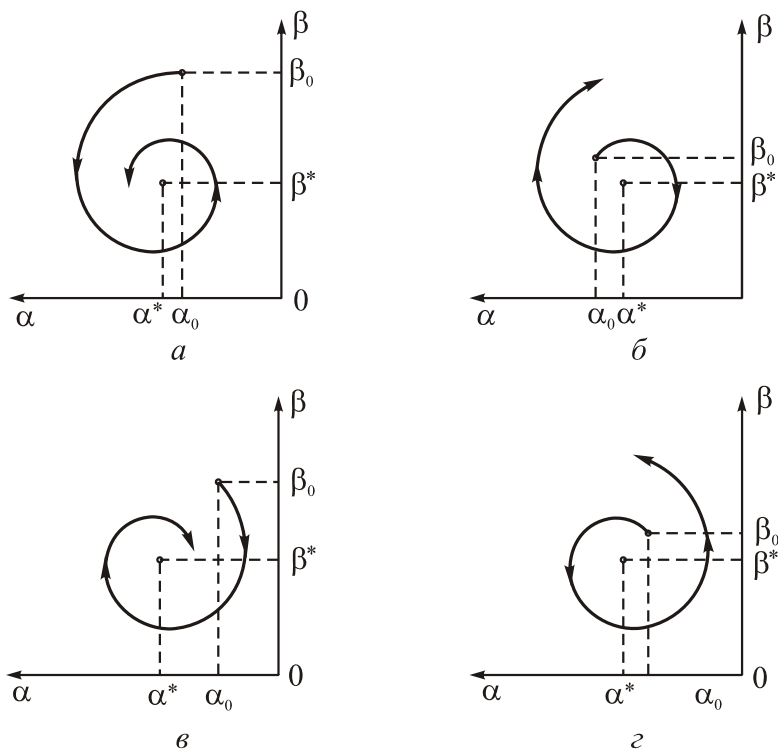


Рис. 13.4. Траєкторії апексу за різних напрямків обертання ротора і зміщення центра мас відносно точки підвісу:
 а) $H > 0$; $l > 0$; б) $H > 0$; $l < 0$;
 в) $H < 0$; $l > 0$; г) $H < 0$; $l < 0$

Примітка. На всіх графічних поданнях результатів роботи програми використані наступні позначення:

- ппР – початкове положення рівноваги;
- ппА – початкове положення апекса.

Процес усталення вільного руху ГМ ілюструють рис. 13.5 і 13.6. Припускається, що у початковий момент часу головна вісь гіромаятника збігається з вертикаллю місця, а період власних коливань ГМ прийнятий рівним 7,5 хв. Як видно, за цих умов та наявності тертя головна вісь по спіралі наближається до положення рівноваги, яке визначається швидкісними похибками ГМ. Результати, наведені на рис. 13.5, відповідають випадку нерухомої основи. У цьому разі положення рівноваги зміщено на північ на кут біля $18'$. Рис. 13.6 відбиває випадок, коли основа рухається на північ зі швидкістю $V = 60$ м/с. При цьому положення рівноваги зміщується додатково на захід на кут близько $2,3'$.

Як зміниться процес усталення вільних коливань, якщо їх період задовольняє умову незбурюваності ($T_0 = 84,4$ хв), показано на рис 13. 7 і 13.8. Як бачимо, у цьому випадку суттєво зростає відхилення положення рівноваги від вертикалі. Для нерухомої основи це відхилення сягає величини $201,8'$, а додаткове західне зміщення при русі основи на північ зі швидкістю $V = 60$ м/с – $26'$. Зростає й час усталення коливань (у 10 разів).

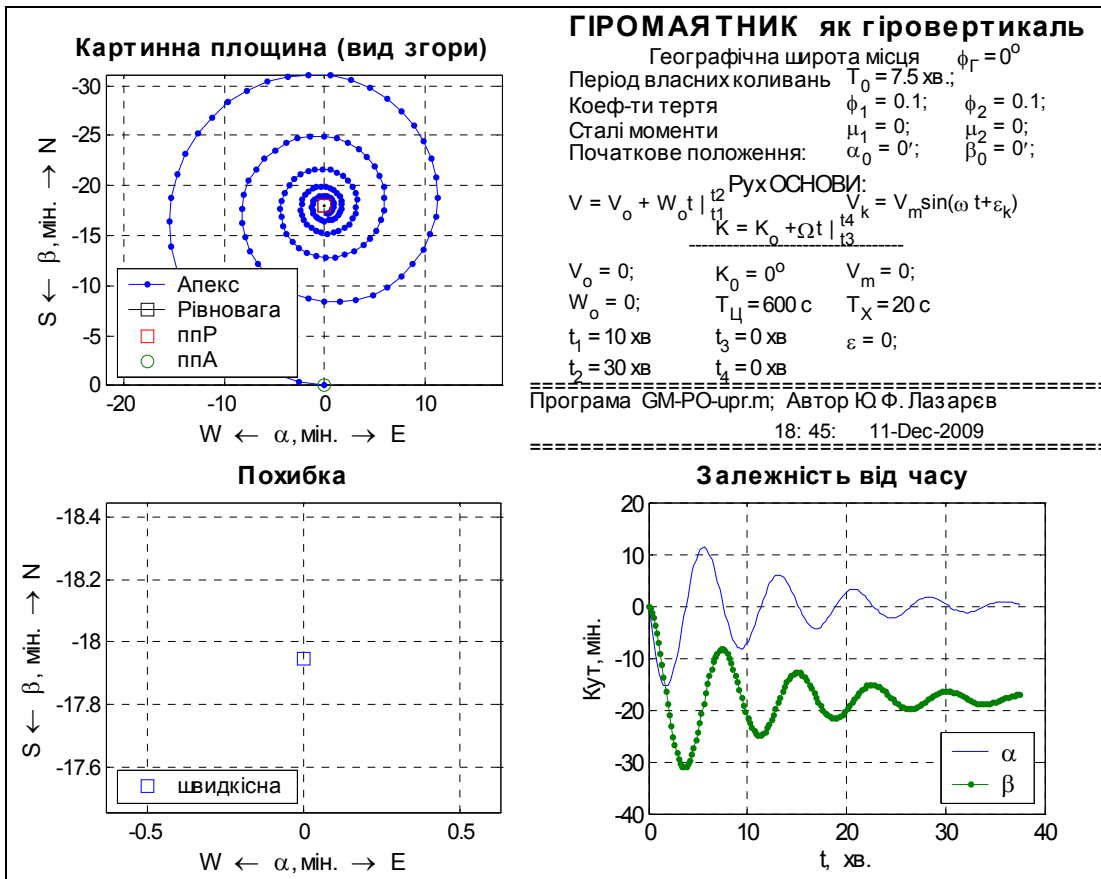


Рис. 13.5. Усталення вільного руху ГМ ($T_0 = 7,5$ хв) на нерухомій основі

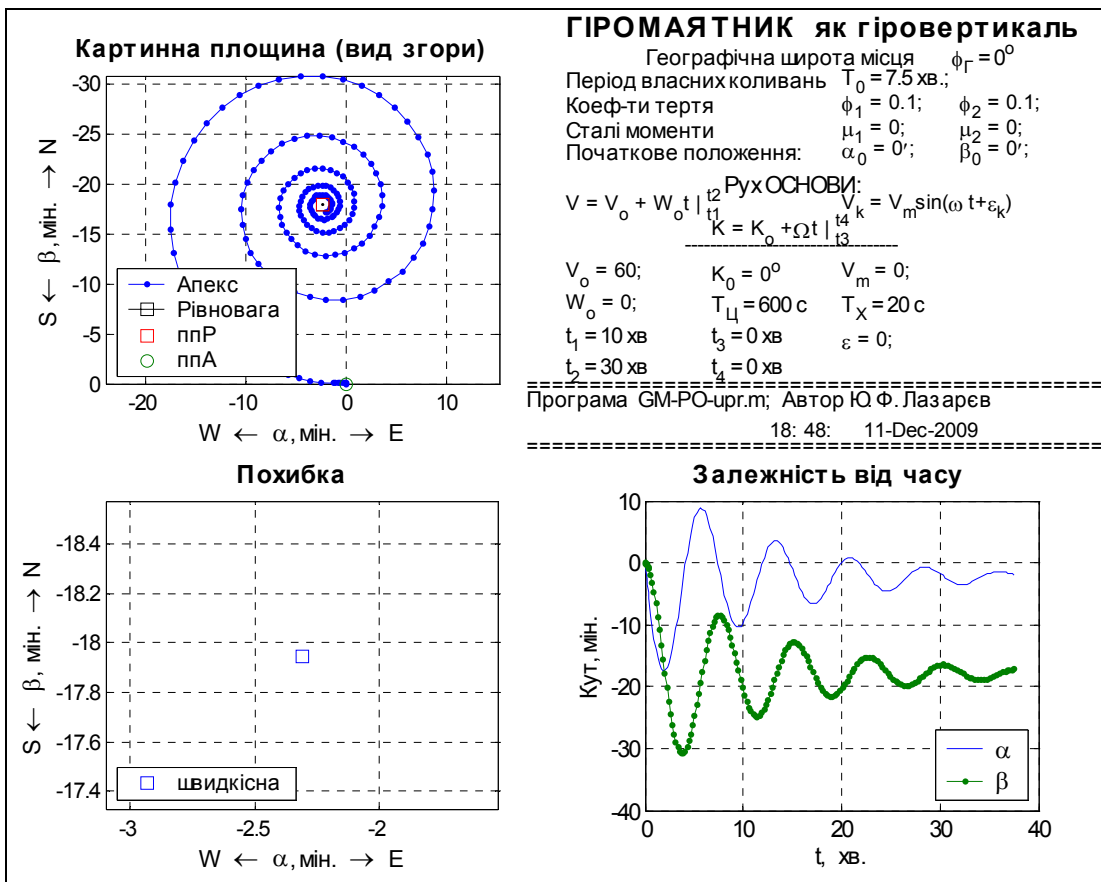


Рис. 13.6. Усталення руху ГМ ($T_0 = 7,5$ хв.) на основі, що рухається на північ

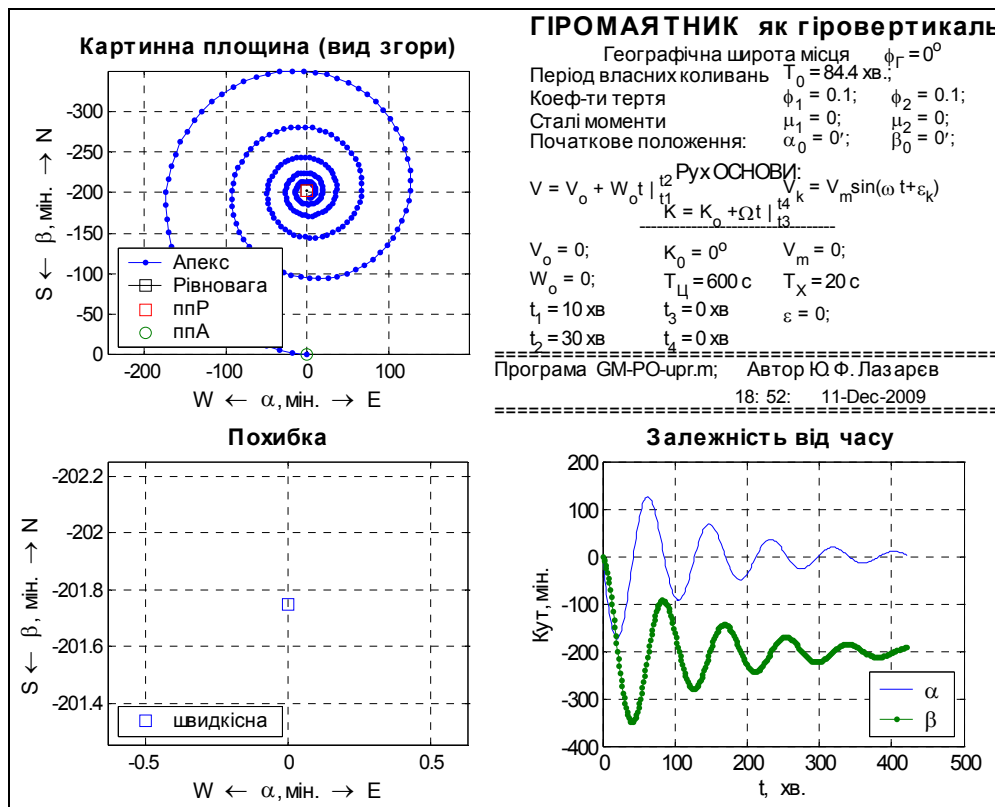


Рис. 13.7. Усталення вільного руху ГМ ($T_0 = 84,4$ хв) на нерухомій основі

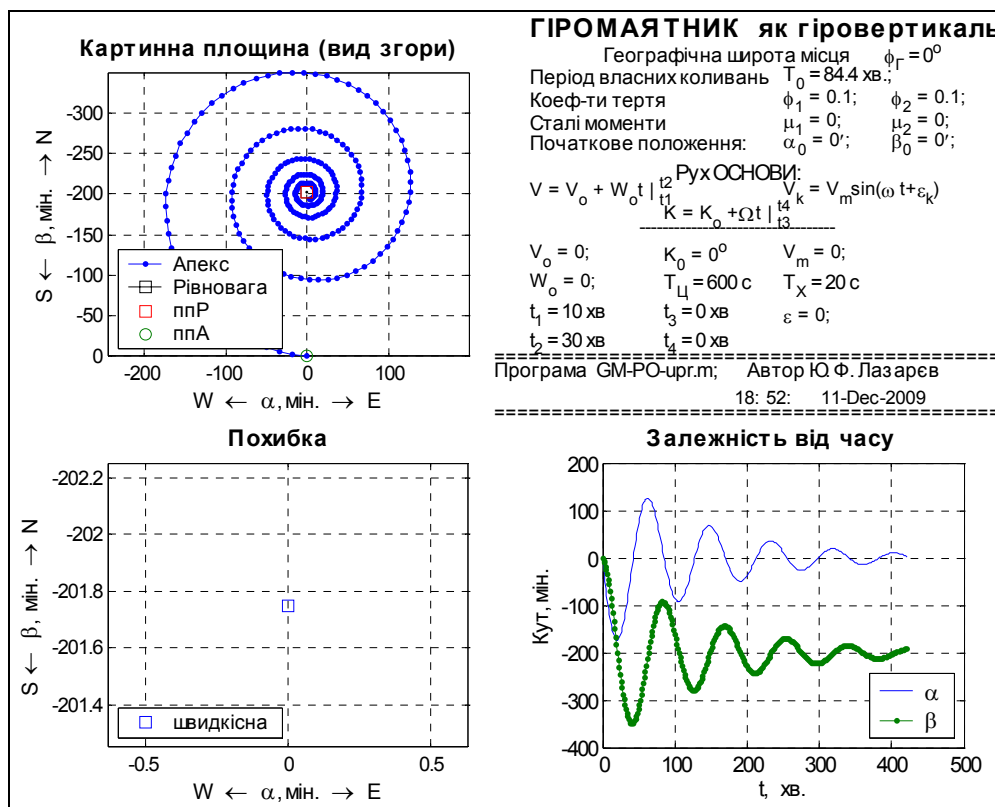


Рис. 13.8. Усталення руху ГМ ($T_0 = 84,4$ хв.) на основі, яка рухається на північ

Перейдемо до розглядання дії по осях підвісу сил сухого тертя:

$$M_{y1} = -L_m \text{sign} \dot{\beta}; \quad M_{\zeta} = -N_m \text{sign} \dot{\alpha}.$$

Рівняння руху (2.62) у координатах x і y (13.13) подамо у вигляді

$$\dot{x} + \omega'_0 y = -l_m \text{sign} \dot{y}; \quad \dot{y} - \omega'_0 x = l_m \text{sign} \dot{x}, \quad (13.14)$$

де

$$l_m = \frac{L_m}{H}; \quad n_m = \frac{N_m}{H}.$$

Для розв'язання системи (13.14) покладемо спочатку, що $\omega'_0 > 0$. Тоді вершина гіромаятника навколо положення рівноваги (β^*, α^*) рухатиметься за годинниковою стрілкою, і тому знаки в квадрантах знакосталості кутових швидкостей будуть такими, як на рис. 13.9.

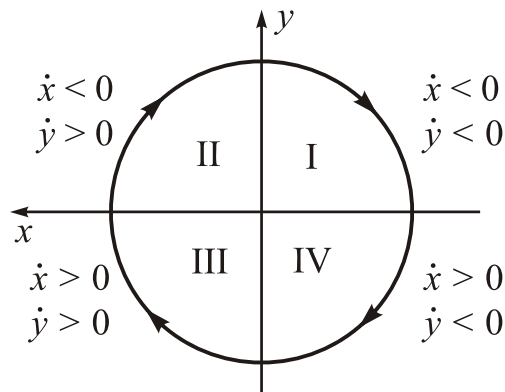


Рис.13.9. Знаки відносних швидкостей у різних квадрантах при $\omega_0 > 0$

У кожному з цих квадрантів праві частини рівнянь (13.14) будуть постійними величинами, і розв'язок цих рівнянь можна подати, вводячи знову комплексну змінну z (13.11) і використовуючи компресію рівнянь, у наступній формі:

$$(z - z_y) = (z_0 - z_y) e^{j\omega_0 t}, \quad (13.15)$$

де

$$z_0 = x_0 + jy_0 = (\alpha_0 - \alpha^*) + j(\beta_0 - \beta^*),$$

а центр z_y кола траєкторії апекса визначається співвідношеннями

$$z_y = j \frac{M}{\omega_0}; \quad M = -l_m \text{sign}(\dot{y}) + j n_m \text{sign}(\dot{x}).$$

Вираз (13.15) описує рух вершини гіромаятника по дузі кола з центром у точці з координатами, які стрибком змінюються у разі змінення знака якоїсь із швидкостей $\dot{\alpha}$ і $\dot{\beta}$ (\dot{x}, \dot{y}).

Координати центрів кіл у квадрантах незмінності знаків швидкостей подано у табл. 13.1.

Таблиця 13.1

Квадранти	Номер	z_y
-----------	-------	-------

	центру	дійсна частина	уявна частина
I	1	$\frac{n_m}{\omega'_0}$	$\frac{l_m}{\omega'_0}$
II	2	$\frac{n_m}{\omega'_0}$	$-\frac{l_m}{\omega'_0}$
III	3	$-\frac{n_m}{\omega'_0}$	$-\frac{l_m}{\omega'_0}$
IV	4	$-\frac{n_m}{\omega'_0}$	$\frac{l_m}{\omega'_0}$

Для того щоб побудувати траєкторію апекса, відповідну перехідному процесу гіромаятника під дією моментів сил сухого тертя, потрібно:

- 1) нанести на площину комплексної величини $z = x + jy$ (або, що те саме, на картинну площину, початок координат у якій поміщено в точку β^*, α^* , яка визначає швидкісну похибку гіромаятника) координати центрів 1, 2, 3, 4 кіл відповідних квадрантів (рис. 13.10);
- 2) провести з отриманих точок два промені (горизонтальний і вертикальний) з початком у відповідному центрі (наприклад, 1) так, щоб вони утворювали відповідний квадрант (для точки 1 – перший квадрант);
- 3) нанести початкове положення вершини на площину xu ;
- 4) провести від початкової точки за годинниковою стрілкою дугу кола з центром у початку того квадранта, куди потрапила початкова точка, до перетину з межею наступного квадранта;
- 5) з центром на початку наступного квадранта у тому самому напрямку провести чверть кола до перетину з межею квадранта;
- 6) дії за п. 5 здійснюють доти, поки точка перетину траєкторії з границею квадранта не потрапить на одну із сторін чотирикутника 1–2–3–4, де рух апексу припиняється.

Отримана в результаті траєкторія і являє собою рух вершини гіромаятника (рис. 13.10). Усі точки чотирикутника 1–2–3–4 і його середини мають таку властивість: якщо апекс потрапляє у цю зону, його рух припиняється. Тому цю зону називають *зоною застою* а чотирикутник 1–2–3–4 – *чотирикутником застою*.

Порівнюючи отримані результати з результатами п. 12.1, можна зробити висновок, що існує аналогія між поведінням гіромаятника і астатичного ГКП на обертовій основі з тією, однак, відмінністю, що роль кутової швидкості обертання основи (для астатичного гіроскопа) у випадку гіромаятника відіграє кутова швидкість ω'_0 його прецесії навколо вертикалі. При цьому, з одного боку, кутова швидкість ω'_0 є незмінною величиною, яка визначається згідно (2.61) лише внутрішніми параметрами гіроскопа. Через це периметр чотирикутника застою, на відміну від випадку астатичного гіроскопа, не залежить від параметрів руху основи. З іншого боку, ω'_0 тісно пов'язана з параметрами гіроскопа, і координати чотирикутника мають вигляд:

$$y_{\text{заст}} = -\frac{l_m}{\omega'_0} \text{sign}(\dot{y}) \approx -\frac{L_m}{mgl} \text{sign}(\dot{y});$$

$$x_{\text{заст}} = -\frac{n_m}{\omega'_0} \text{sign}(\dot{x}) \approx -\frac{N_m}{mgl} \text{sign}(\dot{x}). \quad (13.16)$$

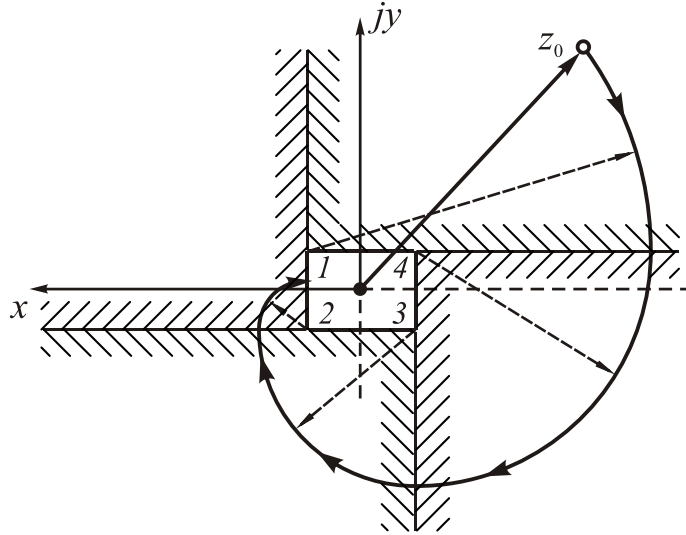


Рис.13.10. Траєкторія вершини гіромаятника під дією моментів сил сухого тертя, якщо $\omega_0 > 0$, $l > 0$

З цього випливає:

1) якщо знаки векторів \mathbf{H} , \mathbf{l} змінити одночасно (тобто встановити верхню «маятниковість» і $H < 0$) напрямок прецесії ω_0 не зміниться (див. формулу (13.1)), а картина розташування квадрантів і їхніх центрів зміниться (рис. 13.11); спіраль траєкторії з часом розходиться

2) якщо «маятниковість» нижня, а напрямок прецесії змінюється на протилежний (проти годинникової стрілки – при $H < 0$; $l > 0$), тоді знаки (див. рис. 13.9 і формули (13.16)), що визначають положення центрів 1–2–3–4, змінюються на протилежні; у цьому випадку картина квадрантів залишається такою як на рис. 13.11, а напрямок прецесії, що змінився, приводить до загасання прецесійних коливань гіромаятника;

3) нарешті, якщо змінюється і «маятниковість», і напрямок прецесії ($H > 0$, $l < 0$), то координати (13.16) центрів залишаються такими, як у першому випадку (див. рис. 13.10), але зміна напрямку прецесії приводить до розбіжності коливань.

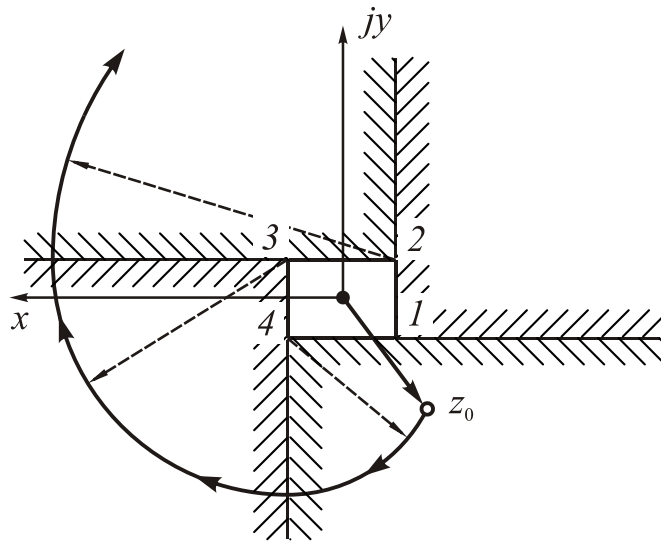


Рис.13.11. Траєкторія вершини гіромаятника, якщо $\omega_0 > 0$; $l < 0$

У цілому рух вершини гіромаятника під дією моментів сил сухого тертя по осях карданового підвісу має ті ж якісні характеристики, що були встановлені при вивченні впливу в'язкого тертя з такими особливостями:

1) протягом кожного періоду прецесії відстань вершини від усталеного положення, яке відповідає швидкісним похибкам, зменшується (збільшується у разі розходження коливань) на однакову величину (у радіанах), – значення периметра чотирикутника застою

$$|\Delta R|_{T=2\pi/\omega_0} = \frac{2(L_m + N_m)}{mg|l|};$$

ця обставина дозволяє експериментально вимірювати моменти сил сухого тертя по осях підвісу гіромаятника;

2) наприкінці перехідного процесу стала похибка гіромаятника відрізняється від швидкісної на значення, яке визначається параметрами чотирикутника застою.

13.1.2. Балістична похибка. Умова незбурюваності

Досі розглядалося поведіння гіромаятника за рівномірного переміщення точки його підвісу по поверхні Землі, тобто при русі об'єкта, на якому встановлений гіромаятник, відносно Землі з постійною швидкістю. Відхилення головної осі гіромаятника від вертикалі в цьому випадку складається з двох компонент – швидкісної похибки і похибки перехідного процесу. Похибка через перехідний процес за правильної «побудови» гіромаятника (забезпечення нижньої «маятниковості») з часом зменшується до нуля (у випадку в'язкого тертя) або до деякої постійної величини, обумовленої моментами сил сухого тертя по осях карданового підвісу гіромаятника. Значення швидкісної похибки за рівномірного переміщення точки підвісу незмінне.

Розглянемо рух точки підвісу з прискоренням ($W_{aN} \neq 0$; $W_{aE} \neq 0$). Насамперед цікавим є той додаток до похибки гіромаятника, окрім наведених, який від-

різняє поведження гіромаятника від його поведження під час руху об'єкта з постійною швидкістю.

Маючи це на увазі, покладемо всі моменти в рівняннях (2.62) рівними нулю. Тоді рівняння руху гіромаятника набудуть вигляду

$$\dot{\alpha} + \omega'_0 \beta = -\frac{V_{aE}}{R_3} - \frac{\omega_0}{g} \dot{V}_{aN}; \quad \dot{\beta} - \omega'_0 \alpha = \frac{V_{aN}}{R_3} - \frac{\omega_0}{g} \dot{V}_{aE}.$$

Застосуємо компресію рівнянь. Уведемо комплексну змінну

$$z = \alpha + j\beta.$$

Компресуючи рівняння, отримаємо

$$\dot{z} - j\omega'_0 z = -\frac{\omega_0}{g} \frac{d\bar{V}_a}{dt} + j\frac{1}{R_3} \bar{V}_a, \quad (13.17)$$

де \bar{V}_a – комплексна величина вектора абсолютної швидкості точки підвісу:

$$\bar{V}_a = V_{aN} + jV_{aE}.$$

Якщо $\frac{d\bar{V}_a}{dt} = 0$ (тобто рух основи здійснюється з постійною швидкістю), у правій частині рівняння (13.17) міститься стала величина, яка визначає, як було зазначено раніше, швидкісну похибку $z^* = \alpha^* + j\beta^*$, яку знаходять як частинний розв'язок (13.17) за постійної правої частини:

$$z^* = -\frac{1}{R_3 \omega'_0} \bar{V}_a.$$

Якщо ж швидкість $\bar{V}_a(t)$ змінюється, то швидкісна похибка також змінюватиметься і визначатиметься аналогічним співвідношенням

$$z_{ш}(t) = -\frac{1}{R_3 \omega'_0} \bar{V}_a(t). \quad (13.18)$$

Подамо повний розв'язок рівняння (13.17) як суму трьох складових

$$z(t) = z_{пер}(t) + z_{ш}(t) + z_{бал}(t), \quad (13.19)$$

тобто виділимо з частинного розв'язку рівняння частину $z_{ш}(t)$, що відповідає швидкісній похибці (13.18). Складова $z_{пер}(t)$, як і завжди, відображує перехідну складову руху і відповідає загальному розв'язку відповідного однорідного рівняння. Тоді складова $z_{бал}(t)$ буде являти собою шуканий додатак до частинного розв'язку, зумовлений дією прискорення основи. Її називають *балістичною похибкою*.

Підставляючи (13.19) у (13.17) і враховуючи вираз (13.18), матимемо

$$\dot{z}_{пер} - j\omega'_0 z_{пер} + \dot{z}_{бал} - j\omega'_0 z_{бал} = \dot{\bar{V}}_a \left(\frac{1}{R_3 \omega_0} - \frac{\omega_0}{g} \right).$$

Розв'язок цього рівняння складається із суми двох складових: $z_{пер}$, яка є загальним розв'язком однорідного рівняння $\dot{z}_{пер} - j\omega'_0 z_{пер} = 0$ і тому визначається виразом $z_{пер} = Ce^{j\omega'_0 t}$, і $z_{бал}$, що є частинним розв'язком неоднорідного рівняння

$$\dot{z}_{\text{бал}} - j\omega'_0 z_{\text{бал}} = \dot{V}_a \left(\frac{1}{R_3 \omega_0} - \frac{\omega_0}{g} \right).$$

Цей частинний розв'язок (а отже, і шукана балістична похибка) обертається в нуль, якщо виконано умову

$$\frac{1}{R_3 \omega'_0} = \frac{\omega_0}{g}. \quad (13.20)$$

Це означає таке.

За умови, що між параметрами гіромаятника існує зв'язок, описуваний формулою (13.20), **за будь-якого руху об'єкта по поверхні Землі з прискоренням повна похибка гіромаятника буде складатися**, окрім перехідної складової, **лише зі швидкісної його похибки**.

Якщо початкові умови такі, що головна вісь гіромаятника займає положення β^* , α^* , що відповідає швидкісній похибці у початковий момент часу, то перехідна складова буде відсутня і вся похибка гіромаятника визначиться тільки зміною в часі швидкісної похибки.

Умову (13.20) називають **умовою незбурюваності гіромаятника**, або **умовою Шюлера**, за іменем німецького вченого Макса Шюлера, який вперше встановив її.

Щоб умова (13.20) набрала зручнішої форми, потрібно звернутися до позначень (2.61) і знехтувати вертикальною кутовою швидкістю географічної системи u_η порівняно з кутовою швидкістю прецесії гіромаятника

$$\omega'_0 = \frac{mgl}{H} + u_\eta \approx \frac{mgl}{H} = \omega_0.$$

Тоді матимемо

$$\omega_0 = \omega_{\text{Ш}} = \sqrt{\frac{g}{R_3}},$$

або, переходячи до періоду прецесії $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$,

$$T_0 = T_{\text{Ш}} = 2\pi \sqrt{\frac{R_3}{g}}. \quad (13.21)$$

Величини $\omega_{\text{Ш}}$ і $T_{\text{Ш}}$ називають частотою Шюлера і періодом Шюлера. Умову (13.21) можна інтерпретувати таким чином: **період прецесійних коливань гіромаятника для виконання умови незбурюваності має дорівнювати періодові математичного маятника, довжина якого дорівнює радіусу Землі**. Розрахунки показують, що цей період дорівнює 84,4 хвилин, тобто періодові обертання штучного супутника Землі на висоті $h = 0$ над поверхнею Землі.

Період Шюлера можна розглядати як суттєвий параметр будь-якої планети. Якщо врахувати залежність прискорення вільного падіння $g_{\text{пл}}$ на поверхні планети від її радіусу $R_{\text{пл}}$ і середньої густини $\rho_{\text{ср}}$, можна дійти такого виразу періода Шюлера

$$T_{Ш} = 2\pi \sqrt{\frac{R_{пл}}{g_{пл}}} = \sqrt{\frac{3\pi}{\gamma \rho_{пл}}},$$

де γ – гравітаційна стала. Як бачимо, *період Шюлера не залежить від розмірів планети, а визначається виключно середньою щільністю планети.*

13.1.3. Моделювання поведження гіромаятника

Користуючись програмною моделлю **GM_PO_upr** (див. Додаток 8. До глави 13) вивчимо деякі характерні особливості поведження гіромаятника за різних рухів основи.

В основу моделі покладені прецесійні рівняння руху гіромаятника у такому більш повному виді (див. (2.60), гл. 2):

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} = & -u_{\xi} - (u_{\eta} \cos \alpha + u_{\zeta} \sin \alpha)tg\beta - \omega_0(\cos \alpha tg\beta + \frac{w_{\xi}}{g} + \frac{w_{\zeta}}{g} \sin \alpha tg\beta) - \\ & - \frac{\varphi_1}{\cos \beta} \dot{\beta} + \frac{m_y}{\cos \beta}; \\ \frac{d\beta}{dt} = & -(u_{\zeta} \cos \alpha - u_{\eta} \sin \alpha) + \omega_0(\sin \alpha - \frac{w_{\zeta}}{g} \cos \alpha) + \frac{\varphi_2}{\cos \beta} \dot{\alpha} - \frac{m_x}{\cos \beta}. \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \omega_0 = \frac{mgl}{H}; \quad n_N(t) = \frac{w_{\xi}}{g}; \quad n_E(t) = \frac{w_{\zeta}}{g}; \quad \varphi_1 = \frac{f_1}{H}; \quad \varphi_2 = \frac{f_2}{H}; \\ m_x = \frac{M_{\xi}^*}{H}; \quad m_y = \frac{M_{Y1}^*}{H}. \end{aligned}$$

Тут з моментів зовнішніх сил окремо виділено моменти сил опору, які вважаються моментами сил в'язкого тертя.

Перша серія експериментів виявляє реакцію гіромаятника на рух основи з прискоренням. Для цього параметри руху узяті такими, що основа у початковий момент часу є нерухомою, а потім, через 10 хвилин, починає рух у північному напрямку з постійним прискоренням, рівним 0,05 м/с. Рівноприскорювальний рух триває 20 хвилин. За цей час основа набуває швидкості 60 м/с. Надалі основа рухається рівномірно у площині меридіану з набутою швидкістю.

Щоб зосередися лише на виявленні додаткової (до перехідної і швидкісної) балістичної похибки, початкові умови руху гіромаятника обрані такими, що у початкову мить головна вісь збігається з положенням рівноваги, яке визначається швидкісною похибкою. Це дозволяє, вилучивши з сумарного руху гіромаятника його рух внаслідок змінювання швидкісної похибки, одержати шуканий рух, обумовлений лише балістичною похибкою.

Перші два рис. 13.12 і 13.13 характеризують рух ГМ з періодом власних коливань, рівним $T_0 = 7,5$ хвилин. Рух ГМ за відсутності сил опору відображений на рис. 13.12, за наявності тертя – на рис. 13.13.

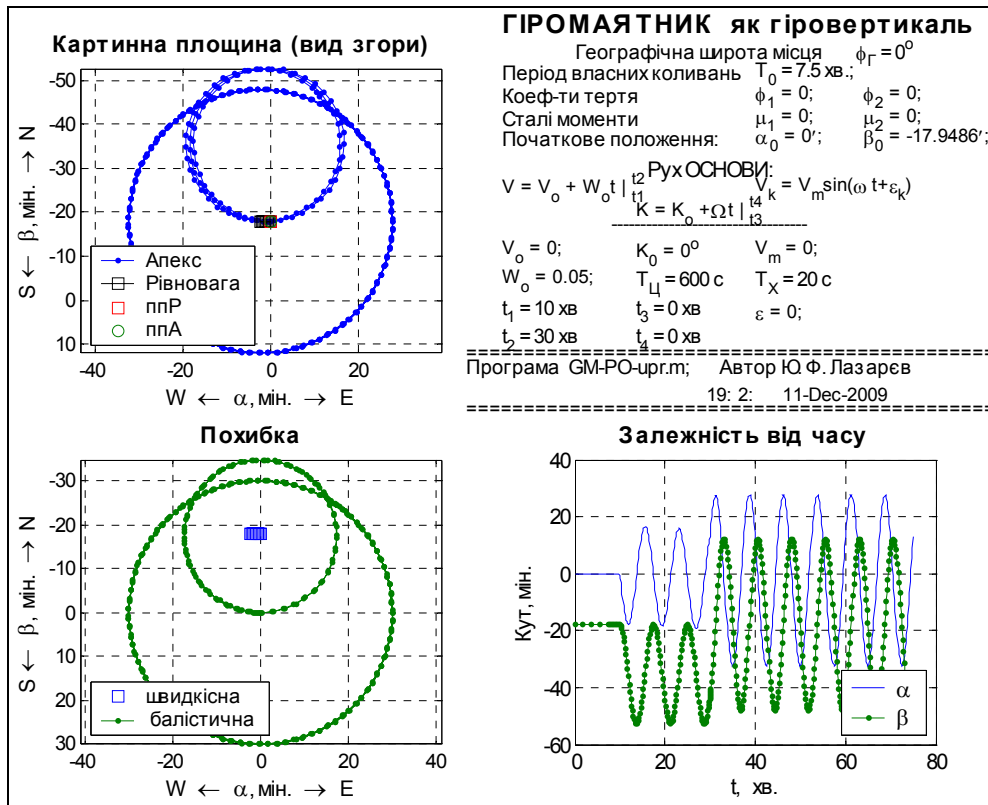


Рис. 13.12. Похибки ГМ ($T_0 = 7,5$ хв.) при русі основи з прискоренням

Легко бачити, що у перші 10 хвилин головна вісь ГМ не змінює свого положення, перебуваючи у положенні рівноваги. Далі прискорювальний рух призводить до стрибкоподібного змінювання положення рівноваги ГМ. Воно додатково зміщується на північ приблизно на $18'$. Головна вісь починає обертатися по конусу навколо цього нового положення рівноваги, наближуючись до нього за наявності тертя. По закінченні прискорювального руху основи положення рівноваги знову повертається у положення, близьке до попереднього. Головна вісь починає обертатися вже навколо нього, також наближаючись до нього через дію сил опору. У кінцевому підсумку головна вісь встановлюється у положення, яке відповідає новому значенню швидкісної похибки. Балістична похибка сягає у цьому випадку значення $\pm 30'$.

На рис. 13.14 – 13.17 відображені результати аналогічних експериментів для гіромаятника з періодом власних коливань $T_0 = 15$ хв, $T_0 = 60$ хв і $T_0 = 84,4$ хв. Збільшення періоду призводить до збільшення величини швидкісної похибки, але балістична похибка при цьому зменшується. У першому випадку балістична похибка помітно зменшується (до $\pm 20'$). При періоді $T_0 = 60$ хвилин вона стає вже меншою $\pm 13'$. Настроювання ГМ на період Шюлера приводить до практично повного зникнення балістичної похибки (менше $1'$, див. рис. 13.16). Залишається суто швидкісна похибка. Але наявність тертя призводить до порушення умови незбурюваності (балістична похибка збільшується до $3'$, див. рис. 13.17).

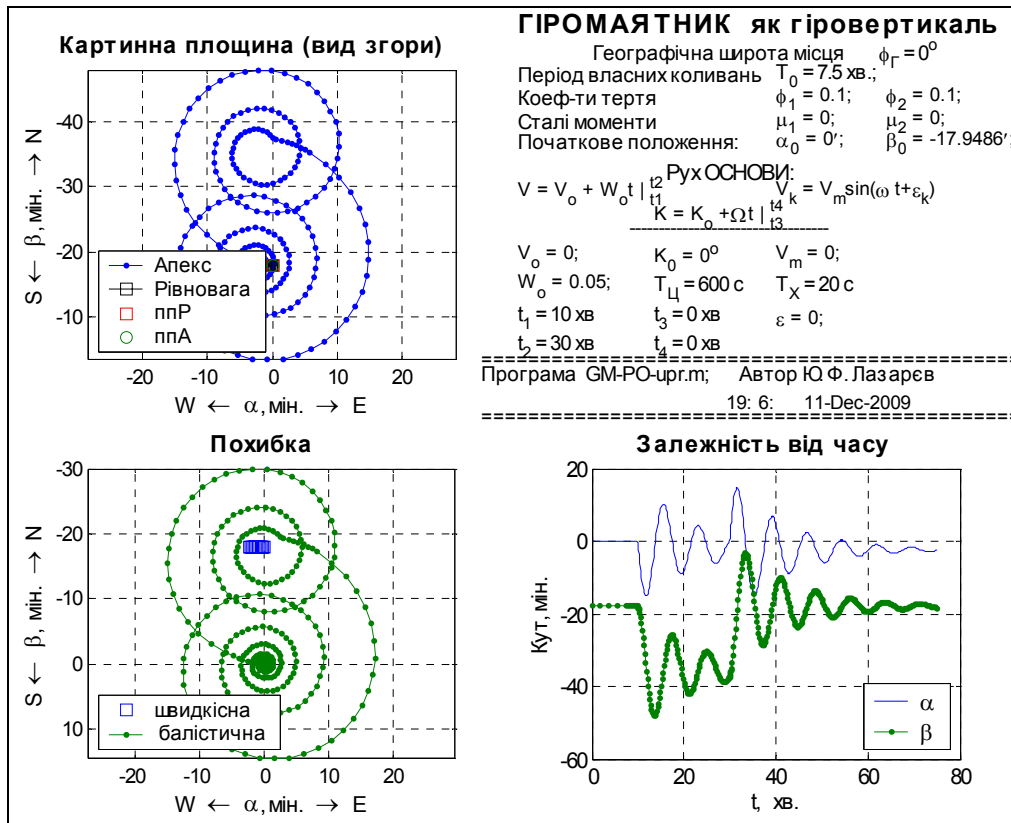


Рис. 13.13. Рух ГМ ($T_0 = 7,5$ хв.) за руху основи з прискоренням і за наявності сил опору

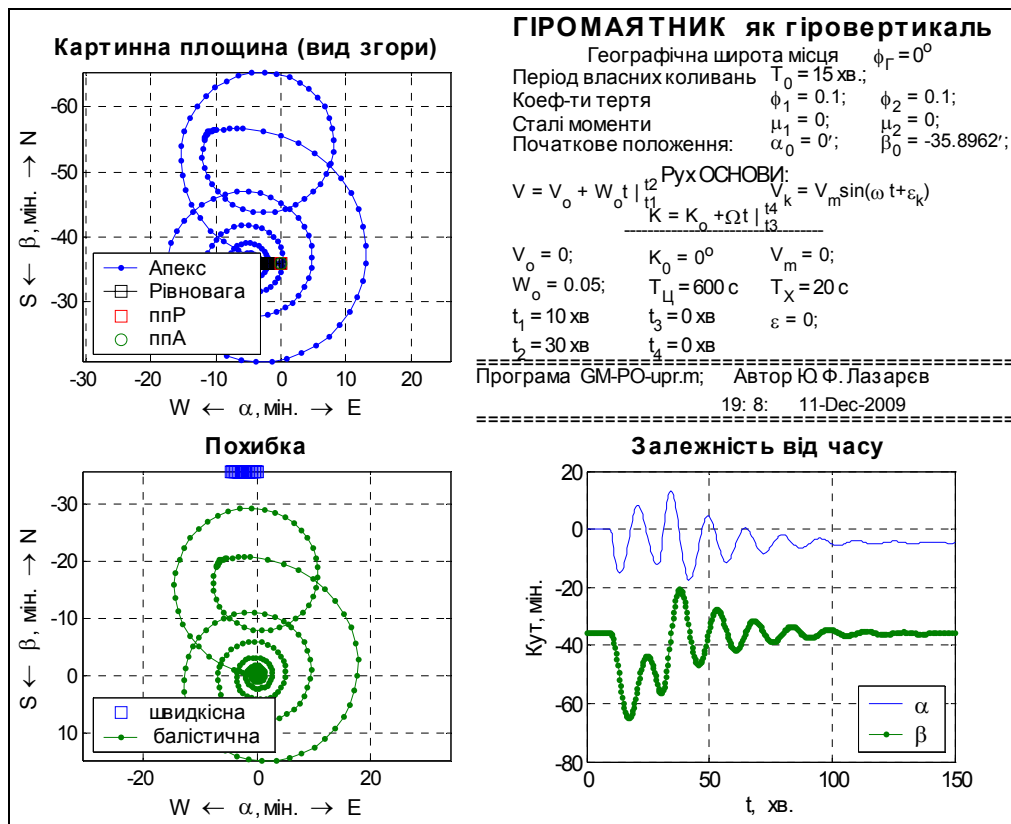


Рис. 13.14. Рух ГМ ($T_0 = 15$ хв.) за руху основи з прискоренням

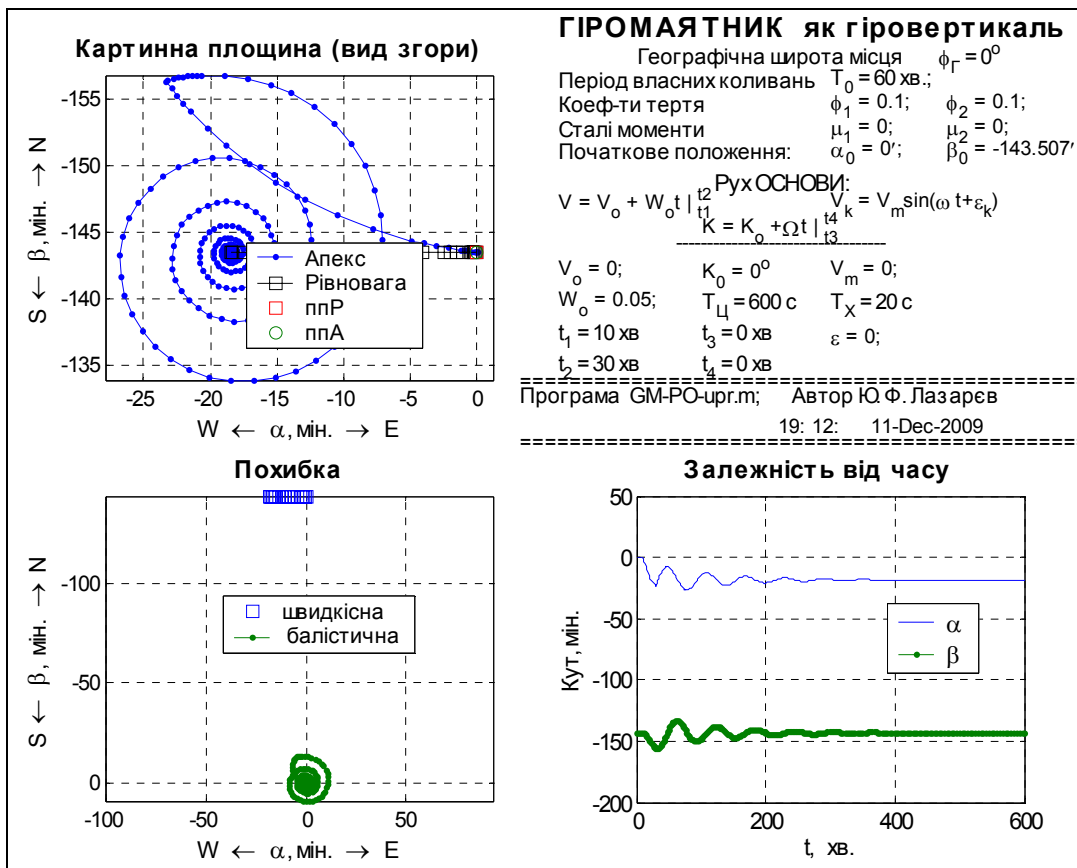


Рис. 13.15. Рух ГМ ($T_0 = 60$ хв.) за руху основи з прискоренням

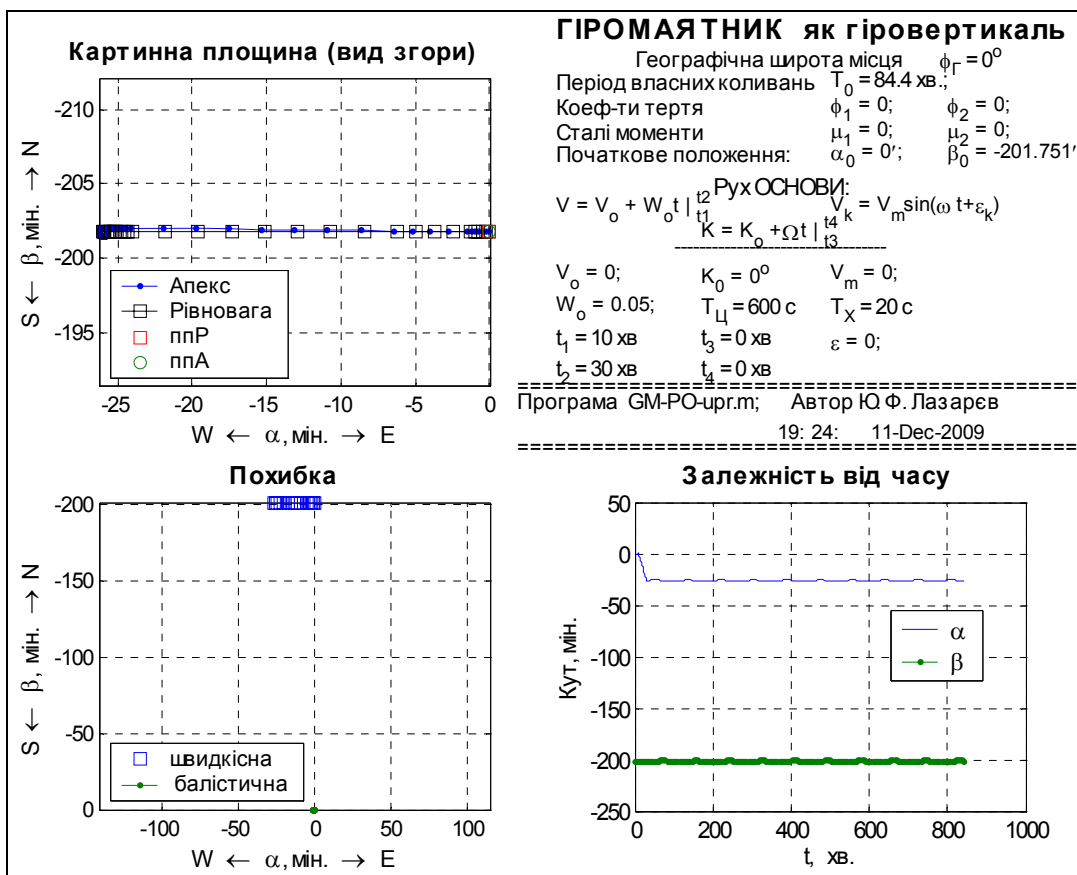


Рис. 13.16. Рух ГМ ($T_0 = 84,4$ хв) без тертя за руху основи з прискоренням

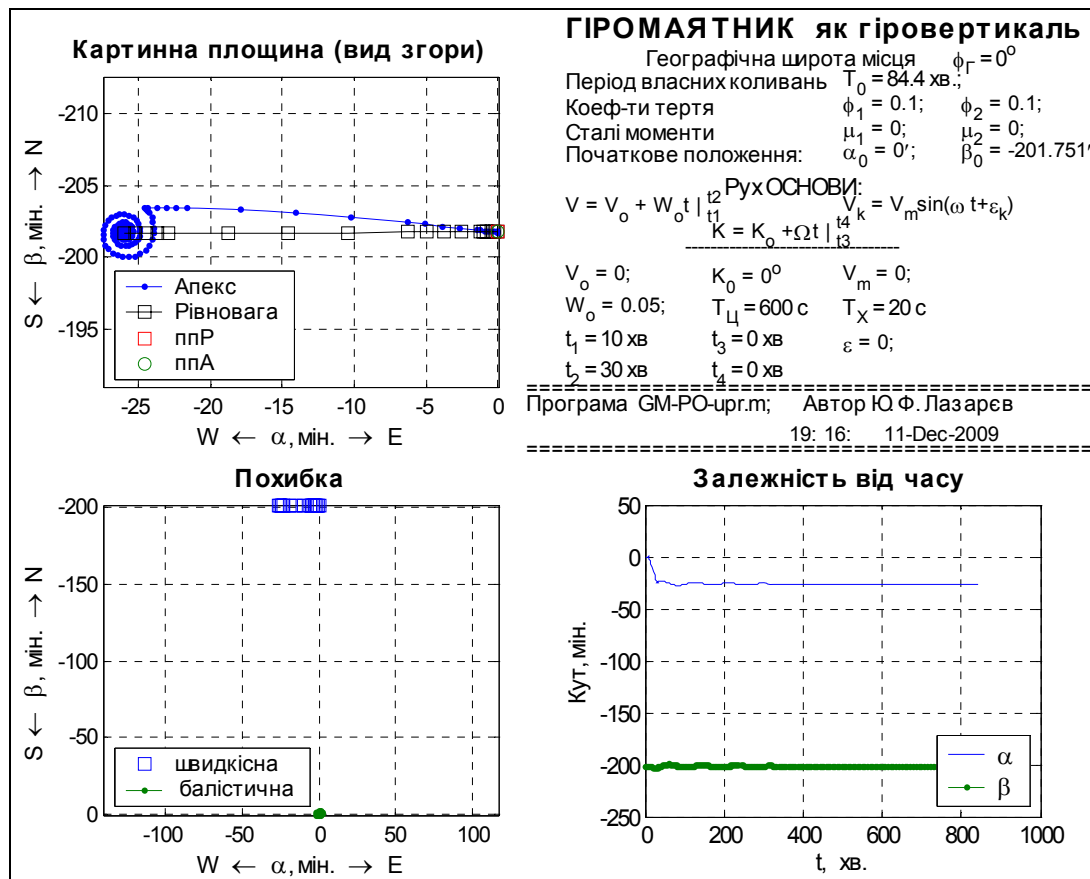


Рис. 13.17. Рух ГМ ($T_0 = 84,4$ хв.) за руху основи з прискоренням

Далі демонструються вплив інших видів руху основи з прискоренням на рух і похибки гіромаятника.

Вплив прискорень, що виникають при бортовій хитавиці корабля, показаний на рис 13.18 і 13.19. Припускається, що амплітуда хитавиці становить 20° , відстань місця розташування гіромаятника на кораблі від осі хитання – 10 м, період хитавиці – 10 с. Як це впливає з результатів моделювання, балістична похибка має у цьому випадку коливальний характер. Амплітуда похибки при періоді власних коливань ГМ у 7,5 хв сягає приблизно $3'$ по обох кутах, а у випадку настроювання ГМ на період Шулера – лише $0',3$, тобто у 10 разів менше.

Рисунки 13.20 – 13.26 відображують рух ГМ при циркуляції корабля. Вважається що швидкість корабля становить 30 м/с, період циркуляції – 600 с, початковий курс корабля 45° . Циркуляція починається у момент часу $t = 10$ хвилин.

На рис. 13.20 і 13.21 корабль здійснює п'яту частину повної циркуляції. Як видно, при $T_0 = 7,5$ хв. балістична похибка наприкінці циркуляції сягає величини $150' = 2^{\circ},2$, у той час як у незбурюваного ГМ (рис. 13.21) вона не перевищує $1'$.

У випадку здійснювання кораблем півциркуляції (рис 13.22 і 13.23) ГМ, налагоджений на період Шулера, має балістичну похибку теж не вище за $1'$, а у випадку відсутності сил опору балістична похибка взагалі майже відсутня. В усіх останніх трьох випадках головна вісь ГМ фактично відтворює рух положення рівноваги.

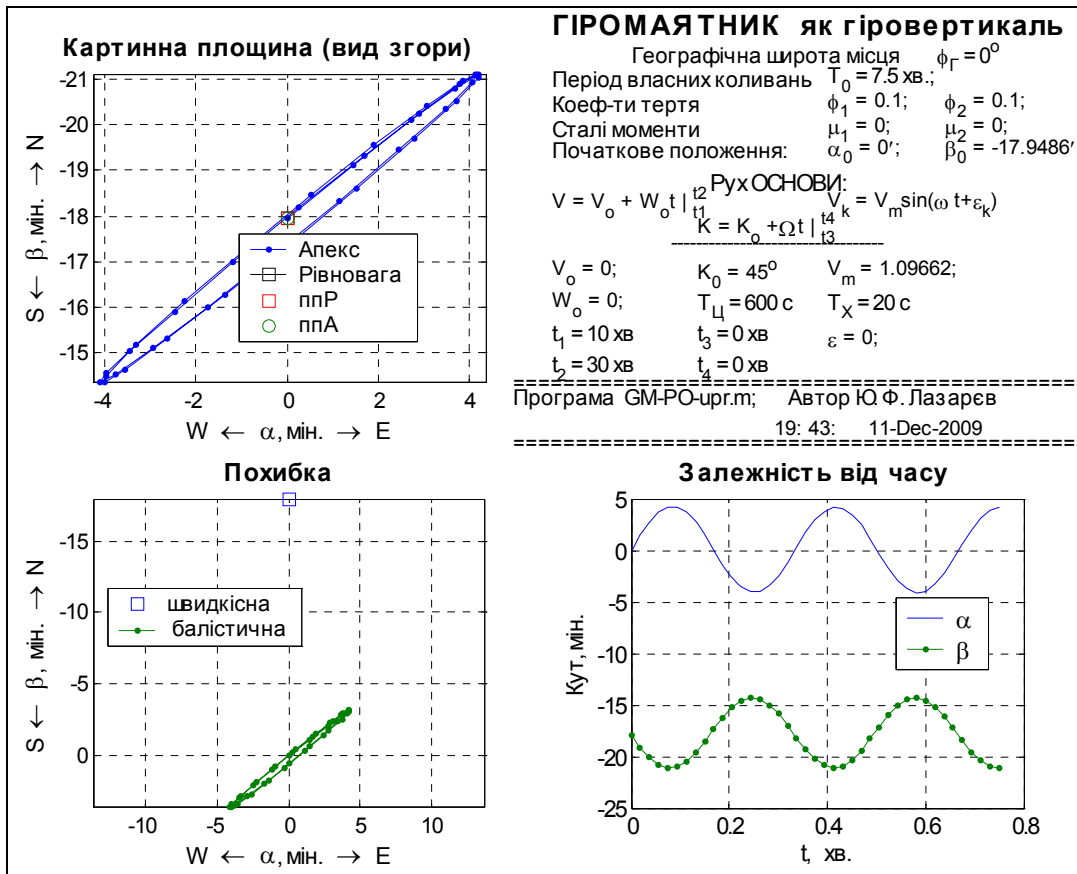


Рис. 13.18. Рух ГМ ($T_0 = 7,5$ хв) за хитавиці основи

Рис. 13.19. Похибки ГМ ($T_0 = 84,4$ хв) за хитавиці основи

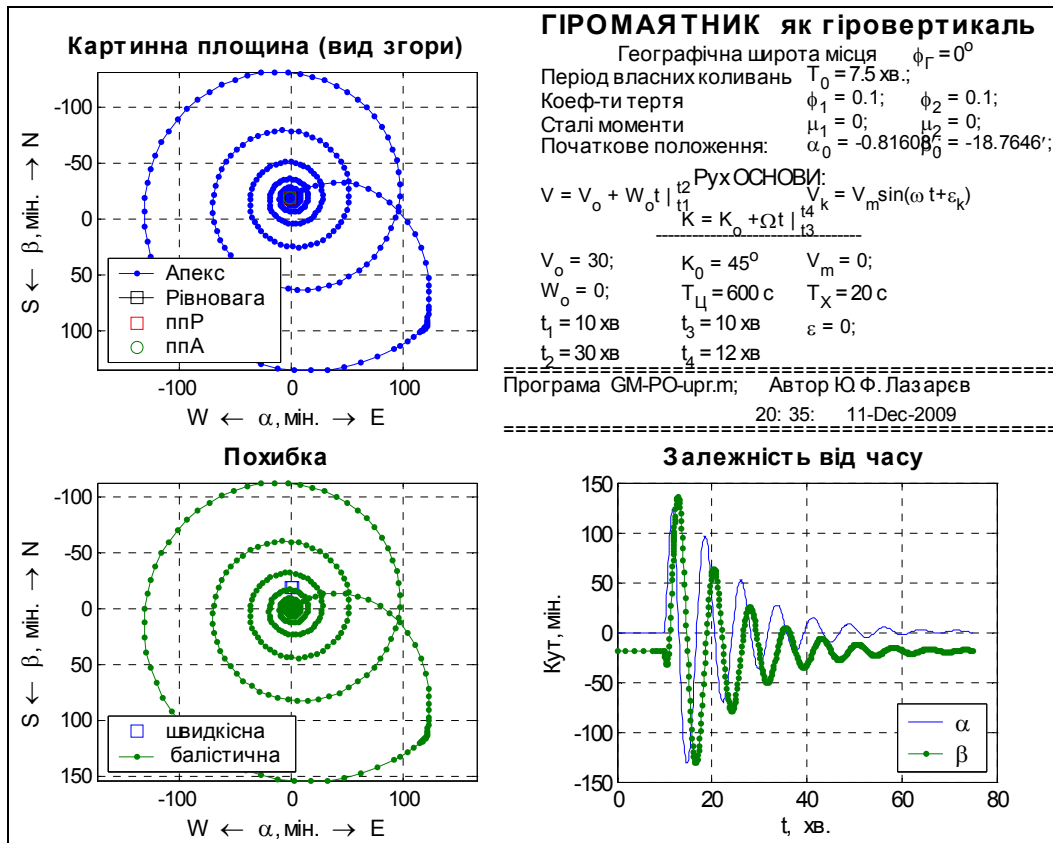


Рис. 13.20. Рух ГМ ($T_0 = 7,5$ хв.) за неповної циркуляції основи

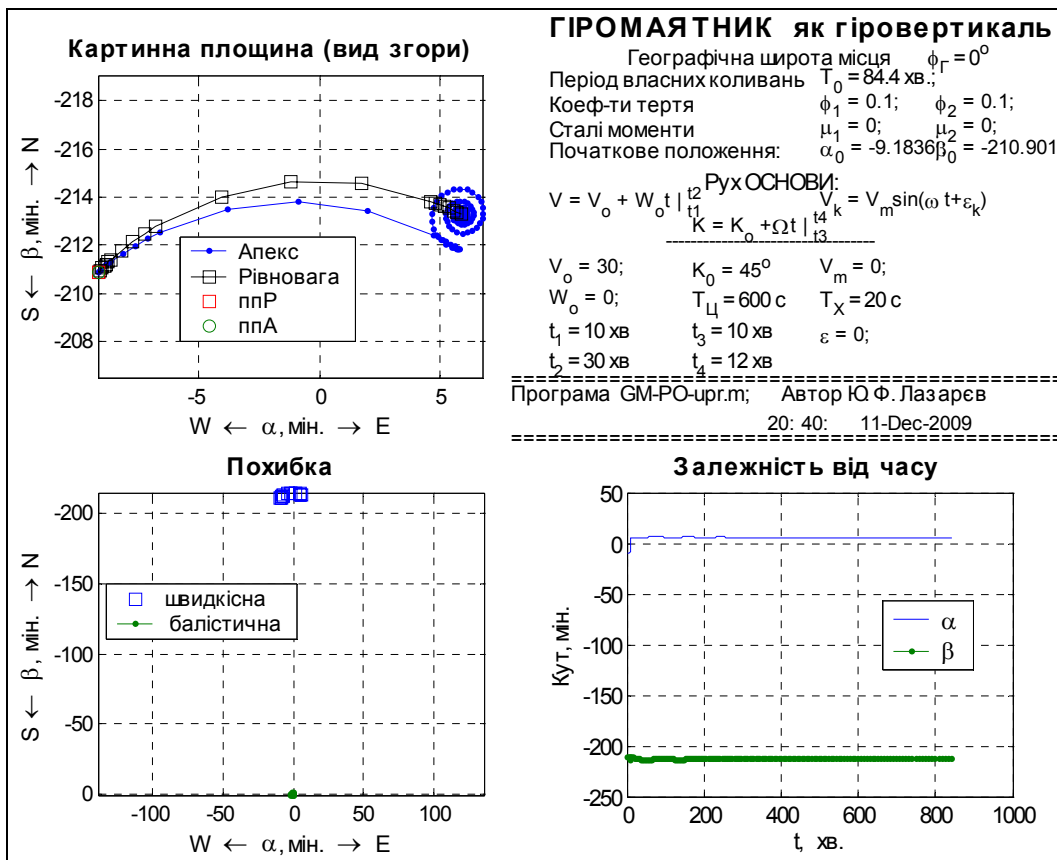


Рис. 13.21. Рух ГМ ($T_0 = 84,4$ хв.) за неповної циркуляції основи

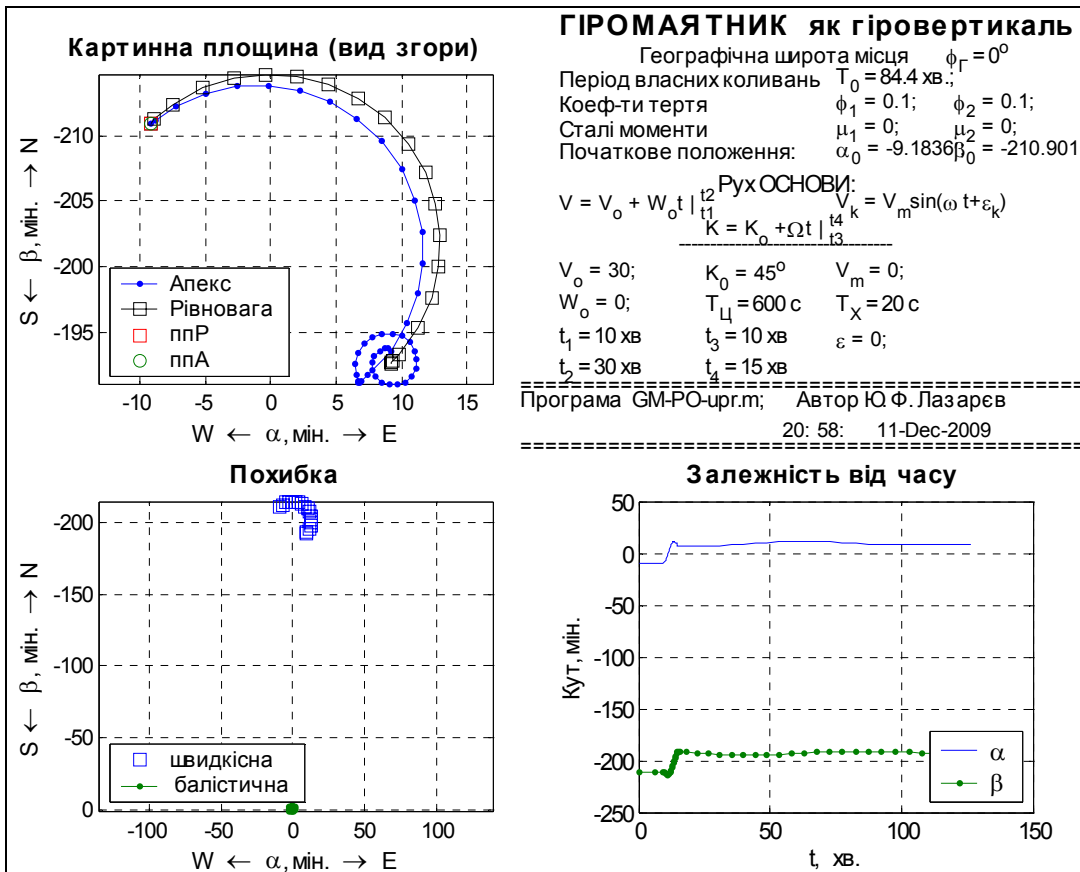


Рис. 13.22. Рух ГМ ($T_0 = 84,4$ хв.) за півциркуляції основи

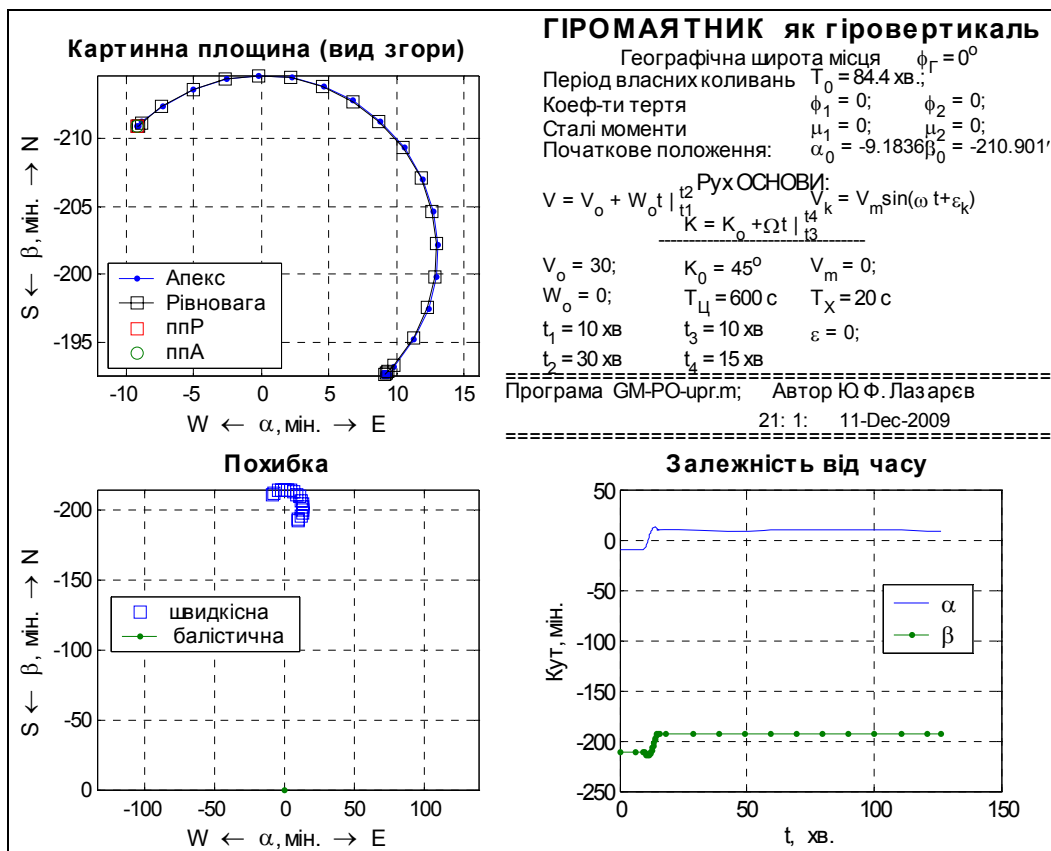


Рис. 13.23. Рух ГМ ($T_0 = 84,4$ хв.) без тертя за півциркуляції основи

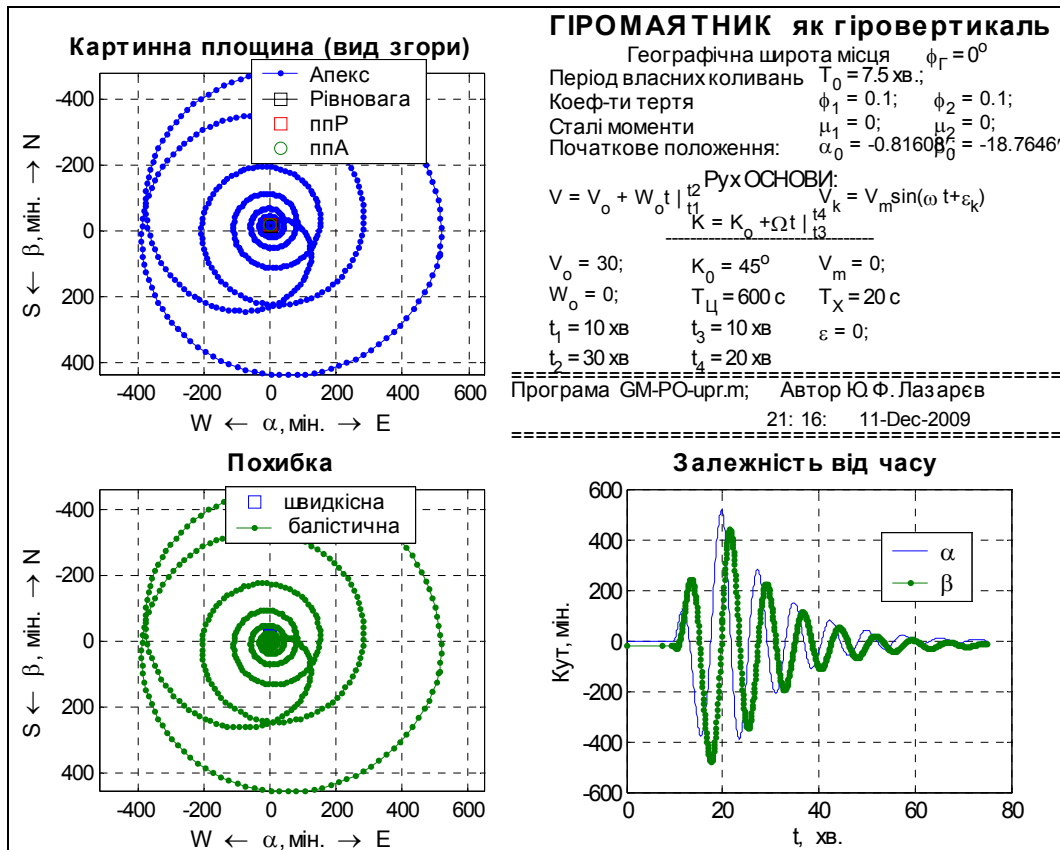


Рис. 13.24. Рух ГМ ($T_0 = 7,5 \text{ хв.}$) за повної циркуляції основи

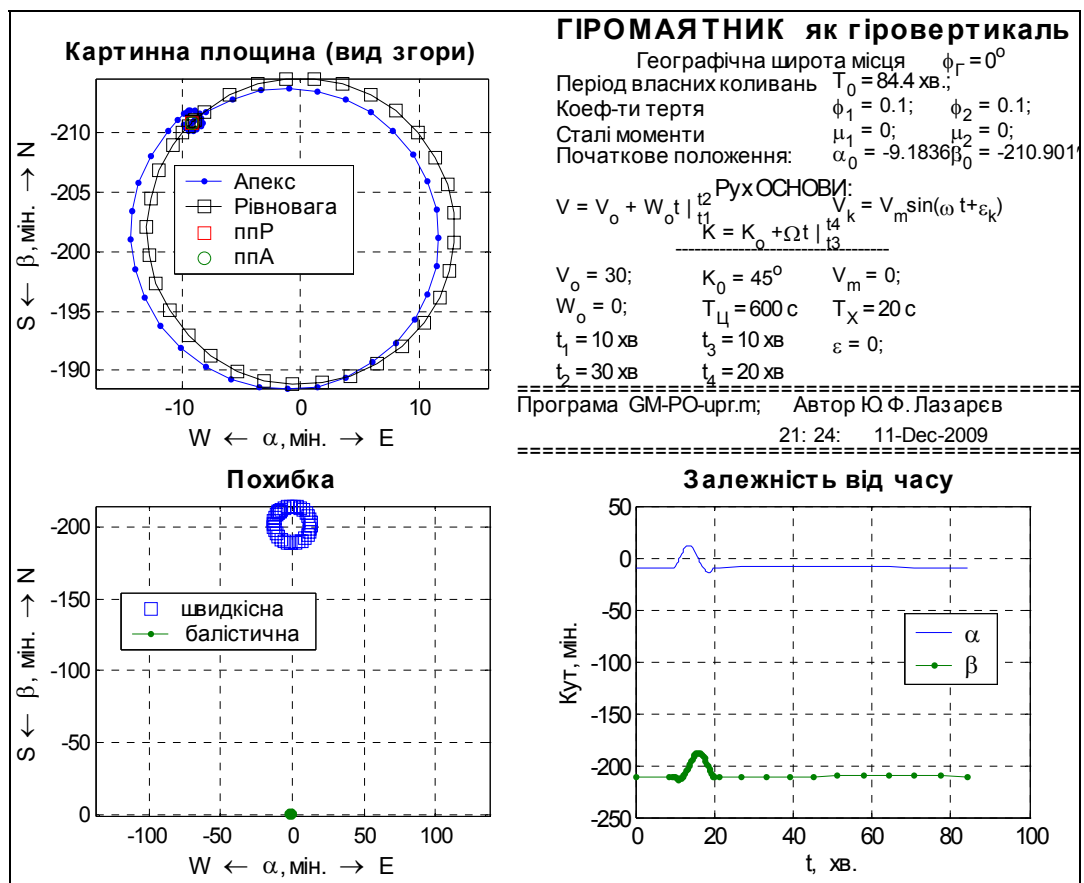


Рис. 13.25. Рух ГМ ($T_0 = 84,4 \text{ хв.}$) за повної циркуляції основи

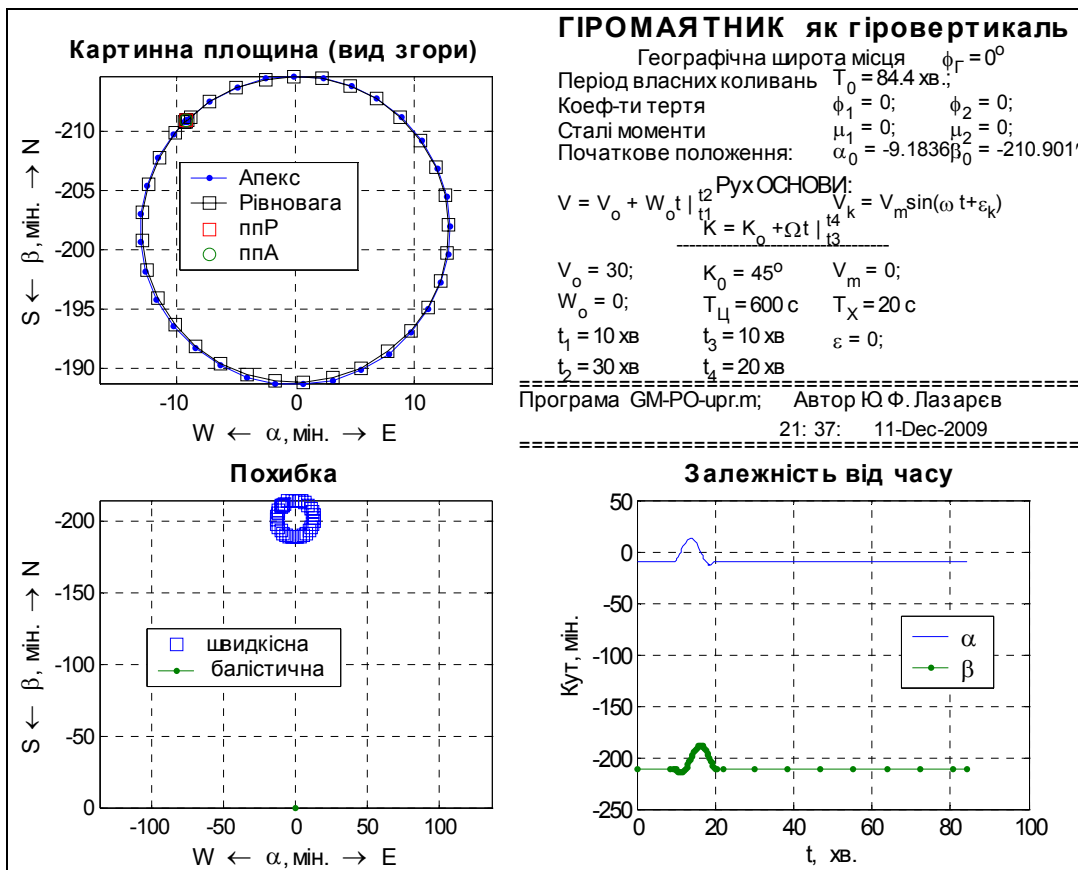


Рис. 13.26. Рух ГМ ($T_0 = 84,4$ хв.) без опору за повної циркуляції основи

Наступні три рисунки (13.24 – 13.26) відбивають рух ГМ при повній циркуляції корабля. При $T_0 = 7,5$ хв. балістична похибка сягає величини $420' = 7^{\circ}$. Налаштування ГМ на період Шюлера дозволяє зменшити її до $1'$ при наявності сил опору, а при відсутності тертя – практично позбутися її.

Резюмуючи, можна дійти таких висновків.

1. *Налаштування гіромаятника на період Шюлера є потужним засобом зменшення його похибок як гіроприладу, що зберігає положення вертикалі місця на рухомому об'єкті. Завдяки цьому гіромаятник майже позбавляється похибки, причиною якої є рух точки підвісу приладу з прискоренням, незалежно від того, який саме рух зумовлює це прискорення.*
2. *Унаслідок того, що реальні гіромаятники обов'язково споряджені системою, яка забезпечує загасання вільних коливань, налаштування на період Шюлера не забезпечує повного позбавлення балістичної похибки. Але всеж зменшення її внаслідок цієї налаштуваності є вельми відчутним (у десяткі разів). Тому на практиці реальні гіромаятники завжди налагоджують на період Шюлера.*

З'ясуємо фізичний зміст умови незбурюваності. Якщо точка підвісу гіромаятника переміщається по поверхні Землі навколо її центра з абсолютною лінійною

швидкістю V_a , це приводить до повороту в просторі вертикалі з кутовою швидкістю $\dot{\psi} = \frac{V_a}{R_3}$ (рис. 13.27).

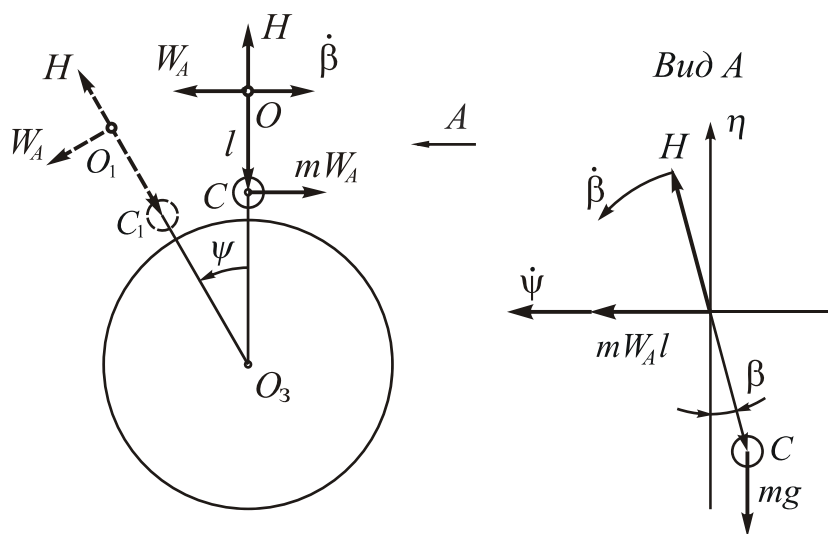


Рис. 13.27. «Гра» моментів при русі точки підвісу гіромаятника з прискоренням.

Щоб головна вісь гіромаятника була нерухомою відносно вертикалі, необхідно забезпечити прецесію гіромаятника в інерціальному просторі з цією кутовою швидкістю. Ця прецесія забезпечується відхиленням осі гіромаятника від вертикалі у вертикальній площині, перпендикулярній до вектора швидкості V_a , на кут β такий, що сила тяжіння гіромаятника утворює навколо осі напрямку швидкості момент сили тяжіння $mgl \sin \beta \approx mgl\beta$, який зумовлює прецесію гіроскопа з кутовою швидкістю $\dot{\psi}$. Кут β для забезпечення такої прецесії має дорівнювати

$$\dot{\psi} = \frac{mgl}{H} \beta = \frac{V_a}{R_3} \Rightarrow \beta = \frac{V_a}{R_3} \frac{H}{mgl}.$$

Якщо швидкість V_a змінюється з часом, то для забезпечення нерухомості осі гіромаятника відносно місцевої вертикалі необхідно забезпечити змінювання кута β у перпендикулярній площині з кутовою швидкістю $\dot{\beta}_{(1)} = \frac{W_a}{R_3} \frac{H}{mgl}$, де W_a – прискорення точки підвісу. Прецесія з цією кутовою швидкістю забезпечується дією моменту сил інерції через те ж прискорення W_a . Інерційна сила, зумовлена цим прискоренням, дорівнює mW_a , прикладена в центрі мас C гіромаятника і утворює момент $mW_a l$, лінія дії якого перпендикулярна до лінії дії прискорення. Під впливом цього моменту вісь ротора гіромаятника прецесує зі швидкістю $\dot{\beta}_{(2)} = \frac{mW_a l}{H}$ у площині кута β . Якщо швидкість прецесії буде точно дорівнювати необхідній швидкості $\dot{\beta}_{(1)}$, то вісь гіромаятника не відхилиться в площині дії прискорення.

Прирівнюючи ці кутові швидкості, отримаємо умову незбурюваності (13.21). Звідси можна зробити висновок: *якщо параметри гіромаятника (маятниковий опорний момент $mg l$ і кінетичний момент H) такі, що при русі точки його підвісу з прискоренням головна вісь гіромаятника під дією виниклих при цьому моментів сил інерції прецесує з кутовою швидкістю, точно рівною кутовій швидкості змінювання швидкісної похибки гіромаятника, то балістичної похибки гіромаятник не матиме.*

13.2. Маятниковий гірокомпас

Маятниковий гірокомпас (МГК) є триступневим гіроскопічним приладом з горизонтально розташованою головною віссю і центром мас, зміщеним униз відносно точки підвісу. Такий прилад может прислужитися як компас унаслідок тієї його властивості, що головна вісь самостійно встановлюється у площину меридіана місця.

Найпростіша схема конструкції маятникового гірокомпаса наведена на рис. 13.28. Тут $\xi\eta\zeta$ – опорна географічна система координат, η – вертикаль місця, вісь ξ спрямована у площині меридіану на північ. Центр мас C зміщений відносно точки підвісу O вдовж осі y униз на величину l . Ротор гіроскопа приведений у швидке обертання навколо осі x . Чутливий елемент МГК (система координат xuz) зв'язаний з корпусом приладу (основною) за допомогою сферичного шарніру у точці підвісу O (див. рис. 2.15). Його положення в географічній системі визначимо трьома кутами:

α – кут відхилення вертикальної площини, яка проходить через головну вісь гірокомпаса, від площини місцевого меридіана;

β – кут підняття головної осі гіроскопа над площиною горизонту;

γ – кут відхилення осі маятника чутливого елемента МГК від вертикалі у площині, перпендикулярній головній осі.

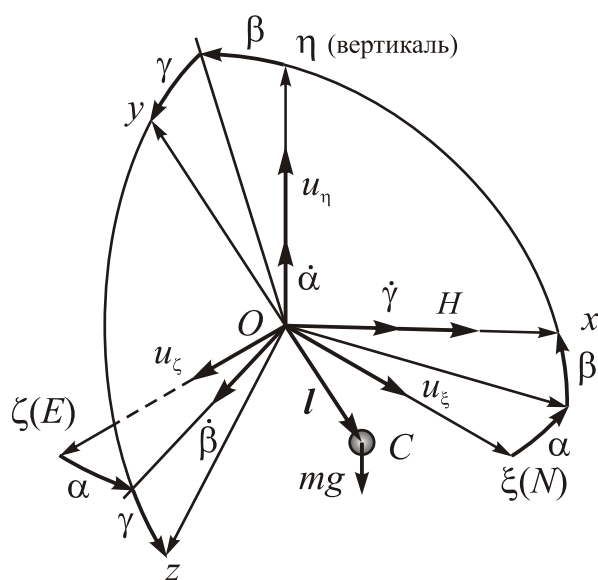


Рис. 13.28. Кінематика поворотів маятникового гірокомпаса

Завдяки такій конструкції гіроскоп у МГК фактично має чотири ступеня вільності. Два з них – повороти навколо головної осі самого чутливого елемента (кут γ) і ротора гіроскопа. Рух такої системи описується у загальному випадку чотирма рівняннями. Але якщо припустити, що величина власного кінетичного моменту гіроскопа є незмінною внаслідок роботи гіромотору $H = \text{const}$, то це дозволяє виключити з розгляду рівняння обертання ротору навколо головної осі і обмежитися вивченням руху по трьох перших рівняннях. Прецесійні рівняння руху (2.64) такого МГК були складені у п. 2.5.5.

Головною величиною, яка характеризує похибку маятникового гірокомпаса, є кут α відхилення його головної осі від площини географічного меридіану місця. Тому у подальшому зосередимо увагу саме на русі МГК з куту α .

13.2.1. Швидкісна похибка і перехідний процес

Розглянемо спочатку процес устанавлення головної осі маятникового гірокомпаса у стійке положення рівноваги при відсутності зовнішніх збурень. Для цієї мети зробимо наступні припущення:

- 1) моменти сил по осях дорівнюють нулю:

$$M_{z1} \equiv M_{\eta} \equiv 0;$$

- 2) основа рухається рівномірно по поверхні Землі:

$$\frac{dV_N}{dt} \equiv \frac{dV_E}{dt} \equiv 0.$$

У цьому разі рівняння (2.64) набувають виду:

$$\dot{\beta} + \left(\omega_3 \cos \varphi_z + \frac{V_E}{R_3} \right) \alpha = \frac{V_N}{R_3}; \quad (13.22)$$

$$\dot{\alpha} - \left(\frac{mgl}{H} + \omega_3 \cos \varphi_z + \frac{V_E}{R_3} \right) \beta = -\omega_3 \sin \varphi_z - \frac{V_E}{R_3} \text{tg} \varphi_z. \quad (13.23)$$

Як бачимо, це система з двох лінійних неоднородних диференціальних рівнянь першого порядку з постійними коефіцієнтами. Члени рівнянь, що утворюють неоднорідність, є також постійними величинами. Тому частинні розв'язки слід відшукувати як незмінні величини:

$$\alpha_{\text{ч.н}}(t) = \alpha^* = \text{const}; \quad \beta_{\text{ч.н}}(t) = \beta^* = \text{const}.$$

Підставляючи це у (13.22) і (13.23), визначимо:

$$\alpha^* = \frac{V_N}{R_3 \omega_3 \cos \varphi_r + V_E}; \quad (13.24)$$

$$\beta^* = \frac{\omega_3 \sin \varphi_r + \frac{V_E}{R_3} \text{tg} \varphi_r}{\frac{mgl}{H} + \omega_3 \cos \varphi_r + \frac{V_E}{R_3}} \approx \frac{H \omega_3 \sin \varphi_r}{mgl}. \quad (13.25)$$

Вираз (13.24) характеризує так звану швидкісну похибку МГК. Вона повністю збігається зі встановленою раніше (11.13) у п. 11.2.1 для двоступеневого гірокомпаса.

Згідно з формулою (13.25) положення рівноваги головної осі МГК також є дещо приподнятим над площиною горизонту. Саме завдяки цьому виниклий внаслідок цього момент сили тяжіння змушує прецесувати гіроскоп навколо вертикалі зі швидкістю, яка дорівнює вертикальній складовій обертання Землі. В результаті головна вісь гіроскопа зберігає у положенні рівноваги незмінним своє положення не в інерціальному просторі, а відносно Землі.

Процес установаження головної осі у положення рівноваги описується системою однорідних рівнянь:

$$\begin{aligned} \dot{y} + \left(\omega_3 \cos \varphi_r + \frac{V_E}{R_3} \right) x &= 0; \\ \dot{x} - \left(\frac{mgl}{H} + \omega_3 \cos \varphi_r + \frac{V_E}{R_3} \right) y &= 0, \end{aligned} \quad (13.26)$$

де

$$x = \alpha - \alpha^*; \quad y = \beta - \beta^*.$$

Знайдемо розв'язок цієї системи, зводячи її до одного диференціального рівняння другого порядку:

$$\ddot{x} + \left(\frac{mgl}{H} + \omega_3 \cos \varphi_r + \frac{V_E}{R_3} \right) \left(\omega_3 \cos \varphi_r + \frac{V_E}{R_3} \right) x = 0.$$

Величина

$$\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{mgl}{H} + \omega_3 \cos \varphi_r + \frac{V_E}{R_3} \right) \left(\omega_3 \cos \varphi_r + \frac{V_E}{R_3} \right)} \approx \sqrt{\frac{mgl}{H}} \omega_3 \cos \varphi_r.$$

являє собою частоту власних коливань маятникового гірокомпаса.

Розв'язок з величини x має вид

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varepsilon),$$

де A і ε – сталі інтегрування, які визначаються початковими умовами.

Розв'язок зі змінної y визначимо, користуючись рівнянням (13.26):

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\frac{mgl}{H} + \omega_3 \cos \varphi_r + \frac{V_E}{R_3}} \frac{dx}{dt} = \frac{A \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varepsilon)}{\frac{mgl}{H} + \omega_3 \cos \varphi_r + \frac{V_E}{R_3}} = \\ &= A \sqrt{\frac{\left(\omega_3 \cos \varphi_r + \frac{V_E}{R_3} \right)}{\frac{mgl}{H} + \omega_3 \cos \varphi_r + \frac{V_E}{R_3}}} \cos(\omega_0 t + \varepsilon) \approx A \sqrt{\frac{H \omega_3 \cos \varphi_r}{mgl}} \cos(\omega_0 t + \varepsilon). \end{aligned}$$

Отже, на картинній площині апекс гірокомпаса описує еліпс з центром у положенні рівноваги, півосі якого відносяться один (з координати α) до одного (з координати β) так

$$\frac{\alpha_m}{\beta_m} = \sqrt{\frac{mgl}{H \omega_3 \cos \varphi_r}} = \frac{\omega_0}{\omega_3 \cos \varphi_r}.$$

Для прикладу розглянемо маркшейдерській гірокомпас з періодом власних коливань $T_0 = 2\pi / \omega_0 = 10$ хвилин, встановлений на екваторі. У цьому разі

$$\frac{\alpha_m}{\beta_m} = \frac{\omega_0}{\omega_3} = \frac{T_3}{T_0} = \frac{24 \text{ години}}{10 \text{ хвилин}} = 144.$$

У морського гірокомпаса, настроєного на період Шюлера, це відношення становить

$$\frac{\alpha_m}{\beta_m} = \frac{T_3}{T_{\text{Ш}}} = \frac{24 \text{ години}}{84,4 \text{ хвилин}} \approx 17.$$

У цілому траєкторію апексу гіроскопа зображено на рис. 13.29.

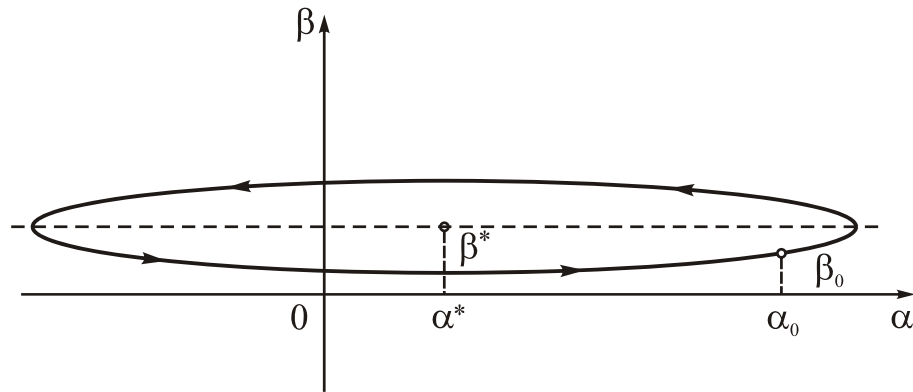


Рис. 13.29. Траєкторія вершини МГК

За наявності сил опору траєкторія з еліпсоїдальної стає спіралеподібною. Вершина гіроскопа наближається до положення рівноваги (яке характеризується швидкісними похибками) і в кінцевому підсумку зливається з ним.

Отже, перехідна складова з часом зникає, і головна вісь установлюється у положення, дещо відхилене від площини меридіана, тобто гірокомпас вказує на північ зі швидкісною похибкою (13.24). Легко бачити, що ця похибка виникає лише якщо основа рухається зі змінюванням широти місця, тобто за наявності північної (точніше – меридіональної) складової її швидкості.

13.2.2. Балістична похибка. Умова незбурюваності

Як і у будь-якому маятниковому приладі, рух основи з прискоренням зумовлює дію на маятниковий гірокомпас моменту сил інерції, що призводить до появи додаткових похибок – балістичних.

Для їх аналізу використаємо рівняння (2.64), вважаючи моменти зовнішніх сил рівними нулю і нехтуючи малими другого порядку мализни, якими будуть добутки малих прискорень на малі кути

$$\ddot{\beta} + (\omega_3 \cos \varphi_r) \alpha = \frac{V_N}{R_3}; \quad (13.27)$$

$$\ddot{\alpha} - \left(\frac{mgl}{H} + \omega_3 \cos \varphi_r + \frac{V_E}{R_3} \right) \beta = -\omega_3 \sin \varphi_r - \frac{V_E}{R_3} \operatorname{tg} \varphi_r + \frac{ml}{H} \frac{dV_N}{dt}.$$

Диференціюючи за часом перше рівняння (13.50), підставляючи у нього $\dot{\alpha}$ з другого рівняння і нехтуючи малими другого порядку, дістанемо одне рівняння другого порядку відносно кута β :

$$\ddot{\beta} + \omega_0^2 \beta = \left[\frac{1}{R_3} - \left(\omega_3 \cos \varphi_r + \frac{V_E}{R_3} \right) \frac{ml}{H} \right] \frac{dV_N}{dt}. \quad (13.28)$$

Вираз у квадратних дужках у правій частині рівняння (13.28) можна наближено подати так:

$$\frac{1}{R_3} - \left(\omega_3 \cos \varphi_r + \frac{V_E}{R_3} \right) \frac{ml}{H} = \frac{1}{R_3} - \frac{\omega_0^2}{g}.$$

Частинний розв'язок рівняння (13.28) визначає додаткове (до перехідної і швидкісної складових) змінювання кута β , яке, у свою чергу зумовлює, у відповідності до першого рівняння (13.27), додаткову похибку з куту α , яка й є балістичною похибкою МГК.

З рівняння (13.28) випливає, що якщо забезпечити виконання умови

$$\omega_0 = \omega_{III} = \sqrt{\frac{g}{R_3}}, \quad (13.29)$$

то частинний розв'язок рівняння (13.28) (а отже, й балістична похибка МГК) дорівнюватиме нулю за будь-якого руху основи. Тому умову (13.29) називають умовою незбурюваності МГК прискоренням руху основи. Вона збігається з аналогічною умовою для гіромаятника: *для запобігання додатковим похибкам МГК, зумовлених рухом основи з довільним прискоренням, потрібно, щоб частота власних коливань цього приладу дорівнювала частоті власних коливань математичного маятника з довжиною, що дорівнює радіусу Землі.*

13.2.3. Інтеркардинальна похибка

Як показала історія, перші морські МГК були повернуті виробникам, бо практика їх застосування показала практичну непридатність в умовах значного хвилювання моря, що призвело до низки крупних морських катастроф. Вивчення показало, що причиною цього стала інтеркардинальна девіація (похибка), яка виникає саме через хитавицю корабля.

Для вивчення цієї похибки, скористаємося першим рівнянням (2.64), нехтуючи у ньому моментом зовнішніх сил

$$\dot{\beta} + \left(\omega_3 \cos \varphi_r + \frac{V_E}{R_3} \right) \alpha = \frac{V_N}{R_3} + \frac{ml}{H} \left(\frac{dV_E}{dt} \beta + \frac{dV_N}{dt} \gamma \right).$$

Розглядатимемо суто коливальний кутовий рух основи. Завдання полягає у виявленні можливої сталої складової похибки (куту α) за період хитавиці. Тому обмежимося усередненням обох частин рівняння. При цьому врахуємо, що усі кутові і лінійні швидкості при хитавиці є центрованими величинами (тобто їх середні значення за період хитавиці дорівнює нулеві). Тому дістанемо такого виразу для сталої складової похибки:

$$\left(\omega_3 \cos \varphi_r + \frac{V_E}{R_3} \right) \langle \alpha \rangle = \frac{ml}{H} \left(\left\langle \frac{dV_E}{dt} \beta \right\rangle + \left\langle \frac{dV_N}{dt} \gamma \right\rangle \right). \quad (13.30)$$

Щоб конкретизувати явний вираз похибки, зважимо на наступне.

1. Друга складова в дужках у лівій частині співвідношення (13.30) зазвичай набагато менша за першу складову, тому нею можна знехтувати:

$$\omega_3 \cos \varphi_r + \frac{V_E}{R_3} \approx \omega_3 \cos \varphi_r.$$

2. Змінювання (амплітуда) кута β за хитавиці набагато менше за змінювання (амплітуду) кута γ , бо руху МГК з кута β перешкоджає потужний гіроскопічний момент, чого не можна казати про рух з кута γ . Тому у дужках у правій частині (13.30) можна нехтувати першою складовою у порівнянні з першою:

$$\left\langle \frac{dV_E}{dt} \beta \right\rangle + \left\langle \frac{dV_N}{dt} \gamma \right\rangle \approx \left\langle \frac{dV_N}{dt} \gamma \right\rangle.$$

3. Змінювання кута γ у відповідності до третього рівняння (2.64) тісно пов'язане з прискоренням основи у східно-західному напрямку:

$$\gamma = \frac{1}{g} \frac{dV_E}{dt}.$$

Із врахуванням цих зауважень вираз для сталої складової похибки МГК за хитавиці корабля набуде вигляду

$$\langle \alpha \rangle = \frac{mgl}{H\omega_3 \cos \varphi_r} \langle n_N(t) n_E(t) \rangle, \quad (13.31)$$

де позначено

$$n_N = \frac{1}{g} \frac{dV_N}{dt}; \quad n_E = \frac{1}{g} \frac{dV_E}{dt}$$

перевантаження точки підвісу гірокомпаса за хитавиці корабля.

Очевидно, перевантаження точки підвісу спричиняються хитавицею за наявності відстані від місця розташування гірокомпаса (нактоузу) до осі хитання корпусу корабля.

Зазвичай в разі хвилювання поверхні моря переважальною є бортова хитавиця, тобто навколо поздовжньої осі корабля. При цьому можна вважати, що корабель хитається навколо лише однієї – поздовжньої – осі. Прискорення точки підвісу гірокомпаса у такому випадку буде напрямлене вздовж поперечної осі корпусу корабля. Якщо (рис. 13.30) поздовжня вісь корабля утворює кут K з напрямком на північ (курс корабля), то такий самий кут утворює й вектор кутової швидкості $\dot{\phi}$ і вектор $\ddot{\phi}$ кутового прискорення хитавиці, а вектор $\mathbf{W} = \mathbf{h} \times \dot{\phi}$ прискорення точки підвісу приладу під тим самим кутом курсу нахилений до лінії схід-захід.

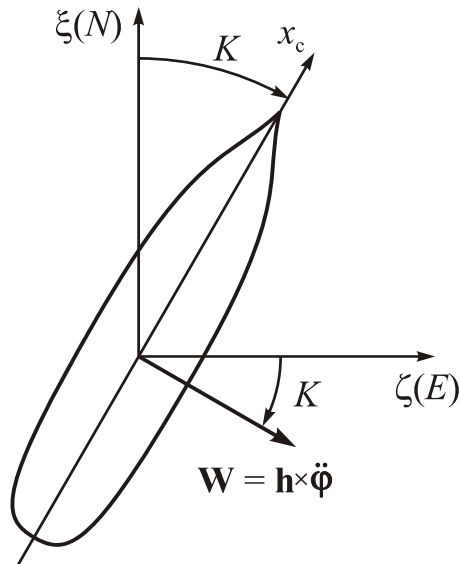


Рис. 13.30. Кутова орієнтація векторів за бортової хитавиці

Тому матимемо:

$$n_N(t) = -n(t) \sin K; \quad n_E(t) = n(t) \cos K,$$

де $n(t)$ – перевантаження, що напрямлене вздовж поперечної осі.

Використовуючи це, подамо вираз (13.31) у такий спосіб:

$$\langle \alpha \rangle = -\frac{mgl}{2H\omega_3 \cos \varphi_r} \langle n^2(t) \rangle \sin 2K.$$

Наприклад, якщо хитавиця здійснюється за гармонічним законом:

$$\varphi(t) = \varphi_m \sin(\omega t + \varepsilon),$$

де φ_m – амплітуда хитавиці, а ω – її частота, то

$$\ddot{\varphi}(t) = -\varphi_m \omega^2 \sin(\omega t + \varepsilon); \quad n(t) = \frac{W(t)}{g} = \frac{h\ddot{\varphi}(t)}{g} = -\frac{h\varphi_m \omega^2}{g} \sin(\omega t + \varepsilon).$$

У результаті похибка визначиться формулою:

$$\langle \alpha \rangle = -\frac{mgl}{4H\omega_3 \cos \varphi_r} \left(\frac{h\varphi_m \omega^2}{g} \right)^2 \sin 2K.$$

Проаналізуємо це співвідношення.

Перш за все звертає на себе увагу залежність похибки від курсу корабля. Якщо корабель прямує точно у напрямі якоїсь певної сторони світу (на північ, південь, схід чи захід), тобто йде так званими *кардинальними курсами*, то похибки не виникає. Максимального значення похибка набуває у випадку, коли корабель прямує одним з *інтеркардинальних курсів* (тобто на західну північ, чи східну північ, західний південь чи східний південь):

$$\langle \alpha \rangle_{\max} = \frac{mgl}{4|H|\omega_3 \cos \varphi_r} \left(\frac{h\varphi_m \omega^2}{g} \right)^2.$$

Ця властивість підтверджена практикою. Саме завдяки ній цю похибку названо інтеркардинальною.

Оцінимо можливу величину інтеркардинальної похибки.

Припустимо, що корабель поблизу екватору ($\varphi_r = 0$) прямує інтеркардинальним курсом ($\sin 2K = 1$), попав у сильний шторм, завдяки чому здійснює бортову хитавицю з амплітудою $\varphi_m = 0,4 \approx 23^\circ$ і періодом $T_0 = 2\pi/\omega = 12,6$ с. На кораблі працює МГК, налагоджений на період Шюлера ($\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl\omega_3 \cos \varphi_r}{H}} = \sqrt{\frac{g}{R_3}}$) і розміщений у місці (нактоузі), вищим осі хитання корабля на $h = 10$ м. За цих умов вираз (13.57) інтеркардинальної похибки можна подати у виді:

$$\langle \alpha \rangle_{\max} = \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{g}{R_3}} \frac{h\varphi_m \omega^2}{\omega_3 g} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{\omega}{\omega_3} \frac{h\omega}{\sqrt{gR_3}} \varphi_m \right)^2.$$

Розрахунок приводить до такого значення похибки $\langle \alpha \rangle_{\max} = 0,74 \approx 42^\circ$.

Очевидно, таке значення похибки гірокомпаса є неприйнятним і може призвести до катастрофічних наслідків, що й спостерігалось у дійсності.

Після перших рекламацій матникових гірокомпасів провідні фірми-виробники внесли суттєві зміни у конструкції з метою можливого зменшення амплітуди коливань корпусу чутливого елемента МГК навколо головної осі гірокомпаса при коливаннях основи. Це вдалось зробити за допомогою різних засобів. Після внесення цих змін МГК набули широкого застосування у всіх флотах світу.

13.2.4. Моделювання поведінки маятникового гірокомпаса

Програмна модель *GMK_PO_upr* (див. Додаток 8) реалізує чисельне інтегрування за допомогою вбудованої процедури *ode23* прецесійних диференціальних рівнянь маятникового гірокомпаса (див. (2.63), п. 2.5):

$$\begin{aligned} 1. \frac{d\alpha}{dt} &= -u_\eta + (u_\xi \cos \alpha - u_\zeta \sin \alpha) \operatorname{tg} \beta - \omega_0 [-\cos \gamma \operatorname{tg} \beta + \\ &\quad + n_E(t) \cos \gamma \sin \alpha - n_N(t) \cos \gamma \cos \alpha] + \frac{\varphi_1}{\cos \beta} \dot{\beta} - \frac{m_z}{\cos \beta}; \\ 2. \frac{d\beta}{dt} &= -(u_\zeta \cos \alpha + u_\xi \sin \alpha) + \frac{\omega_0}{\cos \beta} [n_E(t) (-\sin \gamma \sin \alpha + \cos \gamma \cos \alpha \sin \beta) + \\ &\quad + n_N(t) (\sin \gamma \cos \alpha + \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta)] - \frac{\varphi_2}{\cos \beta} \dot{\alpha} + \frac{m_y}{\cos \beta}; \\ 3. \operatorname{tg} \gamma &= \frac{n_E(t) \cos \alpha + n_N(t) \sin \alpha}{\cos \beta - (n_N(t) \cos \alpha - n_E(t) \sin \alpha) \sin \beta}, \end{aligned}$$

$$\text{де } \omega_0 = \frac{mgl}{H}; \quad m_z = \frac{M_{z1}^*}{H}; \quad m_y = \frac{M_\eta^*}{H}; \quad \varphi_1 = \frac{f_1}{H}; \quad \varphi_2 = \frac{f_2}{H};$$

$$u_\xi = \omega_3 \cos \varphi_2 + \frac{V}{R_3} \sin K; \quad u_\eta = \omega_3 \sin \varphi_2 + \frac{V}{R_3} \sin K \operatorname{tg} \varphi_2; \quad u_\zeta = -\frac{V \cos K}{R_3};$$

$$n_N(t) = \frac{w_\xi}{g}; \quad n_E(t) = \frac{w_\zeta}{g}; \quad w_\xi = w_{np} \cos K - w_k \sin K;$$

$$w_\zeta = w_{np} \sin K + w_k \cos K; \quad w_{np} = w_0; \quad w_k = \frac{dV_k}{dt} + V\Omega;$$

за таких законів змінювання швидкостей і курсу основи

$$K = K_0 + \Omega t; \quad V = V_0 + w_0 t; \quad V_k = V_m \sin(\omega t + \varepsilon),$$

V_0 – початкова поздовжня швидкість; w_0 – поздовжнє прискорення; K_0 – початковий курс; Ω – кутова швидкість циркуляції; V_m, ω, ε – відповідно амплітуда коливань швидкості точки підвісу гірокомпаса, обумовленої бортовою хитавицею основи, частота хитавиці і початкова фаза.

Обчислення поточних значень правих частин цих рівнянь здійснюється у процедурі **MGK_PO**. Тексти програм наведені у Додатку 8.

Перша серія експериментів на моделі (рис. 13.31 – 13.34) стосується встановлення головної осі МГК у положення рівноваги, тобто вільного руху гірокомпаса. Припускається, що у початковий момент часу головна вісь МГК займає горизонтальне положення точно у площині меридіана.

Спочатку розглянуто випадок, коли основа, на якій розміщено МГК, є нерухомою відносно Землі. Рух гірокомпаса з періодом власних коливань 15 хв відображений на рис. 13.31, а на рис. 13.32 подани результати експеримента при налагодженні МГК на період Шюлера.

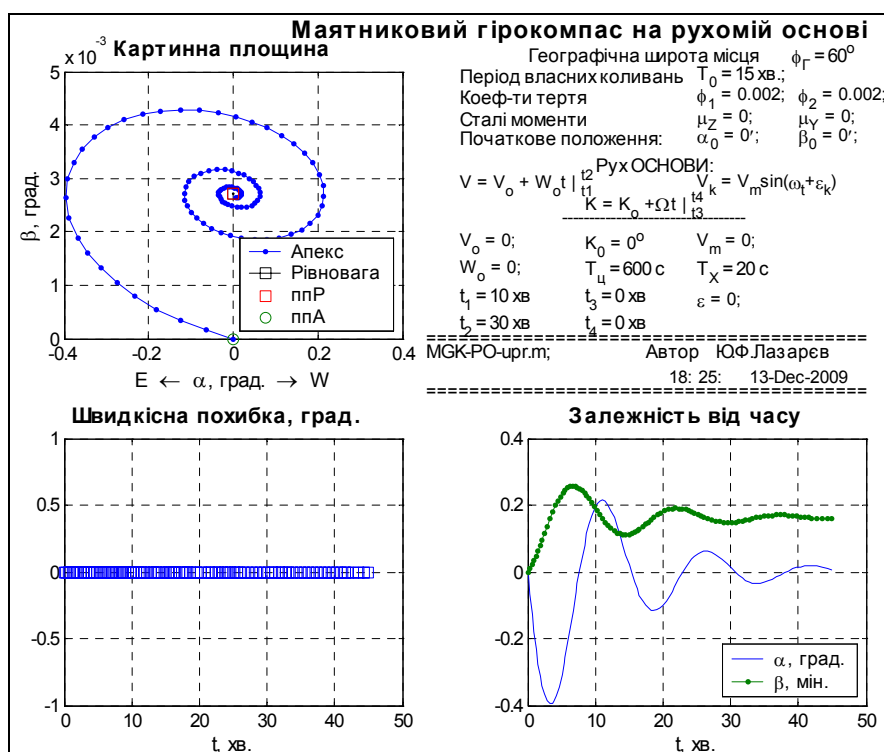


Рис. 13.31. Вільний рух МГК ($T_0 = 15$ хв.) при нерухомій основі

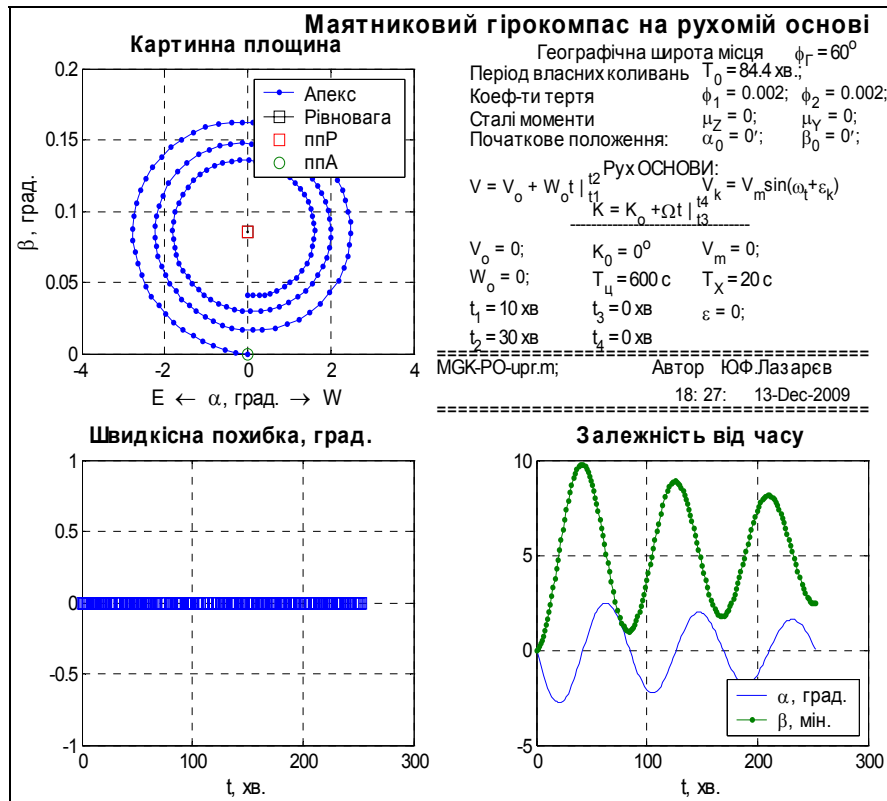


Рис. 13.32. Вільний рух МГК ($T_0 = 84,4$ хв.) при нерухомій основі

Аналогічні експерименти повторено для випадку руху основи на північ зі швидкістю $V_N = 30$ м/с (рис. 13.33 і 13.34).

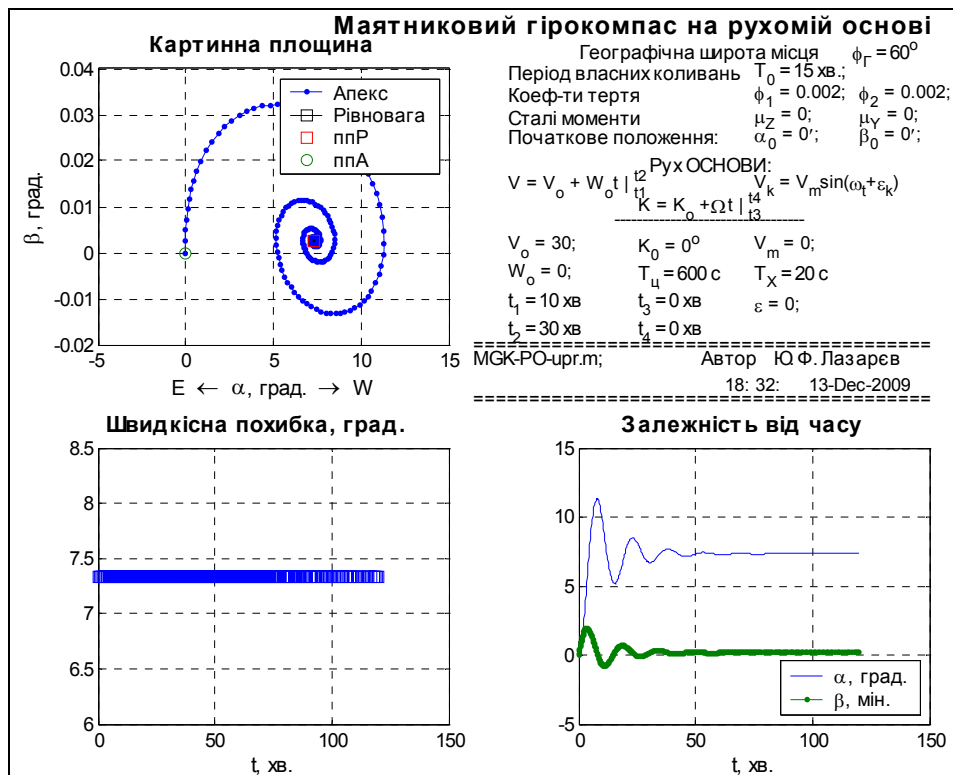


Рис. 13.33. Вільний рух МГК ($T_0 = 15$ хв.) при русі основи на північ

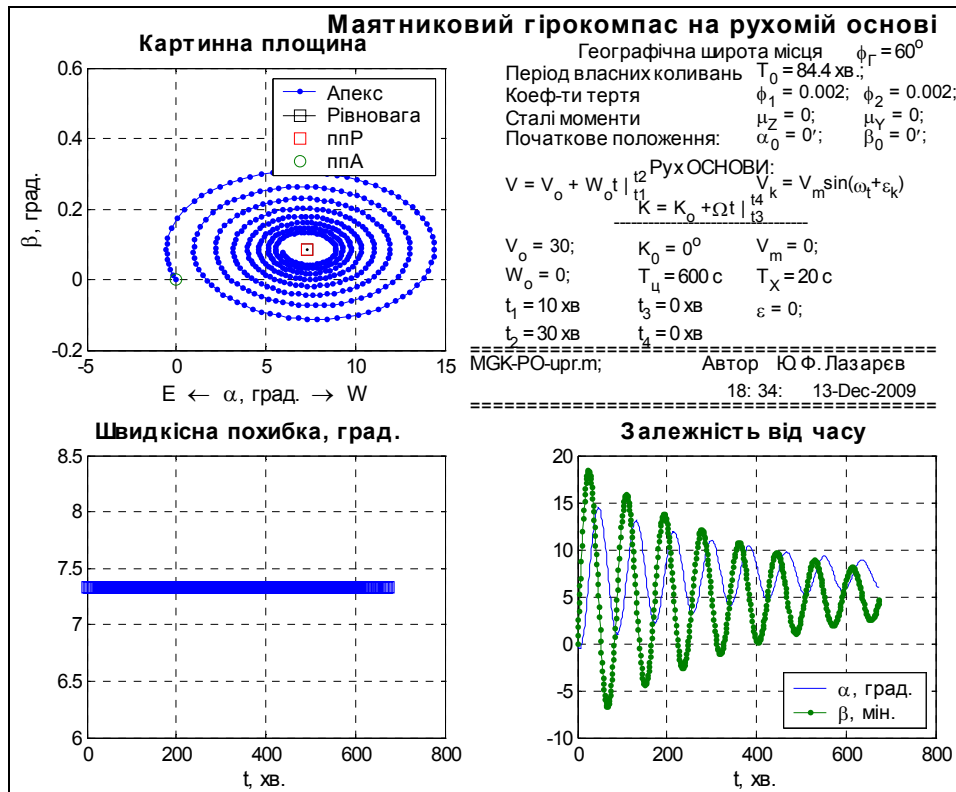


Рис. 13.34. Вільний рух МГК ($T_0 = 84,4 \text{ хв.}$) при русі основи на північ

З експериментів випливає, що головна вісь коливається навколо положення рівноваги, яке залежить як від швидкості руху основи, його напрямку, так і від періоду власних коливань. Під дією сил опору ці коливання загасають, і в кінцевому підсумку головна вісь МГК устанавлюється у положення рівноваги. Положення рівноваги при русі основи на північ зі швидкістю $V_N = 30 \text{ м/с}$ визначаються рівностями:

- для МГК з періодом $T_0 = 15 \text{ хв}$ – $\alpha^* = 7^\circ,33, \beta^* = 0^\circ,0027$;
- для МГК з періодом $T_0 = 84,4 \text{ хв}$ – $\alpha^* = 7^\circ,33, \beta^* = 0^\circ,086$.

Ті самі сили опору зумовлюють значно більш тривале загасання вільних коливань за великого їх періоду, ніж за меншого періоду.

Наступну серію дослідів (рис. 13.35 – 13.42) присвячено вивченню впливу руху основи з прискоренням на поведінку МГК, зокрема виявленню балістичної похибки. Задля цього початкове положення головної осі МГК встановлено таким, що воно збігається з положенням рівноваги у цей момент часу (щоб вилучити перехідний процес).

На рис. 13.35 і 13.36 поданий випадок руху корабля з постійним прискоренням у північному напрямку, так що протягом перших 10 хв корабль був нерухомим, а починаючи з десятої і до тридцятої хвилини корабль рухається рівноприскорено точно на північ. При цьому його швидкість зростає до 60 м/с. Надалі корабель рухається на північ з цією постійною швидкістю. Порівнюється рух двох МГК з різними періодами власних коливань – $T_0 = 15 \text{ хв}$ (рис. 13.35) і $T_0 = 84,4 \text{ хв}$ (періодом Шюлера, рис. 13.36).

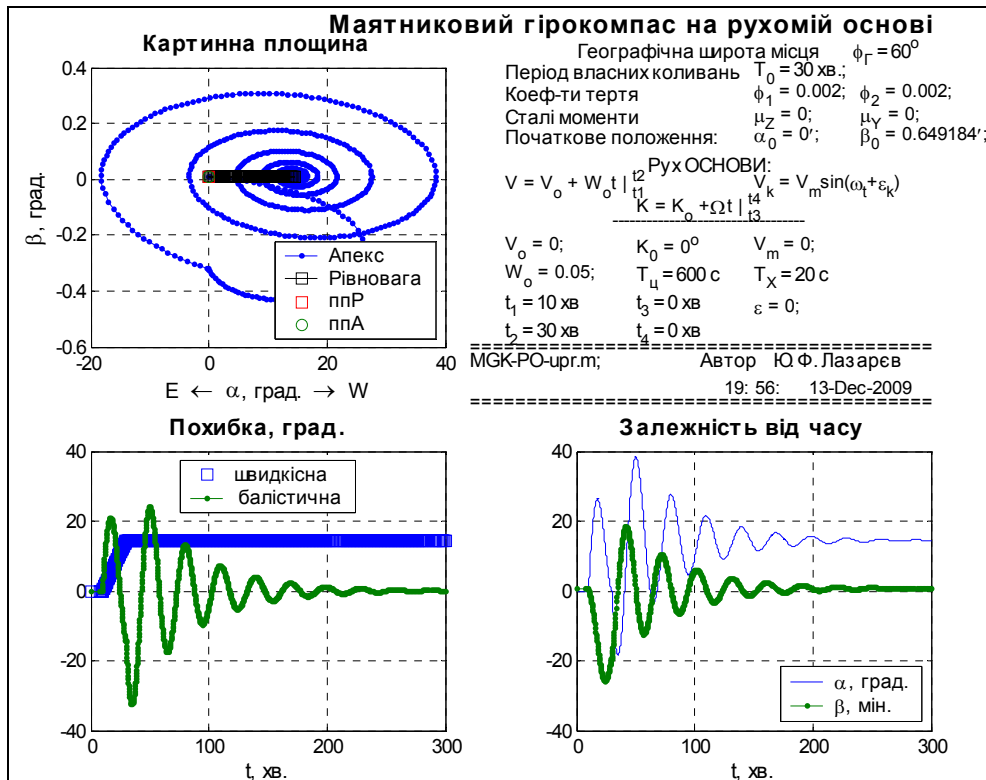


Рис. 13.35. Рух МГК ($T_0 = 15$ хв.) при русі основи з прискоренням на північ

Неважко впевнитися, що у разі малого періоду власних коливань МГК має вельми значну балістичну похибку, яка сягає 50° . Якщо ж виконана умова незбурюваності, ця похибка зменшується до $0,5^\circ$, тобто майже у 100 разів.

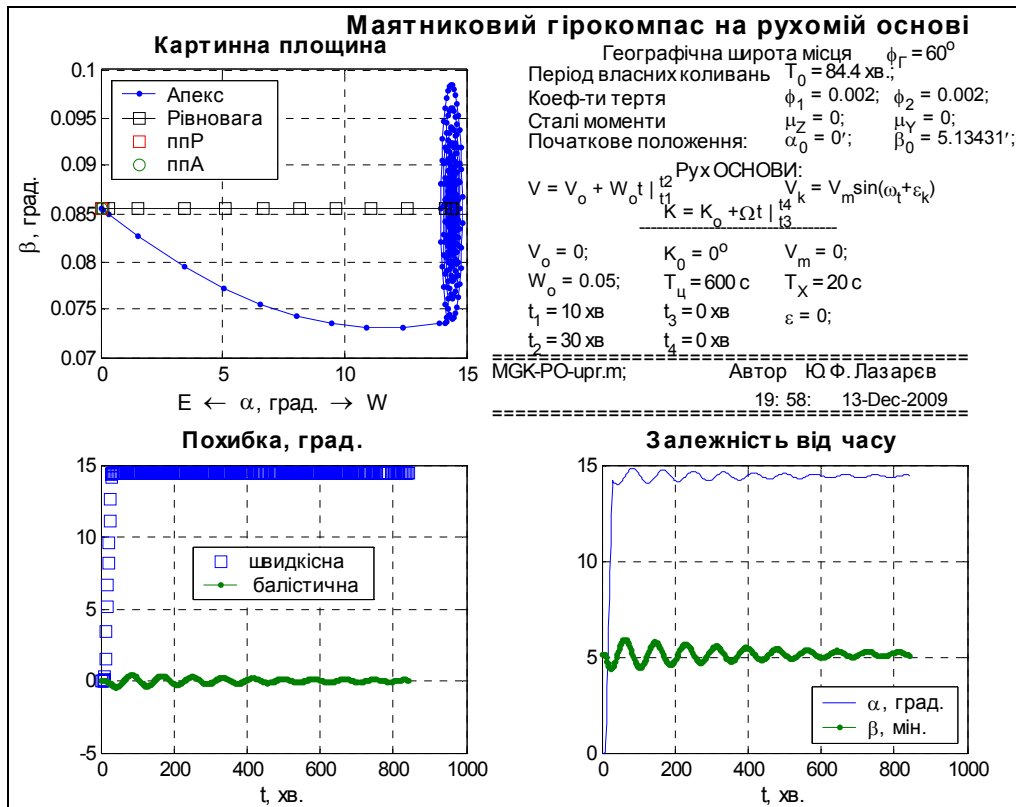


Рис. 13.36. Рух МГК ($T_0 = 84,4$ хв.) при русі основи з прискоренням на північ

Експерименти, подані на рис. 13.37 – 13.42, відповідають руху корабля, який називають *циркуляцією*. Припускається, що корабель рухається з постійною швидкістю 10 м/с. Спочатку, протягом перших 10 хв, корабель рухається прямо-лінійно, точно на північ, а починаючи з одинадцятої корабель повертає праворуч з постійною кутовою швидкістю (здійснює циркуляцію). Період циркуляції (час, за який корабель, описавши повне коло, повертається у попереднє положення) дорівнює 600 с. Перші два досліди (рис. 13.37 – 13.38) відображують вплив руху, який є 0,2 повної циркуляції. Це досягається обмеженням часу, протягом якого здійснюється рух по циркуляції, терміном у 120 с. Після цього корабель рухається рівномірно і прямолінійно. Як і перед цим, порівнюється рухи МГК з відносно малим ($T_0 = 15$ хв) періодом власних коливань і МГК з періодом Шулера.

Результати показують, що у першому випадку балістична похибка сягає величини майже 80° . Налагодження на період Шулера приводить до зменшення її до $0,3^\circ$.

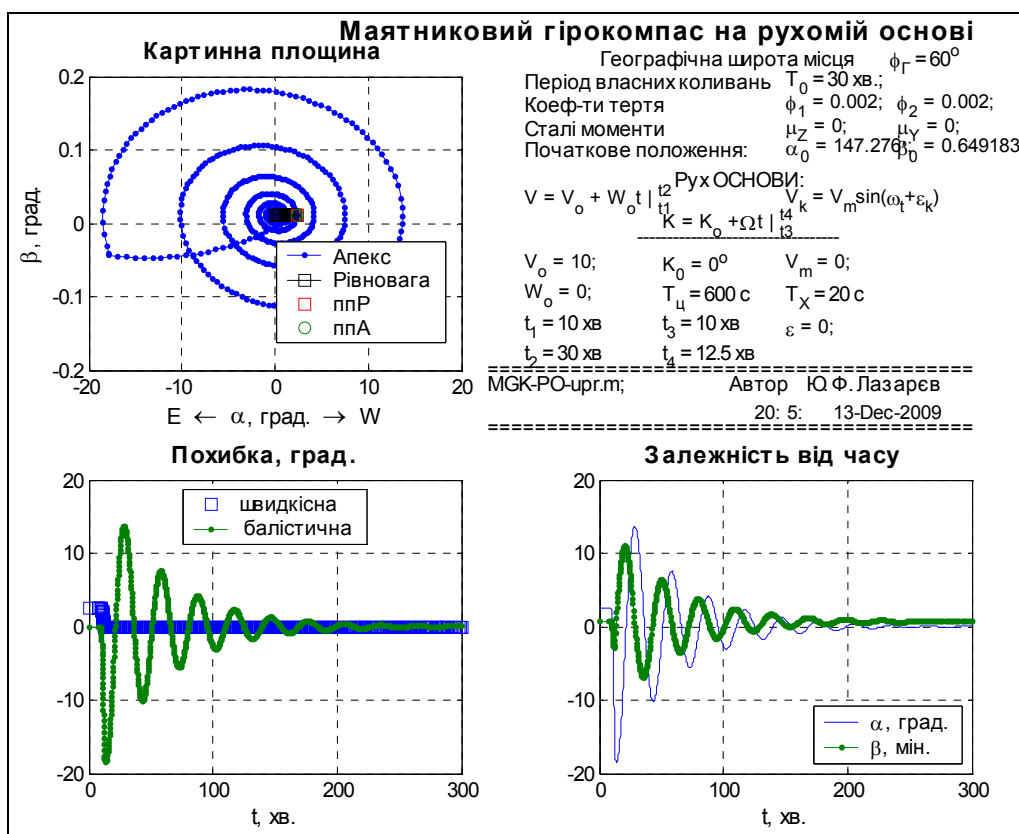


Рис. 13.37. Рух МГК ($T_0 = 15$ хв.) при частковій циркуляції корабля

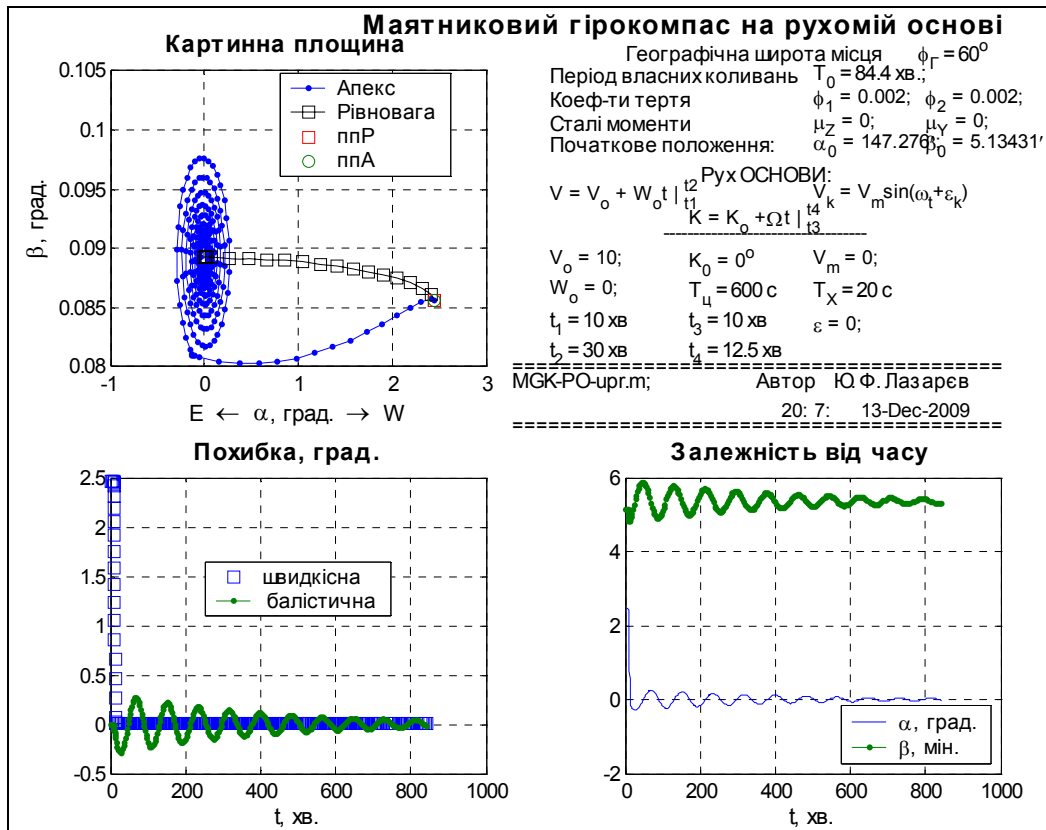


Рис. 13.38. Рух МГК ($T_0 = 84,4$ хв.) при частковій циркуляції корабля

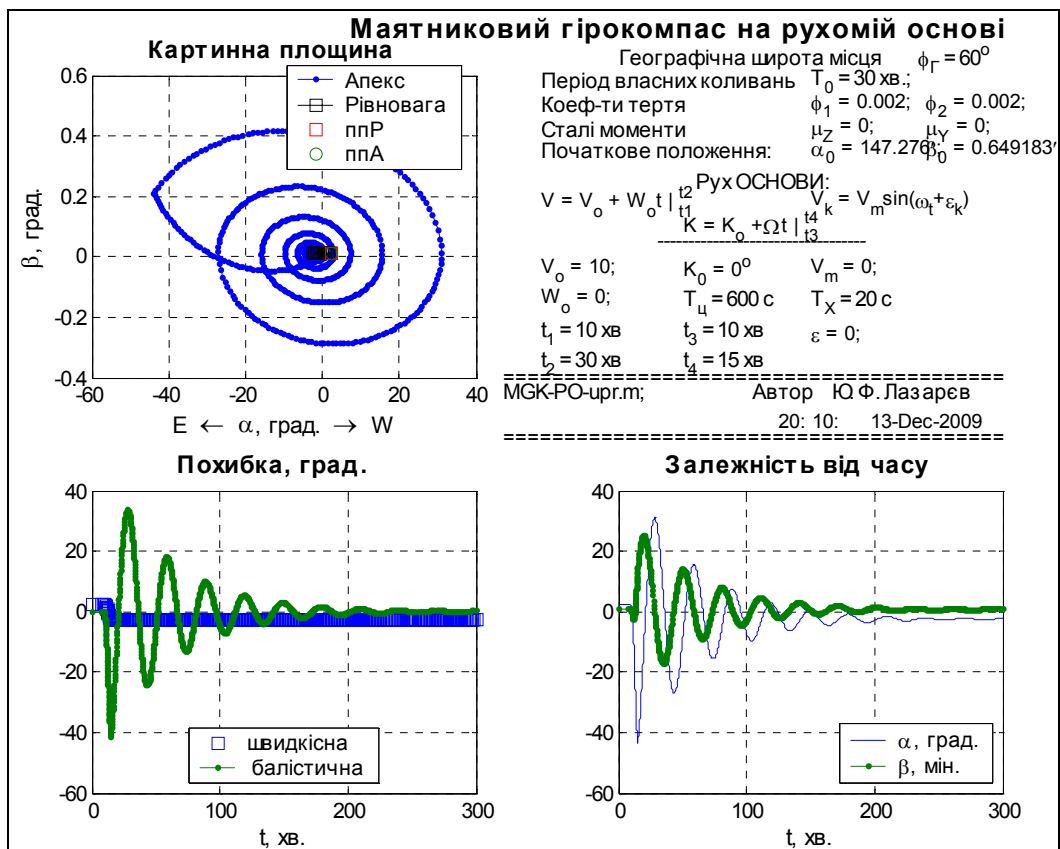


Рис. 13.39. Рух МГК ($T_0 = 30$ хв.) при півциркуляції корабля

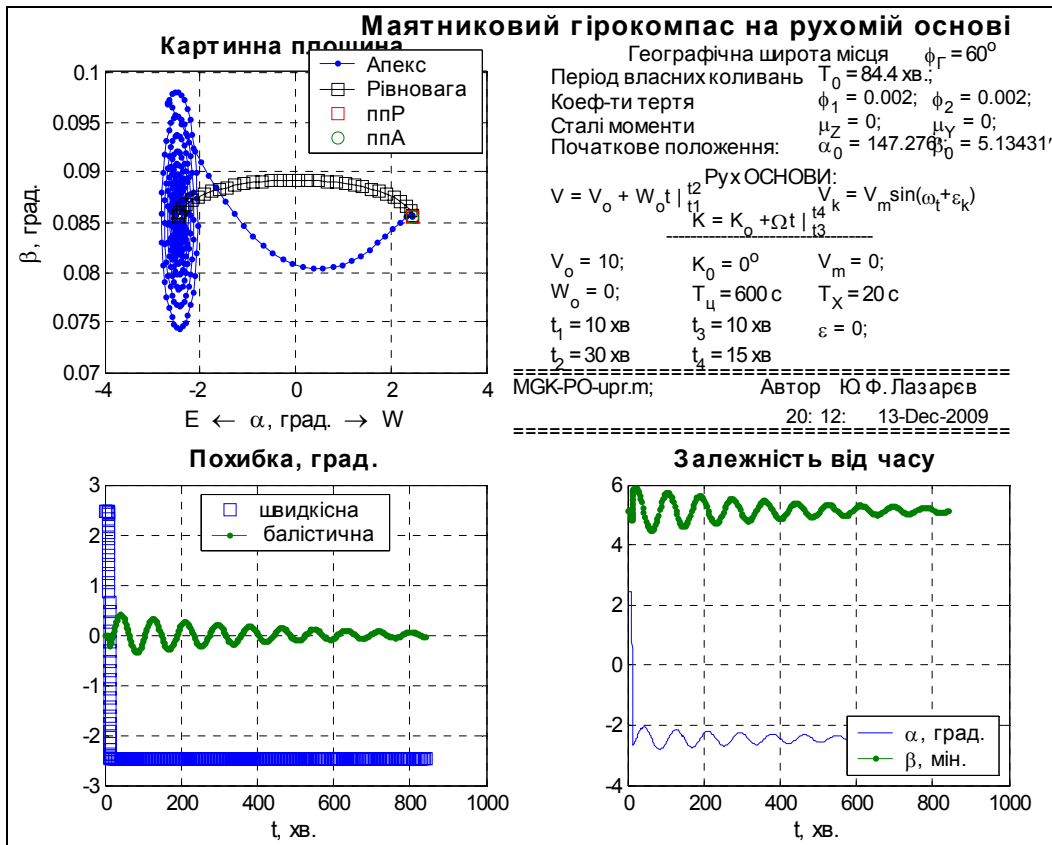


Рис. 13.40. Рух МГК ($T_0 = 84,4$ хв.) при півциркуляції корабля

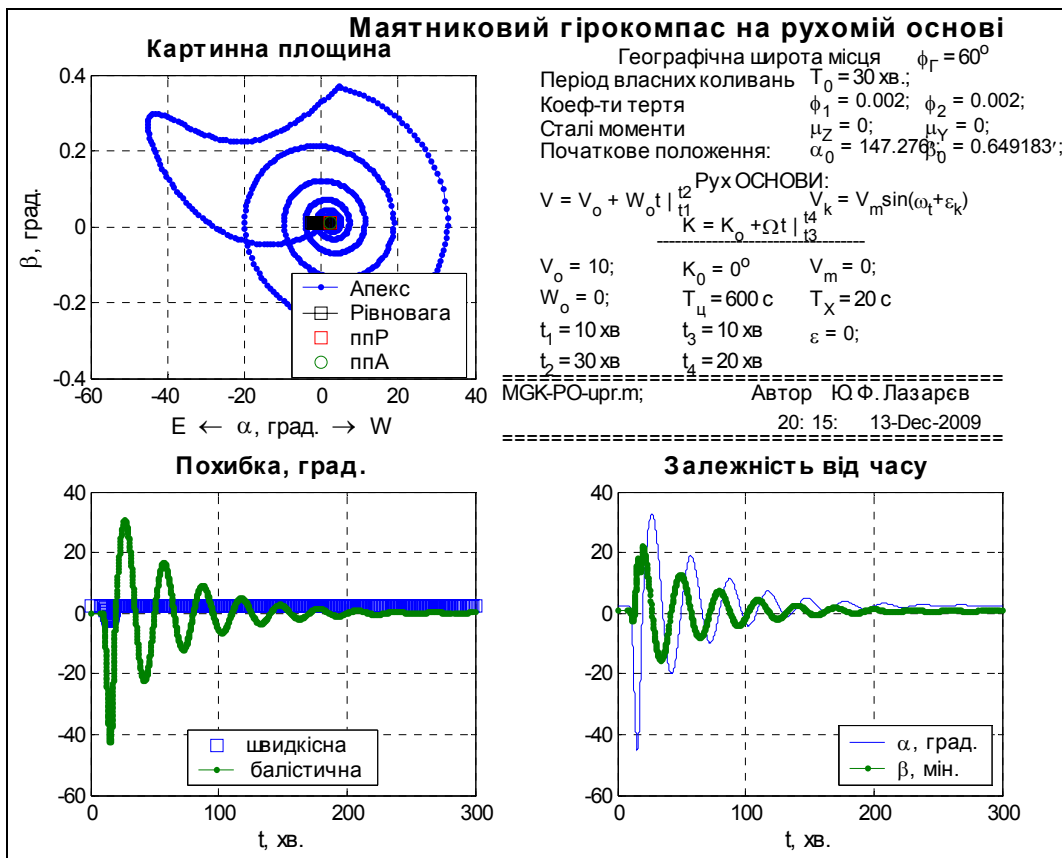


Рис. 13.41. Рух МГК ($T_0 = 30$ хв.) при повній циркуляції корабля

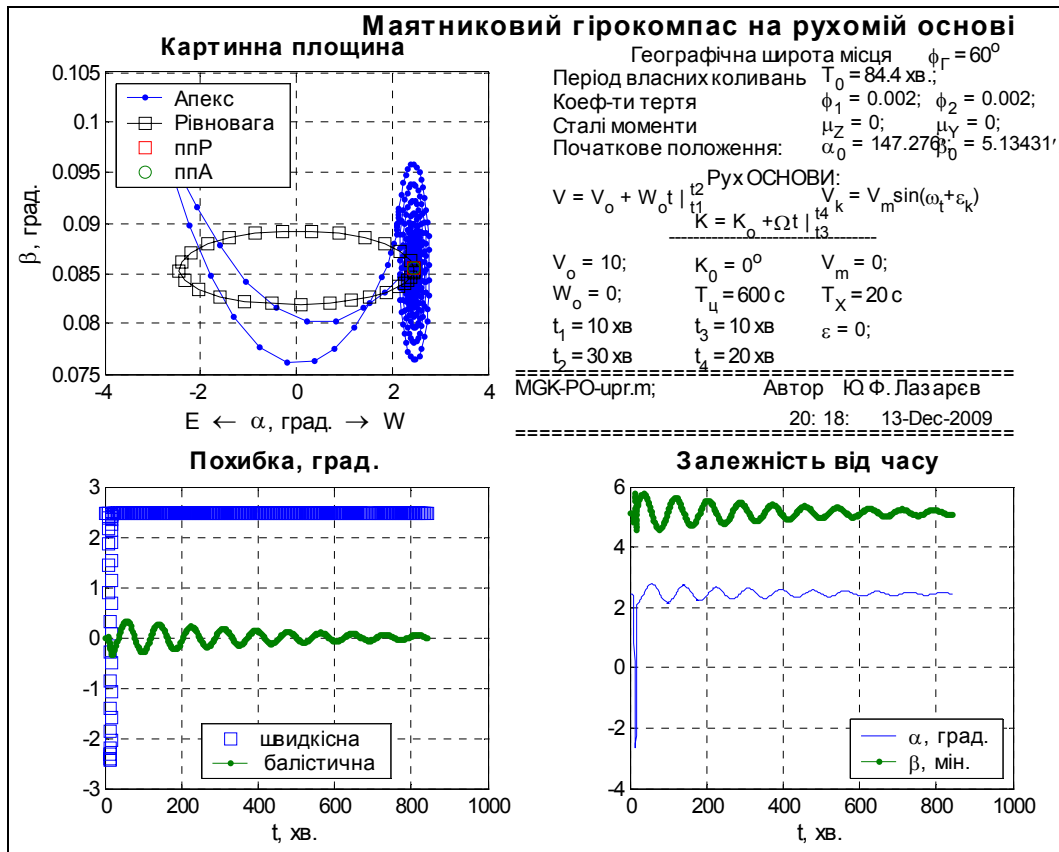


Рис. 13.42. Рух МГК ($T_0 = 84,4$ хв.) при повній циркуляції корабля

Збільшення частки циркуляції до півциркуляції (внаслідок якої корабель змінює свій курс на протилежний) приводить до наслідків, які подані на рис. 13.39 і 13.40. Цього разу менший період власних коливань встановлений 30 хв, бо рух МГК з періодом 15 хв виявляється у цих умовах нестійким, – чутливий елемент МГК починає обертатися навколо вертикальної осі, здійснюючи кілька повних обертів. Як впливає з результатів моделювання, балістична похибка з 40° зменшується до $0,4^{\circ}$ (у МГК, налагодженого на період Шюлера).

Нарешті за повної циркуляції (рис. 13.41 і 13.42) спостерігається аналогічна картина – балістична похибка досягає 40° (за періоду власних коливань МГК $T_0 = 30$ хв), і не перевищує $0,4^{\circ}$ за виконання умови незбурюваності.

Останні чотири досліді (рис. 13.43 – 13.46) присв’ячені вивченню інтеркардинальної девіації.

В усіх випадках цього циклу припускається, що корабель рухається прямо-лінійно і рівномірно відносно Землі зі швидкістю 10 м/с. Одночасно він зазнає бортової хитами з періодом 20 с і з амплітудою 20° . Припускається, що місце розташування МГК на кораблі віддалене від осі хитання на відстань 10 м.

Рис. 13.43 і 13.44 відбивають випадок коли корабель рухається саме інтеркардинальним курсом ($K = 45^{\circ}$). У цьому випадку спостерігаються значні похибки гірокомпаса, які, до того ж, збігаються з часом до деякого постійного значення: (-40°) у випадку, коли $T_0 = 30$ хвилин, і (-15°) для незбурюваного гірокомпаса.

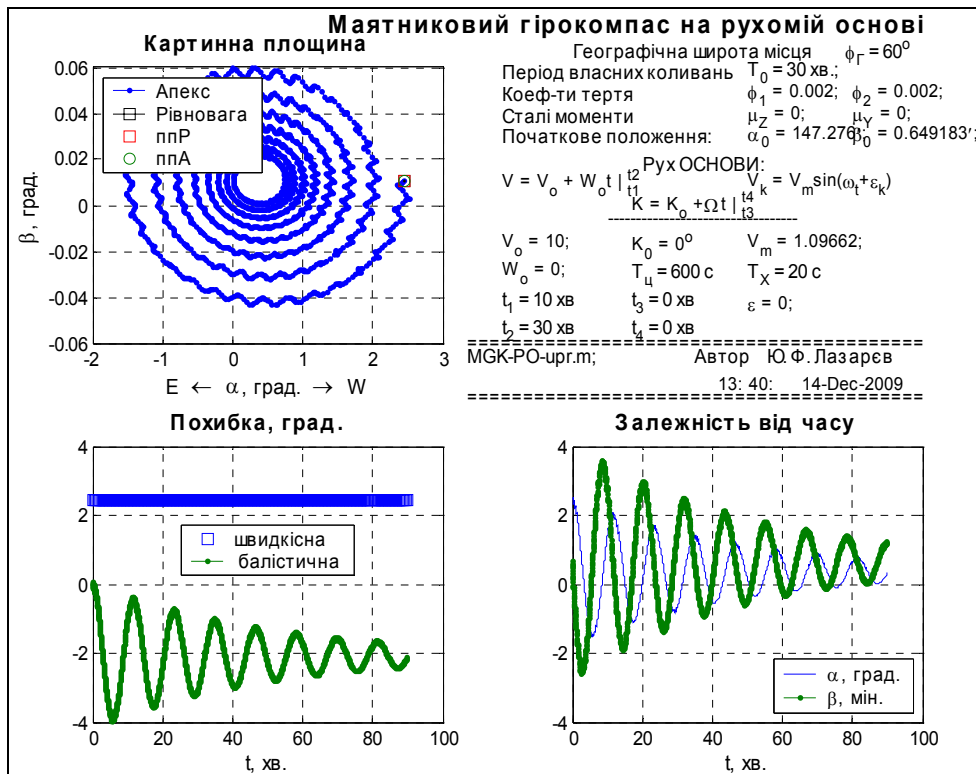


Рис. 13.45. Рух МГК ($T_0 = 30$ хв.) при хитавиці корабля на кардинальному курсі

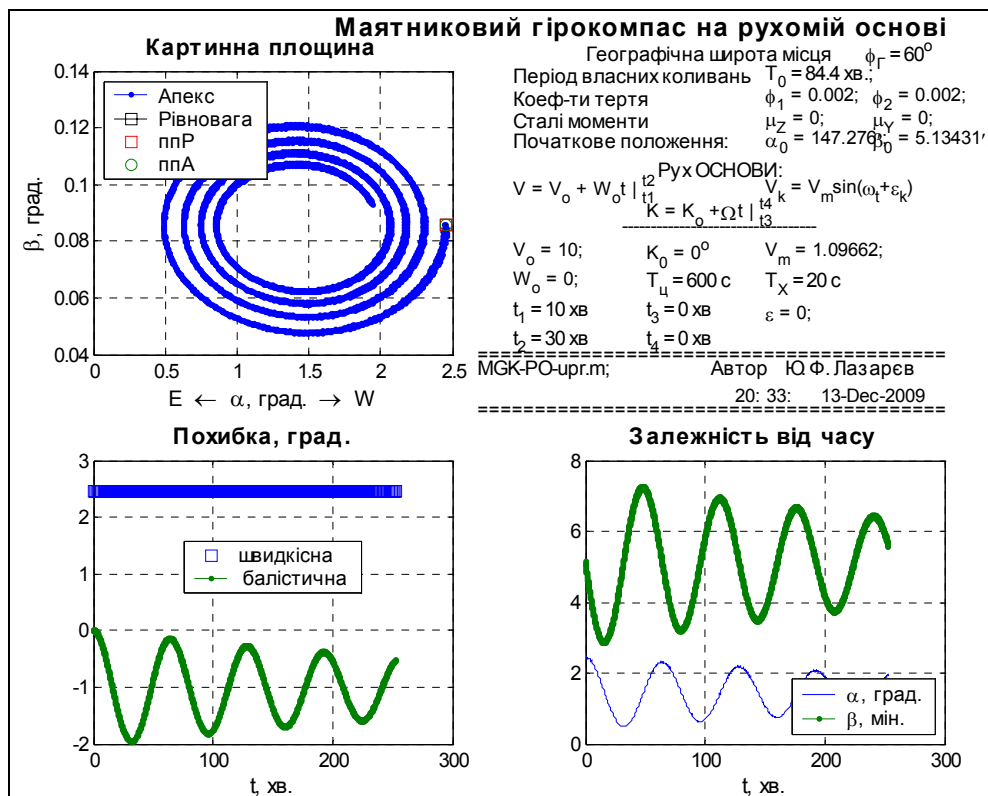


Рис. 13.46. Рух МГК ($T_0 = 84,4$ хв.) при хитавиці корабля на кардинальному курсі

Якщо корабель рухається кардинальним курсом (рис. 13.45 і 13.46), похибка внаслідок хитавиці майже зникає.

Завдання

Завдання 13.1. Дослідження руху гіромаятника на рухомій основі

За програмою *GM_PO_urg* моделювання поведінки гіромаятника на рухомій основі, текст якої наведений у Додатку 8, виконати такі дослідження.

1. Провести експериментальні дослідження вільного руху гіромаятника з виявлення впливу на нього:
 - 1.1) швидкості руху основи відносно Землі;
 - 1.2) періоду власних коливань гіромаятника;
 - 1.3) коефіцієнтів моментів сил опору.
2. Провести експериментальні дослідження балістичної похибки гіромаятника при різних значеннях періоду його власних коливань:
 - 2.1) при рівноприскореному прямолінійному русі корабля, варіюючи а) величиною прискорення основи; б) тривалістю терміну руху з прискоренням, в) величиною куту курсу корабля;
 - 2.2) при циркуляції корабля, варіюючи а) тривалістю руху корабля на циркуляції, б) початковим курсом корабля, в) величиною періоду повної циркуляції;
 - 2.3) при хитавиці корабля, варіюючи: а) амплітудою хитавиці, б) курсом корабля, в) періодом хитавиці.
3. Порівняти експериментально одержані результати з тими, що впливають з теоретичного дослідження. Зробити висновки з адекватності програмної і теоретичної моделей.
4. Відповісти на запитання:
 - які рівняння руху гіромаятника чисельно інтегруються у програмній моделі? в яких саме програмних одиницях вони реалізовані?
 - які можливості з імітування руху основи надає застосоване програмне забезпечення? які обмеження накладає воно на рух основи?
 - які можливості з імітування моментів сил опору надає застосоване програмне забезпечення? які обмеження накладає воно на ці моменти?
 - як впливає період власних коливань гіромаятника на а) швидкісну похибку, б) балістичну похибку, в) вібраційну похибку?
 - як впливають сили опору на похибки гіромаятника?
 - що таке умова незбурюваності? у чому вона полягає? для чого потрібне забезпечення її виконання?

Завдання 13.2. Дослідження руху маятничового гірокомпаса на рухомій основі

За програмою *MGK_PO_urg* моделювання поведінки маятничового гірокомпаса, текст якої наведений у п. 9 «До глави 13» у Додатку, виконати наступні дослідження.

1. Провести експериментальні дослідження вільного руху маятникового гірокомпаса (МГК) з виявлення впливу на нього:
 - 1.1) швидкості руху основи відносно Землі;
 - 1.2) періоду власних коливань гіромаятника;
 - 1.3) коефіцієнтів моментів сил опору.
2. Провести експериментальні дослідження балістичної похибки маятникового гірокомпаса:
 - 2.1) при рівноприскореному прямолінійному русі корабля, варіюючи а) величиною прискорення основи; б) тривалістю терміну руху з прискоренням, в) величиною куту курсу корабля;
 - 2.2) при циркуляції корабля, варіюючи а) тривалістю руху корабля на циркуляції, б) початковим курсом корабля, в) величиною періоду повної циркуляції;
 - 2.3) при хитавиці корабля, варіюючи: а) амплітудою хитавиці, б) курсом корабля, в) періодом хитавиці.
3. Порівняти експериментально одержані результати з тими, що впливають з теоретичного дослідження. Зробити висновки з адекватності програмної і теоретичної моделей.
4. Відповісти на запитання:
 - які рівняння руху маятникового гірокомпаса чисельно інтегруються у програмній моделі? в яких саме програмних одиницях вони реалізовані?
 - які можливості з імітування руху основи надає застосоване програмне забезпечення? які обмеження накладає воно на рух основи?
 - які можливості з імітування моментів сил опору надає застосоване програмне забезпечення? які обмеження накладає воно на ці моменти?
 - як впливає період власних коливань гіромаятника на а) швидкісну похибку, б) балістичну похибку, в) вібраційну похибку?
 - як впливають сили опору на похибки МГК?
 - що таке умова незбурюваності? у чому вона полягає? для чого потрібне забезпечення її виконання?

Контрольні запитання

1. В якому випадку гіроскоп набуває позиційних властивостей, і чим вони характеризуються?
2. Що таке гіромаятник? Що являє собою маятниковий гірокомпас?
3. Чим визначається відхилення головної осі гіромаятника в площині «північ-південь»? Яка фізична причина швидкісної похибки гіромаятника? маятникового гірокомпаса?
4. Що розуміють під балістичною похибкою гіромаятника? маятникового гірокомпаса?
5. Як зміниться потенціальна енергія гіромаятника, якщо його розмістити на Місяці? Як зміниться умова незбурності гіромаятника, якщо його розташу-

вати на Місяці? Як зміниться швидкісна похибка гіромаятника на нерухомій основі на екваторі, якщо його розмістити на Місяці?

6. Розрахувати швидкісну похибку незбурюваного гіромаятника, встановленого на екваторі на нерухомій основі на Землі і на Місяці.

7. Як зміниться власний рух гіромаятника під дією моментів сил сухого тертя, якщо його розташувати на Місяці?

8. Як зміниться власний рух маятникового гірокомпаса під дією моментів сил сухого тертя, якщо його розташувати на Місяці?

9. Як зміниться швидкісна похибка гіромаятника, встановленого на екваторі на нерухомій основі, якщо його перемістити на Місяць в аналогічні умови та збільшити кінетичний момент вдвічі?

10. Як зміниться швидкісна похибка маятникового гірокомпаса, встановленого на екваторі на основі, яка рухається точно на північ, якщо його перемістити на Місяць в аналогічні умови та збільшити кінетичний момент вдвічі?

Література

[65, с 70 –126].

Розділ 14. Чутливі елементи на основі осциляторних гіроскопів

У попередніх розділах були розглянуті приклади технічного застосування двоступеневих і триступеневих гіроскопів, у яких швидкообертючий ротор для забезпечення необхідної кількості ступенів вільності був поміщений у зовнішній карданів підвіс, елементи якого не беруть участі у власному обертанні ротора. Опори карданового підвісу й головної осі гіроскопа припускалися абсолютно жорсткими в радіальному напрямку, тобто взаємне розташування екваторіальної площини ротора й внутрішньої рамки було незмінним. У двоступеневих гіроскопічних приладах рух ротора відносно осі підвісу рамки міг бути обмежений демпфером або пружним зв'язком (механічною або електричною пружиною).

Наразі дедалі більшого поширення набувають гіроскопи, які вирізняються пружним з'єднанням їх чутливого елемента з основою. Як чутливий елемент застосовують обертючий ротор або коливальну інерційну масу. У першому випадку для забезпечення необхідної кількості ступенів вільності ротора використовується пружний внутрішній карданів підвіс, елементи якого обертаються разом з ротором гіроскопа. Такий прилад називають *роторним вібраційним гіроскопом* (РВГ).

Гіроскопи, у яких чутливий елемент, розміщений у пружному підвісі, здійснює коливальний рух, називають осциляторними вібраційними гіроскопами (ОВГ).

14.1. Двоступеневий роторний вібраційний гіроскоп

14.1.1. Принцип дії і рівняння руху роторного вібраційного гіроскопа

У двоступеневому гіроскопі (рис. 14.1) ротор 1 закріплений на валу 2 привідного двигуна 3 за допомогою пружного підвісу 4 (торсіонів), які мають малу жорсткість на скручування навколо осі їх симетрії та дуже велику жорсткість уздовж та навколо всіх інших осей.

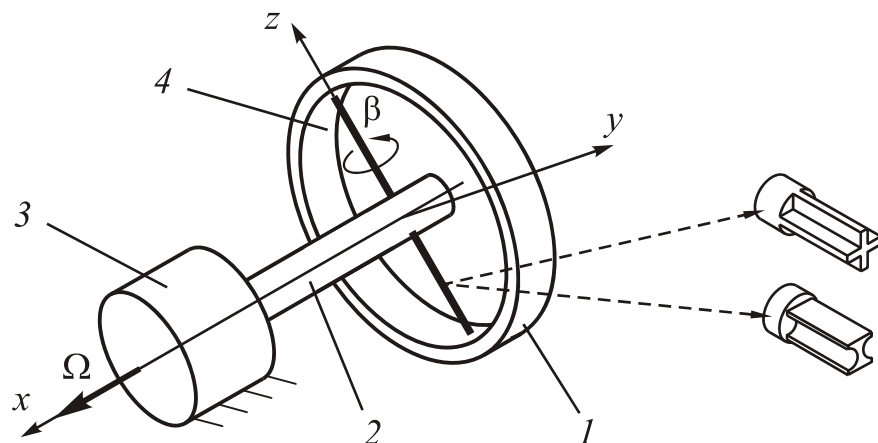


Рис. 14.1. Схема побудови роторного вібраційного гіроскопа

Торсіони зображено на рисунку умовно у вигляді стрижнів або спиць. Насправді вони мають більш складну форму, щоб задовольняти поставлені до них вимоги. Деякі з перетинів торсіонів, що задовольняють ці вимоги, показано на рисунку. Вал двигуна обертається зі сталою кутовою швидкістю $\dot{\gamma} = \Omega$.

Якщо припустити, що торсіон має жорсткість C тільки на скручування, то гіроскоп буде мати два ступеня вільності.

Зв'яжемо з основою систему координат $Ox_c y_c z_c$ (рис. 14.2), з валом приводного двигуна – $Ox_B y_B z_B$, а з ротором гіроскопа – $Ox_K y_K z_K$. Вісь обертання вала приводного двигуна спрямуємо вдовж осі x_c .

Перший поворот на кут γ зручно задавати відносно осі x_c обертання вала двигуна, а другий – на кут β відносно осі симетрії торсіонів z_B . Припустимо, що основа, на яку встановлено гіроскоп, здійснює обертання в інерціальному просторі з кутовою швидкістю \mathbf{u}^c , заданою її проекціями $u_{x_c}^c$, $u_{y_c}^c$ і $u_{z_c}^c$ на осі системи координат $Ox_c y_c z_c$.

Як рухому систему координат оберемо систему $Ox_K y_K z_K$.

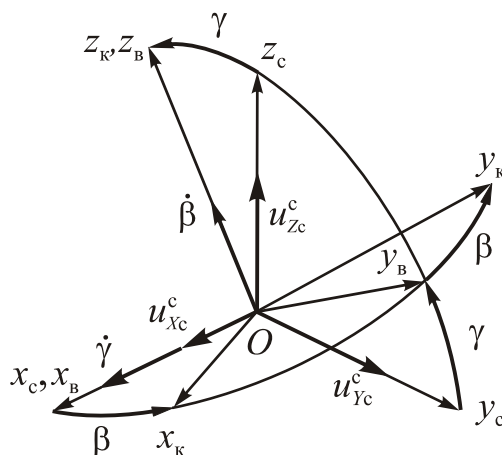


Рис. 14.2. Кінематика роторного вібраційного гіроскопа

Рівняння руху складемо на основі закону моментів у формі (1.100):

$$\frac{d\tilde{\mathbf{K}}_O^\omega}{dt} + \boldsymbol{\omega}^k \times \mathbf{K}_O^\omega = \mathbf{M}_O,$$

де $\boldsymbol{\omega}^k$ – вектор абсолютної кутової швидкості осей $Ox_K y_K z_K$:

$$\boldsymbol{\omega}^k = \dot{\gamma} + \dot{\beta} + \mathbf{u}^c.$$

Спроєціюємо векторне рівняння на вісь симетрії торсіону Oz_K :

$$\frac{dK_{Oz_K}^\omega}{dt} + \omega_{x_K}^k K_{Oy_K}^\omega - \omega_{y_K}^k K_{Ox_K}^\omega = M_{z_K}. \quad (14.1)$$

Осі Oz_K і Oy_K є головними осями інерції ротора РВГ, бо лежать в його екваторіальній площині. Моменти інерції гіроскопа відносно цих осей однакові і дорівнюють екваторіальному моменту інерції J_e . Тому проєкції обертальної частини моменту імпульсу

$$K_{OX_k}^\omega = J \omega_{X_k}^k; \quad K_{Oy_k}^\omega = J_e \omega_{Y_k}^k; \quad K_{OZ_k}^\omega = J_e \omega_{Z_k}^k. \quad (14.2)$$

Оскільки у розглядуваному випадку переносна кутова швидкість обертання системи координат $Ox_k y_k z_k$ в інерціальному просторі дорівнює абсолютній кутовій швидкості обертання ротора, запишемо рівняння (14.1) з урахуванням формул (14.2) у вигляді

$$J_e \frac{d\omega_{Z_k}^k}{dt} + (J_e - J) \omega_{X_k}^k \omega_{Y_k}^k = M_{Z_k}, \quad (14.3)$$

Проекції переносної та абсолютної кутових швидкостей на відповідні осі становлять

$$\begin{aligned} \omega_{X_k}^k &= \Omega \cos \beta + (u_{Y_c}^c \cos \gamma + u_{Z_c}^c \sin \gamma) \sin \beta + u_{X_c}^c \cos \beta; \\ \omega_{Y_k}^k &= -\Omega \sin \beta + (u_{Y_c}^c \cos \gamma + u_{Z_c}^c \sin \gamma) \cos \beta - u_{X_c}^c \sin \beta; \\ \omega_{Z_k}^k &= \dot{\beta} - u_{Y_c}^c \sin \gamma + u_{Z_c}^c \cos \gamma. \end{aligned} \quad (14.4)$$

Момент M_{Z_k} складається з моменту пружності торсіонів $-C\beta$ та моменту сил демпфірування $-f\dot{\beta}$.

З урахуванням виразів (14.4) рівняння (14.3) можна записати так:

$$\begin{aligned} & J_e (\ddot{\beta} - \dot{u}_{Y_c}^c \sin \gamma + \dot{u}_{Z_c}^c \cos \gamma - \Omega u_{Y_c}^c \cos \gamma - \Omega u_{Z_c}^c \sin \gamma) - \\ & - (J_e - J) \left[\frac{1}{2} (\Omega + u_{X_c}^c)^2 \sin 2\beta - (\Omega + u_{X_c}^c) (u_{Y_c}^c \cos \gamma + u_{Z_c}^c \sin \gamma) \cos 2\beta - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} (u_{Y_c}^c \cos \gamma + u_{Z_c}^c \sin \gamma)^2 \sin 2\beta \right] = -C\beta - f\dot{\beta}. \end{aligned}$$

Оскільки $\beta \ll 1$; $\sin 2\beta \approx 2\beta$; $\cos 2\beta \approx 1$; $|u| \ll \Omega$ та $|\dot{u}| \ll |\Omega \cdot u|$, рівняння руху можна спростити, наближено подаючи його у вигляді

$$J_e \ddot{\beta} + f\dot{\beta} + [C + (I - I_e) \Omega^2] \beta = J \Omega (u_{Y_c}^c \cos \gamma + u_{Z_c}^c \sin \gamma), \quad (14.5)$$

або у вигляді

$$\ddot{\beta} + 2h\dot{\beta} + \omega_0^2 \beta = \frac{H}{J_e} (u_{Y_c}^c \cos \gamma + u_{Z_c}^c \sin \gamma), \quad (14.6)$$

де

$$\omega_0^2 = \frac{1}{J_e} [C + (J - J_e) \Omega^2]; \quad 2h = \frac{f}{J_e}; \quad H = J \Omega. \quad (14.7)$$

14.1.2. Роторний вібраційний гіроскоп як вимірювач кутової швидкості

Розглянемо роботу двоступеневого РВГ на основі аналізу його рівнянь руху (14.6). Нагадаємо, що тут $\gamma = \Omega t$ – кут власного обертання ротора гіроскопа відносно основи.

З (14.7) випливає, що у вібраційного гіроскопа частота власних незатухаючих коливань ω_0 залежить від швидкості обертання ротора. Частинний

розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (14.6) за умови сталості кутової швидкості обертання основи має вигляд

$$\beta = \frac{H[u_{yc}^c \cos(\Omega t - \mu) + u_{zc}^c \sin(\Omega t - \mu)]}{J_e \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4h^2 \Omega^2}}, \quad (14.8)$$

де фазовий зсув коливань кута β щодо кута власного обертання γ дорівнює $\mu = \arctg \frac{2h\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$. Як бачимо, амплітуда коливань кута β повороту ротора залежить від вимірюваної кутової швидкості.

З рівняння (14.8) випливає, що кут β гіроскопа залежить від проекції вимірюваної кутової швидкості на площину $Oy_c z_c$ і являє собою амплітудно-модульовані коливання на частоті обертання ротора Ω . Характер руху ротора визначає назву приладу – роторний вібраційний.

Отже, роторний вібраційний гіроскоп є двокомпонентним вимірювачем кутової швидкості: амплітуда коливань ротора РВГ пропорційна модулю вектора кутової швидкості $u_{\text{вим}} = \sqrt{u_{yc}^2 + u_{zc}^2}$, розташованого в площині $Oy_c z_c$.

Якщо забезпечити резонансне настроювання приладу, тобто виконання умови $\Omega^2 = \omega_0^2$, амплітуда вимушених коливань кута β буде найбільшою. Тоді коефіцієнт передачі

$$K_{\text{ст}} = \frac{H}{2h\Omega J_e} = \frac{J}{2hJ_e} = \frac{J}{f},$$

а характер змінування кута β з урахуванням значення фазового зсуву $\mu = \pi/2$ матиме вигляд

$$\beta = \frac{J}{f} (u_{yc}^c \sin \Omega t - u_{zc}^c \cos \Omega t). \quad (14.9)$$

Таке резонансне настроювання вібраційних гіроскопів називають динамічним настроюванням, а гіроскопи, в яких здійснена таке настроювання – динамічно настроєними гіроскопами (ДНГ). Статичний коефіцієнт передачі роторного вібраційного гіроскопа $K_{\text{ст}}$ за умови резонансного настроювання залежить тільки від відношення J/f і в разі малого демпфірування може досягати великих значень. Істотним є також те, що він не залежить від швидкості Ω власного обертання ротора, тобто в резонансному режимі можна використовувати відносно малі швидкості обертання ротора.

Вісь чутливості у разі динамічного настроювання збігається з напрямком миттєвої кутової швидкості $u_{\text{вим}}$, тобто відхилена від осі y_c на кут $\psi = \arctg(u_{zc}/u_{yc})$.

Розглянемо можливість технічного забезпечення умови резонансного настроювання. З урахуванням значення частоти власних коливань ω_0 (14.7) одержимо

$$\frac{1}{J_e} [C + (J - J_e)\Omega^2] = \Omega^2,$$

звідки після нескладних перетворень одержимо кінцевий результат

$$\Omega = \sqrt{\frac{C}{2J_e - J}}. \quad (14.10)$$

Оскільки для будь-якого тіла сума моментів інерції відносно двох осей завжди більша від моменту інерції відносно третьої осі, рівність (14.11) є слушною за будь-якої форми ротора.

Водночас умова (14.10) накладає певні обмеження на вибір конфігурації ротора. Для циліндричного кільця осьовий й екваторіальний моменти інерції дорівнюють відповідно

$$J = m \frac{R^2 + r^2}{2}, \quad J_e = m \frac{R^2 + r^2 + h^2/3}{4},$$

де R , r , h – відповідно зовнішній, внутрішній діаметр і товщина кільця.

З урахуванням цих залежностей умову (14.10) можна записати у вигляді

$$\Omega^2 = \frac{6C}{mh^2}.$$

Технічно забезпечити вимірювання кута β досить складно, тому в більшості конструкцій приладів визначають поточне кутове положення ротора відносно корпусу за допомогою датчиків, що реєструють відхилення δ_1 й δ_2 (рис. 14.3) торцевої поверхні ротора від нейтрального положення в певних точках корпусу (поблизу осей y_c й z_c). Очевидно, що ці відхилення є функцією кутів повороту ротора навколо відповідних осей зв'язаної з корпусом системи координат.

Позначимо через α_1 , β_1 кути відхилення екваторіальної площини ротора відносно осей y_c і z_c корпусу приладу. Ці два кути характеризують положення координатної системи $Ox_кy_кz_к$, осі z та y якої лежать в екваторіальній площині ротора, але на відміну від осей $x_к$ та $z_к$ не беруть участі в обертанні ротора гіроскопа з кутовою швидкістю Ω відносно системи $Ox_cy_cz_c$.

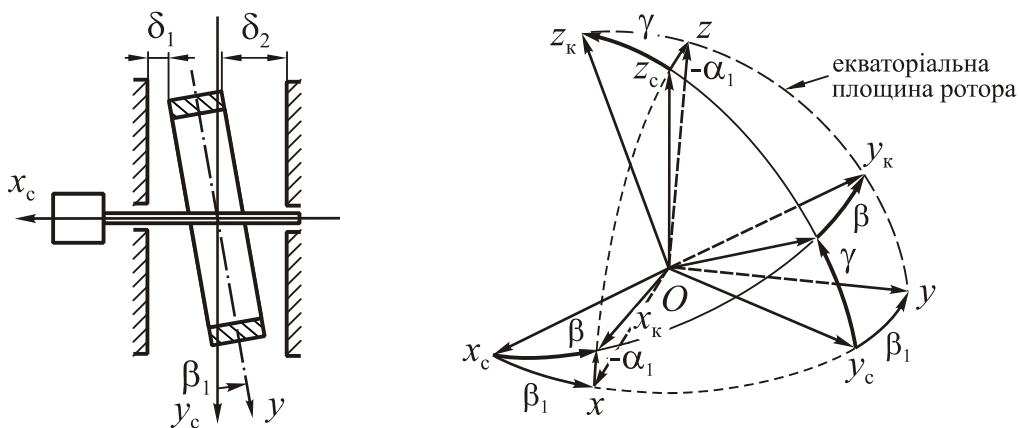


Рис. 14.3. Кінематика двоступеневого РВГ

Визначимо залежність між кутом повороту ротора β і кутами α_1 й β_1 . Внаслідок мализни розглянутих кутів сферичний трикутник $\beta\beta_1\alpha_1$ на рис. 14.3 можна наближено вважати пласким, з чого випливає

$$\alpha_1 \approx -\beta \sin \gamma; \quad \beta_1 \approx \beta \cos \gamma.$$

Відповідно до формули (14.9) шукані кути повороту α_1 й β_1 дорівнюватимуть:

$$\alpha_1 = -\beta \sin \Omega t = -\frac{J}{f} \left(u_{Yc}^c \sin^2 \Omega t - u_{Zc}^c \sin \Omega t \cos \Omega t \right),$$

$$\beta_1 = \beta \cos \Omega t = \frac{J}{f} \left(u_{Yc}^c \sin \Omega t \cos \Omega t - u_{Zc}^c \cos^2 \Omega t \right),$$

або після деяких перетворень

$$\alpha_1 = -\frac{J}{2f} u_{Yc}^c + \frac{J}{2f} \left(u_{Yc}^c \cos 2\Omega t + u_{Zc}^c \sin 2\Omega t \right) = \alpha_1^0 + \tilde{\alpha}_1 \cos(2\Omega t - \varepsilon);$$

$$\beta_1 = -\frac{J}{2f} u_{Zc}^c + \frac{J}{2f} \left(u_{Yc}^c \sin 2\Omega t - u_{Zc}^c \cos 2\Omega t \right) = \beta_1^0 + \tilde{\beta}_1 \sin(2\Omega t - \varepsilon),$$

де $\varepsilon = \text{arctg} \frac{u_{Zc}^c}{u_{Yc}^c}$.

Із цих залежностей випливає, що кутовий рух ротора гіроскопа відносно основи можна подати у вигляді двох складових (рис. 14.4 б, в). Перша складова – коливання з подвоєною частотою власного обертання ротора, причому амплітуди $\tilde{\alpha}_1$ й $\tilde{\beta}_1$ цих коливань залежать від обох складових u_{Yc}^c і u_{Zc}^c вимірюваної кутової швидкості

$$\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\beta}_1 = \frac{J}{2f} \sqrt{(u_{Yc}^c)^2 + (u_{Zc}^c)^2},$$

а самі коливання відбуваються з фазовим зсувом 90° між ними.

Друга складова – відхилення ротора РВГ відносно корпусу приладу на сталі (не модульовані) кути α_1^0 й β_1^0 , кожний з яких окремо є пропорційним відповідній складовій вимірюваної кутової швидкості u_{Yc}^c й u_{Zc}^c :

$$\alpha_1^0 = -\frac{J}{2f} u_{Yc}^c; \quad \beta_1^0 = -\frac{J}{f} u_{Zc}^c.$$

Отже, на відміну від двоступеневих гіротахometrів двоступеневий РВГ дозволяє вимірювати не одну складову кутової швидкості обертання основи, а дві складові, *тобто проекцію вектора кутової швидкості на екваторіальну площину ротора*. При цьому всі кути повороту ротора α_1 й β_1 відносно корпусу приладу за умови резонансного настроювання збігаються з напрямком вимірюваних складових кутової швидкості u_{Yc}^c й u_{Zc}^c .

Для вимірювання складових кутової швидкості можна використовувати як сталі складові α_1^0 і β_1^0 кутів повороту α_1 і β_1 , так й амплітуди гармонічних складових відхилення ротора. Обрання того чи іншого методів вимірювання залежить від типу датчиків, використовуваних у конкретній конструкції приладу.

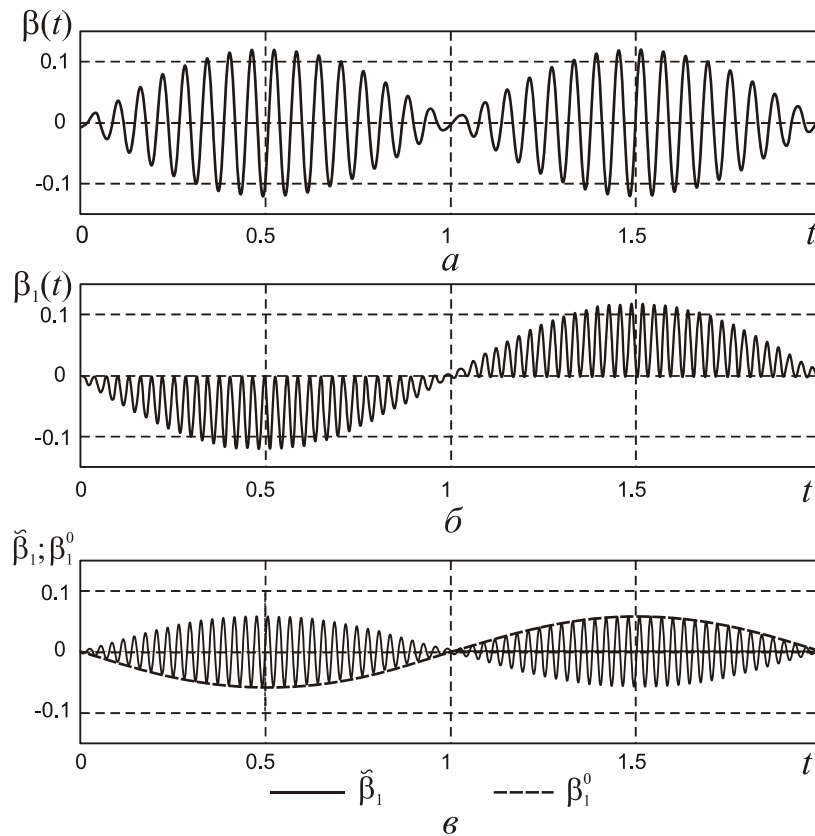


Рис. 14.4. Кутовий рух ротора гіроскопа

Відхилення торцевих поверхонь ротора від корпуса (тобто сталі складові α_1^0 й β_1^0) вимірюють ємнісними або індуктивними датчиками. За допомогою генераторних індукційних датчиків, що вимірюють швидкість змінювання кутів, вимірюють також кутові швидкості коливань ротора:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_1 &= -2\Omega\tilde{\alpha}_1 \sin(2\Omega t - \varepsilon); \\ \dot{\beta}_1 &= 2\Omega\tilde{\beta}_1 \cos(2\Omega t - \varepsilon).\end{aligned}$$

Суттєвою є похибка двоступеневого РВГ, зумовлена кутовою вібрацією основи з частотою 2Ω по осях Oy_c й Oz_c , а також наявністю складової u_{xc} кутової швидкості обертання, напрямленої уздовж осі обертання вала приводного двигуна.

Нехай, наприклад, вимірювана кутова швидкість змінюється за законом $u_{xc}^c = u_0 \sin 2\Omega t$, $u_{zc}^c = 0$. У цьому випадку в рівняннях руху (14.5) вже не можна нехтувати впливом моментів вигляду $J_e \dot{u}_{yc} \sin \gamma$, викликаних дією моментів сил інерції обертального прискорення. З урахуванням цих моментів рівняння ДНГ можна записати у вигляді

$$\ddot{\beta} + 2h\dot{\beta} + \Omega^2\beta = \frac{J}{J_e}\Omega u_0 \sin 2\Omega t \cos \Omega t + 2\Omega u_0 \cos 2\Omega t \sin \Omega t.$$

Як бачимо, момент $2J_e\Omega u_0 \sin \Omega t \cos 2\Omega t$ у правій частині рівняння за величиною не поступається вимірюваному інформативному моменту

$J\Omega u_0 \sin 2\Omega t \cos \Omega t$ і змінюється синхронно з ним. Спричинену моментом $2J_e \Omega U_0 \sin \Omega t \cos 2\Omega t$ похибку називають синхронною похибкою.

Вплив кутової швидкості u_{xc} позначається на точності виконання умови динамічного настроювання. Дійсно, відповідно до рівняння (14.5) точна формула резонансного настроювання має вигляд

$$\frac{1}{J_e} [C + (J - J_e)(\Omega + u_{xc})^2] = \Omega^2,$$

тобто вплив зазначеної складової кутової швидкості еквівалентний зміні швидкості обертання ротора.

Використання у РВГ пружного підвісу, вільного від впливу моменту сил сухого тертя, дозволяє зменшити зону застою приладу.

14.1.3. Роторний вібраційний гіроскоп як вимірювач кутів повороту

Якщо в РВГ у якийсь спосіб позбутися моменту сил в'язкого тертя, тобто припустити $f = 0$, його поведження якісно зміниться.

Для з'ясування особливостей поведження РВГ без урахування моментів демпфірування запишемо рівняння руху (14.6), припустивши в ньому задля спрощення $u_{yc}^c = 0$ й $u_{zc}^c = u_0 = \text{const}$, у вигляді

$$\ddot{\beta} + \Omega^2 \beta = \frac{H}{J_e} u_0 \sin \Omega t. \quad (14.11)$$

Досліджуваному рівнянню відповідає характеристичне рівняння $\lambda^2 + \Omega^2 = 0$, корені якого дорівнюють $\lambda_{1,2} = \pm i\Omega$, тому частинний розв'язок рівняння (14.11) матиме вид

$$\beta_r = t(A \sin \Omega t + B \cos \Omega t).$$

Підставивши функцію $\beta_r = f(t)$ в рівняння (14.11), отримаємо

$$\beta_r = -\frac{Hu_0}{2J_e \Omega} t \cos \Omega t.$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (14.11) має вигляд:

$$\beta = C_1 \sin \Omega t + C_2 \cos \Omega t + \beta_r,$$

де C_1, C_2 – довільні сталі, залежні від початкових умов.

Якщо за нульові початкові умови брати $\beta(0) = \dot{\beta}(0) = 0$, тоді

$$\beta = \frac{Hu_0}{2J_e \Omega^2} \sin \Omega t - \frac{H}{2J_e \Omega} u_0 t \cos \Omega t. \quad (14.12)$$

Через досить малий проміжок часу ($t > 1/\Omega$) друга складова в розв'язку (14.12) перевищить першу, після чого можна наближено вважати

$$\beta \approx \beta_r = -\frac{H}{2J_e \Omega} u_0 t \cos \Omega t = -\frac{J}{2J_e} u_0 t \cos \Omega t.$$

Отже, без демпфірування ДНГ набуває інтегровальних властивостей: амплітуда коливань ротора

$$\beta_A \approx -\frac{J}{2J_e} \int_0^t u_0 dt = -K(\psi_t - \psi_0)$$

стає пропорційною куту відхилення основи від заданого в інерціальному просторі.

14.2. Треступеневий роторний вібраційний гіроскоп

Треступеневий роторний вібраційний гіроскоп (рис. 14.5) являє собою механічну систему, що складається із трьох тіл – ротора гіроскопа 1, внутрішнього кільця 3 і вала 5 привідного двигуна 6.

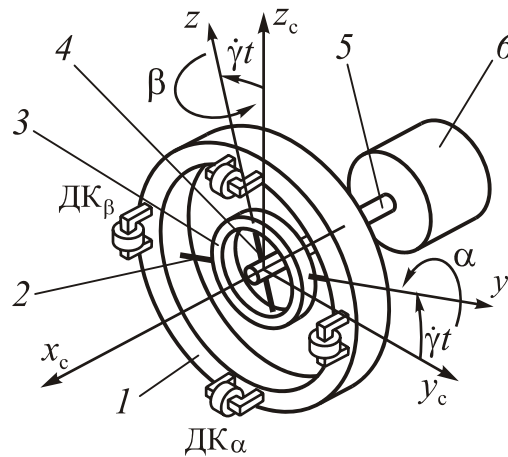


Рис. 14.5. Треступеневий РВГ

Як й у двоступеневому гіроскопі, двигун установлено в корпусі приладу. Вал 5 обертається з постійною кутовою швидкістю $\dot{\gamma} = \Omega$. Вал через пружні елементи (внутрішні торсіони) 4 передає обертання внутрішньому кільцю, яке, у свою чергу, зв'язане з ротором за допомогою зовнішніх торсіонів 2.

Поздовжні осі внутрішніх і зовнішніх торсіонів перетинаються між собою й віссю обертання вала двигуна під кутами 90° . Внаслідок цього ротор гіроскопа має три ступеня вільності: він може обертатися навколо осі вала двигуна з кутовою швидкістю $\dot{\gamma} = \Omega$, навколо поздовжньої осі внутрішніх торсіонів з кутовою швидкістю $\dot{\beta}$ й навколо осі зовнішніх торсіонів (осі підвісу ротора) з кутовою швидкістю $\dot{\alpha}$.

Кути повороту ротора навколо осей y і z торсіонів (осей рухомої системи координат) або навколо осей зв'язаної системи координат $Ox_c y_c z_c$, як й у випадку двоступеневого гіроскопа, містять інформацію про складові кутової швидкості $u_{x_c}^c$, $u_{y_c}^c$ обертання основи. Їх вимірюють датчиками кутів $ДК_\alpha$ й $ДК_\beta$.

14.2.1. Треступеневий РВГ як вимірювач кутів повороту

Для дослідження особливостей роботи треступеневого РВГ складемо рівняння його руху, враховуючи при цьому результати, отримані під час вивчення

роботи двоступеневого приладу. Інформацію про рух ротора зручно знімати в системі координат, пов'язаній з корпусом приладу. Сам рух ротора РВГ відносно корпусу приладу можна подати у вигляді двох складових – низькочастотної, яка змінюється з частотою змінювання вимірюваної кутової швидкості, й високочастотної, яка змінюється з подвоєною частотою обертання ротора. Тому рівняння руху системи твердих тіл кільце – ротор будемо складати в системі координат $Ox_c y_c z_c$, пов'язаної з корпусом, утримуючи в цих рівняннях тільки члени, що визначають низькочастотний рух ротора. Для спрощення досліджень вважатимемо, що основа обертається з постійною кутовою швидкістю, яка не має проекції на вісь обертання вала приводного двигуна: $\vec{u}^c = \{0; u_{y_c}^c; u_{z_c}^c\} = \text{const}$, а ротор і кільце підвісу мають динамічну екваторіальну площину. Будемо також нехтувати моментами аеродинамічного опору, що виникають під час обертання ротора в газовому середовищі.

Уведемо такі системи координат (рис. 14.6, а): $Ox_b y_b z_b$, пов'язану з валом приводного двигуна; $Ox_k y_k z_k$, зв'язану з кільцем підвісу; $Ox_p y_p z_p$, пов'язану з ротором гіроскопа. Кільце повертається відносно вала навкруг осі Oz_b на кут β , а ротор гіроскопа – відносно кільця навкруг осі y_k на кут α .

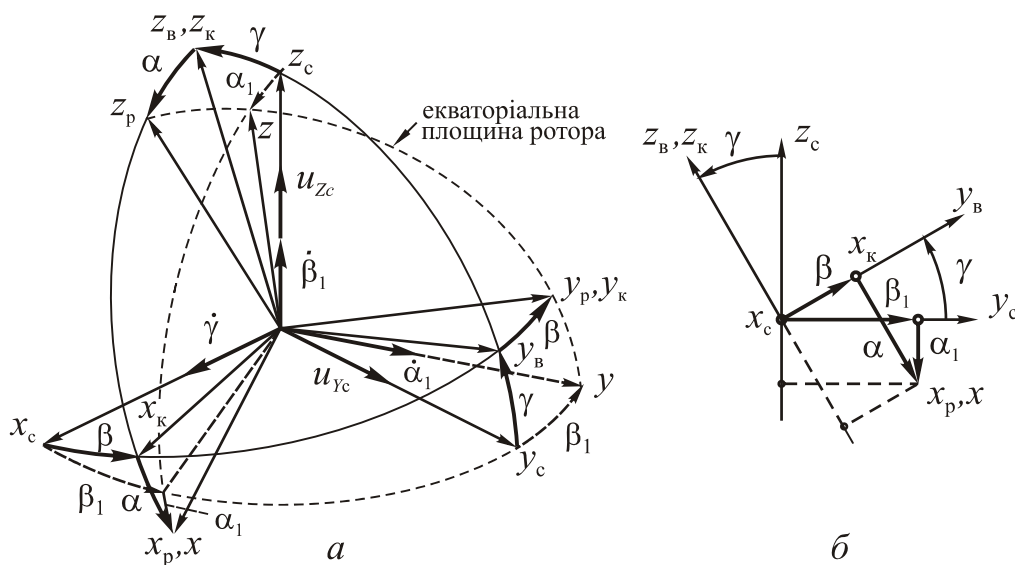


Рис. 14.6. Кінематика тріступеневого РВГ

Осі Oz_p і Oy_p є головними осями інерції ротора РВГ, бо лежать в його екваторіальній площині.

Положення екваторіальної площини ротора відносно осей y_c і z_c корпусу приладу задамо кутами α_1 й β_1 .

Ці два кути характеризують положення координатної системи $Ox y z$, осі z та y якої лежать в екваторіальній площині ротора, але на відміну від осей x_p та z_p не беруть участі в обертанні ротора гіроскопа з кутовою швидкістю Ω відносно системи $Ox_c y_c z_c$.

Визначимо зв'язок між кутами α_1 , β_1 і α , β , використовуючи для цього картинну площину (рис 14.6, б), на якому показано відносне положення осей систем координат $Ox_k y_k z_k$ й $Ox_p y_p z_p$ зі сторони осі x_c :

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_1 \cos \gamma + \beta_1 \sin \gamma; \\ \beta &= \beta_1 \cos \gamma - \alpha_1 \sin \gamma.\end{aligned}\tag{14.13}$$

Скористаємося такою методикою складання рівнянь руху РВГ. Спочатку складемо рівняння карданового кільця у системі координат $Ox_k y_k z_k$ відносно осі внутрішнього торсіону z_k . Потім, замінивши змінні α , β на α_1 й β_1 і перепроєціювавши отриманий вираз на осі опорної системи координат $Ox_c y_c z_c$, одержимо рівняння руху кільця відносно осей y_c й z_c . Далі складемо рівняння ротора одразу по осях $Ox y z$, беручи при цьому до уваги ту обставину, що моменти зовнішніх сил прикладаються до ротора через зовнішні торсіони, тобто напрямлені по осі y_p . Складаючи відповідні рівняння кільця й ротора, отримаємо рівняння РВГ у цілому навколо осей y_c й z_c .

У разі використання такої методики в явній формі не враховуються моменти реакції ротора на кільце й кільця на ротор. Однак ці моменти є внутрішніми, і якщо об'єднати рівняння ротора й кільця у відповідних осях, вони взаємно компенсуються.

Рівняння карданова кільця. Складемо спочатку рівняння руху карданового кільця у зв'язаній системі координат $Ox_c y_c z_c$. Для цього, використовуючи отримане раніше рівняння (14.6) руху ротора двоступеневого РВГ, запишемо рівняння руху кільця в системі координат $Ox_k y_k z_k$:

$$J_{ек} \ddot{\beta} + f_1 \dot{\beta} + [C_1 + (J_k - J_{ек}) \Omega^2] \cdot \beta = J_k \Omega (u_{y_c}^c \cos \gamma + u_{z_c}^c \sin \gamma) + M_{z_k}^{zc}.\tag{14.14}$$

У цьому рівнянні $M_{z_k}^{zc}$ – моменти зовнішніх сил, прикладені до кільця через зовнішні торсіони підвісу. Нагадаємо також, що осі Oz_k і Oy_k є головними осями інерції кільця, бо лежать в його екваторіальній площині. Моменти інерції кільця відносно цих осей однакові і дорівнюють екваторіальному моменту інерції $J_{ек}$.

Перейдемо від рівняння (14.14) до рівнянь кільця в опорній системі координат. Для цього замінимо в цьому рівнянні змінні α , β і їхні похідні на координати й відповідні похідні α_1 , β_1 .

Диференціюючи співвідношення (14.21), знайдемо

$$\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_1 \cos \gamma + \dot{\beta}_1 \sin \gamma - \alpha_1 \dot{\gamma} \sin \gamma + \beta_1 \dot{\gamma} \cos \gamma;\tag{14.15}$$

$$\dot{\beta} = \dot{\beta}_1 \cos \gamma - \dot{\alpha}_1 \sin \gamma - \beta_1 \dot{\gamma} \sin \gamma - \alpha_1 \dot{\gamma} \cos \gamma;$$

$$\ddot{\alpha} = \ddot{\alpha}_1 \cos \gamma + \ddot{\beta}_1 \sin \gamma - 2\dot{\alpha}_1 \dot{\gamma} \sin \gamma + 2\dot{\beta}_1 \dot{\gamma} \cos \gamma - \alpha_1 \dot{\gamma}^2 \cos \gamma - \beta_1 \dot{\gamma}^2 \sin \gamma;\tag{14.16}$$

$$\ddot{\beta} = \ddot{\beta}_1 \cos \gamma - \ddot{\alpha}_1 \sin \gamma - 2\dot{\beta}_1 \dot{\gamma} \sin \gamma - 2\dot{\alpha}_1 \dot{\gamma} \cos \gamma - \beta_1 \dot{\gamma}^2 \cos \gamma + \alpha_1 \dot{\gamma}^2 \sin \gamma.$$

Підставляння одержаних виразів (14.15) і (14.16) у рівняння (14.14) приводить до рівняння:

$$J_{\text{ек}}(\ddot{\beta}_1 \cos \gamma - \ddot{\alpha}_1 \sin \gamma - 2\dot{\beta}_1 \Omega \sin \gamma - 2\dot{\alpha}_1 \dot{\lambda} \cos \gamma - \beta_1 \Omega^2 \cos \gamma + \alpha_1 \Omega^2 \sin \gamma) + \\ + f_1(\dot{\beta}_1 \cos \gamma - \dot{\alpha}_1 \sin \gamma - \beta_1 \dot{\gamma} \sin \gamma - \alpha_1 \dot{\gamma} \cos \gamma) + [C_1 + (J_{\text{к}} - J_{\text{ек}}) \Omega^2] \times \\ \times (\beta_1 \cos \gamma - \alpha_1 \sin \gamma) = J_{\text{к}} \Omega (u_{\gamma_c}^c \cos \gamma + u_{z_c}^c \sin \gamma) + M_{z_c}^{3c}.$$

Проеціюючи отримане рівняння моментів на осі y_c й z_c зв'язаної з основою системи координат, знайдемо рівняння кільця навколо осі y_c :

$$J_{\text{ек}}(-\ddot{\beta}_1 \sin \gamma \cos \gamma + \ddot{\alpha}_1 \sin^2 \gamma + 2\dot{\beta}_1 \Omega \sin^2 \gamma + 2\dot{\alpha}_1 \dot{\gamma} \sin \gamma \cos \gamma + \\ + \beta_1 \Omega^2 \sin \gamma \cos \gamma + \alpha_1 \Omega^2 \sin^2 \gamma) - f_1(\dot{\beta}_1 \sin \gamma \cos \gamma - \dot{\alpha}_1 \sin^2 \gamma - \\ - \beta_1 \Omega \sin^2 \gamma - \alpha_1 \Omega \sin \gamma \cos \gamma) - [C_1 + (J_{\text{к}} - J_{\text{ек}}) \dot{\gamma}^2] (\beta_1 \sin \gamma \cos \gamma - \\ - \alpha_1 \sin^2 \gamma) = -J_{\text{к}} \Omega (u_{\gamma_c}^c \sin \gamma \cos \gamma + u_{z_c}^c \sin^2 \gamma) - M_{z_c}^{3c} \sin \gamma, \quad (14.17)$$

і навколо осі z_c :

$$J_{\text{ек}}(\ddot{\beta}_1 \cos^2 \gamma - \ddot{\alpha}_1 \sin \gamma \cos \gamma - 2\dot{\beta}_1 \Omega \sin \gamma \cos \gamma - 2\dot{\alpha}_1 \Omega \cos^2 \gamma - \\ - \beta_1 \Omega^2 \cos^2 \gamma + \alpha_1 \Omega^2 \sin \gamma \cos \gamma) + f_1(\dot{\beta}_1 \cos^2 \gamma - \dot{\alpha}_1 \sin \gamma \cos \gamma - \\ - \beta_1 \Omega \sin \gamma \cos \gamma - \alpha_1 \Omega \cos^2 \gamma) + [C_1 + (J_{\text{к}} - J_{\text{ек}}) \dot{\gamma}^2] (\beta_1 \cos^2 \gamma - \\ - \alpha_1 \sin \gamma \cos \gamma) = J_{\text{к}} \Omega (u_{\gamma_c}^c \cos^2 \gamma + u_{z_c}^c \sin \gamma \cos \gamma) + M_{z_c}^{3c} \cos \gamma. \quad (14.18)$$

Перепишемо знайдені рівняння, скориставшись відомими співвідношеннями $\sin^2 \gamma = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\gamma$; $\cos^2 \gamma = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\gamma$. При цьому не будемо враховувати члени, що змінюються із частотою 2Ω . У результаті отримаємо

$$J_{\text{ек}} \left(\frac{1}{2} \ddot{\alpha}_1 + \dot{\beta}_1 \Omega \right) + f_1 \left(\frac{1}{2} \dot{\alpha}_1 + \frac{1}{2} \beta_1 \Omega \right) + \frac{1}{2} [C_1 + (J_{\text{к}} - 2J_{\text{ек}}) \Omega^2] \alpha_1 = \\ = -\frac{1}{2} J_{\text{к}} \Omega u_{z_c}^c - M_{z_c}^{3c} \sin \gamma; \quad (14.19)$$

$$J_{\text{ек}} \left(\frac{1}{2} \ddot{\beta}_1 - \dot{\alpha}_1 \Omega \right) + f_1 \left(\frac{1}{2} \dot{\beta}_1 - \frac{1}{2} \alpha_1 \Omega \right) + \frac{1}{2} [C_1 + (J_{\text{к}} - 2J_{\text{ек}}) \Omega^2] \beta_1 = \\ = \frac{1}{2} J_{\text{к}} \Omega u_{\gamma_c}^c + M_{z_c}^{3c} \cos \gamma. \quad (14.20)$$

Рівняння ротора. Рівняння ротора одразу запишемо в осях $Oxyz$, що не беруть участі в обертанні ротора з кутовою швидкістю Ω , проєціюючи (14.1) на осі y і z

$$\frac{dK_y^p}{dt} + \omega_{ez}^p K_x^p - \omega_{ex}^p K_z^p = M_y; \quad (14.21) \\ \frac{dK_z^p}{dt} + \omega_{ex}^p K_y^p - \omega_{ey}^p K_x^p = M_z.$$

Запишемо проєкції моменту імпульсу ротора на осі системи координат $Oxyz$

$$K_x^p = I_x \omega_x^p; \quad K_y^p = I_y \omega_y^p; \quad K_z^p = I_z \omega_z^p. \quad (14.22)$$

Проекції переносної кутової швидкості ротора відповідно до рис 14.5, а дорівнюють:

$$\begin{aligned} \omega_{ex}^p &= -(u_{Zc}^c + \dot{\beta}_1) \sin \alpha_1 + u_{Yc}^c \sin \beta_1 \cos \alpha_1 \approx 0; \\ \omega_{ey}^p &= \dot{\alpha}_1 + u_{Yc}^c \cos \beta_1 \approx \dot{\alpha}_1 + u_{Yc}^c; \\ \omega_{ez}^p &= (u_{Zc}^c + \dot{\beta}_1) \cos \alpha_1 + u_{Yc}^c \sin \alpha_1 \sin \beta_1 \approx \dot{\beta}_1 + u_{Zc}^c. \end{aligned} \quad (14.23)$$

Запишемо проекції абсолютної кутової швидкості ротора ω^p :

$$\omega_x^p = \omega_{ex}^p + \Omega; \quad \omega_y^p = \omega_{ey}^p; \quad \omega_z^p = \omega_{ez}^p.$$

Оскільки площина Oyz є екваторіальною площиною ротора, прийmemo $I_x = J_p$; $I_y = I_z = J_{ep}$. Тоді згідно з формулами (14.22)

$$\begin{aligned} K_x &= J_p (\Omega + \omega_{ex}^p) \approx J_p \Omega; \\ K_y &= J_{ep} \omega_y^p \approx J_{ep} (\dot{\alpha}_1 + u_{Yc}^c); \\ K_z &= J_{ep} \omega_z^p \approx J_{ep} (\dot{\beta}_1 + u_{Zc}^c). \end{aligned} \quad (14.24)$$

Підставивши отримані значення проекцій кутових швидкостей (14.23) і проекцій моменту імпульсу (14.24) у рівняння (14.21), одержимо

$$\begin{aligned} J_{ep} \ddot{\alpha}_1 + J_p \Omega (\dot{\beta}_1 + u_{Zc}^c) &= M_y^p \approx M_{Yc}^p; \\ J_{ep} \ddot{\beta}_1 - J_p \Omega (\dot{\alpha}_1 + u_{Yc}^c) &= M_z^p \approx M_{Zc}^p. \end{aligned} \quad (14.25)$$

Розшифруємо значення моментів зовнішніх сил M_{Yc}^p й M_{Zc}^p . При повороті ротора на кут α навкруг осі y_p до ротора через зовнішні торсіони прикладаються момент сил пружності торсіонів $-C_2 \alpha$, момент сил демпфірування $-f_2 \dot{\alpha}$ й інші моменти зовнішніх сил M_y^{3c} :

$$M_{Yp}^p = -C_2 \alpha - f_2 \dot{\alpha} + M_{Yp}^{3c}$$

Здійснимо у виразі моменту M_{Yp} перехід від змінних α і β до змінних α_1 й β_1 , скориставшись формулами (14.13):

$$\begin{aligned} M_{Yp}^p &= -C_2 (\alpha_1 \cos \gamma + \beta_1 \sin \gamma) - f_2 (\dot{\alpha}_1 \cos \gamma + \dot{\beta}_1 \sin \gamma - \\ &- \alpha_1 \Omega \sin \gamma + \beta_1 \Omega \cos \gamma) + M_{Yp}^{3c}. \end{aligned}$$

Тепер знаходимо складові моменту M_{Yc}^p й M_{Zc}^p , що входять у рівняння (14.25), спроеціювавши момент \mathbf{M}_{Yp}^p на відповідні осі:

$$\begin{aligned} M_{Yc}^p &= M_{Yp}^p \cos \gamma = -C_2 (\alpha_1 \cos^2 \gamma + \beta_1 \sin \gamma \cos \gamma) - f_2 (\dot{\alpha}_1 \cos^2 \gamma + \\ &+ \dot{\beta}_1 \sin \gamma \cos \gamma - \alpha_1 \dot{\gamma} \sin \gamma \cos \gamma + \beta_1 \dot{\gamma} \cos^2 \gamma) + M_{Yp}^{3c} \cos \gamma; \\ M_{Zc}^p &= M_{Yp}^p \sin \gamma = -C_2 (\alpha_1 \sin \gamma \cos \gamma + \beta_1 \sin^2 \gamma) - f_2 (\dot{\beta}_1 \sin^2 \gamma + \\ &+ \dot{\alpha}_1 \sin \gamma \cos \gamma - \alpha_1 \dot{\gamma} \sin^2 \gamma + \beta_1 \dot{\gamma} \sin \gamma \cos \gamma) + M_{Yp}^{3c} \sin \gamma. \end{aligned}$$

Нехтуючи, як і раніше, складовими моментів, що змінюються із частотою 2Ω , дістанемо такі вирази для моментів зовнішніх сил, що змінюються повільно

$$\begin{aligned} M_{Yc}^p &= -\frac{1}{2}C_2\alpha_1 - \frac{1}{2}f_2(\dot{\alpha}_1 + \beta_1\Omega) + M_{Yp}^{3c} \cos \gamma; \\ M_{Zc}^p &= -\frac{1}{2}C_2\beta_1 - \frac{1}{2}f_2(\dot{\beta}_1 - \alpha_1\Omega) + M_{Yp}^{3c} \sin \gamma. \end{aligned} \quad (14.26)$$

Безпосередньо по осях x_c, y_c, z_c можуть також діяти й керувальні моменти M_{Yc}^k й M_{Zc}^k , створювані штучно за допомогою датчиків моментів.

З урахуванням спрощених значень (14.26) моменту зовнішніх сил рівняння (14.25) ротора набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} J_{ep}\ddot{\alpha}_1 + \frac{1}{2}f_2\dot{\alpha}_1 + \frac{1}{2}C_2\alpha_1 &= -J_p\Omega u_{Zc}^c - J_p\Omega\dot{\beta}_1 - \frac{1}{2}f_2\beta_1\Omega + M_{Yp}^{3c} \cos \gamma + M_{Yc}^k; \\ J_{ep}\ddot{\beta}_1 + \frac{1}{2}f_2\dot{\beta}_1 + \frac{1}{2}C_2\beta_1 &= J_p\Omega u_{Yc}^c + J_p\Omega\dot{\alpha}_1 + \frac{1}{2}f_2\alpha_1\Omega + M_{Yp}^{3c} \sin \gamma + M_{Zc}^k. \end{aligned} \quad (14.27)$$

Рівняння руху триступеневого РВГ. Для отримання рівнянь всієї рухомої частини РВГ у системі координат $Ox_c y_c z_c$, пов'язаної з корпусом приладу, складемо відповідні рівняння (14.17) і (14.18) кільця з рівняннями (14.27) ротора.

Рівняння РВГ відносно осі y_c набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} (J_{ep} + \frac{1}{2}J_{ek})\ddot{\alpha}_1 + \frac{1}{2}(f_1 + f_2)\dot{\alpha}_1 + \frac{1}{2}[C_1 + C_2 + (J_k - 2J_{ek})\Omega^2]\alpha_1 &= \\ = -(J_p + \frac{1}{2}J_k)\Omega u_{Zc}^c - (J_p + J_{ek})\Omega\dot{\beta}_1 - \frac{1}{2}(f_1 + f_2)\beta_1\Omega + \\ + M_{Yp}^{3c} \cos \gamma - M_{Zk}^{3c} \sin \gamma + M_{Yc}^k ? \end{aligned} \quad (14.28)$$

а відносно осі z_c :

$$\begin{aligned} (J_{ep} + \frac{1}{2}J_{ek})\ddot{\beta}_1 + \frac{1}{2}(f_1 + f_2)\dot{\beta}_1 + \frac{1}{2}[C_1 + C_2 + (J_k - 2J_{ek})\Omega^2]\beta_1 &= \\ = (J_p + \frac{1}{2}J_k)\Omega u_{Yc}^c + (J_p + J_{ek})\Omega\dot{\alpha}_1 - \frac{1}{2}(f_1 + f_2)\alpha_1\Omega + \\ + M_{Yp}^{3c} \sin \gamma + M_{Zk}^{3c} \cos \gamma + M_{Zc}^k. \end{aligned} \quad (14.29)$$

Уведемо такі позначення:

$$A = J_{ep} + \frac{1}{2}J_{ek}; \quad B = J_p + \frac{1}{2}J_k; \quad H = (J_p + J_{ek})\Omega;$$

$$f_e = \frac{1}{2}(f_1 + f_2); \quad k^2 = \frac{1}{2}[C_1 + C_2 + (J_k - 2J_{ek})\Omega^2].$$

Рівняння (14.28) і (14.29) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha}_1 + f_e\dot{\alpha}_1 + k^2\alpha_1 + H\dot{\beta}_1 + f_e\beta_1\Omega &= -Bu_{Zc}^c + M_{Yp}^{3c} \cos \gamma - M_{Zk}^{3c} \sin \gamma + M_{Yc}^k; \\ A\ddot{\beta}_1 + f_e\dot{\beta}_1 + k^2\beta_1 - H\dot{\alpha}_1 - f_e\alpha_1\Omega &= Bu_{Yc}^c + M_{Yp}^{3c} \sin \gamma + M_{Zk}^{3c} \cos \gamma + M_{Zc}^k \end{aligned} \quad (14.30)$$

З отриманих рівнянь видно, що динаміка РВГ є істотно складнішою, ніж триступеневого гіроскопа із зовнішнім кардановим підвісом, описуваного, наприклад, рівняннями (2.33). Це проявляється в сильному взаємозв'язку кутів повороту α_1 й β_1 , залежності їх від швидкості обертання ротора, а також у тому, що триступеневий РВГ не є астатичним гіроскопом.

Значну взаємозалежність можна суттєво послабити, усунувши у рівняннях (14.30) члени $k^2\alpha_1$ й $k^2\beta_1$, тобто виконавши умову динамічного настроювання. Ця умова має вигляд

$$k^2 = \frac{1}{2}[C_1 + C_2 + (J_k - 2J_{ек})\Omega^2] = 0. \quad (14.31)$$

Для виконання цієї умови необхідно компенсувати пружний момент протидії торсіонів, що утворюють ефект додатного (відновлювального) пружного зв'язку, моментом, який створює ефект від'ємного (перекидного) пружного зв'язку. Таким моментом у розглянутому випадку є динамічний момент відцентрових сил інерції.

Фізика явища компенсації пружності торсіонів динамічною «пружністю» полягає у тому, що відповідно до виразу (14.31) динамічна «пружність» від осьового моменту інерції $J_k\Omega^2$ подібно статичній пружності торсіонів $C_1 + C_2$ створює при наявності відхилення ротора відновлювальний момент, який прагне привести ротор у нейтральне положення, тобто в площину, перпендикулярну до осі вала привідного двигуна. Складова ж динамічної «пружності» від екваторіальних моментів інерції $2J_{ек}\Omega^2$ має протилежний знак, тобто утворює при наявності відхилення ротора від нейтрального положення перекидний момент, забезпечуючи ефект «від'ємного» (тобто не відновлювального, а, навпаки, перекидного) пружного зв'язку.

Потрібно також відзначити, що умова динамічного настроювання не залежить від інерційних характеристик ротора гіроскопа.

Роторний вібраційний гіроскоп, відповідно до якого виконано умову динамічного настроювання, називають динамічно настроєним гіроскопом (ДНГ).

У реальних конструкціях ДНГ кути повороту екваторіальної площини ротора відносно корпусу не перевищують однієї кутової минути, а демпфірування зведено до мінімуму. Для дослідження поведінки таких приладів без зовнішніх моментів замість рівнянь (14.30) можна використати спрощені рівняння:

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha}_1 + f_e\dot{\alpha}_1 + H\dot{\beta}_1 &= -B\Omega u_{zc}^c; \\ A\ddot{\beta}_1 + f_e\dot{\beta}_1 - H\dot{\alpha}_1 &= B\Omega u_{yc}^c. \end{aligned}$$

Поділивши в досліджуваних рівняннях змінні й врахувавши, що $H \gg f_e$, $u^c = \text{const}$, маємо

$$\begin{aligned} \frac{A^2}{H^2}\ddot{\alpha}_1 + 2\frac{Af_e}{H^2}\dot{\alpha}_1 + \alpha_1 &= -\frac{Bf_e}{H^2}\Omega u_{zc}^c - \frac{B}{H}\Omega u_{yc}^c; \\ \frac{A^2}{H^2}\ddot{\beta}_1 + 2\frac{Af_e}{H^2}\dot{\beta}_1 + \beta_1 &= \frac{Bf_e}{H^2}\Omega u_{yc}^c - \frac{B}{H}\Omega u_{zc}^c. \end{aligned} \quad (14.32)$$

Розв'язок отриманих рівнянь містить власні загасальні коливання й усталений рух під дією кутової швидкості руху основи. Частота власних загасальних коливань гіроскопа через мализну демпфірувальних моментів практично дорівнює частоті нутації:

$$\omega_{зг} \approx \omega_0 = \frac{H}{A} = \frac{J_p + J_{ек}}{J_{ер} + \frac{1}{2}J_{ек}} \Omega = \sigma \Omega.$$

Оскільки для ротора ДНГ виконується умова $J_p > J_{ер}$, то $\sigma > 1$, тобто нутаційна частота перевищує частоту обертання приводного вала й ротора. Через те ДНГ, маючи більшу частоту вільних коливань, є практично безінерційним.

З урахуванням викладеного розглянемо лише усталений режим роботи ДНГ. Частинний розв'язок рівнянь (14.32) має вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{1уст} &= -\frac{Bf_e}{H^2} \Omega u_{Zc}^c - \frac{B}{H} \Omega u_{Yc}^c; \\ \dot{\beta}_{1уст} &= \frac{Bf_e}{H^2} \Omega u_{Yc}^c - \frac{B}{H} \Omega u_{Zc}^c. \end{aligned} \quad (14.33)$$

Отже, за характером реакції на рух основи триступеневий ДНГ нагадує двоступеневий РВГ, розглянутий у п. 14.1.2, – його вихідні сигнали в усталеному режимі пропорційні кутам повороту основи. Прилад реагує на дві ортогональні складові кутової швидкості обертання основи, які лежать в екваторіальній площині ротора. Недоліком такого приладу є те, що датчики кута, які встановлені на корпусі відтворюють сигнали, пропорційні кутам α_1 й β_1 , і одночасно вимірюють обидві складові кутової швидкості – u_{Yc}^c і u_{Zc}^c .

Якщо припустити, що $H \gg f_e$, вирази (14.33) можна спростити:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{1уст} &= -\frac{B}{H} \Omega u_{Yc}^c = -\frac{J_p + \frac{1}{2}J_k}{J_p + J_{ек}} u_{Yc}^c = -K_{ст} u_{Yc}^c; \\ \dot{\beta}_{1уст} &= -\frac{B}{H} \Omega u_{Zc}^c = -\frac{J_p + \frac{1}{2}J_k}{J_p + J_{ек}} u_{Zc}^c = -K_{ст} u_{Zc}^c. \end{aligned}$$

Статичний коефіцієнт передачі $K_{ст} = 1 - \frac{2J_{ек} - J_k}{2(J_p + J_{ек})}$ менший за одиницю.

Якщо моменти інерції карданового кільця малі порівняно з моментами інерції ротора, то $K_{ст} \approx 1$ й ДНГ стає подібним астатичному гіроскопу: головна вісь ротора, зберігаючи початкову орієнтацію в інерціальній системі координат, повертається відносно основи на кути $\psi_{Yc} = -\int_0^t u_{Yc}^c dt$ і $\psi_{Zc} = -\int_0^t u_{Zc}^c dt$, тобто в протилежний бік від повороту основи.

Вище було розглянуто лише низькочастотну складову руху ротора відносно корпусу. Однак РВГ з однокільцевим підвісом, крім повільно змінюваних

складових містить і складові, що змінюються за гармонічним законом із частотою 2Ω . Вплив цих складових на динаміку приладу не враховувався. Нагадаємо, що ці складові в першу чергу породжуються кільцем підвісу (саме в рівняннях (14.19) і (14.20) карданова кільця були відкинуті члени, що залежать від співмножників $\sin 2\Omega$ й $\cos 2\Omega$).

Зазначені гармонічні складові можуть бути усунуті конструктивними методами, які полягають у застосуванні симетричних двокільцевих підвісів ротора. Дві можливі схеми побудови підвісу – з паралельним і послідовним з'єднанням кілець показано на рис. 14.7. Широкого застосування набула перша схема. Відповідно до неї ротор гіроскопа з'єднаний з привідним валом двома однаковими кільцями, повернутими відносно один одного на кут 90° . Кожне з кілець має по парі однотипних внутрішніх і зовнішніх торсіонів.

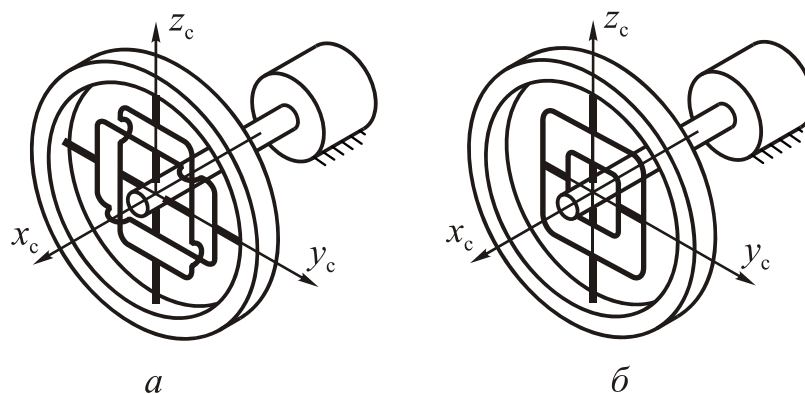


Рис. 14.7. Схеми двокільцевих підвісів

Фізичний зміст усунення періодичних складових моментів у двокільцевій схемі полягає в такому. Оскільки торсіони другого кільця підвісу повернуті відносно торсіонів першого кільця на кут 90° , то періодичні моменти, створювані цим кільцем, маючи таку саму амплітуду, матимуть фазовий зсув на кут 90° відносно моментів, створюваних першим кільцем. Тому до складових рівнянь, що містять співмножники $\sin 2\Omega$ або $\cos 2\Omega$, потрібно додати аналогічні складові зі співмножниками $\sin 2(\Omega - \pi/2) = -\sin 2\Omega$ або $\cos 2(\Omega - \pi/2) = -\cos 2\Omega$. Це в кінцевому підсумку приведе до взаємної компенсації всіх періодичних складових моменту, що змінюються із частотою 2Ω .

14.2.2. Треступеневий ДНГ як вимірювач кутової швидкості

У конструкції ДНГ зазвичай передбачено датчики моментів, які використовуються для керування положенням ротора (усунення дрейфів гіроскопа). Ці датчики можна також використати для побудови на базі ДНГ двокомпонентних датчиків кутової швидкості, сформувавши на їхній основі системи силової компенсації моментів $B\Omega u_{y_c}^c$ і $B\Omega u_{z_c}^c$ керувальними моментами $M_{y_c}^k$ й $M_{z_c}^k$. Для практичної реалізації таких систем досить сформулювати перехресні електричні зв'язки датчиків моменту з відповідними датчиками кута (рис. 14.8).

Керувальні моменти у сформованих каналах при цьому можна визначати співвідношеннями

$$M_{Yc}^k = -K\beta_1; \quad M_{Zc}^k = K\alpha_1,$$

де $K = k_{ду}k_yk_{дм}$ – коефіцієнт передачі каналу силової компенсації.

Рівняння руху ДНГ із силовою компенсацією запишемо, використовуючи вихідні рівняння (14.32):

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha}_1 + f_e\dot{\alpha}_1 + k^2\alpha_1 + H\dot{\beta}_1 + (f_e\Omega + K)\beta_1 &= -Bu_{Zc}^c; \\ A\ddot{\beta}_1 + f_e\dot{\beta}_1 + k^2\beta_1 - H\dot{\alpha}_1 - (f_e\Omega + K)\alpha_1 &= Bu_{Yc}^c. \end{aligned} \quad (14.34)$$

Для пояснення принципу роботи приладу прийемо, що умова динамічного настроювання ідеально виконана, а демпфірування відсутнє, тобто $k^2 = 0$; $f_e = 0$.

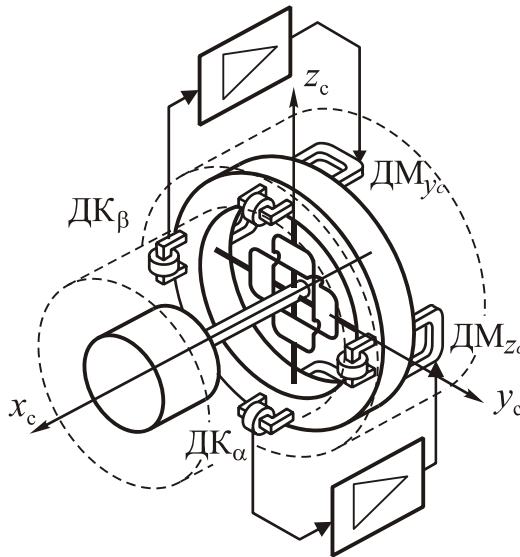


Рис. 14.8. Динамічно настроєний гіроскоп із силовою компенсацією

Якщо знехтувати ще й власними коливаннями, тобто в рівняннях (14.32) не враховувати інерційні складові $A\ddot{\alpha}_1$ і $A\ddot{\beta}_1$, для визначення кутів відхилення ротора можна скористатися прецесійними рівняннями

$$\begin{aligned} H\dot{\beta}_1 + K\beta_1 &= -Bu_{Zc}^c; \\ H\dot{\alpha}_1 + K\alpha_1 &= -Bu_{Yc}^c. \end{aligned}$$

Звідси випливає

$$\begin{aligned} \beta_{1уст} &= -\frac{B}{K}u_{Zc}^c = -\frac{2I_{op} + I_{ок}}{2K}u_{Zc}^c; \\ \alpha_{1уст} &= -\frac{B}{K}u_{Yc}^c = -\frac{2I_{op} + I_{ок}}{2K}u_{Yc}^c. \end{aligned}$$

Отже, кути відхилення ротора відносно корпусу приладу є пропорційними складовим кутової швидкості обертання основи, тобто прилад працює в ре-

жимі датчика кутової швидкості. Сам прилад тому скорочено називають ДНГ-ДКШ.

Триступеневий РВГ із внутрішнім кардановим підвісом має істотні переваги порівняно з «класичним» триступеневим гіроскопом із зовнішнім кардановим підвісом. Основні з них такі – більш раціональне використання об'єму приладу завдяки розміщенню підвісу не ззовні, а всередині ротора, а також усунення моментів сил сухого тертя за рахунок використання пружного підвісу.

Головними недоліками РВГ вважають незначну вібростійкість і ударостійкість, тому в системах орієнтації, в яких вони використовуються, передбачають додаткові системи місцевої амортизації.

14.3. Мікромеханічні осциляторні гіроскопи (ММГ)

14.3.1. Принципи побудови осциляторних гіроскопів

У роторному вібраційному гіроскопі власна швидкість обертання ротора є сталою ($\Omega = \text{const}$), обертання основи спричиняє вимушений коливальний рух ротора відносно осей симетрії пружних елементів підвісу. У РВГ можна умовно виділити зосереджені елементи маси (ротор і кільця підвісу) і елементи зосередженої жорсткості (торсіони підвісу).

Осциляторні гіроскопи відрізняються від роторних тим, що швидкість їх власного руху знакозмінна, тобто має характер коливань. Цей рух може бути не тільки кутовим, але й поступальним. Таким чином, в осциляторних гіроскопах застосовано вібрувальну масу замість обертового ротора.

Основи функціонування гіроскопа зі змінним кінетичним моментом були закладені дослідами Фуко з використання маятника, що зберігає незмінне положення площини хитань в інерціальному просторі.

Прогрес в галузі мікроелектроніки спонукав створення нового класу приладів – мікромеханічних гіроскопів (ММГ).

Сучасні ММГ значно поступаються за точністю традиційним електромеханічним гіроскопам, але набагато переважають їх за масогабаритними характеристиками, показниками собівартості й енергоспоживання. Розроблювані зразки ММГ характеризуються надмалими масою (частки грамів) і габаритами (одиниці міліметрів), низькою собівартістю й енергоспоживанням, високою стійкістю до механічного (ударні навантаження до $10^5 g$) і теплового (від -40 до $+85^\circ$) впливів. Дрейф сучасних ММГ становить $1 - 100^\circ/\text{год}$, а механічна частина датчиків повністю інтегрується із сервісною електронікою й дозволяє створювати прилади на одному чипі об'ємом до 1 см^3 й енергоспоживанням до $0,5 \text{ Вт}$.

Схеми більшості ММГ побудовано відповідно принципу роботи осциляторного вібраційного гіроскопа. До інерційної маси, що має пружний зв'язок з основою, прикладаються сили F_b або моменти M_b , які збуджують гармонічні коливання (лінійні або кутові) постійної амплітуди й частоти. При обертанні основи з переносною кутовою швидкістю Ω виникають сили інерції прискорення Кориоліса F_c (M_c), які «діють» на інерційну масу й через неї тиснуть на пружний

зв'язок маси з основою. Ці сили зумовлюють коливання маси в напрямку, перпендикулярному до її відносної швидкості й переносної кутової швидкості. Амплітуда коливань, що виникають, є мірою вимірюваної кутової швидкості.

За засобами реалізації руху інерційної маси ММГ схеми побудови можна поділити на схеми з поступальними рухами по координаті збудження x і координаті вихідного сигналу z (LL -гіроскопи, *linear – linear*); з кутовими рухами по обох координатах (RR -гіроскопи, *rotate – rotate*); з різними комбінаціями поступальних і кутових рухів (LR -гіроскопи).

У більшості ММГ вимірювання і збудження коливань здійснюються електростатичними датчиками положення й сили. У ряді конструкцій застосовуються електромагнітні засоби збудження коливань і знімання сигналу. У деяких розробках для створення вимірювального й виконавчого перетворювачів використовується п'єзокерамічні елементи.

Для збільшення чутливості параметри гіроскопа обирають таким чином, щоб частота вимушених коливань збудження збігалася із частотою власних коливань, а частота вихідних коливань була також близька до частоти вимушених коливань. Конструкцію виготовлено з високодобротних матеріалів, що мають низькі внутрішні втрати на тертя. У цьому разі здійснюється резонансне підсилення сигналу.

Однією з головних особливостей ММГ є використання для їх вироблення матеріалів і технологій сучасної твердотільної електроніки. Електромеханічні вузли ММГ формуються з неметалевих матеріалів (монокристалічний кремній, плавлений кварц, карбід кремнію та ін.) методами фотолітографії, ізотропного або анізотропного травлення, дифузійного зварювання.

Характерною ознакою ММГ є також інтеграція механічних й електричних компонентів, які виготовляють одночасно з використанням однотипних технологічних процесів. Механічну частину датчика виготовляють разом з елементами електроніки збудження, датчиками знімання й перетворення корисного сигналу, елементами формування зворотних зв'язків, що дозволяє створювати закінчені електромеханічні вузли.

Розглянемо основні схеми побудови чутливих елементів мікромеханічних гіроскопів і принцип їх роботи.

Мікромеханічні гіроскопи LL типу. До найпростіших LL -гіроскопів відноситься одномасовий мікромеханічний гіроскоп, схему якого показано на рис. 14.9.

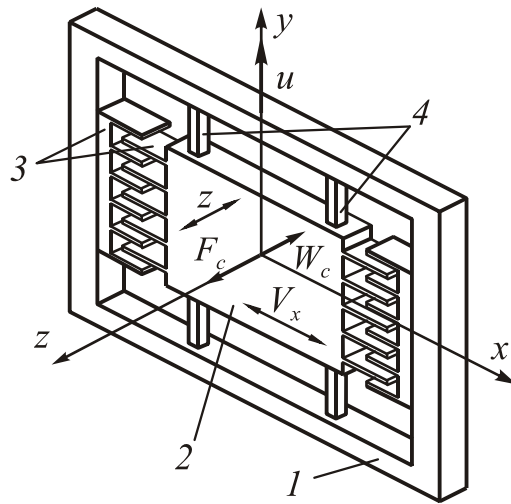


Рис. 14.9. Схема одномасового ММГ

Інерційна маса 2 кріпиться до основи 1 за допомогою пружних елементів 4. Квадратний або близький до нього переріз елементів підвісу дозволяє інерційній масі переміщуватися в напрямку осей x й z . Поступальні періодичні коливання уздовж осі x збуджуються гребінчастим електростатичним приводом (актюатором) 3. Під час обертання основи відносно осі y з кутовою швидкістю u інерційна маса під дією коріолісових сил F_c буде здійснювати вторинні коливання уздовж осі z .

Для вимірювання кутової швидкості по осі, перпендикулярній площині гіроскопа, використовується ММГ із додатковою рамкою (рис. 14.10).

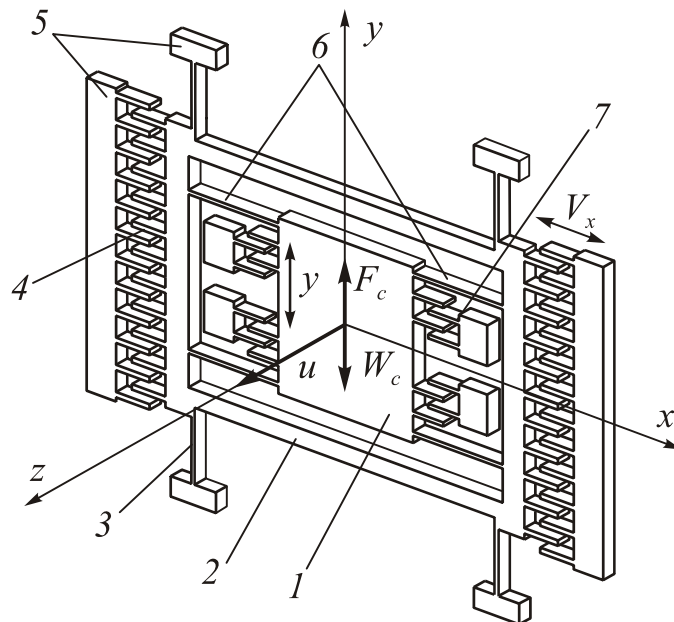


Рис. 14.10. Мікромеханічний гіроскоп з додатковою рамкою

У ньому інерційна маса 1 з'єднана з рамкою 2 за допомогою пружного балкового підвісу 6, що забезпечує можливість її переміщення уздовж осі y . Це переміщення реєструється ємнісним датчиком 7. Рамка з'єднана з основою 5 за

допомогою пружного підвісу 3. Елементи підвісів 3 й 6 мають прямокутний переріз. У рамці за допомогою актюатора 4 збуджуються поступальні коливання уздовж осі x , які через пружні зв'язки 3 передаються на інерційну масу. Кутова швидкість основи u приводить до появи коріолісових сил F_c , які спричиняють поступальні коливання внутрішньої рамки вздовж осі y . Амплітуда вторинних коливань залежить від значення вимірюваної кутової швидкості.

Мікромеханічні гіроскопи LR типу. До цього типу приладів належить камертонний мікромеханічний вібраційний гіроскоп (рис. 14.11).

Конструкція складається із двох інерційних мас 1 , з'єднаних із зовнішньою рамкою 3 за допомогою пружних елементів 2. Рамка зв'язана з основою 4 через пружні елементи 5. Електростатичний актюатор (рушій) збуджує протифазні поступальні коливання мас уздовж осі x . Із появою кутової швидкості u основи вдовж осі y коріолісові сили F_c викликають залежно від співвідношень між жорсткістю елементів підвісу або поступальний рух інерційних мас уздовж осі z , або кутові коливання рамки разом з інерційними масами навколо осі y . Кутові коливання рамки вимірюються електростатичними датчиками, розташованими під інерційними масами.

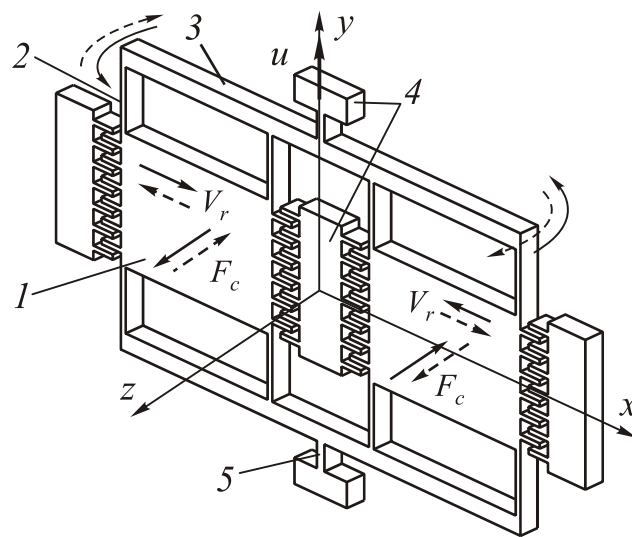


Рис. 14.11. Камертонний мікромеханічний гіроскоп

Отже, камертонний ММГ у випадку поступального характеру вторинних коливань інерційних мас являє собою два одномасові гіроскопи, з'єднані за диференціальною схемою.

Недоліком розглянутої схеми ММГ є розбіжність власних частот поступальних коливань інерційних мас унаслідок технологічних похибок виготовлення. Це зумовлює потребу підстроювання частот.

Мікромеханічні гіроскопи LL типу. Типовим прикладом побудови такого гіроскопа є дисковий ММГ (рис. 14.12).

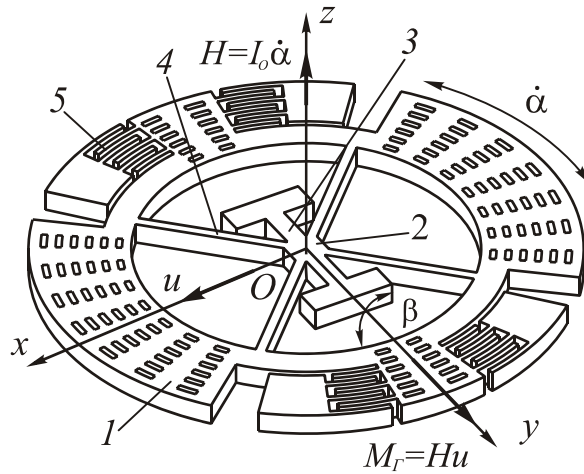


Рис. 14.12. Дісковий мікромеханічний гіроскоп

У такій схемі кутові рухи диска 1 навколо осі z збуджуються гребінчастим двигуном 5 на частоті, що дорівнює частоті власних кутових коливань. За кутової швидкості основи виникають сили Коріоліса, що спричиняють коливання диска по осі, перпендикулярній до його відносної швидкості й переносної кутової швидкості основи u .

14.3.2. Одномасовий осциляторний вібраційний гіроскоп

Найпростішим осциляторним вібраційним гіроскопом є одномасовий гіроскоп LL типу, схему якого показано на рис. 14.9.

Складемо рівняння руху цього гіроскопа.

Як і раніше, зв'яжемо з основою систему координат $Ox_c y_c z_c$ (рис. 14.13), а з інерційною масою – $Oxyz$. Припустимо також, що основа, на яку встановлено гіроскоп, здійснює обертання в інерціальному просторі з кутовою швидкістю \mathbf{u} , заданою її проекціями u_{x_c} , u_{y_c} і u_{z_c} на осі системи координат $Ox_c y_c z_c$. Положення центра мас чутливого елемента (інерційної маси) задамо вектором $\mathbf{r} = \{x, 0, z\}$.

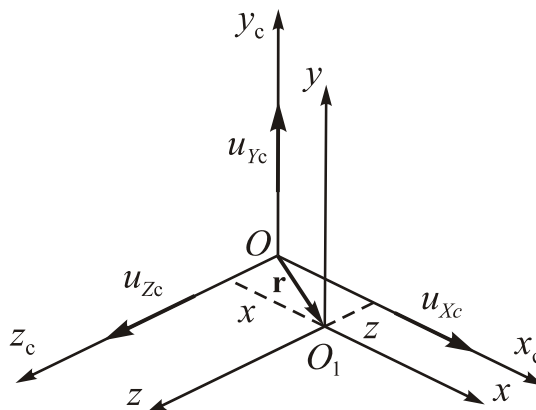


Рис. 14.13. Кінематика ОБГ

Рівняння руху складемо на основі дещо більш загальної форми рівнянь Лагранжа другого роду (1.101):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \Gamma}{\partial q} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = Q_q - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}, \quad (14.35)$$

де Q_i – узагальнені сили; Φ – дисипативна функція, яку визначають за формулою

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 f_i \dot{q}_i^2,$$

де як узагальнені координати узяті: $q_1 = x$ – переміщення у напрямку збудження коливальних (осі x) та $q_2 = z$ – переміщення уздовж вимірювальної осі z .

Абсолютна лінійна швидкість інерційної маси визначається векторним співвідношенням $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{u} \times \mathbf{r}$, або в проекціях на осі $O_1 x_c y_c z_c$:

$$\mathbf{V} \left\{ \dot{x} + u_{yc} z; u_{zc} x - u_{xc} z; \dot{z} - u_{yc} x \right\}. \quad (14.36)$$

Потенціальну енергію пружного підвісу визначимо формулою

$$\Pi = \frac{c_1}{2} x^2 + \frac{c_2}{2} z^2,$$

де c_1 і c_2 – жорсткості пружних в'язей у відповідних напрямках.

Кінетична енергія інерційної маси з урахуванням (14.36) має вираз

$$\Gamma = \frac{m}{2} V^2 = \frac{m}{2} \left[(\dot{x} + u_{yc} z)^2 + (x u_{zc} - z u_{xc})^2 + (\dot{z} - u_{yc} x)^2 \right].$$

Здійснюючи математичні операції у відповідності до (14.35), отримаємо рівняння руху одномасового ОБГ у вигляді

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + f_1 \dot{x} + [c_1 - m(u_{yc}^2 + u_{zc}^2)]x + 2m u_{yc} \dot{z} + m(\dot{u}_{yc} + u_{xc} u_{zc})z &= Q_1; \\ m\ddot{z} + f_2 \dot{z} + [c_2 - m(u_{yc}^2 + u_{xc}^2)]z - 2m u_{yc} \dot{x} - m(\dot{u}_{yc} - u_{xc} u_{zc})x &= Q_2, \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2h_1 \dot{x} + [k_1^2 - (u_{yc}^2 + u_{zc}^2)]x + 2u_{yc} \dot{z} + (\dot{u}_{yc} + u_{xc} u_{zc})z &= q_1; \\ \ddot{z} + 2h_2 \dot{z} + [k_2^2 - (u_{yc}^2 + u_{xc}^2)]z - 2u_{yc} \dot{x} - (\dot{u}_{yc} - u_{xc} u_{zc})x &= q_2, \end{aligned} \quad (14.37)$$

де

$$\begin{aligned} 2h_1 &= f_1/m; & 2h_2 &= f_2/m; & k_1^2 &= c_1/m; & k_2^2 &= c_2/m; \\ q_1 &= Q_1/m; & q_2 &= Q_2/m. \end{aligned}$$

У рівняння (14.37) переносна кутова швидкість u_{yc} входить як параметр.

Тому ці рівняння є рівняннями зі змінними коефіцієнтами.

За умови $\mathbf{u} \approx \text{const}$ рівняння руху набувають вигляду:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2h_1 \dot{x} + [k_1^2 - (u_{yc}^2 + u_{zc}^2)]x + 2u_{yc} \dot{z} + u_{xc} u_{zc} z &= q_1; \\ \ddot{z} + 2h_2 \dot{z} + [k_2^2 - (u_{yc}^2 + u_{xc}^2)]z - 2u_{yc} \dot{x} + u_{xc} u_{zc} x &= q_2. \end{aligned}$$

Це вже рівняння з постійними коефіцієнтами.

14.3.3. Мікромеханічний гіроскоп на обертовій основі

Проаналізуємо рух чутливого елемента одномасового ММГ.

Для аналізу руху чутливого елемента використаємо рівняння (14.37).

Кожне з отриманих рівнянь за формою запису збігається з рівнянням руху коливальної системи з одним ступенем вільності. Однак зміст правих частин розглянутих рівнянь відрізняється від змісту відповідних членів рівняння руху коливальної системи з одним ступенем вільності. Дійсно, члени рівнянь (14.50) є не тільки функціями узагальненої координати і її похідних, для якої написано рівняння, але й функцією іншої узагальненої координати і її похідних. Отже, маємо зв'язану систему двох рівнянь із двома узагальненими координатами.

Для полегшення розкриття фізичного змісту членів, що входять у рівняння руху, будемо умовно розглядати кожне з рівнянь системи як рівняння руху деякої коливальної системи з одним ступенем вільності з накладеними зв'язками. Такі окремі найпростіші коливальні системи, на які можна поділити складну систему, зазвичай називають *парціальними*.

Отже, коливальну систему із двома ступенями вільності будемо подавати як дві пов'язані між собою коливальні системи з одним ступенем вільності. «Зв'язок» між парціальними системами виражається у тому, що коливання однієї парціальної системи впливають на коливання іншої парціальної системи і навпаки через наявність у рівнянні кожної з них членів, залежних від коливань іншої парціальної системи.

З урахуванням зазначеного перетворимо рівняння (14.37) до вигляду

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2h_1\dot{x} + [k_1^2 - (u_{Yc}^2 + u_{Zc}^2)]x &= q_1(t) - 2u_{Yc}\dot{z} - (\dot{u}_{Yc} + u_{Xc}u_{Zc})z; \\ \ddot{z} + 2h_2\dot{z} + [k_2^2 - (u_{Yc}^2 + u_{Xc}^2)]z &= q_2(t) + 2u_{Yc}\dot{x} + (\dot{u}_{Yc} - u_{Xc}u_{Zc})x, \end{aligned} \quad (14.38)$$

де $2h_1 = f_1/m$; $2h_2 = f_2/m$ – коефіцієнти загасання по відповідних узагальнених координатах; $k_1 = \sqrt{c_1/m}$; $k_2 = \sqrt{c_2/m}$ – парціальні частоти; $q_1 = Q_1/m$; $q_2 = Q_2/m$ – узагальнені прискорення.

Із системи диференціальних рівнянь (14.38) видно, що рухи інерційної маси в напрямку обраних узагальнених координат за ідеального пружного підвісу пов'язані між собою тільки членами, що залежать від переносної кутової швидкості \mathbf{u} . Усі компоненти вектора кутової швидкості \mathbf{u} за винятком u_{Yc} входять у рівняння руху нелінійно. Отже, на відміну від РВГ, що є двокомпонентним вимірювачем кутової швидкості (амплітуда коливань ротора РВГ є пропорційною модулю вектора кутової швидкості $u_{\text{вим}} = \sqrt{u_{Yc}^2 + u_{Zc}^2}$), лінійний вимір кутової швидкості осциляторним гіроскопом можливий тільки в тому випадку, коли вектор \mathbf{u} спрямований по осі u_c чутливого елемента, тобто $u_{\text{вим}} = u_{Yc}$

Надалі будемо вважати $\mathbf{u}\{0, u, 0\}$, а систему рівнянь (14.38) перетворимо до вигляду

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 2h_1\dot{x} + (k_1^2 - u^2)x &= q_1 - 2u\dot{z} - iuz; \\ \ddot{z} + 2h_2\dot{z} + (k_2^2 - u^2)z &= q_2 + 2u\dot{x} + ix.\end{aligned}\quad (14.39)$$

Характерною рисою нових рівнянь руху є те, що вимірювана переносна кутова швидкість входить у них як параметр. Точні аналітичні розв'язки такої системи знаходити складно.

За умови $u \approx \text{const}$ рівняння (14.39) набудуть вигляду

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 2h_1\dot{x} + (k_1^2 - u^2)x &= q_1(t) - 2u\dot{z}; \\ \ddot{z} + 2h_2\dot{z} + (k_2^2 - u^2)z &= q_2(t) + 2u\dot{x}.\end{aligned}\quad (14.40)$$

Якщо виконується умова $k_i^2 \gg u^2$, рівняння руху будуть такими:

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 2h_1\dot{x} + k_1^2x + 2u\dot{z} &= q_1(t); \\ \ddot{z} + 2h_2\dot{z} + k_2^2z - 2u\dot{x} &= q_2(t).\end{aligned}$$

14.3.4. Власні коливання інерційної маси

Знайдемо власні частоти коливань чутливого елемента ММГ, скориставшись системою рівнянь (14.40). Будемо вважати, що прискорення $q_1(t)$ та $q_2(t)$ дорівнюють нулю.

Запишемо ці рівняння в операторній формі

$$\begin{aligned}(p^2 + 2h_1p + k_1^2 - u^2)x + 2upz &= 0; \\ -2upx + (p^2 + 2h_2p + k_2^2 - u^2)z &= 0.\end{aligned}\quad (14.41)$$

Для того, щоб одержані рівняння мали розв'язок, визначник матриці коефіцієнтів має дорівнювати нулю

$$\Delta = \begin{vmatrix} p^2 + 2h_1p + k_1^2 - u^2 & 2up \\ -2up & p^2 + 2h_2p + k_2^2 - u^2 \end{vmatrix} = 0,$$

або

$$(p^2 + 2h_1p + k_1^2 - u^2)(p^2 + 2h_2p + k_2^2 - u^2) + 4u^2p^2 = 0.$$

За умови $h_1 = h_2 = 0$ характеристичне рівняння набуде вигляду

$$\Delta(p) = p^4 + a_2p^2 + a_0 = 0, \quad (14.42)$$

де $a_2 = k_1^2 + k_2^2 + 2u^2$, $a_0 = (k_1^2 - u^2)(k_2^2 - u^2)$.

Оскільки в цьому випадку енергія не розсіюється, вільні коливання будуть незагасаючими і тому в рівнянні (14.42) можна покласти $p = j\omega$. В результаті дістаємо рівняння частот або вікове рівняння

$$\omega^4 - (k_1^2 + k_2^2 + 2u^2)\omega^2 + (k_1^2 - u^2)(k_2^2 - u^2) = 0.$$

Розв'язок цього рівняння відносно квадратів власних частот має вигляд

$$\omega_{01,02}^2 = \frac{1}{2} \left[(k_1^2 + k_2^2 + 2u^2) \pm \sqrt{(k_1^2 + k_2^2 + 2u^2)^2 - 4(k_1^2 - u^2)(k_2^2 - u^2)} \right]. \quad (14.43)$$

Графік залежності власних частот від вимірюваної кутової швидкості показано на рис. 14.14.

Із цього графіка $\Delta(\omega^2)$ випливає, що нижча частота власних коливань менша за найменшу парціальну частоту k_1 , а вища частота більша за найбільшу парціальну частоту k_2 .

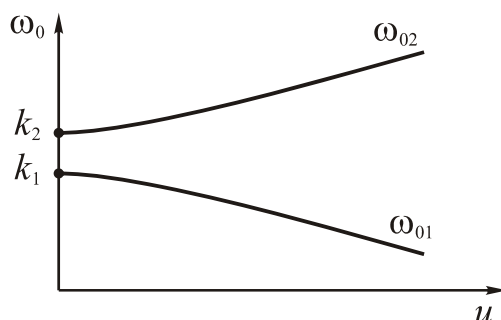


Рис. 14.14. Графік залежності ω_{0i} від вимірюваної швидкості

Розглянемо характер вільних коливань залежно від руху основи.

Нерухома основа. Якщо $u = 0$ рівняння (14.43) суттєво спрощується:

$$\omega_{01}^2 = k_1^2, \quad \omega_{02}^2 = k_2^2,$$

тобто власні частоти збігаються з парціальними частотами, а рівняння (14.41) розпадаються на дві парціальні підсистеми, а з урахуванням умов $h_1 = h_2 = 0$ та $k_1^2 = k_2^2 = \omega_0^2$ набудуть вигляду

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0;$$

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0.$$

За початкових умов $x(0) = x_0$; $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$; $z(0) = z_0$; $\dot{z}(0) = \dot{z}_0$ розв'язок цих рівнянь буде

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t; \\ z &= z_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{z}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \end{aligned} \quad (14.44)$$

Траєкторія руху інерційної маси в площині (x, z) у загальному випадку являє собою еліпс, тому її зручно досліджувати, скориставшись в фазовому просторі (x, \dot{x}, z, \dot{z}) так званими «тороїдальними» координатами a, b, φ, θ :

$$\begin{aligned} x &= a \cos \varphi \cos \theta - b \sin \varphi \sin \theta; & z &= a \sin \varphi \cos \theta + b \cos \varphi \sin \theta; \\ \dot{x} &= -\omega_0 a \cos \varphi \sin \theta - \omega_0 b \sin \varphi \cos \theta; & \dot{z} &= -\omega_0 a \sin \varphi \sin \theta + \omega_0 b \cos \varphi \cos \theta; \\ \theta &= \omega_0 t + \gamma_0. \end{aligned}$$

Тут (рис 14.15) a – велика піввісь еліпса; b – мала піввісь; φ – кут нахилу великої осі еліпса до осі x ; стала γ_0 визначає положення точки еліптичної траєкторії в початковий момент часу $t = 0$.

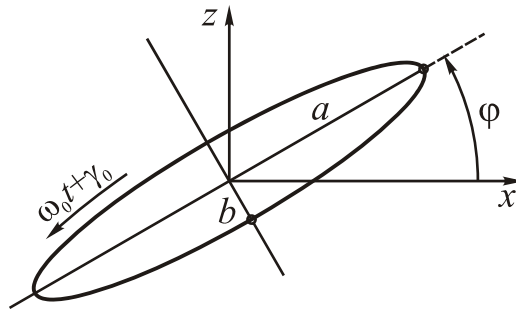


Рис. 14.15. Траєкторія руху інерційної маси

Кут нахилу визначається початковими умовами для рівнянь (14.44):

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2(\omega_0^2 x_0 z_0 + \dot{x}_0 \dot{z}_0)}{\omega_0^2 (x_0^2 - z_0^2) + (\dot{x}_0^2 - \dot{z}_0^2)}.$$

Параметри еліпсу можна визначити на основі аналізу виразів для повної енергії коливань і моменту імпульсу інерційної маси, звідки

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + \omega_0^2 (x^2 + z^2)] &= \frac{1}{2} \omega_0^2 (a^2 + b^2), \\ (z\dot{x} - x\dot{z}) &= \omega_0 ab. \end{aligned}$$

В результаті одержимо

$$a, b = \frac{1}{2} \left[\sqrt{(\omega_0 \dot{x}_0 + z_0)^2 + (\omega_0 \dot{z}_0 - x_0)^2} \pm \sqrt{(\omega_0 \dot{x}_0 - z_0)^2 + (\omega_0 \dot{z}_0 + x_0)^2} \right].$$

Рух основи з довільною кутовою швидкістю. Рівняння (14.40) розв'язуємо за умови вільних коливань інерційної маси без загасання, які за цих умов набудуть вигляду

$$\ddot{x} + (k^2 - u^2)x = -2uz - \dot{u}z; \quad \ddot{z} + (k^2 - u^2)z = 2ux + \dot{u}x. \quad (14.45)$$

Нехай орієнтацію системи координат $Ox_c y_c z_c$, зв'язаної з основою відносно інерціальної $O\xi\eta\zeta$ задано ортогональною матрицею $\Phi(t)$:

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = \Phi \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi(t) & 0 & \sin \varphi(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi(t) & 0 & \cos \varphi(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}, \quad (14.46)$$

де $\varphi(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau$

В інерціальній системі координат рівняння руху інерційної маси будуть такими

$$m\ddot{\xi} = F_\xi, \quad m\ddot{\zeta} = F_\zeta, \quad (14.47)$$

де

$$\begin{aligned} F_\xi &= F_{x_c} \cos \varphi(t) + F_{z_c} \sin \varphi(t); & F_\zeta &= -F_{x_c} \sin \varphi(t) + F_{z_c} \cos \varphi(t); \\ F_{x_c} &= -cx; & F_{z_c} &= -cz. \end{aligned} \quad (14.48)$$

Поєднавши рівняння (14.47) і (14.48), одержимо

$$m\ddot{\xi} = -c\xi; \quad m\ddot{\zeta} = -c\zeta,$$

тобто рух інерційної маси ММГ в інерціальних координатах не залежить від характеру кутового руху основи і являє собою коливання з частотою $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{m}}$, амплітуда яких визначається тільки початковими умовами:

$$\xi = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t;$$

$$\zeta = C_3 \cos \omega_0 t + C_4 \sin \omega_0 t,$$

де в загальному випадку $C_1 = \xi_0$; $C_2 = \frac{\dot{\xi}_0}{\omega_0}$; $C_3 = \zeta_0$; $C_4 = \frac{\dot{\zeta}_0}{\omega_0}$.

Після підставлення цих розв'язків у формулу (14.46) отримаємо

$$x = C_1 \cos \omega_0 t \cos \varphi(t) + C_2 \sin \omega_0 t \cos \varphi(t) + C_3 \cos \omega_0 t \sin \varphi(t) + C_4 \sin \omega_0 t \sin \varphi(t);$$

$$z = -C_1 \cos \omega_0 t \sin \varphi(t) - C_2 \sin \omega_0 t \sin \varphi(t) + C_3 \cos \omega_0 t \cos \varphi(t) + C_4 \sin \omega_0 t \cos \varphi(t),$$

або після деяких перетворень

$$x = \frac{1}{2} [(C_2 + C_3) \sin(\omega_0 t + \varphi(t)) + (C_2 - C_3) \sin(\omega_0 t - \varphi(t)) + (C_1 - C_4) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) + (C_1 + C_4) \cos(\omega_0 t - \varphi(t))];$$

$$z = \frac{1}{2} [(-C_1 + C_4) \sin(\omega_0 t + \varphi(t)) + (C_1 + C_4) \sin(\omega_0 t - \varphi(t)) + (C_2 + C_3) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) + (-C_2 + C_3) \cos(\omega_0 t - \varphi(t))].$$

Підставимо в отримані розв'язки змінну $\varphi(t)$, якої немає в досліджуваних рівняннях (14.45):

$$x = \frac{\dot{\xi}_0 + \omega_0 \zeta_0}{2\omega_0} \sin\left(\omega_0 t + \int_0^t u(\tau) d\tau\right) + \frac{\dot{\xi}_0 - \omega_0 \zeta_0}{2\omega_0} \sin\left(\omega_0 t - \int_0^t u(\tau) d\tau\right) + \frac{\dot{\zeta}_0 - \omega_0 \xi_0}{2\omega_0} \cos\left(\omega_0 t + \int_0^t u(\tau) d\tau\right) + \frac{\dot{\zeta}_0 + \omega_0 \xi_0}{2\omega_0} \cos\left(\omega_0 t - \int_0^t u(\tau) d\tau\right);$$

$$z = -\frac{\dot{\zeta}_0 - \omega_0 \xi_0}{2\omega_0} \sin\left(\omega_0 t + \int_0^t u(\tau) d\tau\right) + \frac{\dot{\zeta}_0 + \omega_0 \xi_0}{2\omega_0} \sin\left(\omega_0 t - \int_0^t u(\tau) d\tau\right) + \frac{\dot{\xi}_0 + \omega_0 \zeta_0}{2\omega_0} \cos\left(\omega_0 t + \int_0^t u(\tau) d\tau\right) - \frac{\dot{\xi}_0 - \omega_0 \zeta_0}{2\omega_0} \cos\left(\omega_0 t - \int_0^t u(\tau) d\tau\right).$$

Траєкторію руху інерційної маси показано на рис. 14.16.

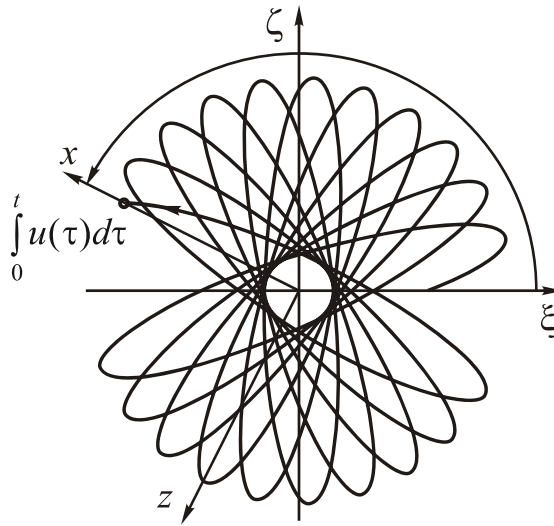


Рис. 14.16. Траєкторія руху інерційної маси під час обертання основи

Отже, осциляторний гіроскоп у режимі вільних коливань являє собою ідеальний інтегратор кутових швидкостей.

14.3.5. Вимушені коливання інерційної маси

Надалі будемо вважати, що узагальнене прискорення $q_2 = -W_{zc}$, а сила збудження Q_1 , створювана електростатичним приводом, спричиняє виникнення узагальненого прискорення, що змінюється за гармонічним законом

$$q_1(t) = q_{10} \sin \lambda t.$$

Розглянемо вторинний рух чутливого елемента ММГ за різних законів руху основи.

Нерухома основа. У цьому випадку переносна кутова швидкість $u = 0$, $W = 0$, і система диференціальних рівнянь руху (14.54) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2h_1\dot{x} + k_1^2x &= q_1(t); \\ \ddot{z} + 2h_2\dot{z} + k_2^2z &= 0, \end{aligned} \tag{14.49}$$

тобто розпадається на два незалежні лінійні диференціальні рівняння другого порядку щодо узагальнених координат.

Загальним розв'язком сукупності рівнянь (14.49) будуть такі залежності узагальнених координат від часу

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 e^{-h_1 t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{q_{10}}{\sqrt{(k_1^2 - \lambda^2)^2 + 4h_1^2 \lambda^2}} \sin(\lambda t - \gamma); \\ z(t) &= A_2 e^{-h_2 t} \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \end{aligned} \tag{14.50}$$

де $\omega_i = \sqrt{k_i^2 - h_i^2}$, постійні коефіцієнти A_i й φ_i визначаються початковими умовами, а фаза вимушених коливань γ зі співвідношення

$$\operatorname{tg} \gamma = 2h_1 \lambda / (k_1^2 - \lambda^2).$$

При виконанні умови резонансного настроювання ($\lambda = \omega_1 \approx k_1$) розв'язок (14.50) за нульових початкових умов набуде вигляду

$$x(t) = -\frac{q_{10}}{2h_1\lambda} (1 - e^{-h_1 t}) \cos \lambda t + \frac{q_{10}}{2\lambda^2} e^{-h_1 t} \sin \lambda t; \quad z(t) = 0.$$

Отже, інерційна маса після загасання власних коливань буде здійснювати вимушені (первинні) коливання з амплітудою, пропорційною силі збудження, уздовж осі x_c , у той час, як вздовж напрямку осі z_c вона залишиться нерухомою.

$$x(t) = \frac{q_{10}}{2h_1\lambda} \cos \lambda t; \quad z(t) = 0. \quad (14.51)$$

Характер руху інерційної маси під дією сили збудження показаний на рис. 14.17.

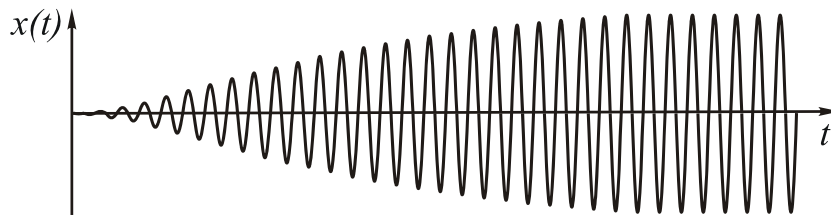


Рис. 14.17. Первинні коливання інерційної маси

Рух основи з постійною кутовою швидкістю. Розглянемо рух чутливого елемента ММГ за умови $u = \text{const}$ і $W_{z_c} = 0$. Для цього спочатку запишемо рівняння (14.54) в операторній формі, використовуючи оператор Лапласа p :

$$\begin{aligned} (p^2 + 2h_1 p + k_1^2 - u^2)x + 2upz &= q_1(p); \\ -2upx + (p^2 + 2h_2 p + k_2^2 - u^2)z &= 0. \end{aligned} \quad (14.52)$$

Розв'язок отриманих рівнянь в операторній формі:

$$\begin{aligned} x(p) &= \frac{[p^2 + 2h_2 p + (k_2^2 - u^2)]q_1(p)}{[p^2 + 2h_1 p + (k_1^2 - u^2)][p^2 + 2h_2 p + (k_2^2 - u^2)] + 4u^2 p^2}; \\ z(p) &= \frac{2u[pq_1(p)]}{[p^2 + 2h_1 p + (k_1^2 - u^2)][p^2 + 2h_2 p + (k_2^2 - u^2)] + 4u^2 p^2}. \end{aligned} \quad (14.53)$$

З урахуванням характеру змінювання $q_1(t) = q_{10} \sin \lambda t$ перетворимо розв'язки до вигляду

$$\begin{aligned} x(u) &= A_{11}(\lambda, u)u \sin(\lambda t + \varphi_1); \\ z(u) &= A_{21}(\lambda, u)u \sin(\lambda t + \varphi_2), \end{aligned}$$

де

$$A_{11} = \frac{q_{10} \sqrt{(k_2^2 - \lambda^2 - u^2)^2 + 4h_2^2 \lambda^2}}{\sqrt{\Delta^2}} = K_x(u, \lambda); \quad A_{21} = \frac{2q_{10} \lambda}{\sqrt{\Delta^2}} = K_z(u, \lambda)$$

– амплітудно-частотні характеристики;

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{2h_2\lambda}{k_2^2 - u^2 - \lambda^2} - \operatorname{arctg} \frac{2\lambda[h_1(k_2^2 - u^2 - \lambda^2) + h_2(k_1^2 - u^2 - \lambda^2)]}{(k_1^2 - u^2 - \lambda^2)(k_2^2 - u^2 - \lambda^2) - 4\lambda^2(h_1h_2 + u^2)};$$

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{2\lambda[h_1(k_2^2 - u^2 - \lambda^2) + h_2(k_1^2 - u^2 - \lambda^2)]}{(k_1^2 - u^2 - \lambda^2)(k_2^2 - u^2 - \lambda^2) - 4\lambda^2(h_1h_2 + u^2)};$$

$$\Delta^2 = [\lambda^4 - (k_1^2 + k_2^2 + 2u^2 + 4h_1h_2)\lambda^2 + (k_1^2 - u^2)(k_2^2 - u^2)]^2 + 4\lambda^2[h_1(k_2^2 - u^2) + h_2(k_1^2 - u^2) - (h_1 + h_2)\lambda^2]^2.$$

Останній вираз після деяких перетворень можна звести до вигляду

$$\Delta^2 = [(k_1^2 - u^2 - \lambda^2)(k_2^2 - u^2 - \lambda^2) - 4\lambda^2(h_1h_2 + u^2)]^2 + 4\lambda^2[h_1(k_2^2 - u^2 - \lambda^2) + h_2(k_1^2 - u^2 - \lambda^2)]^2. \quad (14.54)$$

Як бачимо, рух чутливого елемента ММГ з координати z являє собою вторинні коливання із частотою сили збудження й амплітудою, яка залежить від величини проекції кутової швидкості обертання основи \mathbf{u} на вісь чутливості Y_c .

На практиці часто використовується резонансний режим збудження вимушених коливань, тобто виконується умова $k_1 = \lambda$. При цьому зазвичай друга парціальна частота більша за першу парціальну частоту ($k_2 > k_1$).

Графіки залежності амплітуди z_m вторинних коливань від кутової швидкості за частоти збудження $\lambda = k_1$ для різних значень відношення парціальних частот k_2/k_1 зображено на рис. 14.18.

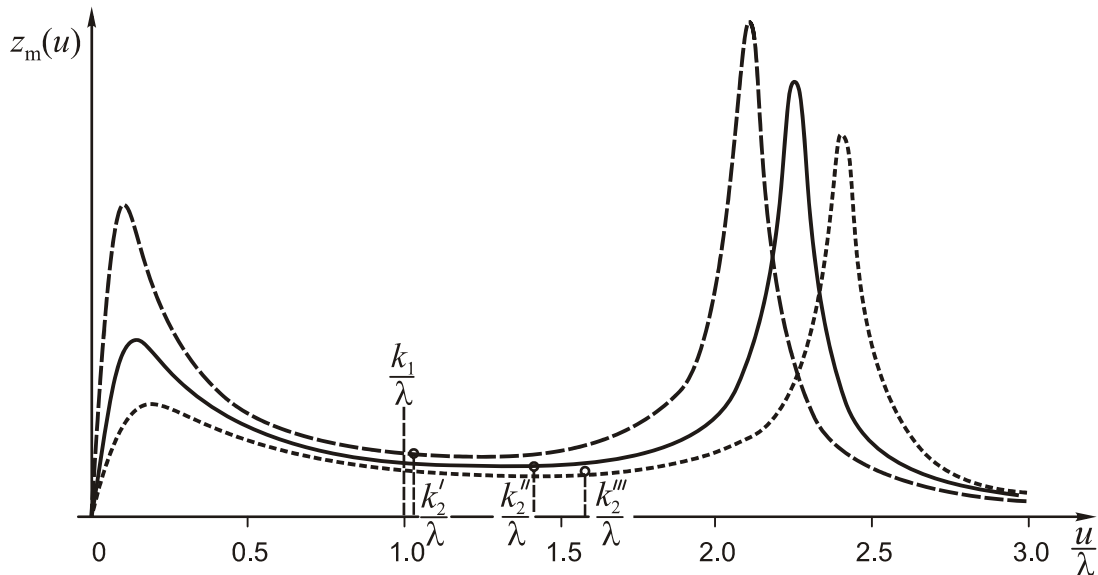


Рис. 14.18. Статичні характеристики ММГ

Як впливає з цих графіків, лінійна залежність амплітуди коливань від вимірюваної швидкості має місце на дуже обмеженій ділянці частот, яка значно менша від найменшої з парціальних частот (k_1). При цьому діапазон лінійної за-

лежності тим менший, а крутизна характеристики тим більша, чим менша різниця парціальних частот k_2 і k_1 і менший коефіцієнт загасання первинних коливань. З урахуванням цього розглянемо більш докладно роботу ММГ при виконанні умови $u/\lambda \ll 1$.

Початкові ділянки статичних $z_m = f_x(u/\lambda)$ і фазових характеристик $\varphi_2 = f(u/\lambda)$ для різних співвідношень парціальних частот ($k_2 = 1,05k_1$, $k_2 = 1,1k_1$ і $k_2 = 1,2k_1$) для $h_i = 0,0005k_i$ показано на рис. 14.19. Згідно з цими графіками вторинні коливання за малих вимірюваних швидкостей ($u/\lambda \leq 0,0005$) відбуваються практично у протифазі щодо сили збудження. Зі збільшенням відносної швидкості u/λ до одиниці зсув фаз наближується до 90° .

Діапазон вимірювань ММГ визначається лінійною залежністю амплітуди вторинних коливань від вимірюваної кутової швидкості, яку можна отримати з формули (14.53), якщо $u = 0$:

$$K(0) = \frac{2q_1\lambda}{2h_1\lambda\sqrt{(k_2^2 - \lambda^2)^2 + 4h_2^2\lambda^2}} \approx \frac{q_1}{h_1(k_2^2 - \lambda^2)} \quad (14.55)$$

Лінійна залежність амплітуди вторинних коливань від вимірюваної швидкості для цього випадку показана на рис. 14.19, а пунктиром.

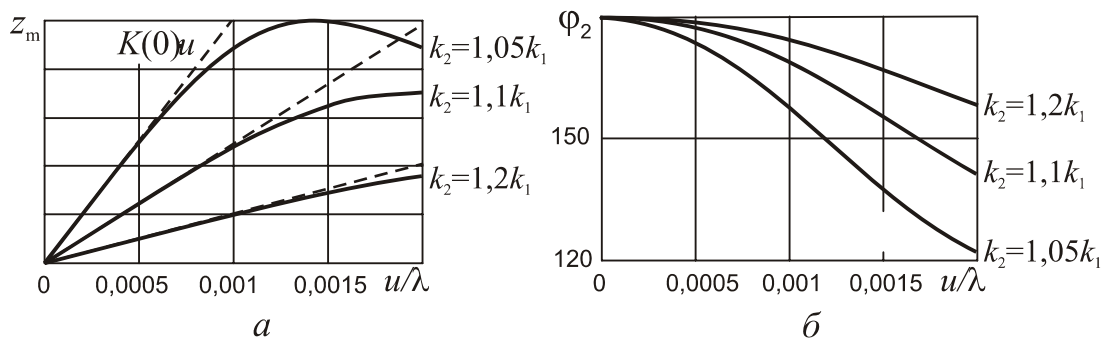


Рис. 14.19. Початкові ділянки амплітудної та фазової частотних характеристик

Ступінь відносної нелінійності коефіцієнта передачі можна визначити за формулою

$$\delta K(0) = \left| \frac{K(u) - K(0)}{K(0)} \right|.$$

Графік цієї нелінійності показано на рис. 14.20. При порівнянні цих графіків з рис. 14.19 видно, що зсув фаз вторинних коливань для однакової відносної нелінійності при різних співвідношеннях між парціальними частотами є однаковим.

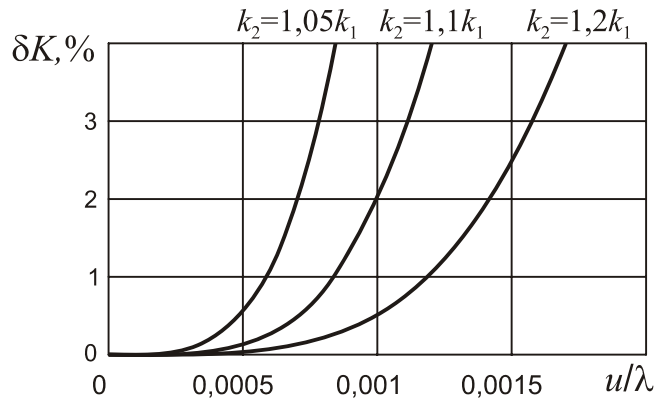


Рис. 14.20. Нелінійність коефіцієнта передачі

У реальних конструкціях частота збудження первинних коливань становить 3 – 15 кГц (9000 – 90000 1/с). Діапазон вимірюваної кутової швидкості для $\delta K \leq 0,5\%$ не перевищує $360^\circ/\text{с}$.

Така нелінійна залежність амплітуди вторинних коливань від вимірюваної кутової швидкості зумовлена впливом руху з координати z_c на рух по координаті x_c . Цей вплив здійснюється через гіроскопічний перехресний зв'язок (член $2uz\dot{z}$ у першому рівнянні системи (14.52).

Залежності амплітуди й фази первинних коливань від вимірюваної кутової швидкості показано на рис. 14.21 а, б.

Як бачимо, за малих відносних кутових швидкостей обертання u/λ вимушені коливання чутливого елемента в напрямку осі x_c відбуваються з постійною амплітудою, яка визначається переважно силою збудження Q_2 . Коливання зсунуті за фазою на 90° відносно цих сил. Вплив гіроскопічного перехресного зв'язку несуттєвий і ним можна знехтувати.

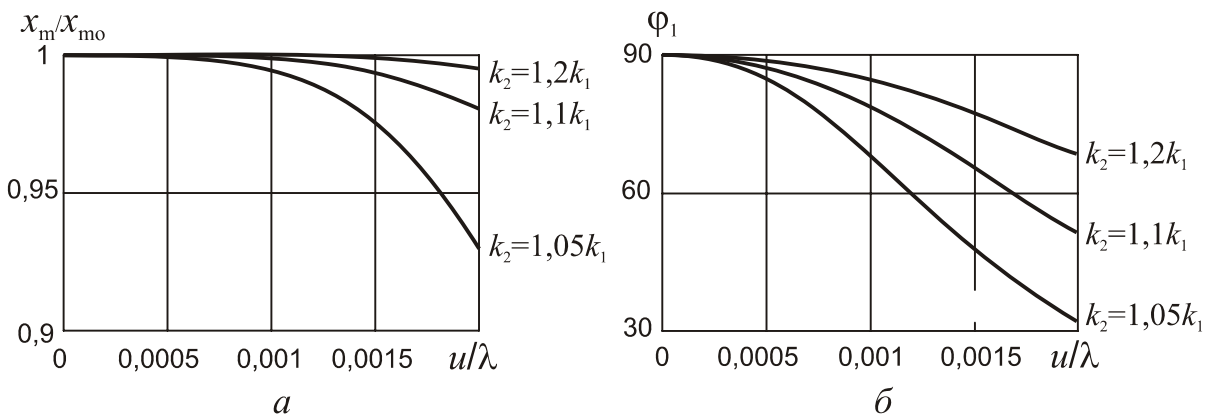


Рис. 14.21. Відносна амплітуда і фазовий зсув первинних коливань

Зменшити вплив гіроскопічного перехресного зв'язку при відносно великій швидкості обертання основи можна, застосовуючи системи автоматичного регулювання амплітуди первинних коливань.

Кутова вібрація основи. Розглянемо рух чутливого елемента ММГ за кутової вібрації основи навколо вимірювальної осі y_c за законом $u = u_0 \sin \omega t$ із частотою ω , набагато меншої частоти первинних коливань λ й амплітудою u_0 , при якій можна знехтувати нелінійністю коефіцієнта передачі $K(u, \lambda)$.

Рух чутливого елемента подамо системою рівнянь (14.40), що відповідно до умов набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2h_1\dot{x} + k_1^2x &= q_{10} \sin \lambda t; \\ \ddot{z} + 2h_2\dot{z} + k_2^2z &= 2u_0\dot{x} \sin \omega t + u_0x\omega \cos \omega t. \end{aligned} \quad (14.56)$$

Частинний розв'язок першого рівняння сукупності (14.56) співпадає з формулою (14.51):

$$x(t) = \frac{q_{10}}{2h_1\lambda} \cos \lambda t.$$

Швидкість первинного руху

$$\dot{x}(t) = -\frac{q_{10}}{2h_1} \sin \lambda t.$$

З урахуванням значень $x(t)$ і $\dot{x}(t)$ запишемо рівняння руху чутливого елемента по координаті z у формі:

$$\ddot{z} + 2h_2\dot{z} + k_2^2z = -u_0 \frac{q_{10}}{h_1} \sin \omega t \sin \lambda t + u_0 \frac{q_{10}\omega}{2h_1\lambda} \cos \omega t \cos \lambda t.$$

Зробивши заміну добутків тригонометричних функцій, отримаємо:

$$\ddot{z} + 2h_2\dot{z} + k_2^2z = \frac{q_{10}}{2h_1} u_0 \left[\left(1 + \frac{\omega}{2\lambda}\right) \cos(\lambda + \omega)t - \left(1 - \frac{\omega}{2\lambda}\right) \cos(\lambda - \omega)t \right].$$

Частинний розв'язок одержаного рівняння має вигляд

$$z = \frac{q_{10}}{2h_1} u_0 \left[\frac{\left(1 + \frac{\omega}{2\lambda}\right) \cos[(\lambda + \omega)t + \varphi_1]}{\sqrt{[k_2^2 - (\lambda + \omega)^2]^2 + 4h_2^2(\lambda + \omega)^2}} - \frac{\left(1 - \frac{\omega}{2\lambda}\right) \cos[(\lambda - \omega)t + \varphi_2]}{\sqrt{[k_2^2 - (\lambda - \omega)^2]^2 + 4h_2^2(\lambda - \omega)^2}} \right], \quad (14.57)$$

$$\text{де } \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{2h_2(\lambda + \omega)}{k_2^2 - (\lambda + \omega)^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{2h_2(\lambda - \omega)}{k_2^2 - (\lambda - \omega)^2}$$

У реальних конструкціях ММГ для забезпечення стабільності коефіцієнта передачі виконують умову

$$k_2^2 - (\lambda + \omega)^2 \gg h_2^2.$$

У цьому випадку можна припустити $\varphi_1 \approx \varphi_2 \approx 0$, що дозволяє істотно спростити вираз (14.57):

$$z \approx \frac{q_{10}}{2h_1} u_0 \left[\frac{\left(1 + \frac{\omega}{2\lambda}\right) \cos(\lambda + \omega)t}{k_2^2 - (\lambda + \omega)^2} - \frac{\left(1 - \frac{\omega}{2\lambda}\right) \cos(\lambda - \omega)t}{k_2^2 - (\lambda - \omega)^2} \right],$$

або після деяких перетворень

$$z = -\frac{q_{10}}{2h_1} \cdot \frac{2u_0 \left[(k_2^2 - \lambda^2) \sin \omega t \sin \lambda t - \frac{\omega}{2\lambda} (3\lambda^2 + k_2^2 - \omega^2) \cos \omega t \cos \lambda t \right]}{(k_2^2 - \lambda^2)^2 - 2\omega^2(k_2^2 + \lambda^2) + \omega^4}$$

Отже, у вихідному сигналі ММГ є корисна складова, синфазна вимірюваній кутовій швидкості, і завада, зсунута по фазі на 90° відносно вимірюваної кутової швидкості (квадратурна складова сигналу). Одночасно корисний сигнал і сигнал завади зсунуті за фазою на 90° з частотою модуляції λ .

Вигляд вторинних коливань для випадку $k_2 = 1,05\lambda$, $\omega = 0,01\lambda$ показано на рис. 14.22. Як видно, амплітуда квадратурної складової має значну величину й за великої частоти коливань ω може навіть перевищувати амплітуду корисного сигналу.

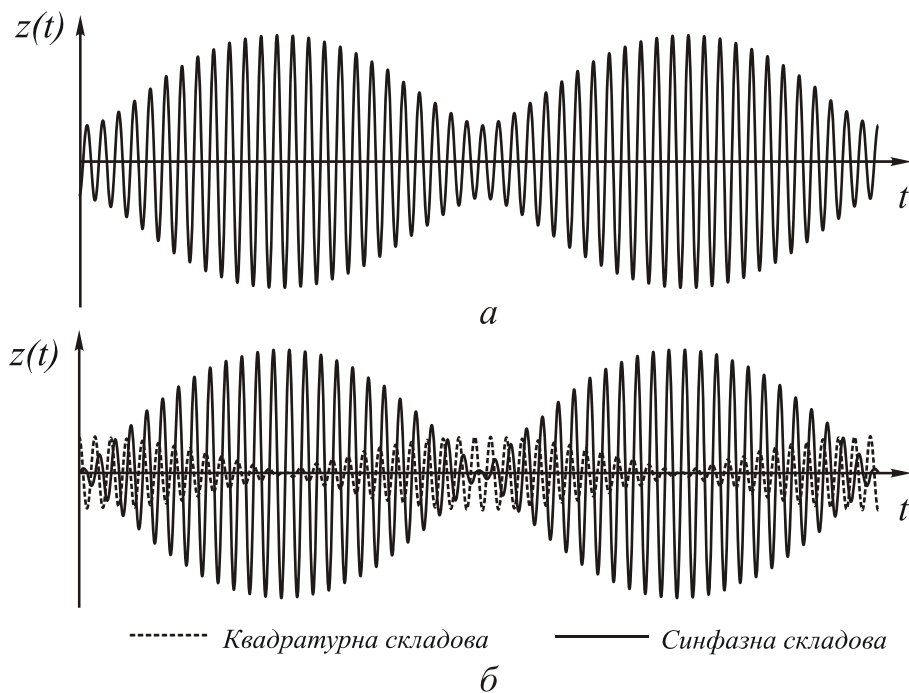


Рис. 14.22. Вторинні коливання за змінної швидкості основи

Однак зсув її за фазою на кут 90° на частоті модуляції дозволяє легко вирізнити корисну інформацію на фоні завади.

Подамо інформаційну складову сигналу у вигляді

$$z = -K(0) \cdot K^*(\omega) \cdot u_0 \sin \omega t \sin \lambda t,$$

де $K(0)$ – статичний коефіцієнт передачі, визначений формулою (14.55);

$$K^*(\omega) = \frac{1}{\frac{\omega^4}{(k_2^2 - \lambda^2)^2} - 2 \frac{\omega^2}{k_2^2 - \lambda^2} \cdot \frac{k_2^2 + \lambda^2}{k_2^2 - \lambda^2} + 1} \text{ – коефіцієнт динамічності.}$$

Вважаючи частоту коливань ω досить малою порівняно з модулем різниці частот k_2 й λ , тобто припустивши $\varepsilon = \frac{\omega^2}{|k_2^2 - \lambda^2|} \ll 1$, подамо коефіцієнт динамічності у вигляді розкладання за малим параметром ε :

$$K^*(\omega) \approx 1 + 2(\lambda^2 + k_2^2) \left(\frac{\omega}{k_2^2 - \lambda^2} \right)^2.$$

З урахуванням цього інформативну складову вторинних коливань можна подати у вигляді

$$z \approx \frac{q_{10} u_0}{h_1 (k_2^2 - \lambda^2)} \cdot \left[1 + \frac{2(\lambda^2 + k_2^2)}{(k_2^2 - \lambda^2)^2} \omega^2 \right] \sin \omega t \sin \lambda t.$$

Відносна похибка коефіцієнта передачі, зумовлена коливальним характером руху основи з частотою ω , дорівнює

$$\delta K(\omega) = |1 - K^*(\omega)| \cdot 100\% = \frac{2(\lambda^2 + k_2^2)}{(k_2^2 - \lambda^2)^2} \omega^2 \cdot 100\%.$$

Залежність величини $\delta K(\omega)$ від відносної частоти ω/λ кутового руху основи при різних значеннях відносини парціальних частот показана на рис. 14.23.

Із графіків видно, що зменшення відношення k_2/k_1 при $k_1 = \lambda$ приводить до істотного збільшення відносної похибки, тобто до зменшення динамічного діапазону вимірів. Так, зменшення відношення частот з 1,2 до 1,05 за припустимої нелінійності характеристики 1% зменшує динамічний діапазон учетверо – з $\omega_{\max} = 0,02\lambda$ до $\omega_{\max} = 0,005\lambda$. Водночас, відповідно до формули (14.55), коефіцієнт передачі збільшується більш ніж у четверо.

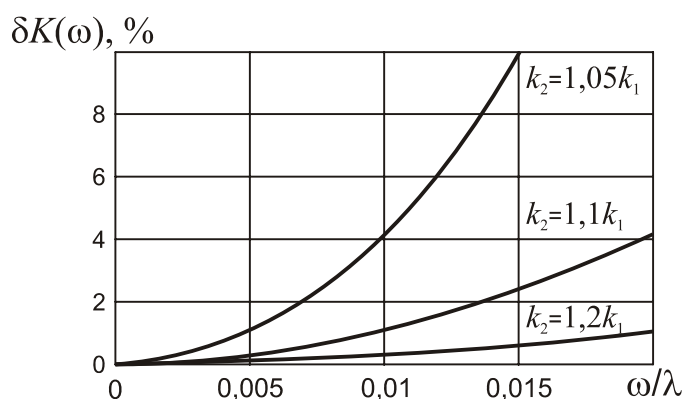


Рис. 14.23. Частотна характеристика ММГ

14.3.6. Вплив поступальних прискорень

Дослідимо рух чутливого елемента ММГ, встановленого на основі, яка одночасно здійснює кутовий рух з постійною кутовою швидкістю $\mathbf{u}\{0, U, 0\}$ та

поступальний рух з прискоренням $\mathbf{W}\{W_{Xc}, 0, W_{Zc}\}$. Рівняння руху чутливого елемента у цьому разі мають вигляд:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2h_1\dot{x} + (k_1^2 - u^2)x + 2u\dot{z} &= -W_{Xc}; \\ \ddot{z} + 2h_2\dot{z} + (k_2^2 - u^2)z - 2u\dot{x} &= q_2 - W_{Zc}. \end{aligned} \quad (14.58)$$

Система рівнянь лінійна, тому для її розв'язання скористаємось принципом суперпозиції. Візьмемо до уваги те, що на чутливий елемент діють також сили збудження з частотою λ . Тоді вплив поступального прискорення на рух чутливого елемента буде являти собою частинний розв'язок системи рівнянь

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2h_1\dot{x} + (k_1^2 - u^2)x + 2u\dot{z} &= -W_{Xc}; \\ \ddot{z} + 2h_2\dot{z} + (k_2^2 - u^2)z - 2u\dot{x} &= -W_{Zc}. \end{aligned}$$

який в разі $W_{Xc} = \text{const}$, $W_{Zc} = \text{const}$ становить

$$x_0 = -\frac{W_{Xc}}{k_1^2 - u^2} \approx -\frac{W_{Xc}}{k_1^2}; \quad z_0 = -\frac{W_{Zc}}{k_2^2 - u^2} \approx -\frac{W_{Zc}}{k_2^2}.$$

Отже, реакцією чутливого елемента на постійне прискорення буде його зміщення у протилежний бік дії цього прискорення.

Характер руху інерційної маси під дією прискорення W_{Zc} показаний на рис. 14.24.

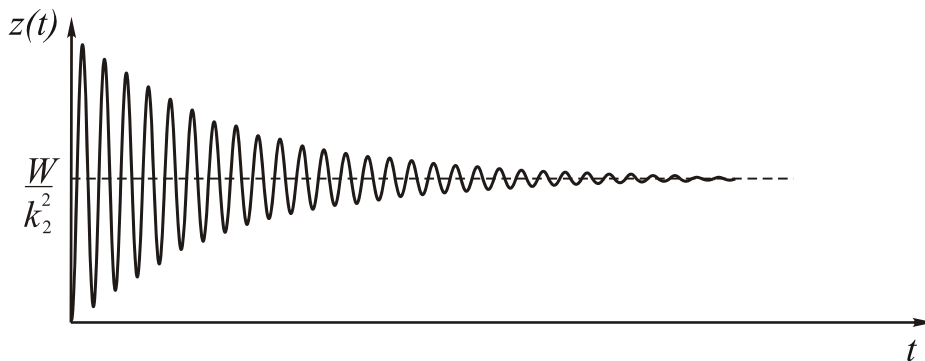


Рис. 14.24. Рух інерційної маси при дії лінійного прискорення

У разі поступальної вібрації основи рух чутливого елемента гіроскопа можна подати системою диференціальних рівнянь (14.58), у яких

$$W_{Xc} = W_{X0} \cos \omega t, \quad W_{Zc} = W_{Z0} \cos \omega t.$$

Скористаємось принципом суперпозиції. Частинні розв'язки системи диференціальних рівнянь руху чутливого елемента знаходимо у вигляді:

$$\begin{aligned} x(p) &= \frac{[p^2 + 2h_2p + (k_2^2 - u^2)][-W_{Xc}(p) + q_1(p)] + 2upW_{Zc}(p)}{[p^2 + 2h_1p + (k_1^2 - u^2)][p^2 + 2h_2p + (k_2^2 - u^2)] + 4u^2p^2} \\ z(p) &= \frac{[p^2 + 2h_1p + (k_1^2 - u^2)]W_{Zc}(p) + 2up[q_1(p) - W_{Xc}(p)]}{[p^2 + 2h_1p + (k_1^2 - u^2)][p^2 + 2h_2p + (k_2^2 - u^2)] + 4u^2p^2} \end{aligned} \quad (14.59)$$

З урахуванням характеру змінювання лінійних прискорень знайдемо вираз для амплітуди вторинних коливань, зумовлених поступальною вібрацією основи:

$$K_z(W, \omega) = \frac{\sqrt{(k_1^2 - u^2 - \omega^2)^2 W_{z0}^2 + 4\omega^2 (h_1 W_{z0} + u W_{x0})^2}}{\sqrt{\Delta^2(u, \omega)}},$$

де $\Delta^2(u, \omega)$ визначаємо аналогічно (14.54):

$$\Delta^2(u, \omega) = \left[(k_1^2 - u^2 - \omega^2)(k_2^2 - u^2 - \omega^2) - 4\lambda^2 (h_1 h_2 + u^2) \right]^2 + 4\lambda^2 \left[h_1 (k_2^2 - u^2 - \omega^2) + h_2 (k_1^2 - u^2 - \omega^2) \right]^2$$

Коливання чутливого елемента, спричинені поступальною вібрацією, відбуватимуться на частоті вібрації основи.

Графік вторинних коливань інерційної маси ММГ при постійній кутовій швидкості $u = u_0$ та гармонічно змінюваного лінійного прискорення $W_{zc} = W_{z0} \cos \omega_2 t$ показано на рис. 14.25.

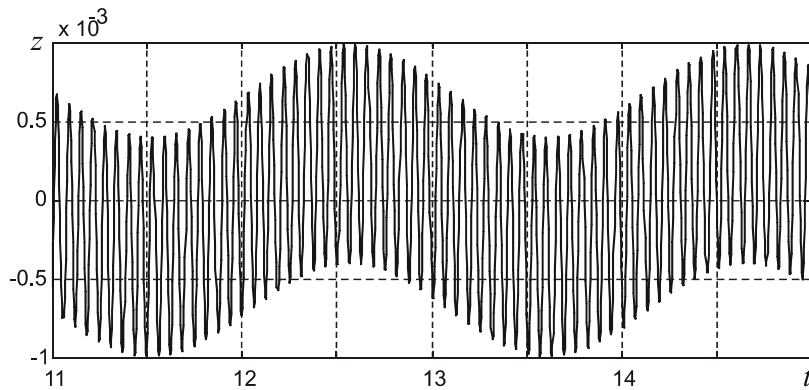


Рис. 14.25. Рух інерційної маси під час обертання та вібрації основи

Графік вторинних коливань інерційної маси за гармонічно змінюваних кутової швидкості $u = u_0 \cos \omega_1 t$ та лінійного прискорення $W_{zc} = W_{z0} \cos \omega_2 t$ показано на рис. 14.26.

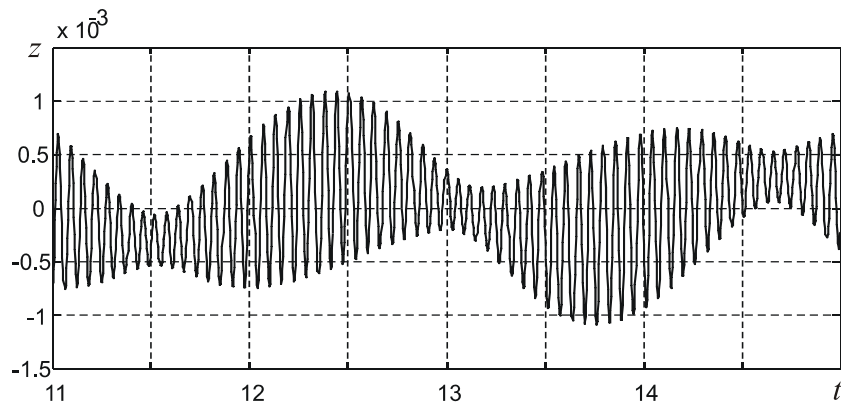


Рис. 14.26. Рух інерційної маси за кутової та лінійної вібрації основи

Якщо частота вібрації основи дорівнює частоті збудження λ , то амплітуда вторинних коливань інерційної маси

$$K_z(W, \lambda) = \frac{\sqrt{(k_1^2 - u^2 - \lambda^2)^2 W_{z0}^2 + 4\lambda^2 (h_1 W_{z0} + u W_{x0})^2}}{\sqrt{\Delta^2}}$$

Відношення амплітуди коливань, спричинених вібрацією основи, до амплітуди корисних коливань позначимо через δK_z і визначимо у такий спосіб

$$\delta K_z = \frac{K_z(W, \lambda)}{K_z(u, \lambda)} = \frac{\sqrt{(k_1^2 - u^2 - \lambda^2)^2 W_{z0}^2 + 4\lambda^2 (h_1 W_{z0} + u W_{x0})^2}}{2\lambda q_{10} u}$$

Тут $K_z(u, \lambda)$ визначається формулами (14.53).

Розглянемо вплив окремих складових лінійної вібрації на відносну похибку. У разі дії лінійного прискорення вздовж осі x_c первинних коливань відносна похибка вимірювань кутової швидкості згідно з формулою (14.59) буде становити

$$\delta K_z(W_{xc}) = \frac{W_{x0}}{q_{10}},$$

тобто залежить тільки від відношення амплітуд вібрації та прискорення збудження.

Графіки вторинних коливань, якщо $W_{xc} = 0$ та $W_{xc} = 0,5q_{10}$, показано на рис. 14.27.

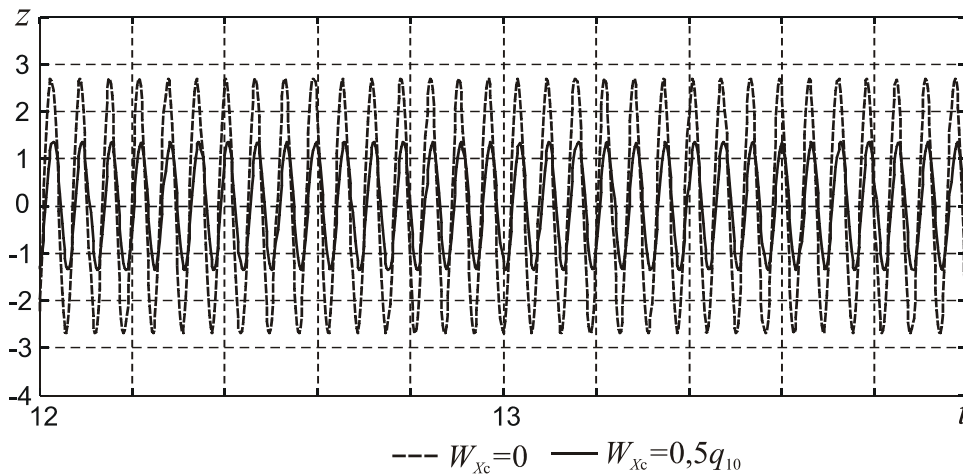


Рис. 14.27. Рух інерційної маси за вібрації основи вздовж осі первинних коливань

У разі лінійного прискорення вздовж осі z_c вторинних коливань відносна похибка вимірювань кутової швидкості згідно формули (14.59) за умови $k_1^2 = \lambda^2$ становитиме

$$\delta K_z(W_{zc}) = \frac{K_z(W_{z0})}{K_z(u)} = \frac{W_{z0} \sqrt{u^4 + 4\lambda^2 h_1^2}}{2\lambda u q_{10}}. \quad (14.60)$$

Уведемо позначення $\xi_1 = \frac{h_1}{\lambda}$; $v = \frac{U}{\lambda}$, з урахуванням яких формулу (14.60)

подамо у вигляді

$$\delta K_z(W_{Zc}) = \frac{W_{Z0}\lambda\sqrt{v^4 + 4\xi_1^2}}{2q_{10}v}$$

Як випливає з цієї формули, відносна похибка суттєво залежить від значення вимірюваної кутової швидкості.

Якщо частота вібрації основи не збігається з робочою частотою ММГ λ , то за фільтрації вихідного сигналу датчика на робочій частоті, коливання від вібрації можуть бути відфільтровані.

Одним з ефективних методів розділення сигналів кутової швидкості та лінійного прискорення є використання диференціальних схем побудови ММГ, яка складається з двох однакових чутливих елементів, первинні коливання яких збуджуються в протифазі (рис. 14.28).

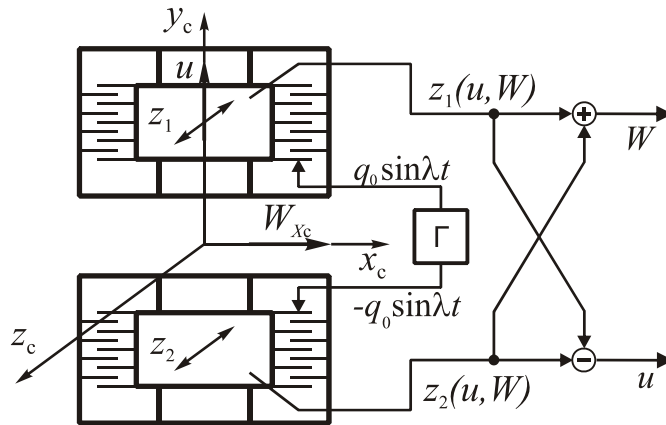


Рис. 14.28. Схема ММГ з диференціальним виходом

Вихідні сигнали z_1 , z_2 двох чутливих елементів з урахуванням того, що первинні коливання x_1 , x_2 здійснюються зі зсувом фаз 180° можна записати так:

$$z_1(p) = \frac{[p^2 + 2h_{11}p + (k_{11}^2 - u^2)] \cdot W_{Zc}(p) + 2up[q_{11}(p) - W_{Xc}(p)]}{[p^2 + 2h_{11}p + (k_{11}^2 - u^2)][p^2 + 2h_{21}p + (k_{21}^2 - u^2)] + 4u^2 p^2},$$

$$z_2(p) = \frac{[p^2 + 2h_{12}p + (k_{12}^2 - u^2)] \cdot W_{Zc}(p) - 2up[q_{12}(p) + W_{Xc}(p)]}{[p^2 + 2h_{12}p + (k_{12}^2 - u^2)][p^2 + 2h_{22}p + (k_{22}^2 - u^2)] + 4u^2 p^2}.$$

У разі виконання умов $h_{11} = h_{12} = h_1$; $h_{21} = h_{22} = h_2$; $k_{11} = k_{12} = k_1$; $k_{21} = k_{22} = k_2$; $q_{11} = q_{12} = q_1$ сумарний сигнал двох чутливих елементів буде таким

$$z_1(p) + z_2(p) = \frac{2[p^2 + 2h_1p + (k_1^2 - u^2)] \cdot W_{Zc}(p) - 4upW_{Xc}(p)}{[p^2 + 2h_1p + (k_1^2 - u^2)][p^2 + 2h_2p + (k_2^2 - u^2)] + 4u^2 p^2};$$

$$z_1(p) - z_2(p) = \frac{4u[pq_1(p)]}{[p^2 + 2h_1p + (k_1^2 - u^2)][p^2 + 2h_2p + (k_2^2 - u^2)] + 4u^2 p^2}.$$

Розглянемо окремо результати обробки вихідних сигналів.

Графік вторинних коливань інерційної маси за гармонічно змінюваних кутової швидкості $u = u_0 \cos \omega_1 t$ та лінійного прискорення $W_{zc} = W_{z0} \cos \omega_2 t$ було показано на рис. 14.26.

Результати обробки цього вихідного сигналу ММГ при використанні диференціальної схеми зображено на рис. 14.29.

Вихідний сигнал ММГ за спільної дії кутової швидкості $u = u_0 \cos \omega_1 t$ та лінійної вібрації $W_{zc} = W_{z0} \cos \lambda t$, частота якої дорівнює частоті збудження первинних коливань, зображено на рис. 14.30.

На рис. 14.31. наведені результати обробки такого вихідного сигналу ММГ при використанні диференціальної схеми побудови.

Отже, вирахування вихідних сигналів дозволяє одночасно позбутися впливу обох складових лінійних прискорень W_{zc} та W_{xc} .

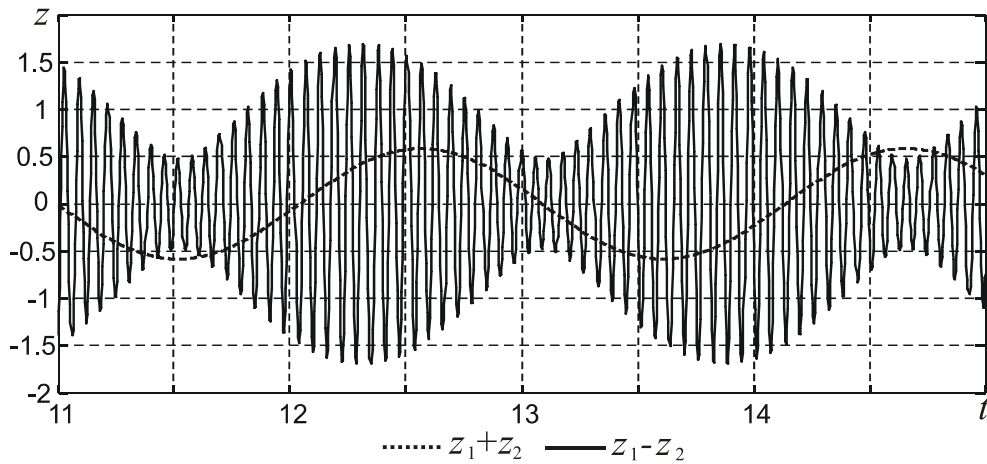


Рис. 14.29. Вихідні сигнали ММГ з диференціальним виходом

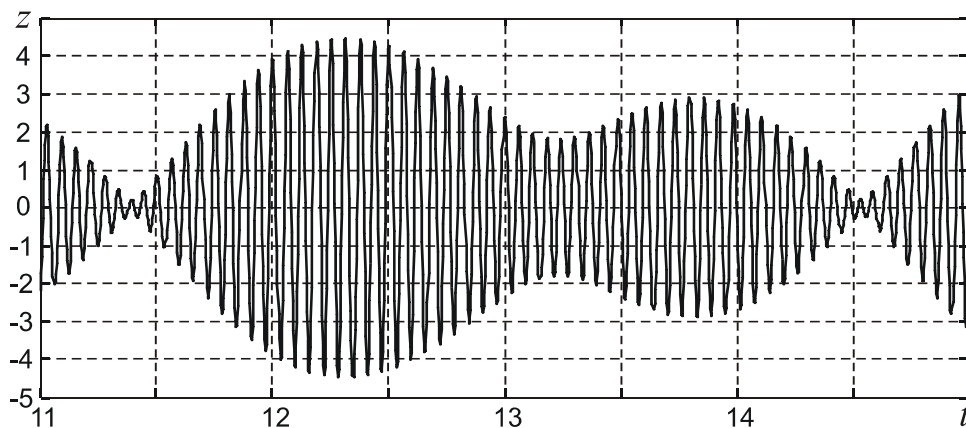


Рис. 14.30. Вихідний сигнал ММГ з при вібрації основи

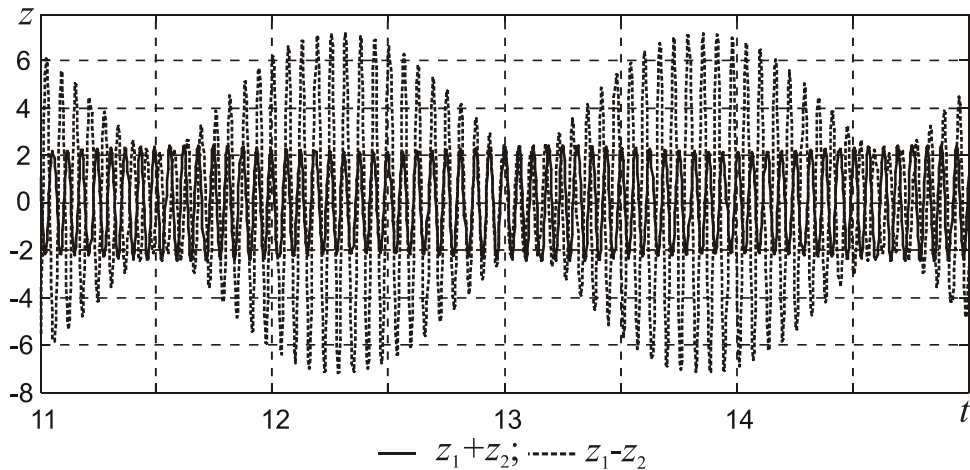


Рис. 14.31. Вихідні сигнали ММГ з диференціальним виходом при вібрації основи

Легко побачити, що використання диференціальних схем побудови ММГ дозволяє як ефективно позбутися впливу лінійних прискорень та вібрацій на корисну складову вихідного сигналу, так і застосовувати ММГ як комплексний вимірювач двох параметрів руху – кутової швидкості та лінійного прискорення.

Контрольні запитання

1. Як зміниться поведінка РВГ на основі, що обертається, якщо позбавитися в ньому в'язкого тертя ?
2. Поясніть фізичну сутність принципу динамічного налагодження РВГ.
3. Назвіть методи знімання інформації про рух ротора РВГ щодо корпусу приладу.
4. Схеми побудови і призначення двокільцевих підвісів РВГ.
5. Як побудувати на основі триступеневого РВГ вимірювач кутової швидкості?
6. Наведіть основні схеми осциляторних гіроскопів.
7. Чому дорівнює фазовий зсув між первинними та вторинними коливаннями чутливого елемента ММГ?
8. Як залежить діапазон лінійності статичної характеристики ММГ від співвідношення його парціальних частот k_1 і k_2 .
9. Який вплив лінійних прискорень на вихідний сигнал ММГ *LL* типу?
10. Як впливають лінійні прискорення на роботу ММГ *RR* типу?
11. Яке призначення додаткової рамки в ММГ *LL* типу?
12. Як за допомогою ММГ виміряти лінійне прискорення основи?

Література

[55, с. 250 – 268]; [51, с. 166 – 202]; [1]; [14]; [4]; [3]; [54]; [45]; [8]; [13]

Література для поглибленого вивчення

1. Apostolyuk V. A., Logeeswaran V. J., F. E. H. Tay. Analytical Design of Coriolis Vibratory // Gyroscopes Proceeding of Symposium Gyro Technology 2002. – Stuttgart, Germany, 2002. – P. 2.0 – 2.15
2. Авсюк Ю. Н. К вопросу М. В. Ломоносова о перемещениях центра Земли [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.rfbr.ru/default.asp?doc_id=5331
3. Апостолук В. А., Збруцкий А. В. Сравнительный анализ характеристик микромеханических гироскопов с поступательным и вращательным движениями чувствительного элемента // Гироскопия и навигация. – 1999. – № 4 (27). – С. 3 – 10.
4. Балабанов И.В. Обобщенная математическая модель одномассовых микромеханических гироскопов. IV международная научно-техническая конференция «Гиротехнологии, навигация, управление движением и конструирование авиационно-космической техники»: Сб. докладов. Ч.1 /К.: «НТУУ КПИ», 2003. – 378с. – С.123 – 129.
5. Блинов И. А. Электронавигационные приборы. Учебник для вузов ММФ / А. В. Жерлаков. – М.: Транспорт, 1980. – 448 с.
6. Бранец В. Н. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела / И. П. Шмыглевский – М.: Наука, 1973. – 320 с.
7. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1964. – 608 с.
8. Бугров Д. И. Одноосный вибрационный гироскоп. // Фундаментальная и прикладная математика. – 2005. – Т. 11, № 8. – С. 149—163.
9. Булгаков Б. В. Прикладная теория гироскопов – М.: МГУ, 1976. – 400 с.
10. Граммель Р. Гироскоп, его теория и применения. Т. 1 Теория гироскопа. – М.: ИЛ, 1952. – 362 с.
11. Давиденков Н. Н. О рассеянии энергии при вибрациях // ЖТФ. – 1938. – Т. VIII, вып. 6.
12. Журавлев В. Ф. Основы теоретической механики. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.
13. Журавлев В. Ф. Управляемый маятник Фуко как модель одного класса свободных гироскопов // Изв. РАН. МТТ. – 1997. – № 6. – С. 27 – 35.
14. Збруцкий А. В., Апостолук В. А. Динамика чутливих елементів мікромеханічних гіроскопів // Наукові вісті Національного технічного університету «КПІ», Київ. – 1999. – № 1. – С. 114 – 120
15. История механики гироскопических систем \ Сб. статей. – М.: Наука, 1975. – 128 с.
16. Ишлинский А. Ю. Механика гироскопических систем. – М.: АН СССР, 1963. – 482 с.
17. Ишлинский А. Ю. Механика. Идеи, задачи, приложения. – М.: Наука, 1985. – 624 с.
18. Ишлинский А. Ю. Лекции по теории гироскопов. Учебное пособие / В. И. Борзов, Н. И. Степаненко. – М.: МГУ, 1983. – 246 с.
19. Ишлинский А. Ю. Некоторые применения статистики к описанию законов деформирования тел // Изв. АН СССР. ОТН. – 1944. – № 9.
20. Ишлинский А. Ю. Уравнения деформирования не вполне упругих и вязко-пластичных тел // Изв. АН СССР. ОТН. – 1945. – № 1-2.
21. Капица П. Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1951. – Т. 21, вып. 5. – С. 588-597/
22. Капица П. Л. Маятник с вибрирующим подвесом // Успехи физических наук. – 1951. – Т. 64, вып. 1. – с. 7 – 20.
23. Кильчевский Н. А. Курс теоретической механики. Учебное пособие. Т. 1. Кинематика, статика, динамика точки. – М.: Наука, 1977. – 480 с.
24. Киттель Ч. Механика / У. Найт, М. Рудерман – М.: Наука, 1975. – 480 с.

25. Климов Д. М. Динамика гироскопа в кардановом подвесе / С. А. Харламов. – М.: Наука, 1978. – 208 с.
26. Климов Д. М. Дополнение 1. "Движение гироскопа при наличии сил трения, пропорциональных нормальным составляющим динамических реакций" // Е. Л. Николаи. Гироскоп в кардановом подвесе. – М.: Наука, 1964. – С. 103-119.
27. Коловский М. З. Нелинейная теория виброзащитных систем. – М.: Наука, 1966. – 318 с.
28. Крылов А. Н. Общая теория гироскопов и некоторых его технических приложений / Ю. А. Крутков // Собрание трудов академика А. Н. Крылова. Т. VIII. Механика. – М.-Л.: АН СССР, 1950. – 350 с.
29. Лазарев Ю. Ф. Выпрямительный эффект в прикладной теории гироскопов. Учебное пособие. – К.: КПИ, 1987. – 94 с.
30. Лазарев Ю. Ф. [Кінематика. Додатки. Навчально-довідковий матеріал](http://library.ntu-kpi.kiev.ua/) [Електронний ресурс]. – Режим доступу: – <http://library.ntu-kpi.kiev.ua/> – Стара версія сайту – Електронні документи – Видання кафедр і окремих кафедр – Видання кафедри приладів і систем орієнтації і навігації.
31. Лазарев Ю. Ф. Математичні моделі та методи теоретичного дослідження лінійних стаціонарних систем. Конспект лекцій. – Київ: КПИ, 1991. – 160 с.
32. Лазарев Ю. Ф. Методи теоретичного дослідження нелінійних і нестационарних динамічних систем. Конспект лекцій. – Київ: КПИ, 1991. – 180 с.
33. Лазарев Ю. Ф. Моделирование процессов и систем в Matlab. Учебный курс. – СПб.: Питер; Киев: Издательская группа BHV, 2005. – 512 с
34. Лазарев Ю. Ф. Моделювання на ЕОМ/ Навчальний посібник. – К.: Корнійчук, 2007. – 290 с.
35. Лазарев Ю. Ф. О моментах сил сухого трения в опорах упругой оси при колебаниях подвижной части прибора / В. С. Дидковский // Вестник КПИ. Серия приборостроения". – 1971. – № 2.
36. Левенталь Е. Б. О некоторых явлениях трения при вибрации и качаниях, влияющих на показания приборов // Точная индустрия. – 1937. – № 4-6.
37. Лесков М. М. Навигация. Учебник для вузов морск. трансп. / Ю. К. Баранов, М. И. Гаврюк. – М.: Транспорт, 1980. – 344 с.
38. Лойцянский Л. Г. Курс теоретической механики. Т. 2. Динамика. Учебное пособие / А.И. Лурье. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 596 с.
39. Лунц Я. Л. Введение в теорию гироскопов. Учебное пособие. – М.: Наука, 1972. – 296 с.
40. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения (Диссертация и статьи). – Препринт, 1935. – 386 с.
41. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. Учебное пособие. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
42. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. Учебное пособие. – М.: Наука, 1969. – 380 с.
43. Николаи Е. Л. Гироскоп в кардановом подвесе. – М.: Наука, 1964.– 138 с.
44. Николаи Е. Л. Гироскоп и некоторые его технические применения. – М.-Л.: Гостехиздат, 1947. – 152 с.
45. Одинцов А.А. Динамически настраиваемые гироскопы. – Киев: КПИ, 1992. – 66 с.
46. Одинцов А. А. Компенсационные гиротаксометры. – Киев: КПИ, 1969. – 118 с.
47. Одинцов А. А. Гироскопические приборы курса. Учеб. пособие / Ю. Ф. Лазарев – Киев: КПИ, 1980. – 110 с.
48. Павловський М. А. Теоретична механіка. Підручник. – Київ: Техніка, 2002. – 510 с.
49. Павловский М. А. Теория гироскопов. Учебник. – Київ: Вища школа, 1986. – 303 с.
50. Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний. Учебное пособие. – М.: Наука, 1991. – 256 с.

51. Пельпор Д.С. Гироскопические приборы систем ориентации и стабилизации / Ю.А. Осокин, Е.Р. Рахтеенко. – М.: Машиностроение, 1977. – 208 с.
52. Попов Е. П. Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления. Учебное пособие. – М.: Наука, 1979. – 256 с.
53. Развитие механики гироскопических и инерциальных систем. Сборник статей. – М.: Наука, 1973. – 456 с.
54. Распопов В. Я., Никулин А. В., Лихошерст В. В. Классификация конструкций микро-механических гироскопов // Изв. вузов. Приборостроение. – 2005. – Т. 48, № 8. – С. 5 – 9.
55. Распопов В. Я. Микромеханические приборы. Учебное пособие. – М.: Машиностроение, 2007. – 400 с.
56. Раус Э. Дж. Динамика системы твердых тел. Т. 1. – М.: Наука, 1983. – 464 с.
57. Северов Л. А., Пономарев В. К., Панферов А. И. Микромеханические гироскопы: конструкции, характеристики, технологии, пути развития // Изв. вузов. Приборостроение – 1998 – Т. 41. № 6 – С. 57 – 73.
58. Тарг С. М. Гироскоп // Физика. Большой энциклопедический словарь. – М.: Большая Российская энциклопедия, 1998. – С. 125 –127.
59. Титов Р. Ю. Мореходная астрономия. Учебник для мореходных училищ / Г. И. Файн. – М.: Транспорт, 1984. – 252 с.
60. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. III. – М.: Наука, 1970. – 656 с.
61. Флюгге-Лотц И. Метод фазовой плоскости в теории релейных систем. – М.: Физматгиз, 1959 – 176 с.
62. Халфман Р. Динамика. – М.: Наука, 1972. – 568 с.
63. Чаломей В. Н. Избранные труды. – М.: Машиностроение, 1989. – С. 23-28.
64. Эберт Г. Краткий справочник по физике. – М.: Физматгиз, 1963. – 552 с.
65. Яловенко А. В. Судовые гироскопические приборы. Учебн. пособие // М. М. Богданович. – Л.: Судостроение, 1990. – 224 с.

1.

ДОДАТКИ

Додаток 1. До розділу 4

Комплекс програм моделювання поведження фізичного маятника при поступальній вібрації точки його підвісу

```

% FizMayatnU
% Головна (керуюча) програма моделювання руху фізичного маятника

% Ю.Ф.Лазарев, кафедра ПСОН, КПІ, Україна, 7-10-1998р.
% Останні змінення - 16-04-2008
clc, clear all
FizMayatnU_Zastavka % Виклик програми Заставки
sname=input('Введіть прізвище І. Б. (в апострофах)');
k = menu(' Що робити ? ',' Продовжити роботу ',' Закінчити роботу ');
if k==1,
    while k==1
        FizMayatnU_Menu % Виклик програми Меню
        FizMayatnU_Yadro % Виклик Ядра програми
        k=menu(' Що робити ? ',' Продовжити роботу ',' Закінчити роботу ');
    end
end % Кінець головної програми FizMayatnU

=====
% FizMayatnU_Zastavka
% Частина програми FizMayatnU,
% що містить виведення заставки на екран

% Ю.Ф.Лазарев, кафедра ПСОН, КПІ, Україна, 24-09-1998р.
% Останні змінення - 01-02-2001
clc, echo on
% Це - програма FizMayatnU.
% Вона здійснює інтегрування рівнянь Фізичного Маятника
% при поступальній вібрації точки його підвісу:
%
% 
$$\text{gam}'' + 2*dz*gam' + (1+nmy*\sin(nu*t+ey))*\sin(\text{gam}) =$$

% 
$$= - nmx*\sin(nu*t+ex)*\cos(\text{gam})$$

%
% де gam - кут відхилення маятника від вертикалі,
% dz - відносний коефіцієнт згасання,,
% nu - відносна частота вібрації точки підвісу,
% nmy,nmx - амплітуди віброперевантаження у вертикальному
% і горизонтальному напрямках відповідно,
% ey,ex - початкові фази коливань у вертикальному
% і горизонтальному напрямках відповідно.
%
% У подальшому позначено KM1 = [dz,nmy,nmx,nu,ey,ex] -
% матриця коефіцієнтів цього рівняння.
echo off
disp('-----')
% Введення "вшитих" значень
global KM1 MPFUN
sprogram = 'FizMayatnU.m'; sname ='Лазарев Ю.Ф.';

```

```

KM1 = [0 0 0 0 0];    MPFUN = 'MomFm1';
tfinal =2*pi*5;      fi0 =pi/180;      fit0 = 0
% Кінець програми FizMayatnU_Zastavka

=====
% FizMayatnU_Menu
% Частина програми FizMayatnU,
% що здійснює діалогове введення і змінювання даних

% Ю.Ф.Лазарев, кафедра ПСОН, КПи, Україна,   24-09-1998р.
% Останні змінення - 01-02-2001
k=1;
while k<10
    disp(' ')
    disp('          Зараз встановлено ')
    disp([sprintf(' Початковий відхил = %g град.', fi0*180/pi),...
    sprintf(' Початкова швидкість = %g', fit0)])
    disp(sprintf(' Кількість періодів = %g', tfinal/2/pi))
    disp(' dz nmy nmx nu ey ex ')
    disp(KM1)
    k = menu(' Що змінити ? ', ...
    sprintf(' Віднозн. к-нт згасання = %g', KM1(1)),...
    sprintf(' Перевантаж.(вертикаль) = %g', KM1(2)),...
    sprintf(' Перевантаж.(горизонт.) = %g', KM1(3)),...
    sprintf(' Відносна частота вібрації = %g', KM1(4)),...
    sprintf(' Фаза (вертикаль) = %g град.', KM1(5)*180/pi),...
    sprintf(' Фаза (горизонт.) = %g град.', KM1(6)*180/pi),...
    sprintf(' Початковий відхил = %g град.', fi0*180/pi),...
    sprintf(' Початкова швидкість = %g', fit0),...
    sprintf(' Кількість періодів = %g', tfinal/2/pi),...
    ' Нічого не змінювати ');
    disp(' ')
    if k<7,
        KM1(k) = input(['Зараз KM1(',num2str(k),sprintf(') = %g', KM1(k)),...
        ' Введіть нове значення = ']);
    elseif k==7
        fi0 = input([sprintf('Зараз fi0 = %g градусів', fi0*180/pi),...
        ' Введіть нове значення = ']);
        fi0 = fi0*pi/180;
    elseif k==8
        fit0 = input([sprintf('Зараз fit0 = %g', fit0),...
        ' Введіть нове значення = ']);
    elseif k==9
        tfinal = input([sprintf('Зараз кількість періодів = %g', tfinal/2/pi),...
        ' Введіть нове значення = ']);
        tfinal = tfinal*2*pi;
    end
end
% Кінець програми FizMayatnU_Menu

=====
% FizMayatnU_Yadro
% Частина програми FizMayatnU, яка здійснює головні обчислення
% (чисельне інтегрування ДР)

% Ю.Ф.Лазарев, кафедра ПСОН, КПИ, Україна,   7-10-1998р.
% Останні змінення - 20-06-2008
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% 1. Підготовка початкових умов
%-----
t = 0;  tf = tfinal;  y0 =[fi0 fit0];

```

```

options = odeset('RelTol',1e-8,'AbsTol',[1e-10 1e-10]);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% 2. Організація циклу інтегрування
%-----
    [t,y] = ode45('FM2',[0 tf],y0,options);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% 3. Виведення графіків
subplot(2,1,2); plot(t/2/pi,y(:,1)*180/pi,'.-');grid;
set(gca,'Fontname','MS Sans Serif','FontSize',14)
title('Відхилення від вертикалі');
xlabel('t, періоди малих власних коливань'); ylabel('Кут \gamma, град. ');
subplot(2,4,1:2); plot(y(:,1)*180/pi,y(:,2),'.-');grid;
set(gca,'Fontname','MS Sans Serif','FontSize',14)
title('Фазовий портрет'); xlabel('Кут \gamma, град. '); ylabel('Швидкість \gamma');
subplot(2,4,3:4); axis('off');
h1= text(0.2,1.1,'Пух фізичного маятника','FontSize',14,'FontWeight','Bold',...
'Fontname','MS Sans Serif');
h1=text(0.25, 1.02,'відповідно до рівняння','FontSize',12,'Fontname','MS Sans Serif');
h1=text(0,0.9,'\gamma'' + 2\zeta\gamma\prime + [1+n_m_y\sin(\nu+\epsilon_y)]\sin\gamma =',...
'FontSize',14);
h1=text(0.45,0.8,' - n_m_x\sin(\nu+\epsilon_x)\cos\gamma','FontSize',14);
h1=text(0,0.7,'за таких значень параметрів:', 'FontSize',12,'Fontname','MS Sans Serif');
h1=text(0.45,0.6,sprintf('\zeta = %g',KM1(1)), 'FontSize',14);
h1=text(0,0.5,sprintf('n_m_y = %g',KM1(2)), 'FontSize',14);
h1=text(0.7,0.5,sprintf('n_m_x = %g',KM1(3)), 'FontSize',14);
h1=text(0,0.4,sprintf('\epsilon_y = %g, град.',KM1(5)*180/pi), 'FontSize',14,'Fontname',...
'MS Sans Serif');
h1=text(0.7,0.4,sprintf('\epsilon_x = %g, град.',KM1(6)*180/pi), 'FontSize',14,'Fontname',...
'MS Sans Serif');
h1=text(0.45,0.3,sprintf('\nu = %g',KM1(4)), 'FontSize',12);
h1=text(0,0.2,'і початкових умов:', 'FontSize',12,'Fontname','MS Sans Serif');
h1=text(0,0.1,sprintf('\gamma(0) = %g, град.',f0*180/pi), 'FontSize',14,'Fontname','MS Sans Serif');
h1=text(0.7,0.1,sprintf('\gamma''(0) = %g',fit0), 'FontSize',14);
h1=text(0,0.05,'-----');
h1=text(0,-0.2,'-----');
h1=text(-0.05,-0.05,[' ',sprogram], 'Fontname','MS Sans Serif');
h1=text(0.4,-0.05,'Автор Лазарєв Ю.Ф., каф. ПСОН', 'Fontname','MS Sans Serif');
h1=text(-0.05,-0.15,['Виконав ',sname], 'Fontname','MS Sans Serif');
tm=fix(clock); Tv=tm(4:5); h1=text(0.5,-0.15,[sprintf(' %g:',Tv), ' ',date]);
% Кінець програми FizMayatnU_Yadro

=====
function z=FM2(t,y);
% Процедура обчислення правих частин ДУ маятника

% Лазарєв Ю.Ф. 1-02-2001
global MPFUN
z(1)=y(2);
z(2)=-sin(y(1))+feval(MPFUN,t,y);
z=z';
% Кінець процедури FM2

=====

function m=MomFM1(t,y);
% Процедура обчислення моментів сил, що діють на фізичний маятник
% за поступальної вібрації точки його підвісу

% Лазарєв Ю. Ф. 24-05-2009
global KM1
m=-2*KM1(1)*y(2)-KM1(3)*sin(KM1(4)*t+KM1(6))*cos(y(1))-KM1(2)*sin(KM1(4)*t+KM1(5))*sin(y(1));

```

Додаток 2. До розділу 6**Комплекс програм моделювання руху торпеди**

```

% TORP_
% Головна (керуюча) програма моделювання руху з рискання ТОРПЕДИ,
% яка керується системою автоматичного керування
% з нелінійним (релейним з гістерезисом) законом керування

% Ю.Ф.Лазарев, кафедра ПСОН, КПІ, Україна,
% Почато 13-02-2000 Останні змінення 13-11-2009
clear all, clc
TORP_Zastavka
k = menu(' Що робити ? ',' Продовжити роботу ',' Закінчити роботу ');
if k==1
    sname =input('Введіть ваше прізвище та ініціали (в апострофах) ');
    if isempty(sname), sname='Ю. Ф. Лазарев'; end
    while k==1,
        TORP_Menu
        TORP_Yadro
        TORP_Vyvod
        k = menu(' Що робити ? ',' Продовжити роботу ',' Закінчити роботу ');
    end
end
end

=====
% TORP_Zastavka
% Частина програми TORP_, яка здійснює введення первісних значень даних
% Ю.Ф.Лазарев, кафедра ПСОН, КПІ, Україна,
% Почато 13-02-2000 Останні змінення 29-06-2008
% Задання значень первісних даних
% 1. Параметри торпеди
% 1.1. Момент інерції торпеди відносно вертикальної осі
% J=500;
% 1.2. Коефіцієнт опору обертанню торпеди навколо вертикалі
% R=500;
% 2. Початкові умови
% 2.1. Початкове відхилення торпеди від заданого напрямку
% psi0=6*pi/180;
% 2.2. Початкова кутова швидкість торпеди за рисканням
% psit0=0;
% 3. Параметри момента сил керування правого стерна
% 3.1. Величина момента сил керування торпедою за рисканням
% (відповідає повному переключенню стерна)
% c1=1000;
% 3.2. Кут рискання, що відповідає включенню переключення стерна
% b21=2*pi/180;
% 3.2. Кут рискання, що відповідає виключенню переключення стерна
% b11=-2*pi/180;
% 3. Параметри момента сил керування лівого стерна
% 3.1. Величина момента сил керування торпедою за рисканням
% (відповідає повному переключенню стерна)
% c2=1000;
% 3.2. Кут рискання, що відповідає включенню переключення стерна
% b12=2*pi/180;
% 3.2. Кут рискання, що відповідає виключенню переключення стерна
% b22=-2*pi/180;
% 4. Параметри інтегрування
% 4.1. Кількість кроків інтегрування у найменшому періоді коливань
% ni=100;

```



```

%      4.2. Інтервал інтегрування у часі у кількості найбільших періодів коливань
%          ntk=5;
%      5. Параметри збурень
%      5.1. Кутова швидкість горизонтального виру
%          pv0=0;
%      5.2. Амплітуда гармонійної складової кутової швидкості виру
%          pvm=0;
%      5.3. Частота гармонійної складової кутової швидкості виру
%          omp=0;
%      5.2. Початкова фаза гармонійної складової кутової швидкості виру
%          ep=0;
%      % ===== Розрахунки кроку та кінцевої миті інтегрування
om0=sqrt(abs((c1+c2)/J/2)); % Частота власних коливань торпеди за рисканням
mx=max(abs([abs(omp),om0]));% Максимальна частота коливань
hi=2*pi/(ni*mx); % Крок інтегрування
if om0~=0, Tmax=2*pi/om0;
if omp~=0, T1=2*pi/abs(omp); Tmax=max([Tmax T1]); end
else
disp('Помилка! Момент керування торпедою не може дорівнювати нулеві !');
end
tfinal=ntk*Tmax; % Кінцева мить інтегрування
% % % % Формування текстового оформлення екрану % % % % %
clc, echo on
%
%      Перед вами програма TORP_m
%      "Моделювання руху ТОРПЕДИ з релейним з гистерезисом законом керування"
%
echo off

=====
%      TORP_Menu
%      Частина програми TORP, яка здійснює діалогове
%      ЗМІНЮВАННЯ ВСТАНОВЛЕНИХ ПАРАМЕТРІВ

%      Ю.Ф.Лазарев, кафедра ПСОН, КПІ, Україна,
%      Почато 13-02-2000 Останні змінення 14-11-2009
k=1;
while k<7
    clc, disp(' '); disp(' '); disp([' З програмою TORP_m працює ',sname]);
    echo on
%      Моделюється рух Т О Р П Е Д И з кута рискання
%      шляхом чисельного інтегрування диференційного рівняння її бічного руху
%       $J*\psi'' + R*[\psi'-pvt(t)] + F(\psi) = 0,$ 
%      де pvt(t) - задана функція часу, яка характеризує
%      кутову швидкість обертання навколишнього
%      середовища (води) навколо вертикалі (вихор)
%      F(psi) - задана нелінійна функція вимірюваного кута
%      рискання, що характеризує момент сил, який накладається
%      на торпеду відносно вертикалі через її орган
%      керування; прийнята релейна з гістерезисом залежність
%
    echo off
    k=menu(' Що змінювати? ',...
    sprintf('Момент інерції торпеди: J= %g;',J),...
    sprintf('Коефіцієнт опору: R= %g;',R),...
    [sprintf('Початкові умови: psi0= %g;',psi0*180/pi),sprintf(' psi0= %g;',psi0)],...
    'Параметри момента керування',...
    [sprintf('Параметри збурення середовища: pv0= %g;',pv0),...
    sprintf(' pvm= %g;',pvm),sprintf(' omp= %g;',omp),sprintf(' ep= %g;',ep*180/pi)],...
    [sprintf('Параметри інтегрування: ni= %g;',ni),sprintf(' ntk= %g;',ntk)],...
    ' Нічого не змінювати ');
    disp('')

```

```

if k==1, J=input(sprintf('Зараз J=%g; Уведіть нове значення =',J)); end
if k==2, R=input(sprintf('Зараз R=%g; Уведіть нове значення =',R)); end
if k==3, k2=1;
while k2<3
    k2=menu(' Що саме змінити? ', sprintf(' psi0= %g;',psi0*180/pi),...
    sprintf(' psit0= %g;',psit0),' Нічого не змінювати ');
    if k2==1
        psi0=input(sprintf('Зараз psi0=%g; Уведіть нове значення (у градусах)
        =',psi0*180/pi));
        psi0=psi0*pi/180;
    end
    if k2==2
        psit0=input(sprintf('Зараз psit0=%g; Уведіть нове значення (у градусах) =',psit0))
    end
end
end
if k==4, k2=1;
while k2<7
    k2=menu(' Що саме змінити? ',...
    sprintf(' Величину моменту керування правого стерна c1= %g;',c1),...
    sprintf(' Кут вмикання переключення правого стерна b21= %g;',b21*180/pi),...
    sprintf(' Кут вимикання переключення правого стерна b11= %g;',b11*180/pi),...
    sprintf(' Величину моменту керування лівого стерна c2= %g;',c2),...
    sprintf(' Кут вмикання переключення лівого стерна b12= %g;',b12*180/pi),...
    sprintf(' Кут вимикання переключення лівого стерна b22= %g;',b22*180/pi),...
    ' Нічого не змінювати ');
    if k2==1
        c1=input(sprintf('Зараз c1=%g; Уведіть нове значення =',c1));
    end
    if k2==2
        b21=input(sprintf('Зараз b21=%g; Уведіть нове значення (у граду-
        сах)=' ,b21*180/pi));
        b21=b21*pi/180;
    end
    if k2==3
        b11=input(sprintf('Зараз b11=%g; Уведіть нове значення (у градусах)
        =',b11*180/pi));
        b11=b11*pi/180;
    end
    if k2==4
        c2=input(sprintf('Зараз c2=%g; Уведіть нове значення =',c2));
    end
    if k2==5
        b12=input(sprintf('Зараз b12=%g; Уведіть нове значення (у граду-
        сах)=' ,b12*180/pi));
        b12=b12*pi/180;
    end
    if k2==6
        b22=input(sprintf('Зараз b22=%g; Уведіть нове значення (у градусах)
        =',b22*180/pi));
        b22=b22*pi/180;
    end
end
end
if k==5, k2=1;
while k2<5
    k2=menu(' Що саме змінити? ',...
    sprintf(' Сталу складову швидкості вихору pv0= %g;',pv0),...
    sprintf(' Амплітуду швидкості вихору pvm= %g;',pvm),...
    sprintf(' Частоту гармонічної складової вихору omp= %g;',omp),...
    sprintf(' Фазу гармонічної складової вихору ep= %g;',ep*180/pi),...
    ' Нічого не змінювати ');

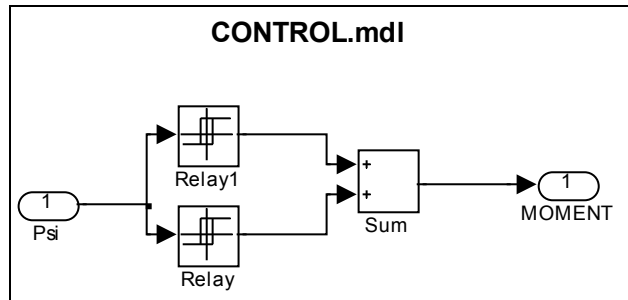
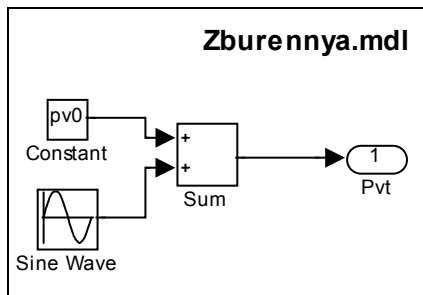
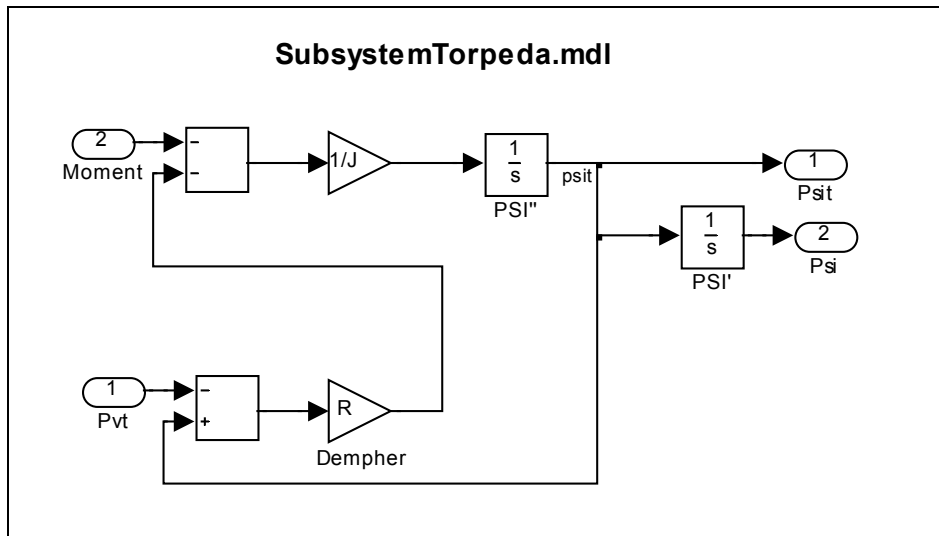
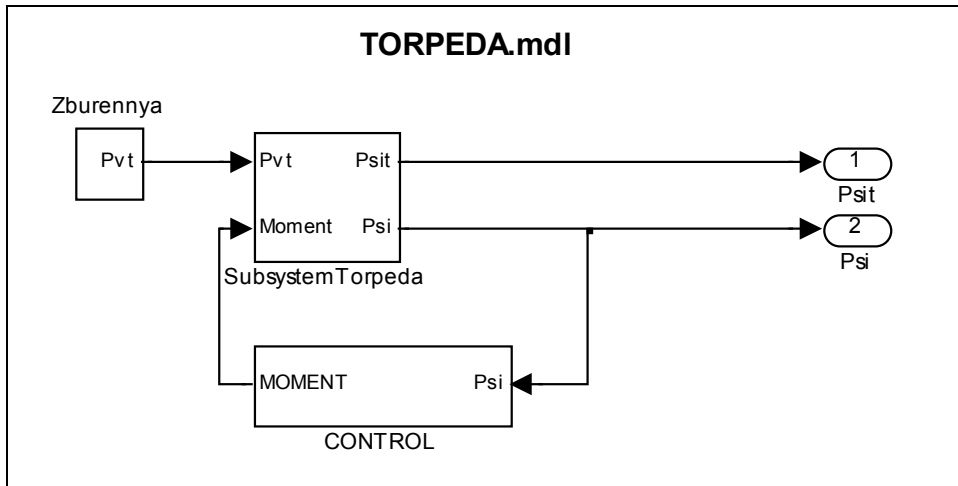
```

```

if k2==1
    pv0=input(sprintf('Зараз pv0=%g; Уведіть нове значення =',pv0));
end
if k2==2
    pvm=input(sprintf('Зараз pvm=%g; Уведіть нове значення =',pvm));
end
if k2==3
    omp=input(sprintf('Зараз omp=%g; Уведіть нове значення =',omp));
end
if k2==4
    ep=input(sprintf('Зараз ep=%g; Уведіть нове значення (у градусах) ep
    =',ep*180/pi));
    ep=ep*pi/180;
end
end
end
if k==6,    k2=1;
while k2<3
    k2=menu(' Що саме змінити? ',...
    sprintf('Кількість кроків на мінімальному періоді ni= %g;',ni),...
    sprintf('Кількість максимальних періодів ntk= %g;',ntk),' Нічого не змінювати ');
    if k2==1
        ni=input(sprintf('Зараз ni=%g; Уведіть нове значення =',ni));
    end
    if k2==2
        ntk=input(sprintf('Зараз ntk=%g; Уведіть нове значення =',ntk));
    end
end
end
end
% ===== Розрахунки кроку та кінцевого часу і інтегрування
om0=sqrt(abs((c1+c2)/J/2));    % Частота власних коливань торпеди за рисканням
mx=max(abs([abs(omp),om0]));% Максимальна частота коливань
hi=2*pi/(ni*mx);            % Крок інтегрування
if om0~=0
    Tmax=2*pi/om0;
    if omp~=0,            T1=2*pi/abs(omp);            Tmax=max([Tmax T1]); end
else
    disp('Помилка! Момент керування торпедою не може дорівнювати нулю !');
end
tfinal=ntk*Tmax;            % Кінцевий час інтегрування

=====
%    TORP_Yadro
% Частина програми TORP_, яка здійснює власне моделювання руху ТОРПЕДИ за
рисканням
% шляхом чисельного інтегрування диференціальних рівнянь керованого руху торпеди
% Ю.Ф.Лазарев, кафедра ПСОН, КПІ, Україна, Почато 13-02-2000
% % % %----- Запуск SIMULINK-моделі ----- % % % % %
[T,X,psit,psi]=sim('TORPEDA',tfinal);

```



```

% TORP_Vyvod
% Частина програми TORP_.m, яка здійснює ВИВЕДЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ моделювання НА
ЕКРАН
% у графічному виді
    
```

```

% Ю.Ф.Лазарев, кафедра ПСОН, КПІ, Україна,
% Початок 13-02-2000 Останні змінення 13-11-2009
xmax=max(psi); xmin=min(psi);
[T1,X1,vh,vyh]=sim('ReleGr');
subplot(2,2,1)
plot(psi*180/pi,psit,'-','LineWidth',1), grid, set(gca,'FontName','MS Sans Serif','FontSize',14)
title('Фазовий портрет','FontWeight','bold');
xlabel('\psi, град'); ylabel('\psi'', c^-^1 ');
subplot(2,2,4)
plot(T,psi,'.',T,psit), grid, set(gca,'FontName','MS Sans Serif','FontSize',14)
    
```

```

title('Кут та кутова швидкість рискання','FontWeight','bold');
xlabel('t, с');legend('\psi, рад','\psi"', c^-\wedge 1',0)
vhg=vh*180/pi; vyhg=vyh;
subplot(2,2,3)
plot(vhg,vyhg,'LineWidth',2); , set(gca,'FontName','MS Sans Serif','FontSize',14)
title('Закон керування','FontWeight','bold')
xlabel('\psi, град. '), ylabel('Момент сил керування'), grid
subplot(2,2,2), axis off
h=text(-1,1.17,' Рух торпеди з рискання (релейний закон керування)',...
'FontSize',14,'FontWeight','bold','FontName','MS Sans Serif');
h=text(-0.2,1.05,'Параметри торпеди:', 'FontSize',12,'FontName','MS Sans Serif');
h=text(0.,0.95,sprintf('J = %g;',J),'FontSize',12);
h=text(0.,0.85,sprintf('R = %g;',R),'FontSize',12);
h=text(0.5,1.05,'Початкові умови:', 'FontSize',12,'FontName','MS Sans Serif');
h=text(0.5,0.95,sprintf('\psi(0) = %g, град.',psi0*180/pi),'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
h=text(0.5,0.85,sprintf('\psi"(0) = %g, c^-\wedge 1;',psit0),'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
h=text(-0,0.7,'Параметри моменту керування:', 'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
h=text(0.3,0.6,'у правий бік:', 'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
h=text(0.8,0.6,'у лівий бік:', 'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);

h=text(-0.3,0.5,'момент сил керування','FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
h=text(0.3,0.5,sprintf('C_1 = %g;',c1),'FontSize',12);
h=text(0.8,0.5,sprintf('C_2 = %g;',c2),'FontSize',12);
h=text(-0.3,0.4,'кут вмикання, град.', 'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
h=text(0.3,0.4,sprintf('b_2_1 = %g;',b21*180/pi),'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
h=text(0.8,0.4,sprintf('b_2_2 = %g;',b22*180/pi),'FontSize',12);
h=text(-0.3,0.3,'кут вимикання, град.', 'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
h=text(0.3,0.3,sprintf('b_1_1 = %g;',b11*180/pi),'FontSize',12);
h=text(0.8,0.3,sprintf('b_1_2 = %g;',b12*180/pi),'FontSize',12);

h=text(0.1,0.15,'Параметри інтегрування','FontSize',12,'FontName','MS Sans Serif');
h=text(-0.2,0.05,[sprintf(' hi = %g, c;',hi),...
sprintf(' tfinal = %g, c;',tfinal)], 'FontSize',12);
h=text(-0.3,0,'=====');
h1=text(-0.27,-0.05,'Програма TORP-.m;', 'FontName','MS Sans Serif');
h1=text(0.5,-0.05,'Автор – Ю. Ф. Лазарев', 'FontName','MS Sans Serif');
h1=text(-0.3,-0.15,['Виконувач: ',sname], 'FontName','MS Sans Serif');
tm=fix(clock); Tv=tm(4:5);
h1=text(0.5,-0.15,[sprintf(' %g:',Tv), ' ',date]);
h=text(-0.3,-0.2,'=====');

```

Додаток 3. До розділу 7**Комплекс програм моделювання поведінки
симетричного зрівноваженого гіроскопа**

```

%   SUG_M.m   Головна (керуюча) програма моделювання поведінки
%   СИМЕТРИЧНОГО ЗРІВНОВАЖЕНОГО ГІРОСКОПА

% Ю.Ф.Лазарев, кафедра ПСОН, КПІ, Україна,
% Почато 28-02-2008   Останні змінювання 18-11-2009
clear all, clc
SUG_ZastavkaM
k = menu(' Що робити? ',' Продовжити роботу ',' Закінчити роботу ');
if k==1,   sname =input('Введіть ваше прізвище та ініціали (в апострофах) ');
if isempty(sname),   sname='Ю.Ф.ЛАЗАРЄВ';   end
while k==1
    SUG_MenuM
    SUG_YadroM
    SUG_VyvodM
    k = menu(' Що робити ? ',' Продовжити роботу ',' Закінчити роботу ');
end
end

=====
%SUG_ZastavkaM
% Частина програми SUG_M, яка здійснює
% введення первинних значень даних

% Ю.Ф.Лазарев, кафедра ПСОН, КПІ, Україна,
% Почато 28-02-2008   Останні зміни   18-11-2009
% Задання значень первинних даних
%   1. Параметри моментів сил вдовж осей Резаля
%   1.1. Параметри явної залежності від часу
%       1.1.1. Сталі складові моментів
%           Mx0=0;   My0=0;   Mz0=0;
%       1.1.2. Амплітуди моментів
%           Mxm=0;   Mym=0;   Mzm=0;
%       1.1.3. Частоти змінювання моментів
%           omx=0.;   omu=omx;   omz=omx;
%       1.1.4. Початкові фази моментів
%           ex=0;   ey=0;   ez=0;
%   1.2. Коефіцієнти в'язкого тертя
%           fx=1.;   fy=1;   fz=0;
%   2. Початкові умови
%   2.1. Початкове значення кінетичного моменту гіроскопа
%           H0=20;
%   2.2. Початкове кутове положення головної осі гіроскопа
%           aI0=0*pi/180;   bt0=45*pi/180;
%   2.3. Початкові кутові швидкості головної осі
%           aIt0=0;   btt0=4;
%   3. Моменти інерції СУГ
%           Je=5;   J=7;
%   4. Параметри інтегрування
%   4.1. Кількість кроків інтегрування у найменшому періоді коливань
%           ni=100;
%   4.2. Інтервал інтегрування у часі у кількості найбільших періодів коливань
%           ntk=20;
% ===== Розрахунки кроку та кінцевого час інтегрування
lambda=abs(H0)/Je; %   Частота нутації СУГ

```

```

mx=max(abs([lambda,omx,omy,omz])); % Максимальна частота коливань
hi=2*pi/(ni*mx); % Крок інтегрування
if lambda~=0
    Tmax=2*pi/lambda;
    if omx~=0
        T1=2*pi/abs(omx);
        Tmax=max([Tmax T1]);
    end
    if omy~=0
        T1=2*pi/abs(omy);
        Tmax=max([Tmax T1]);
    end
    if omz~=0
        T1=2*pi/abs(omz);
        Tmax=max([Tmax T1]);
    end
else
    disp('Помилка! Кінетичний момент гіроскопа не може дорівнювати нулеві !');
end
tfinal=ntk*Tmax; % Кінцева мить інтегрування
%%%%%%%% Формування текстового оформлення екрану %%%%%%%%%
clc
echo on
%
% Перед вами програма SUG_M.m
% "Моделювання поведження
% СИМЕТРИЧНОГО ЗРІВНОВАЖЕНОГО ГІРОСКОПА"
% яка складає програмну основу
% лабораторної роботи N% 2 з дисципліни
% "Основи теорії ЧУТЛИВИХ ЕЛЕМЕНТІВ"
%
echo off

```

```

=====
% SUG_MenuM
% Частина програми SUG_M, яка здійснює діалогове
% ЗМІНЮВАННЯ ВСТАНОВЛЕНИХ ПАРАМЕТРІВ

% Ю.Ф.Лазарев, кафедра ПСОН, КПІ, Україна,
% Почато 28-02-2008 Останні зміни 29-06-2008
k=1;
while k<10
    clc, disp(' '); disp(' '); disp([' З програмою SUG_M.m працює ',sname]); echo on
    % Моделюється рух
    % симетричного зрівноваженого гіроскопа
    % шляхом чисельного інтегрування його диференціальних рівнянь
    %  $J_e \cdot \alpha'' \cos(bt) + [H - 2 \cdot J_e \cdot \alpha' \sin(bt)] \cdot bt' = M_x$ 
    %  $J_e \cdot bt'' - [H - J_e \cdot \alpha' \sin(bt)] \cdot \alpha' \cos(bt) = M_y$ 
    %  $dH/dt = M_z$ 
    %
    echo off
    k=menu(' Що змінювати? ',...
    sprintf('Кінетичний момент СУГ = %g',H0),...
    [sprintf('Моменти інерції СУГ: Je= %g;',Je),sprintf(' J= %g;',J)],...
    [sprintf('Початкові умови: al0= %g;',al0*180/pi),sprintf(' bt0= %g;',bt0*180/pi),sprintf(' alt0=
    %g;',alt0),sprintf(' btt0= %g;',btt0)],...
    [sprintf('Постійні складові моментів сил: Mx0= %g;',Mx0),sprintf(' My0= %g;',My0),sprintf(' Mz0=
    %g;',Mz0)],...
    [sprintf('Амплітуди моментів сил: Mxm= %g;',Mxm),sprintf(' Mym= %g;',Mym),sprintf(' Mzm=
    %g;',Mzm)],...
    [sprintf('Частоти змінювання моментів сил: omx= %g;',omx),sprintf(' omy= %g;',omy),sprintf(' omz=
    %g;',omz)],...

```

```

[sprintf('Фази змінювання моментів сил: ex= %g;',ex*180/pi),sprintf(' ey= %g;',ey*180/pi),sprintf(' ez=
%g;',ez*180/pi)],...
[sprintf('Коеф-ти в'язкого тертя по осях підвісу: fx= %g;',fx),sprintf(' fy= %g;',fz),sprintf(' fy= %g;',fz)],...
[sprintf('Параметри інтегрування: ni= %g;',ni),sprintf(' ntk= %g;',ntk)], ' Нічого не змінювати ');
disp(""),
if k==1, H0=input(sprintf('Зараз встановлено H0=%g; Уведіть нове значення =',H0)); end
if k==2, k2=1;
while k2<3
k2=menu(' Що саме змінити? ', sprintf(' Je= %g;',Je), sprintf(' J= %g;',J), ' Нічого не змінювати ');
if k2==1, Je=input(sprintf('Зараз Je=%g; Уведіть нове значення =',Je)); end
if k2==2, J=input(sprintf('Зараз J=%g; Уведіть нове значення =',J)); end
end
end
if k==3, k2=1;
while k2<5
k2=menu(' Що саме змінити? ', sprintf(' al0= %g;',al0*180/pi), sprintf(' bt0= %g;',bt0*180/pi),...
sprintf(' alt0= %g;',alt0), sprintf(' btt0= %g;',btt0), ' Нічого не змінювати ');
if k2==1, al0=input(sprintf('Зараз al0=%g; Уведіть нове значення (у градусах) =',al0*180/pi));
al0=al0*pi/180;
end
if k2==2, bt0=input(sprintf('Зараз bt0=%g; Уведіть нове значення (у градусах) =',bt0*180/pi));
bt0=bt0*pi/180;
end
if k2==3, alt0=input(sprintf('Зараз alt0=%g; Уведіть нове значення =',alt0)); end
if k2==4, btt0=input(sprintf('Зараз btt0=%g; Уведіть нове значення =',btt0)); end
end
end
if k==4, k2=1;
while k2<4
k2=menu(' Що саме змінити? ', sprintf(' Mx0= %g;',Mx0), sprintf(' My0= %g;',My0),...
sprintf(' Mz0= %g;',Mz0), ' Нічого не змінювати ');
if k2==1, Mx0=input(sprintf('Зараз Mx0=%g; Уведіть нове значення =',Mx0)); end
if k2==2, My0=input(sprintf('Зараз My0=%g; Уведіть нове значення =',My0)); end
if k2==3, Mz0=input(sprintf('Зараз Mz0=%g; Уведіть нове значення =',Mz0)); end
end
end
if k==5, k2=1;
while k2<4
k2=menu(' Що саме змінити? ', sprintf(' Mxm= %g;',Mxm), sprintf(' Mym= %g;',Mym),...
sprintf(' Mzm= %g;',Mzm), ' Нічого не змінювати ');
if k2==1, Mxm=input(sprintf('Зараз Mxm=%g; Уведіть нове значення =',Mxm)); end
if k2==2, Mym=input(sprintf('Зараз Mym=%g; Уведіть нове значення =',Mym)); end
if k2==3, Mzm=input(sprintf('Зараз Mzm=%g; Уведіть нове значення =',Mzm)); end
end
end
if k==6, k2=1;
while k2<4
k2=menu(' Що саме змінити? ', sprintf(' omx= %g;',omx), sprintf(' omy= %g;',omy),...
sprintf(' omz= %g;',omz), ' Нічого не змінювати ');
if k2==1, omx=input(sprintf('Зараз omx=%g; Уведіть нове значення =',omx)); end
if k2==2, omy=input(sprintf('Зараз omy=%g; Уведіть нове значення =',omy)); end
if k2==3, omz=input(sprintf('Зараз omz=%g; Уведіть нове значення =',omz)); end
end
end
if k==7, k2=1;
while k2<4
k2=menu(' Що саме змінити? ', sprintf(' ex= %g;',ex*180/pi), sprintf(' ey= %g;',ey*180/pi),...
sprintf(' ez= %g;',ez*180/pi), ' Нічого не змінювати ');
if k2==1, ex=input(sprintf('Зараз ex=%g; Уведіть нове значення (у градусах) =',ex*180/pi));
ex=ex*pi/180; end
if k2==2, ey=input(sprintf('Зараз ey=%g; Уведіть нове значення (у градусах) =',ey*180/pi));
ey=ey*pi/180; end

```



```

    if k2==3,      ez=input(sprintf("Зараз ez=%g; Уведіть нове значення (у градусах) =",ez*180/pi));
        ez=ez*pi/180;      end
    end
end
if k==8,  k2=1;
    while k2<4
        k2=menu(' Що саме змінити? ', sprintf(' fx= %g;',fx), sprintf(' fy= %g;',fy),...
            sprintf(' fz= %g;',fz), ' Нічого не змінювати ');
        if k2==1,  fx=input(sprintf("Зараз fx=%g; Уведіть нове значення =",fx));      end
        if k2==2,  fy=input(sprintf("Зараз fy=%g; Уведіть нове значення =",fy));      end
        if k2==3,  fz=input(sprintf("Зараз fz=%g; Уведіть нове значення =",fz));      end
    end
end
if k==9,  k2=1;
    while k2<3
        k2=menu(' Що саме змінити? ', sprintf('Кількість кроків на мінімальному періоді ni= %g;',ni),...
            sprintf('Кількість максимальних періодів ntk= %g;',ntk), ' Нічого не змінювати ');
        if k2==1,  ni=input(sprintf("Зараз ni=%g; Уведіть нове значення =",ni));      end
        if k2==2,  ntk=input(sprintf("Зараз ntk=%g; Уведіть нове значення =",ntk));      end
    end
end
end
% ===== Розрахунки кроку та кінцевої миті інтегрування
lambda=abs(H0)/Je; % Частота нутації ГКП
mx=max(abs([lambda,omx,omy,omz])); % Максимальна частота коливань
hi=2*pi/(ni*mx); % Крок інтегрування
if lambda~=0, Tmax=2*pi/lambda;
    if omx~=0, T1=2*pi/abs(omx); Tmax=max([Tmax T1]); end
    if omy~=0, T1=2*pi/abs(omy); Tmax=max([Tmax T1]); end
    if omz~=0, T1=2*pi/abs(omz); Tmax=max([Tmax T1]); end
else, disp('Помилка! Кінетичний момент гіроскопа не може дорівнювати нулеві !');
end
tfinal=ntk*Tmax % Кінцева мить інтегрування

=====
%          SUG_YadroM
% Частина програми SUG_M, яка здійснює звертання до S_моделі sugM.mdl
% (яка власне й здійснює чисельне інтегрування % диференціальних рівнянь руху
% симетричного зрівноваженого гіроскопа) і підготує вихідні дані цієї
% моделі до виведення результатів у графічному вигляді

% Ю.Ф.Лазарев, кафедра ПСОН, КПІ, Україна,
% Почато 28-02-2008 Останні зміни 18-11-2009
A0=aI0; B0=bt0; OeX0=alt0*cos(bt0); OeY0=bt0;
[T,X,al,bt,H,omX,omY]=sim('sugM');%%%%%----- Запуск SIMULINK-моделі ----- %%%%%%%%%
% Розрахунок проєкцій повного кінетичного моменту і кутів його положення
KY=Je*omY; KX=Je*omX; KK=sqrt(H.^2+KX.^2+KY.^2); Kksi=H.*sin(bt)+KX.*cos(bt);
Ka=H.*cos(bt)-KX.*sin(bt); Keta=KY.*cos(al)-Ka.*sin(al); Kdz=KY.*sin(al)+Ka.*cos(al);
alk=-atan2(Keta,Kdz); btk=asin(Kksi./KK);

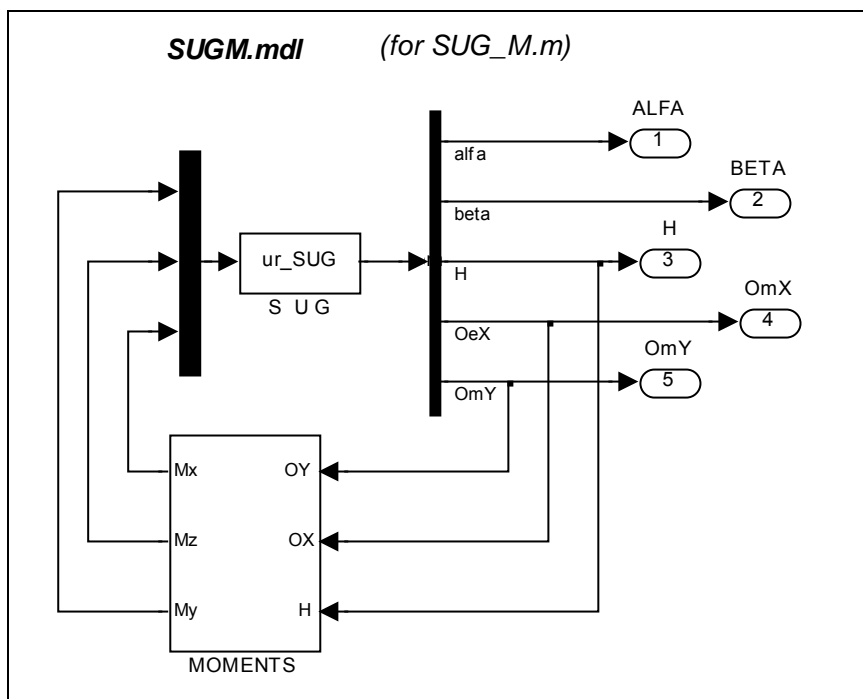
=====
%          SUG_VyvodM
% Частина програми SUG_M, яка здійснює ВИВЕДЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ моделювання НА ЕКРАН

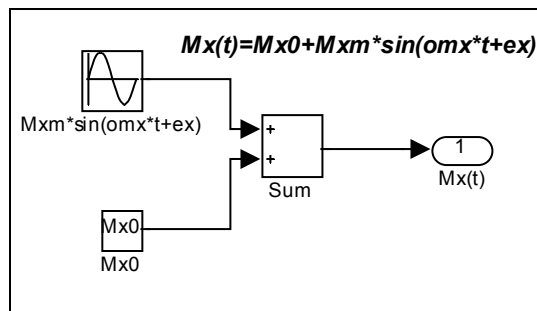
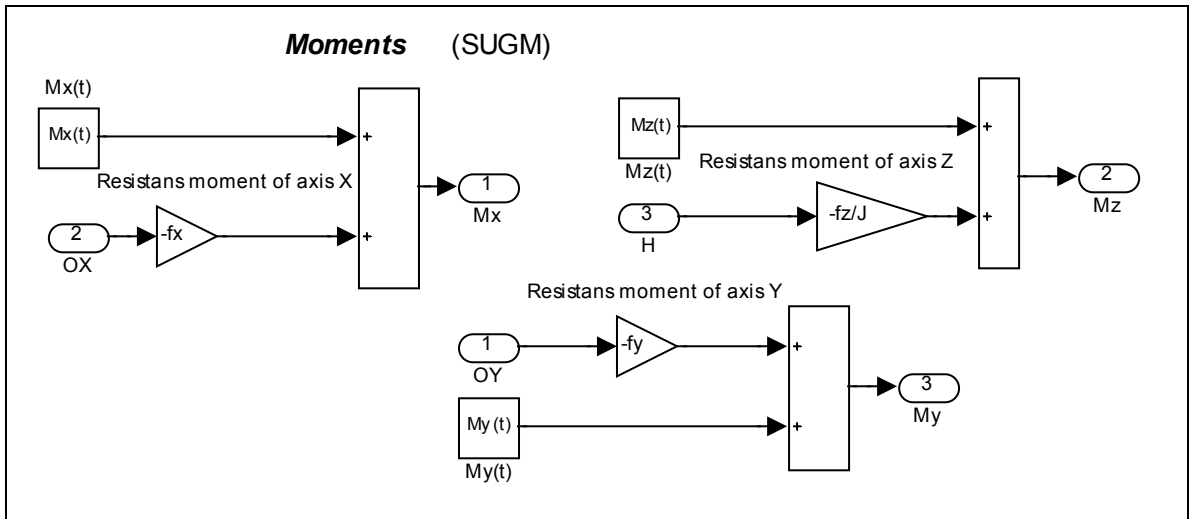
% Ю.Ф.Лазарев, кафедра ПСОН, КПІ, Україна,
% Початок 28-02-2008 Останні зміни 16-11-2009
subplot(2,2,1)
plot(al*180/pi,bt*180/pi,alk*180/pi,btk*180/pi,'+r'), grid,
set(gca,'Fontname','MS Sans Serif','FontSize',12)
title('Картинна площина');
xlabel('\alpha, град. '); ylabel('\beta, град '); set(gca,'FontSize',12)
legend(' АПЕКС','кінетична вісь',0)

```

```

subplot(2,2,3)
polar(0,1), grid, set(gca,'Fontname','MS Sans Serif','FontSize', 12),hold on
polar(al,cos(bt)),polar(alk,cos(btk),'r+')
title('Погляд згори на сферу'); hold off
subplot(2,2,4)
plot(T,al,T,bt,'-',T,omX,'--',T,omY,'-'), grid, set(gca,'Fontname','MS Sans Serif','FontSize', 12)
title('Кути та кутові швидкості');
xlabel('t, c '); set(gca,'FontSize',12)
legend('\alpha, рад','\beta, рад','\omega_X, рад/с','\omega_Y, рад/с',0)
subplot(2,2,2),axis off
h=text(-0.2,1.17,'Симетричний зрівноважений гіроскоп',...
'FontSize',14,'FontWeight','bold','Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.1,1.05,'Параметри СЗГ:', 'FontSize',12,'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(-0.2,0.95,sprintf('H_0=%g;',H0)); h=text(0.25,0.95,sprintf('J_e=%g;',Je));
h=text(0.7,0.95,sprintf('J=%g;',J));
h=text(0.1,0.85,'Початкові умови:', 'FontSize', 12,'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.,0.75,sprintf('\alpha_0=%g;',al0*180/pi)); h=text(0.5,0.75,sprintf('\beta_0=%g;',bt0*180/pi));
h=text(0.,0.65,sprintf('\alpha\prime_0=%g;',alt0)); h=text(0.5,0.65,sprintf('\beta\prime_0=%g;',btt0));
h=text(0.1,0.55,'Параметри моментів сил:', 'FontSize', 12,'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(-0.2,0.45,sprintf('M_x_0=%g;',Mx0)); h=text(-0.2,0.35,sprintf('M_y_0=%g;',My0));
h=text(-0.2,0.25,sprintf('M_z_0=%g;',Mz0)); h=text(0.1,0.45,sprintf('M_x_m=%g;',Mxm));
h=text(0.1,0.35,sprintf('M_y_m=%g;',Mym)); h=text(0.1,0.25,sprintf('M_z_m=%g;',Mzm));
h=text(0.4,0.45,sprintf('\omega_x=%g;',omx)); h=text(0.4,0.35,sprintf('\omega_y=%g;',omy));
h=text(0.4,0.25,sprintf('\omega_z=%g;',omz)); h=text(0.7,0.45,sprintf('\epsilon_x=%g;',ex*180/pi));
h=text(0.7,0.35,sprintf('\epsilon_y=%g;',ey*180/pi)); h=text(0.7,0.25,sprintf('\epsilon_z=%g;',ez*180/pi));
h=text(-0.2,0.15,[sprintf('Коефіцієнти в\'язкого тертя: f_x=%g;',fx),...
sprintf(' f_y=%g;',fy),sprintf(' f_z=%g;',fz)], 'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(-0.2,0.05,[sprintf('Крок: hi=%g c;',hi),...
sprintf(' Час tfinal=%g c;',tfinal)], 'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(-0.3,0,'=====');
h1=text(-0.3,-0.05,'Програма SUG-M.m;', 'Fontname','MS Sans Serif');
h1=text(0.35,-0.05,'Автор - Ю.Ф Лазарев.', 'Fontname','MS Sans Serif');
h1=text(-0.3,-0.15,['Виконав ',sname], 'Fontname','MS Sans Serif'); tm=fix(clock); Tv=tm(4:5);
h1=text(0.5,-0.15,[sprintf(' %g:',Tv),' ',date]);
h=text(-0.3,-0.2,'=====');
    
```





```
function [sys,x0,str,ts] = ur_SUG(t,x,u,flag,H0,Je,A0,B0,OeX0,OeY0)
% S-функція, яка здійснює чисельне інтегрування ДР СЗГ (для SUG_m)
```

```
% Лазарев Ю. Ф. 28-02-2008
```

```
switch flag,
case 0, [sys,x0,str,ts]=mdlInitializeSizes(H0, A0, B0, OeX0, OeY0);
case 1, sys=mdlDerivatives(t,x,u,Je);
case 2, %sys=mdlUpdate(t,x,u);
case 3, sys=mdlOutputs(t,x,u);
case 4, sys=mdlGetTimeOfNextVarHit(t,x,u);
case 9, %sys=mdlTerminate(t,x,u);
otherwise
error(['Unhandled flag = ',num2str(flag)]);
end
```

```
%=====
function [sys,x0,str,ts]=mdlInitializeSizes(H0, A0, B0, OeX0, OeY0)
sizes = simsizes;
sizes.NumContStates = 5; sizes.NumDiscStates = 0; sizes.NumOutputs = 5;
sizes.NumInputs = 3; sizes.DirFeedthrough = 1; sizes.NumSampleTimes = 1; sys = simsizes(sizes);
x0 = [ A0, B0, H0, OeX0, OeY0]; str = []; ts = [0 0];
%=====
```

```
function z=mdlDerivatives(t,x,u,Je)
% x(1)=alfa x(2)=beta x(3)=H x(4)=omX x(5)=omY
% u(1)=My u(2)=Mz u(3)=Mx
z(1) = x(4)/cos(x(2)); z(2) = x(5); z(3) = u(2);
dH=x(3)/Je-x(4)*tan(x(2)); z(4) = - x(5)*dH+u(3)/Je; z(5) = x(4)*dH+u(1)/Je;
%=====
```

```
function y=mdlOutputs(t,x,u)
y = x;
```

Додаток 4. До розділу 8**Комплекс програм моделювання поведження гіромаятника**

```

%                               GM_M1
% Головна (керуюча) програма моделювання поведження ГІРОМАЯТНИКА
% по рівняннях у кутах Ейлера
% Ю.Ф.Лазарев, кафедра ПСОН, КПІ, Україна,
% Почато 26-03-2008   Останні зміни  29-06-2008
clear all, clc
global mu fiX fiY fiZ
sname='Лазарев Ю. Ф.';
% Задание значений исходных данных
% 1. Кінетический момент гіромаятника
      H = 40;
% 2. Моменти інерції СУГ
      Je=20;      J=7;
% 3. Опорний маятниковий момент
      mgl = 10;
% 4. Котфіцієнти вязкого тертя
      fx=0;      fy=2;      fz=2;
% 5. Початкові умови
% 5.1. Початкові кути Ейлера
      psi0=0*pi/180;      teta0=30*pi/180;
% 5.2. Начальные угловые скорости главной оси
      psiT0=0;      tetaT0=0;
% 6. Параметри інтегрування
% 6.1. Кількість кроків інтегрування у найменшому періоді
%      коливань
      ni=20;
% 6.2. Интервал інтегрування у часі у кількості найбільших періодів коливань
      ntk=4;
% ПЕРЕРАХУНОК
mu = mgl/Je;  fiX=fx/J;  fiY=fy/Je;  fiZ=fz/Je;  h=H/Je;
hh=h/2/cos(teta0); muGM=mu/hh^2/cos(teta0);  Kkv=sqrt(1-muGM);
PS1=hh*(1-Kkv);  PS2=hh*(1+Kkv); %psiT0=PS1
hi=2*pi/PS2/ni;      %psiT0=PS2
TK=2*pi/PS1*ntk;
t=0;  k=1;  y=[psi0, teta0, h, tetaT0, psiT0*sin(teta0)];
Ps(1)=y(1);  Te(1)=y(2);  tt(1)=t;  omX(k)=y(3);  omY(1)=y(4);  omZ(1)=y(5);
while t<=TK
    k=k+1;  [tout,yout] = rko4('GM_kut_EULER1',hi,t,y);
    y=yout; t=tout;  Ps(k)=y(1);  Te(k)=y(2);  tt(k)=tout;  omX(k)=y(3);  omY(k)=y(4);  omZ(k)=y(5);
end
Kk=sqrt(omX.^2+omY.^2+omZ.^2);
cP=cos(Ps);  sP=sin(Ps);  cT=cos(Te);  sT=sin(Te);
kt=-omZ.*cT+omX.*sT;  Kksi=omX.*cT+omZ.*sT;  Keta=omY.*cP+kt.*sP;  Kdz=omY.*sP-kt.*cP;
Psk=unwrap(atan2(Keta,-Kdz));  Tek=acos(Kksi/Kk);
% Виведення графіків
subplot(2,2,1)
plot(Ps*180/pi,Te*180/pi,'.-',Psk*180/pi,Tek*180/pi,'r+-'),grid, axis('ij'),
set(gca,'FontName','MS Sans Serif')
title('Погляд горизонтальний','FontSize',12,'FontWeight','bold')
xlabel('\psi (градуси)','FontSize',12), ylabel('\theta','FontSize',12), legend('апекс','кінетична вісь',0);
subplot(2,2,4)
plot(tt,Ps,tt,Te,'.',tt,omY,'.',tt,omZ),grid, set(gca,'FontName','MS Sans Serif')
title('Залежність від часу','FontSize',12,'FontWeight','bold'),xlabel('Час (с)','FontSize',12)
legend('\psi (радіан)','\theta (радіан)','\omega_Y (рад/с)','\omega_Z(рад/с)',0)
subplot(2,2,3)

```

```

polar(Ps,sin(Te),'-'), hold on, polar(Psk,sin(Tek),'r+'), hold off, set(gca,'FontName','MS Sans Serif')
title('Вид згори на сферу','FontSize',12,'FontWeight','bold')
% Текстове оформлення графічного вікна
subplot(2,2,2), axis off
h=text(-0.2,1.17,' Рух ГІРОМАЯТНИКА в кутах Ейлера',...
'FontSize',14,'FontWeight','bold','FontName','MS Sans Serif');
h=text(0.2,1.05,'Параметри Гіромаятника:', 'FontSize',12,'FontName','MS Sans Serif');
h=text(-0.2,0.95,sprintf('H_0 = %g;',H),'FontSize',12);
h=text(0.2,0.95,sprintf('J_e = %g;',Je),'FontSize',12);
h=text(0.5,0.95,sprintf('J = %g;',J),'FontSize',12);
h=text(0.8,0.95,sprintf('mgl = %g;',mgl),'FontSize',12);
h=text(0.2,0.85,'Початкові умови:', 'FontSize',12,'FontName','MS Sans Serif');
h=text(0.,0.75,sprintf('\psi(0) = %g;',psi0*180/pi),'FontSize',12);
h=text(0.5,0.75,sprintf('\theta(0) = %g;',teta0*180/pi),'FontSize',12);
h=text(0.,0.65,sprintf('\psi'(0) = %g;',psiT0),'FontSize',12);
h=text(0.5,0.65,sprintf('\theta'(0) = %g;',tetaT0),'FontSize',12);
h=text(-0.2,0.55,[sprintf('Коеф-ти в'язкого тертя: fx = %g;',fx),...
sprintf(' fy = %g;',fy),sprintf(' fz = %g;',fz)], 'FontSize',12,'FontName','MS Sans Serif');
h=text(0.1,0.4,'-----');
h=text(-0.2,0.45,sprintf('Крок інтегрування = %g с;',hi),'FontSize',12,'FontName','MS Sans Serif');
h=text(0.2,0.35,'Розрахункові дані', 'FontSize',12,'FontName','MS Sans Serif');
h=text(0.5,0.27,sprintf('\psi"_1 = %g;',PS1),'FontSize',12);
h=text(0.5,0.27,sprintf('\psi"_2 = %g;',PS2),'FontSize',12);
h=text(0.07,0.2,'2mgl*Je*cos\theta','FontSize',12);
h=text(0.,0.15,sprintf('\mu = ----- = %g;',muGM),'FontSize',12);
h=text(0.15,0.08,'H_0^2','FontSize',12);
h=text(-0.3,0,'=====');
h1=text(-0.3,-0.05,'Програма GM-M1.m;', 'FontName','MS Sans Serif');
h1=text(0.35,-0.05,'Автор - ЛАЗАРЄВ Ю.Ф., каф. ПСОН', 'FontName','MS Sans Serif');
h1=text(-0.3,-0.15,['Виконав ',sname], 'FontName','MS Sans Serif'); tm=fix(clock); Tv=tm(4:5);
h1=text(0.5,-0.15,[sprintf(' %g:',Tv), ' ',date]);
h=text(-0.3,-0.2,'=====');
=====
function [tout,yout] = rko4(yfun,h,t,y)
% процедура RKO4 чисельного інтегрування ЗДР, праві частини яких задани
% процедурою урfun, методом Рунге-Кутта 4-го порядку.
% Вхідні змінні:
% урfun - символічний рядок, що містить ім'я п/п правих частин ЗДР
% Виклик: z = fun(t,y), де урfun = 'fun'. t - поточний час;
% y - вектор поточних значень змінних стану,
% z - розраховані значень похідних; z(i) = dy(i)/dt.
% h - крок інтегрування; t - поточний час;
% y - значення вектора змінних стану на попередньому кроці
% Вихідні змінні:
% tout - наступний момент часу;
% yout - розраховане значення вектора змінних стану у цей момент
% Y. F. Lazarev,
% Розрахунок проміжних значень похідних
s1 = feval(yfun, t, y); s2 = feval(yfun, t+h/2, y+h/2*s1);
s3 = feval(yfun, t+h/2, y+h/2*s2); s4 = feval(yfun, t+h, y+h*s3);
% Розрахунок значення вектора змінних стану у наступний момент часу
tout = t + h; yout = y + h*(s1 + 2*s2 + 2*s3 + s4)/6;
=====
function z=GM_kut_EULER1(t,y)
% Процедура обчислення правих частин диференціальних рівнянь
% руху ГІРОМАЯТНИКА (дзиги) у кутах Ейлера
% z1 = y5/sin(y2); z2 = y4; z3 = -fiX*y3
% z4 = -fiY*y4 + mu*sin(y2)-y5*[y3 - y5*ctg(y2)];
% z5 = -fiZ*y5 + y4*[y3 - y5*ctg(y2)]
% Вхідні параметри:
% t - поточний час; y - масив з п'яти змінних стану
% y1 = psi - кут прецесії; y2 = teta - кут нутації;

```

```

%      y3 = H/Je - кінетичний момент (приведений)
%      y4 = omY - складова кутової швидкості по осі Y;
%      y5 = omZ - складова кутової швидкості по осі Z
% Лазарев Ю. Ф. 6-03-2008
global mu fiX fiY fiZ
sT=sin(y(2)); cT=cos(y(2));
z(1)=y(5)/sT; z(2)= y(4); z(3)=-fiX*y(3);
H=y(3)-y(5)*cT/sT;
z(4)=-fiY*y(4)+mu*sT-y(5)*H; z(5)=-fiZ*y(5)+y(4)*H;
=====
% GM_M2
% Програма моделювання поведження ГІРОМАЯТНИКА
% за рівняннями у кутах осциляції

% Ю.Ф.Лазарев, кафедра ПСОН, КПІ, Україна,
% Почато 26-03-2008 Останні зміни 19-11-2009
clear all, clc
global mu fiX fiY fiZ
sname='Лазарев Ю. Ф.';
% Задание значений исходных данных
% 1. Кінетический момент гіромаятника
H = 40;
% 2. Моменти інерції гіромаятника
Je=20; J=7;
% 3. Опорний маятниковий момент
mgl = -10;
% 4. Коефіцієнти вязкого тертя
fx=0; fy=0; fz=0;
% 5. Початкові умови
% 5.1. Початкові кути осциляції
dlt10=30*pi/180; dlt20=0*pi/180;
% 5.2. Начальные угловые скорости главной оси
dlt1T0=0.; dlt2T0=0;
% 4. Параметри інтегрування
% 4.1. Кількість кроків інтегрування у найменшому періоді
% коливань
ni=20;
% 4.2. Інтервал інтегрування у часі у кількості
% найбільших періодів коливань
ntk=1.;
% ПЕРЕРАХУНОК
mu = mgl/Je; fiX=fx/J; fiY=fy/Je; fiZ=fz/Je; h=H/Je; hh=h/2;
muGM=mu/hh^2; Kkv=sqrt(1-muGM);
PS1=hh*(1-Kkv); PS2=hh*(1+Kkv); %psiT0=PS1
hi=2*pi/abs(PS2)/ni; %psiT0=PS2
TK=2*pi/abs(PS1)*ntk; t=0; k=1; y=[dlt10, dlt20, h, dlt1T0*cos(dlt20), dlt2T0];
D1(1)=y(1); D(1)=y(2); tt(1)=t; omX(k)=y(3); omY(1)=y(4); omZ(1)=y(5);
while t<=TK
k=k+1; [tout,yout] = rko4('GM_kut_occilation',hi,t,y);
y=yout; t=tout; D1(k)=y(1); D2(k)=y(2); tt(k)=tout; omX(k)=y(3);
omY(k)=y(4); omZ(k)=y(5);
end
Kk=sqrt(omX.^2+omY.^2+omZ.^2);
cD1=cos(D1); sD1=sin(D1); cD2=cos(D2); sD2=sin(D2);
kt=omX.*cD2-omY.*sD2; Kksi=kt.*cD1+omZ.*sD1;
Keta=omX.*sD2+omY.*cD2; Kdz=omZ.*cD1-kt.*sD1;
Dlk1=atan2(-Kdz,Kksi); Dlk2=asin(Keta./Kk);
% Виведення графіків
subplot(2,2,1)
plot(D1*180/pi,D2*180/pi,'-',Dlk1*180/pi,Dlk2*180/pi,'r+-'),grid
set(gca,'Fontname','MS Sans Serif','FontSize',12), axis('equal')
title('Картинна площина','FontWeight','bold')

```

```

xlabel('\delta_1, град. '), ylabel('\delta_2, град. '), legend('апекс','кінетична вісь',0);
subplot(2,2,4)
plot(tt,D1,tt,D2,'-',tt,omY,'-',tt,omZ), grid
set(gca,'Fontname','MS Sans Serif','FontSize',12)
title('Залежність від часу','FontWeight','bold'), xlabel('t, с','FontSize',12)
legend('\delta_1, рад.', '\delta_2, рад.', '\omega_Y, рад/с', '\omega_Z, рад/с',0)
subplot(2,2,3)
TE=[pi/2,acos(cos(D1).*cos(D2))]; PS=[0,atan2(tan(D2),sin(D1))];
polar(PS,sin(TE),'-'), set(gca,'Fontname','MS Sans Serif','FontSize',12)
title('Вид згори на сферу','FontWeight','bold')
% Текстове оформлення графічного вікна
subplot(2,2,2), axis off
h=text(-0.2,1.17,' Рух гіромаятника в кутах осциляції',...
'FontSize',14,'FontWeight','bold','Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.2,1.05,'Параметри гіромаятника:', 'FontSize',12,'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(-0.2,0.95,sprintf('H_0 = %g;',H),'FontSize',12);
h=text(0.2,0.95,sprintf('J_e = %g;',Je),'FontSize',12);
h=text(0.5,0.95,sprintf('J = %g;',J),'FontSize',12);
h=text(0.8,0.95,sprintf('mgl = %g;',mgl),'FontSize',12);
h=text(0.2,0.85,'Початкові умови:', 'FontSize',12,'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.,0.75,sprintf('\delta_1(0) = %g;',dlt10*180/pi),'FontSize',12);
h=text(0.5,0.75,sprintf('\delta_2(0) = %g;',dlt20*180/pi),'FontSize',12);
h=text(0.,0.65,sprintf('\delta_1\prime(0) = %g;',dlt1T0),'FontSize',12);
h=text(0.5,0.65,sprintf('\delta_2\prime(0) = %g;',dlt2T0),'FontSize',12);
h=text(-0.2,0.55,[sprintf('Коеф-ти в"язкого тертя: f_x = %g;',fx),...
sprintf(' f_y = %g;',fy),sprintf(' f_z = %g;',fz)], 'FontSize',12,'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.1,0.4,'-----');
h=text(-0.2,0.45,sprintf('Крок інтегрування = %g с;',hi),'FontSize',12,'Fontname','MS Sans
Serif');
h=text(0.2,0.35,'Розрахункові дані', 'FontSize',12,'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(-0.1,0.27,sprintf('\omega_0_1 = %g;',PS1),'FontSize',12);
h=text(0.5,0.27,sprintf('\omega_0_2 = %g;',PS2),'FontSize',12);
h=text(0.07,0.2,'4mgl*J_e','FontSize',12);
h=text(0.,0.15,sprintf('\mu = ----- = %g;',muGM),'FontSize',12);
h=text(0.1,0.08,'H_0^2','FontSize',12);
h=text(-0.3,0,'=====');
h1=text(-0.3,-0.05,'Програма GM-M2.m;', 'Fontname','MS Sans Serif');
h1=text(0.35,-0.05,'Автор - Ю.Ф.Лазарєв', 'Fontname','MS Sans Serif');
h1=text(-0.3,-0.15,['Виконав ',sname], 'Fontname','MS Sans Serif');
tm=fix(clock); Tv=tm(4:5); h1=text(0.5,-0.15,[sprintf(' %g:',Tv), ' ',date]);
h=text(-0.3,-0.2,'=====');

=====
function z=GM_kut_occilation(t,y)
% Процедура обчислювання правих частин диференціальних рівнянь
% руху ГІРОМАЯТНИКА (дзиги) у кутах осциляції
% z1 = y4/cos(y2); z2 = y5; z3 = -fiX*y3
% z4 = -fiY*y4 + mu*sin(y1)-y5*[y3 - y4*tg(y2)]
% z5 = -fiZ*y5 + mu*sin(y2)*cos(y2)+ y4*[y3 - y4*tg(y2)]
% Вхідні параметри:
% t - поточний час; y - масив з п'яти змінних стану
% y1 = dlt1 - перший кут осциляції; y2 = dlt2 - другий кут осциляції
% y3 = H/Je - кінетичний момент (приведений)
% y4 = omY - складова кутової швидкості по осі Y;
% y5 = omZ - складова кутової швидкості по осі Z
% Лазарєв Ю. Ф. 6-03-2008
global mu fiX fiY fiZ
sd2=sin(y(2)); cd2=cos(y(2)); H=y(3)-y(4)*sd2/cd2;
z(1)=y(4)/cd2; z(2)= y(5); z(3)=-fiX*y(3);
z(4)=-fiY*y(4)+mu*sin(y(1))-y(5)*H; z(5)=-fiZ*y(5)+mu*cd2*sd2+y(4)*H;

```

Додаток 5. До розділу 9**Комплекс програм моделювання поведінки гіроскопа у кардановому підвісі на нерухомій основі**

```

%      GKPNO_M1
%      Головна (керуюча) програма
%      "Моделювання поведінки ГІРОСКОПА У КАРДАНОВОМУ ПІДВІСІ,
%      встановленого на нерухомій основі"

% Ю.Ф.Лазарев, кафедра ПСОН, КПІ, Україна,
% Почато 9-02-2000  останні змінювання 22-11-2009
clear all, clc
GKPNO_ZastavkaM1
k = menu('  Що робити ? ', 'Продовжити роботу ', 'Закінчити роботу ');
if k==1
    sname = input('Введіть ваше прізвище та ініціали (у лапках) ');
    if isempty(sname), sname='Ю. Ф. Лазарев'; end
    while k==1
        GKPNO_MenuM1
        GKPNO_YadroM1
        GKPNO_VyvodM1
        k = menu('  Що робити ? ', 'Продовжити роботу ', 'Закінчити роботу ');
    end
end
end

=====
%      GKPNO_ZastavkaM1
%      Частина програми GKPNO_M1, яка здійснює введення первісних значень даних

% Ю.Ф.Лазарев, кафедра ПСОН, КПІ, Україна,
% Почато 9-02-2000  Останні зміни 29-06-2008
global J1 J2 J3 f2 f1 Ntr Ltr J
% Задання первісних значень даних
% 1. Параметри моментів сил по осях підвісу
% 1.1. Параметри явної залежності від часу
% 1.1.1. Сталі складові моментів
%      N0=0; L0=0; R0=0;
% 1.1.2. Амплітуди моментів
%      Nm=0; Lm=0; Rm=0;
% 1.1.3. Частоти змінювання моментів
%      omx=0.; omu=omx; omz=omx;
% 1.1.4. Початкові фази моментів
%      ex=0; ey=0; ez=0;
% 1.2. Коефіцієнти в'язкого тертя
%      f2=0.; f1=0.;
% 1.3. Моменти сил сухого тертя
%      Ntr=0; Ltr=0;
% 2. Початкові умови
% 2.1. Початкове значення кінетичного моменту гіроскопа
%      H0=20;
% 2.2. Початкове кутове положення головної осі гіроскопа
%      a10=0*pi/180; bt0=0*pi/180;
% 2.3. Початкові кутові швидкості головної осі
%      alt0=0; btt0=0.1;
% 3. Моменти інерції гіроскопа
% 3.1. Зовнішньої рамки
%      J2x=10;

```



```

% 3.2. Внутрішньої рамки
      J1x=7; J1y=J1x; J1z=J1x;
% 3.3. Ротора
      Je=5; J=7;
% Розрахунок
      J1=J2x+J1z; J2=Je+J1x-J1z; J3=J1y+Je;
% 4. Параметри інтегрування
% 4.1. Кількість кроків інтегрування у найменшому періоді коливань
      ni=100;
% 4.2. Інтервал інтегрування у часі у кількості найбільших періодів коливань
      ntk=5.8;
clc, echo on
%
% Перед Вами програма GKPnoM1.m
% "Моделювання поведінки ГИРОСКОПА У КАРДАНОВОМУ ПІДВІСІ
% на нерухомій основі"
% з дисципліни
% "Основи теорії ЧУТЛИВИХ ЕЛЕМЕНТІВ систем орієнтації"
%
echo off

```

```

=====
% GKPNO_MenuM1
% Частина програми GKPNO_M1, яка здійснює
% діалогове ЗМІНЮВАННЯ ВСТАНОВЛЕНИХ ПАРАМЕТРІВ

% Ю.Ф.Лазарев, кафедра ПСОН, КПІ, Україна,
% Почато 9-02-2000 Останні змінювання 22-11-2009
k=1;
while k<11, clc, disp(' '); disp(' '); disp([' З програмою GKPnoM1.m працює ',sname]); echo on
%
% Моделюється рух гіроскопа у кардановому підвісі
% шляхом чисельного інтегрування його диференціальних рівнянь
%
%  $[J1+J2*\cos(bt)^2]*al" + [H - 2*J2*al*\sin(bt)]*bt*\cos(bt) =$ 
%  $= N(t) - R*\sin(bt) - fx*al' - Ntr*\sin(al)$ 
%  $J3*bt" - [H - J2*al*\sin(bt)]*al*\cos(bt) =$ 
%  $= L(t) - fy*bt' - Lt*\sin(bt')$ 
%  $dH/dt = R(t)$ 
%
echo off
k=menu(' Що змінювати? ',...
sprintf('Кінетичний момент ГКП = %g',H0),...
[sprintf('Моменти інерції ГКП: J1= %g;',J1),sprintf(' J2= %g;',J2),sprintf(' J3= %g;',J3)],...
[sprintf('Початкові умови: al0= %g;',al0*180/pi),sprintf(' bt0= %g;',bt0*180/pi),sprintf(' alt0=
%g;',alt0),sprintf(' btt0= %g;',btt0)],...
[sprintf('Постійні складові моментів сил: N0= %g;',N0),sprintf(' L0= %g;',L0),sprintf(' R0= %g;',R0)],...
[sprintf('Амплітуди моментів сил: Nm= %g;',Nm),sprintf(' Lm= %g;',Lm),sprintf(' Rm= %g;',Rm)],...
[sprintf('Частоти змінювання моментів сил: omx= %g;',omx),sprintf(' omy= %g;',omy),sprintf(' omz=
%g;',omz)],...
[sprintf('Фази змінювання моментів сил: ex= %g;',ex*180/pi),sprintf(' ey= %g;',ey*180/pi),sprintf(' ez=
%g;',ez*180/pi)],...
[sprintf('Коеф-ти в'язкого тертя по осях підвісу: fx= %g;',f2),sprintf(' fy= %g;',f1)],...
[sprintf('Моменти сил сухого тертя по осях підвісу: Nt= %g;',Ntr),sprintf(' Lt= %g;',Ltr)],...
[sprintf('Параметри інтегрування: ni= %g;',ni),sprintf(' ntk= %g;',ntk)], ' Нічого не змінювати ');
disp(''), if k==1, H0=input(sprintf('Зараз встановлено H0=%g; Уведіть нове значення =',H0)); end
if k==2, k2=1;
while k2<4
k2=menu(' Що саме змінити? ', sprintf(' J1= %g;',J1), sprintf(' J2= %g;',J2),...
sprintf(' J3= %g;',J3), ' Нічого не змінювати ');
if k2==1, J1=input(sprintf('Зараз J1=%g; Уведіть нове значення =',J1)); end

```

```

if k2==2,      J2=input(sprintf('Зараз J2=%g; Уведіть нове значення =',J2));    end
if k2==3,      J3=input(sprintf('Зараз J3=%g; Уведіть нове значення =',J3));    end
end
end
if k==3, k2=1;
while k2<5
    k2=menu(' Що саме змінити? ', sprintf(' a10= %g;',a10*180/pi), sprintf(' bt0= %g;',bt0*180/pi),...
    sprintf(' alt0= %g;',alt0), sprintf(' btt0= %g;',btt0), ' Нічого не змінювати ');
    if k2==1,      a10=input(sprintf('Зараз a10=%g; Уведіть нове значення (у градусах) =',a10*180/pi));
    a10=a10*pi/180;    end
    if k2==2,      bt0=input(sprintf('Зараз bt0=%g; Уведіть нове значення (у градусах) =',bt0*180/pi));
    bt0=bt0*pi/180;    end
    if k2==3,      alt0=input(sprintf('Зараз alt0=%g; Уведіть нове значення =',alt0));    end
    if k2==4,      btt0=input(sprintf('Зараз btt0=%g; Уведіть нове значення =',btt0));    end
end
end
if k==4, k2=1;
while k2<4
    k2=menu(' Що саме змінити? ', sprintf(' N0= %g;',N0), sprintf(' L0= %g;',L0),...
    sprintf(' R0= %g;',R0), ' Нічого не змінювати ');
    if k2==1,      N0=input(sprintf('Зараз N0=%g; Уведіть нове значення =',N0));    end
    if k2==2,      L0=input(sprintf('Зараз L0=%g; Уведіть нове значення =',L0));    end
    if k2==3,      R0=input(sprintf('Зараз R0=%g; Уведіть нове значення =',R0));    end
end
end
if k==5, k2=1;
while k2<4
    k2=menu(' Що саме змінити? ',  sprintf(' Nm= %g;',Nm),  sprintf(' Lm= %g;',Lm),...
    sprintf(' Rm= %g;',Rm),  ' Нічого не змінювати ');
    if k2==1,      Nm=input(sprintf('Зараз Nm=%g; Уведіть нове значення =',Nm));    end
    if k2==2,      Lm=input(sprintf('Зараз Lm=%g; Уведіть нове значення =',Lm));    end
    if k2==3,      Rm=input(sprintf('Зараз Rm=%g; Уведіть нове значення =',Rm));    end
end
end
if k==6, k2=1;
while k2<4
    k2=menu(' Що саме змінити? ',  sprintf(' omx= %g;',omx),  sprintf(' omy= %g;',omy),...
    sprintf(' omz= %g;',omz),  ' Нічого не змінювати ');
    if k2==1,      omx=input(sprintf('Зараз omx=%g; Уведіть нове значення =',omx));    end
    if k2==2,      omy=input(sprintf('Зараз omy=%g; Уведіть нове значення =',omy));    end
    if k2==3,      omz=input(sprintf('Зараз omz=%g; Уведіть нове значення =',omz));    end
end
end
if k==7, k2=1;
while k2<4
    k2=menu(' Що саме змінити? ',  sprintf(' ex= %g;',ex),  sprintf(' ey= %g;',ey),...
    sprintf(' ez= %g;',ez),  ' Нічого не змінювати ');
    if k2==1,      ex=input(sprintf('Зараз ex=%g; Уведіть нове значення (у градусах) =',ex*180/pi));
    ex=ex*pi/180;    end
    if k2==2,      ey=input(sprintf('Зараз ey=%g; Уведіть нове значення (у градусах) =',ey*180/pi));
    ey=ey*pi/180;    end
    if k2==3,      ez=input(sprintf('Зараз ez=%g; Уведіть нове значення (у градусах) =',ez*180/pi));
    ez=ez*pi/180;    end
end
end
if k==8, k2=1;
while k2<3
    k2=menu(' Що саме змінити? ',  sprintf(' fx= %g;',f2),  sprintf(' fy= %g;',f1),  ' Нічого не
змінювати ');
    if k2==1,      f2=input(sprintf('Зараз fx=%g; Уведіть нове значення =',f2));    end
    if k2==2,      f1=input(sprintf('Зараз fy=%g; Уведіть нове значення =',f1));    end
end
end

```

```

end
if k==9, k2=1;
while k2<3
    k2=menu(' Що саме змінити? ', sprintf(' Ntr= %g;',Ntr), sprintf(' Ltr= %g;',Ltr),'Нічого не змінювати ');
    if k2==1, Ntr=input(sprintf('Зараз Nt=%g; Уведіть нове значення =',Ntr)); end
    if k2==2, Ltr=input(sprintf('Зараз Lt=%g; Уведіть нове значення =',Ltr)); end
end
end
if k==10, k2=1;
while k2<3
    k2=menu(' Що саме змінити? ', sprintf('Кількість кроків на мінімальному періоді ni= %g;',ni),...
    sprintf('Кількість максимальних періодів ntk= %g;',ntk),' Нічого не змінювати ');
    if k2==1, ni=input(sprintf('Зараз ni=%g; Уведіть нове значення =',ni)); end
    if k2==2, ntk=input(sprintf('Зараз ntk=%g; Уведіть нове значення =',ntk)); end
end
end
end
end

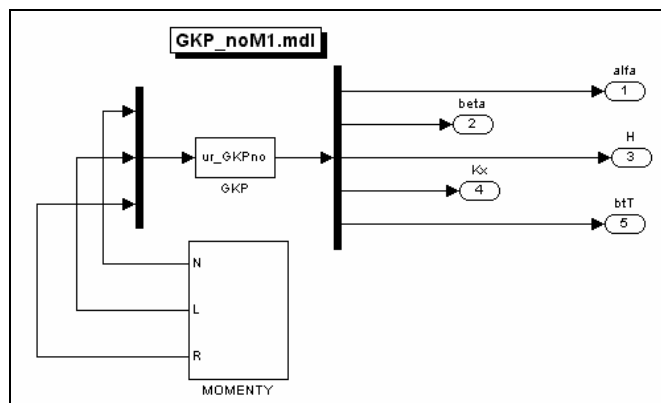
```

```

=====
%           GKPNO_YadroM1
% Частина програми GKPNOМ1, яка здійснює власне інтегрування
% диференціальних рівнянь гіроскопа у кардановому підвісі

% Ю.Ф.Лазарев, кафедра ПСОН, КПІ, Україна,
% Почато 9-02-2000 Останні зміни 22-11-2009
% ===== Розрахунки кроку та кінцевої миті інтегрування
lambda=abs(H0)/sqrt((J1+J2)*J3); % Частота нутації ГКП
mx=max(abs([lambda,omx,omy,omz])); % Максимальна частота коливань
hi=2*pi/(ni*mx); % Крок інтегрування
if lambda~=0, Tmax=2*pi/lambda;
    if omx~=0, T1=2*pi/abs(omx); Tmax=max([Tmax T1]); end
    if omy~=0, T1=2*pi/abs(omy); Tmax=max([Tmax T1]); end
    if omz~=0, T1=2*pi/abs(omz); Tmax=max([Tmax T1]); end
else
    disp('Помилка! Кінетичний момент гіроскопа не може дорівнювати нулю !');
end
tfinal=ntk*Tmax; % Кінцева мить інтегрування
% Підготовка ПОЧАТКОВИХ УМОВ
A0 = al0; B0 = bt0; KX0 = (J1+J2*cos(B0)^2)*alt0+H0*sin(B0); Bt0 = btt0;
%%%%%----- Запуск SIMULINK-моделі ----- %%%%%%%
[T,X,A,B,H,KX,BT]=sim('Gkp_noM1',tfinal);
% Підготовка вихідних масивів
al=A; bt=B; alt=(KX-H.*sin(B))./(J1+J2*cos(B).^2); btt= BT;

```



```

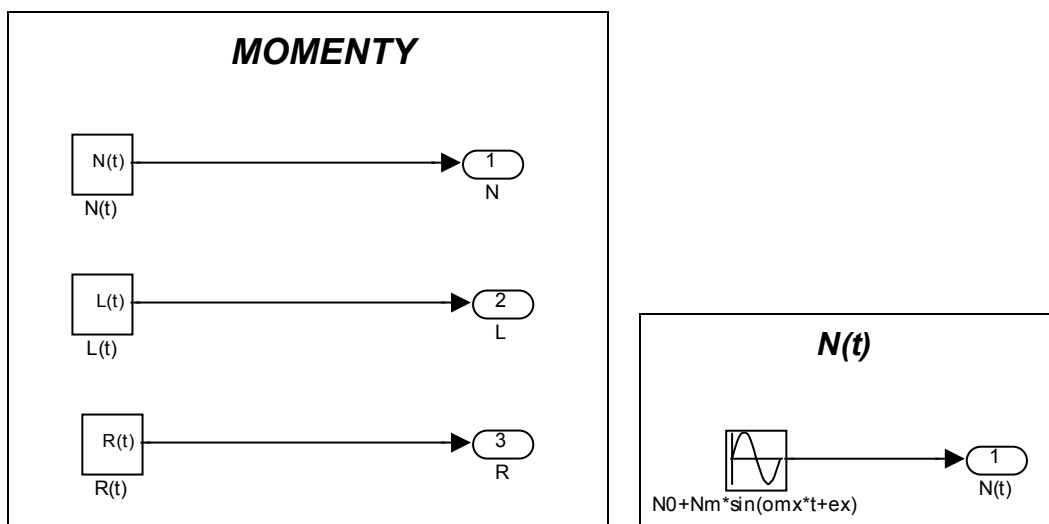
function [sys,x0,str,ts] = ur_GKPno(t,x,u,flag,H0,A0,B0,KX0,Bt0)
% S-функція, яка здійснює чисельне інтегрування

```

```

% диференціальних рівнянь гіроскопа у кардановому підвісі
% (для програми GKPNOm1.m)
global J1 J2 J3 f2 f1 Ntr Ltr J
% Лазарев Ю. Ф. 14-03-2008 Останні змінювання 22-11-2009
switch flag,
  case 0, [sys,x0,str,ts]=mdlInitializeSizes(H0, A0, B0, KX0, Bt0);
  case 1, sys=mdlDerivatives(t,x,u,J1,J2,J3,f2,f1,Ntr,Ltr);
  case 2, %sys=mdlUpdate(t,x,u);
  case 3, sys=mdlOutputs(t,x,u);
  case 4, sys=mdlGetTimeOfNextVarHit(t,x,u);
  case 9,
  otherwise, error(['Unhandled flag = ',num2str(flag)]);
end
%=====
function [sys,x0,str,ts]=mdlInitializeSizes(H0, A0, B0, KX0, Bt0)
sizes = simsizes;
sizes.NumContStates = 5; sizes.NumDiscStates = 0; sizes.NumOutputs = 5;
sizes.NumInputs = 3; sizes.DirFeedthrough = 1; sizes.NumSampleTimes = 1; sys = sim-
simsizes(sizes);
x0 = [ A0, B0, H0, KX0, Bt0]; str = []; ts = [0 0];
%=====
function z=mdlDerivatives(t,x,u,J1,J2,J3,f2,f1,Ntr,Ltr)
% x(1)=alfa x(2)=beta x(3)=H x(4)=KX x(5)=Btt
% u(1)=N u(2)=L u(3)=R
sb=sin(x(2)); cb=cos(x(2));
z(1) = (x(4)-x(3)*sb)/(J1+J2*cb^2); z(2) = x(5); z(3) = u(3); z(4) = u(1)-f2*z(1)-
Ntr*sign(z(1));
z(5) = (u(2)-f1*z(2)-Ltr*sign(z(2))+x(3)*z(1)*cb-J2*z(2)^2*sb*cb)/J3;
%=====
function y=mdlOutputs(t,x,u)
y = x;

```



```

%=====
% GKPNO_VyvodM1
% Частина програми GKPNOm1, яка здійснює ВИВЕДЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ моделювання НА ЕКРАН

```

```

% Ю.Ф.Лазарев, кафедра ПСОН, КПІ, Україна,
% Початок 9-02-2000 Останні зміни 22-11-2009
JX=Je+J1x; JY=Je+J1y; A=J1+J2; CB=cos(bt); SB=sin(bt);
KX1=JX*alt.*CB; KY1=JY*alt.*SB; KZ1=H0+J1z*alt.*SB;
KX2=KX1.*CB+KZ1.*SB+J2x*alt; KY2=KY1; KZ2=KZ1.*CB-KX1.*SB;

```

```

KK=sqrt(KX2.^2+KY2.^2+KZ2.^2); AlK=al+unwrap(atan2(-KY2,KZ2)); BtK=asin(KX2./KK);
subplot(2,2,1)
plot(al*180/pi,bt*180/pi,AlK*180/pi,BtK*180/pi,'r+-'), grid,axis('equal')
set(gca,'Fontname','MS Sans Serif','FontSize',12)
title('Картинна площина'); xlabel('\alpha, град. ');ylabel('\beta, град. '); legend('апекс','кінетична вісь',4)
subplot(2,2,3)
plot(alt*sqrt(A),btt*sqrt(J3),0,0,'k*'), grid, axis('equal')
set(gca,'Fontname','MS Sans Serif','FontSize',12)
title('Зображувальна площина'); xlabel('U'); ylabel('V ');
subplot(2,2,4)
plot(T,al,'-',T,bt,'--',T,alt,T,btt), grid
set(gca,'Fontname','MS Sans Serif','FontSize',12)
title('Залежність від часу '); xlabel('t, с ');
legend('\alpha, рад ', '\beta, рад', '\alpha", рад/с ', '\beta", рад/с',4)
subplot(2,2,2),axis off
h=text(-1,1.17,'Гіроскоп у кардановому підвісі на нерухомій основі',...
'FontSize',14,'FontWeight','bold','Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.2,1.05,'Параметри ГКП:', 'FontSize',12,'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(-0.2,0.95,sprintf('H_0 = %g;',H0), 'FontSize',12,'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.1,0.95,sprintf('J_1 = %g;',J1), 'FontSize',12,'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.4,0.95,sprintf('J_2 = %g;',J2), 'FontSize',12); h=text(0.7,0.95,sprintf('J_3 = %g;',J3), 'FontSize',12);
h=text(0.2,0.85,'Початкові умови:', 'FontSize',12,'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.,0.75,sprintf('\alpha_0 = %g^o;',al0*180/pi), 'FontSize',12);
h=text(0.5,0.75,sprintf('\beta_0 = %g^o',bt0*180/pi), 'FontSize',12);
h=text(0.,0.65,sprintf('\alpha" _0 = %g;',alt0), 'FontSize',12); h=text(0.5,0.65,sprintf('\beta" _0 =
%g',btt0), 'FontSize',12);
h=text(0.2,0.55,'Параметри моментів сил:', 'FontSize',12,'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(-0.2,0.45,sprintf('N_0 = %g;',N0), 'FontSize',12); h=text(-0.2,0.35,sprintf('L_0 =
%g;',L0), 'FontSize',12);
h=text(-0.2,0.25,sprintf('R_0 = %g;',R0), 'FontSize',12); h=text(0.1,0.45,sprintf('N_m =
%g;',Nm), 'FontSize',12);
h=text(0.1,0.35,sprintf('L_m = %g;',Lm), 'FontSize',12); h=text(0.1,0.25,sprintf('R_m =
%g;',Rm), 'FontSize',12);
h=text(0.4,0.45,sprintf('\omega_x = %g;',omx), 'FontSize',12); h=text(0.4,0.35,sprintf('\omega_y =
%g;',omy), 'FontSize',12);
h=text(0.4,0.25,sprintf('\omega_z = %g;',omz), 'FontSize',12); h=text(0.7,0.45,sprintf('\epsilon_x =
%g;',ex*180/pi), 'FontSize',12);
h=text(0.7,0.35,sprintf('\epsilon_y = %g;',ey*180/pi), 'FontSize',12); h=text(0.7,0.25,sprintf('\epsilon_z =
%g;',ez*180/pi), 'FontSize',12);
h=text(-0.2,0.15,[sprintf('Коефіцієнти в'язкого тертя: f_x = %g;',f2),...
sprintf(' f_y = %g;',f1)], 'FontSize',12,'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(-0.2,0.05,[sprintf('Моменти сил сухого тертя: N_t_r = %g;',Ntr),...
sprintf(' L_t_r = %g;',Ltr)], 'FontSize',12,'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(-0.3,0,'=====');
h1=text(-0.3,-0.05,'Програма GKPNOM1.m;', 'Fontname','MS Sans Serif');
h1=text(0.35,-0.05,'Автор: Ю.Ф. Лазарев', 'Fontname','MS Sans Serif');
h1=text(-0.3,-0.15,['Виконав ',sname], 'Fontname','MS Sans Serif');
tm=fix(clock); Tv=tm(4:5); h1=text(0.35,-0.15,[sprintf(' %g:',Tv), ' ',date]);
h=text(-0.3,-0.2,'=====');

```

Додаток 6. До розділу 11**Програма моделювання поведінки
двоступеневого гірокомпаса на рухомій основі**

```

%          DGK_црг
% Керувальна програма інтегрування диф. рівнянь двоступеневого гірокомпаса

% Ю.Ф.Лазарев, кафедра ПСОН, КПІ, Україна,
% Почато 27-03-2008   Останні зміни 2-11-2009
clear all, clc
global H J1 J2 omZ_fig fiN fiE Fiv om e al N F
sname='Лазарев Ю. Ф.';
% Задание значений исходных данных
omZ=7.29e-5;  fig= 60*pi/180; omZ_fig=omZ*cos(fig);
% 1. Кінетичний момент
H = 4000;
% 2. Моменти інерції
J1=10;      J2=3;
% 3. Коефіцієнт тертя
F=1.5;
% Момент сил сухого тертя
N=0.00;
% 4. Початкові умови
bt0=0.*pi/180;  bt0T=0;
% 5. Параметри руху основи
fiN=0.0*pi/180/60;  fiE=0.0*pi/180/60;  Fiv=1*pi/180;
om=1;      e=0*pi/180;  al=0*pi/180;
% 6. Параметри інтегрування
% Кількість кроків інтегрування у найменшому періоді коливань
ni=100;
% Кількість найбільших періодів коливань
ntk=2.9;
% Підготовка даних для інтегрування
OM0=sqrt(H*omZ_fig/J1);  hi=2*pi/om/ni;  TK=2*pi/OM0*ntk;
t=0;  k=1;  y=[bt0, bt0T];  Beta(1)=y(1);  BetaT(1)=y(2);  tt(1)=t;
% Цикл інтегрування
while t<=TK
    k=k+1;  [tout,yout] = rko4('DGK',hi,t,y);
    y=yout;  t=tout;  Beta(k)=y(1);  BetaT(k)=y(2);  tt(k)=tout;
end
% Виведення графіка
subplot(3,1,[2:3])
plot(tt,Beta*180/pi,'k. '), grid, set(gca,'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12)
title('Відхилення від площини меридіану','FontWeight','bold')
xlabel('t, c'), ylabel('\beta, град')
% Текстове оформлення графічного вікна
subplot(3,1,1), axis off
h=text(0.2,1.17,' Двоступеневий гірокомпас','FontSize',14,'FontWeight','bold','FontName','MS Sans
Serif');
h=text(0.8,1.17,sprintf('\phi_g = %g^o ',fig*180/pi));
h=text(0.0,0.97,'J_1(\beta" + u_y") + (H - J_2 u_x_1)u_z_1 = M_y_1','FontSize',14);
h=text(0.0,0.8,'u_x_1 = (\omega_3cos\phi_g + u_x)cos\beta -u_zsin\beta;');
h=text(0.0,0.63,'u_z_1=(\omega_3cos\phi_g + u_x)sin\beta + u_zcos\beta;');
h=text(0.0,0.46,'u_x= \phi_N_m\omega*\sin(\omegat+\epsilon)');
h=text(0.0,0.29,'u_y= \phi_v_m\omega*cos(\omegat+\alpha)');
h=text(0.0,0.12,'u_z= \phi_E_m\omega*sin(\omegat)');
h=text(0.5,0.97,sprintf('H = %g',H));

```

```

h=text(0.5,0.8,sprintf('J_1 = %g',J1)); h=text(0.5,0.63,sprintf('J_2 = %g',J2));
h=text(0.7,0.97,sprintf('\phi_N_m = %g ',fiN*180/pi*60));
h=text(0.7,0.8,sprintf('\phi_v_m = %g ',Fiv*180/pi*60));
h=text(0.7,0.63,sprintf('\phi_E_m = %g ',fiE*180/pi*60));
h=text(0.9,0.97,sprintf('\omega = %g',om)); h=text(0.9,0.8,sprintf('\epsilon = %g^o',e*180/pi));
h=text(0.9,0.63,sprintf('\alpha = %g^o',al*180/pi));
h=text(0.5,0.46,'Тертя','FontName','MS Sans Serif');
h=text(0.7,0.46,sprintf('f = %g ',F)); h=text(0.9,0.46,sprintf('M_t_r = %g',N));
h=text(0.5,0.29,'Початкові умови','FontName','MS Sans Serif');
h=text(0.7,0.29,sprintf('\beta_0 = %g^o ',bt0*180/pi));
h=text(0.9,0.29,sprintf('\beta_0\prime = %g',bt0T));
h=text(0.25,0.29,sprintf('Період T_0 = %g, c',round(2*pi*sqrt(J1/H/omZ_fig))),...
'FontName','MS Sans Serif');
h=text(0.4,0.16,'=====');
h1=text(0.4,0.09,'Програма DGK-upr.m; Автор Ю. Ф. Лазарев','FontName','MS Sans Serif');
h1=text(0.4,0.02,['Виконав ',sname,''],'FontName','MS Sans Serif');
tm=fix(clock); Tv=tm(4:5); h1=text(0.7,0.02,[sprintf(' %g:',Tv),' ',date]);
h=text(0.4,-0.04,'=====');

```

```

=====
function z=DGK(t,y)
% Процедура обчислювання правих частин диференціальних рівнянь руху
% двоступеневого гірокомпаса
% z(1)=y(2); % z(2)= -усуcT+(My1-(H-J2*ucx1)*ucz1)/J1;
% Вхідні параметри:
% t - поточний час
% y - масив з двох змінних стану
% y(1) = beta - кут відхилення від меридіану; y(2) = betaT - кутова швидкість

% Лазарев Ю. Ф. 27-03-2008
global H J1 J2 omZ_fig fiN fiE Fiv om e al N F
sB=sin(y(1)); cB=cos(y(1)); Uksi=fiN*om*sin(om*t+e);
Udz=fiE*om*sin(om*t); Ucksi=omZ_fig+Uksi;
ucx1=Ucksi*cB-Udz*sB; ucz1=Ucksi*sB+Udz*cB;
fivT=Fiv*om*cos(om*t+al); усуcT=-Fiv*om^2*sin(om*t+al);
alT=y(2)-fivT; My1=- F*alT + N;%*(-sign(alT));
z(1)=y(2); z(2)= -усуcT+(My1-(H-J2*ucx1)*ucz1)/J1;

```

Додаток 7. До розділу 12**Програма побудови графіків траєкторії апекса ГКП
при хитавиці основи і дії гармонічно змінюваних моментів сил**

```

%      Vupryam_efect_GKP

% Лазарев Ю. Ф. 5-12-2009
clear all, clc
global H Nm Lm  omn oml en el Gm omg eg
H=100; Nm=10; Lm=0; Gm=30*pi/180;
Tn=10; Tl=10; Tg=10; en=0; el=0;
omn=2*pi/Tn; oml=2*pi/Tl; omg=2*pi/Tg;
T=max([Tn Tl Tg]);
t0=0; y0(1)=0; y0(2)=0; tspan=[0,3*T];
% 1. eg=0
eg=0;
[t,y]=ode45('GKP_po_Hytavits',tspan,y0);
al1=y(:,1); bt1=y(:,2); t1=t; clear t y
% 2. eg=45
eg=45*pi/180;
[t,y]=ode45('GKP_po_Hytavits',tspan,y0);
al2=y(:,1); bt2=y(:,2); t2=t; clear t y
% 3. eg=90
eg=90*pi/180;
[t,y]=ode45('GKP_po_Hytavits',tspan,y0);
al3=y(:,1); bt3=y(:,2); t3=t; clear t y
% 4. eg=135
eg=135*pi/180;
[t,y]=ode45('GKP_po_Hytavits',tspan,y0);
al4=y(:,1); bt4=y(:,2); t4=t; clear t y
% 5. eg=180
eg=180*pi/180;
[t,y]=ode45('GKP_po_Hytavits',tspan,y0);
al5=y(:,1); bt5=y(:,2); t5=t; clear t y
% 6. eg=-45
eg=-45*pi/180;
[t,y]=ode45('GKP_po_Hytavits',tspan,y0);
al6=y(:,1); bt6=y(:,2); t6=t; clear t y
% 7. eg=-90
eg=-90*pi/180;
[t,y]=ode45('GKP_po_Hytavits',tspan,y0);
al7=y(:,1); bt7=y(:,2); t7=t; clear t y
% 8. eg=-135
eg=-135*pi/180;
[t,y]=ode45('GKP_po_Hytavits',tspan,y0);
al8=y(:,1); bt8=y(:,2); t8=t; clear t y
% 9. eg=-180
eg=-180*pi/180;
[t,y]=ode45('GKP_po_Hytavits',tspan,y0);
al9=y(:,1); bt9=y(:,2); t9=t;
% Виведення графіків
subplot(2,4,[1, 2,3])
plot(al1*180/pi,bt1*180/pi,'+-',al2*180/pi,bt2*180/pi,'.-',al6*180/pi,bt6*180/pi,'o-',...
al3*180/pi,bt3*180/pi,'^'),grid
axis equal, set(gca,'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12)
title('Траєкторія апекса в опорних координатах')
xlabel('\alpha^o, град'), ylabel('\beta^o, град'), set(gca,'FontSize',10)
legend('\epsilon_\gamma = 0^o','\epsilon_\gamma = 45^o','\epsilon_\gamma = -45^o','\epsilon_\gamma = 90^o',0)

```



```

subplot(2,4,[5,6,7])
plot(al7*180/pi,bt7*180/pi,'v-',al4*180/pi,bt4*180/pi,'.-',al8*180/pi,bt8*180/pi,'o-',...
     al5*180/pi,bt5*180/pi,'+-'),grid
axis equal, set(gca,'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12)
xlabel('\alpha^o, град')
ylabel('\beta^o, град')
set(gca,'FontSize',10)
legend('\epsilon_\gamma = -90^o','\epsilon_\gamma = 135^o','\epsilon_\gamma = -
135^o','\epsilon_\gamma = 180^o',0)
subplot(2,4,[4,8]), axis off
h=text(-0.3,1.05,'Гіроскоп в кардановому підвісі','FontName','MS Sans
Serif','FontSize',12,'FontWeight','Bold');
h=text(0.,1.0,' за хитавиці основи','FontName','MS Sans
Serif','FontSize',12,'FontWeight','Bold');
h=text(0.2,0.9,sprintf('H = %g;',H),'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
h=text(-0.2,0.8,'Закон хитавиці основи','FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
h=text(-0.0,0.75,'\gamma = \gamma_msin(\omega_\gamma +
\epsilon_\gamma);','FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
h=text(-0.20,0.7,sprintf('\gamma_m = %g^o;',Gm*180/pi),'FontName','MS Sans
Serif','FontSize',12);
h=text(0.5,0.7,sprintf('\omega_\gamma = %g;',omg),'FontName','MS Sans
Serif','FontSize',12);
h=text(-0.2,0.5,'Закон змінювання моментів сил','FontName','MS Sans
Serif','FontSize',12);
h=text(-0.0,0.45,'N(t) = N_msin(\omega_Nt + \epsilon_N);','FontName','MS Sans
Serif','FontSize',12);
h=text(-0.2,0.4,sprintf('N_m = %g;',Nm),'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
h=text(0.3,0.4,sprintf('\omega_N = %g;',omn),'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
h=text(1.1,0.4,sprintf('\epsilon_N = %g^o;',en*180/pi),'FontName','MS Sans
Serif','FontSize',12);
h=text(-0.0,0.3,'L(t) = L_msin(\omega_Lt + \epsilon_L);','FontName','MS Sans
Serif','FontSize',12);
h=text(-0.2,0.25,sprintf('L_m = %g;',Lm),'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
h=text(0.3,0.25,sprintf('\omega_L = %g;',oml),'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
h=text(1.1,0.25,sprintf('\epsilon_L = %g^o;',el*180/pi),'FontName','MS Sans
Serif','FontSize',12);
h1=text(0,0.15,'-----');
h1=text(-0.,0.12,'Програма Vypryam-efect-GKP.m','FontName','MS Sans Serif');
h1=text(0.,0.09,'Автор: Ю. Ф. Лазарев   ','FontName','MS Sans Serif');
h1=text(0,0.06,'-----');
tm=fix(clock); Tv=tm(4:5);
h1=text(0.2,0.03,[sprintf(' %g:',Tv),   ',date]);
=====

```

```

function z=GKP_po_Hytavits(t,y)
% Процедура обчислення правих частин
% прецесійних диференціальних рівнянь
% гіроскопа у кардановому підвісі на рухомій основі
% Вхідні величини:
% y(1) - alfao
% y(2) - betao

```

```

global H Nm Lm omn oml en el Gm omg eg
gamma=Gm*sin(omg*t+eg);
sg=sin(gamma); cg=cos(gamma);
N=Nm*sin(omn*t+en); L=Lm*sin(oml*t+el);
z(1)=-(N*sg+L*cg)/H;
z(2)=(N*cg-L*sg)/H;
z=z';

```

Комплекс програм моделювання поведження ГН при русі основи і дії моментів сил тертя і горизонтальної корекції

```

% Vypryam_efect_GN

% Лазарев Ю.Ф. 5-12-2009
clear all, clc
global dvobs
global H f1 f2 kg
global P0 OMv Pm omp ep
global T0 Tm omt et
global F0 OMf Fm omf ef
dvobs='Ug_Dv_Ob';
H=100; f1=4; f2=4; kg=10;
OMv=0%.1*2*pi;
OMf=0%.1*2*pi;
Pm=10*pi/180; omp=2*pi*0.1; ep=0*pi/2; P0=45*pi/180;
Tm=0*pi/180; omt=2*pi*0.; et=0*pi/2; T0=0*pi/180;
Fm=10*pi/180; omf=2*pi*0.1; ef=0*pi/2; F0=0*pi/180;
T=2*pi/omf;
% Підготовка початкових умов
t=0; alo0=0; bto0=0;
y=zeros(1,4); y(3)=alo0; y(4)=bto0;
[Usk,Ug]=Ug_Dv_Ob(t);
tB=tan(y(4)); sB=sin(y(4)); cB=cos(y(4));
tP=tan(Ug(1)-y(3));sP=sin(Ug(1)-y(3));cP=cos(Ug(1)-y(3));
tT=tan(Ug(2));sT=sin(Ug(2));cT=cos(Ug(2));
tF=tan(Ug(3));sF=sin(Ug(3));cF=cos(Ug(3));
a0=atan2(-sP*cF-cP*sF*sT+tB*cT*sF,cP*cT+tB*sT);
b0=asin((sP*sF-cP*cF*sT)*cB-cT*cF*sB);
g0=atan2(sF*cP+sT*sP*cF,cT*cF*cB-sB*(sP*sF-cP*cF*sT));
y(1)=a0; y(2)=b0; y0=y; tspan=[0,8*T];
% Чисельне інтегрування диференційних рівнянь гіроскопа
[t,y]=ode45('gn_po_precession',tspan,y0);
% Виведення графіків
subplot(2,2,1)
plot(t,y(:,3)*180/pi,'o-',t,y(:,4)*180/pi,'.-'),grid
set(gca,'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12)
title('Опорні координати'), xlabel('t, c')
legend('\alpha^o, град.', '\beta^o, град.',0)
subplot(2,2,3)
plot(y(:,1)*180/pi,y(:,2)*180/pi,'+-'),grid, axis equal
set(gca,'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12)
title('Апекс у відносних координатах')
xlabel('\alpha, град. '), ylabel('\beta, град. ')
subplot(2,2,4)
plot(y(:,3)*180/pi,y(:,4)*180/pi,'ro-'),grid, axis equal
set(gca,'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12)
title('Апекс в опорних координатах')
xlabel('\alpha^o, град. '), ylabel('\beta^o, град. ')
subplot(2,2,2), axis('off')
h=text(-0.1,1.1,'Г К П на рухомій основі','FontName','MS Sans Serif',
'FontSize',14,'FontWeight','Bold');
h=text(-0.0,1.,'(за прецесійними рівняннями)','FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
h=text(0.2,0.9,sprintf('H = %g;',H),'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
if OMv~=0
h=text(-0.2,0.8,'\psi = \psi_0 + \Omega_vt + \psi_msin(\omega_pt + \epsilon_p);',...
'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
h=text(0.6,0.8,sprintf('\Omega_v = %g',OMv),'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
else
h=text(-0.0,0.8,'\psi = \psi_0 + \psi_msin(\omega_pt + \epsilon_p);',...

```

```

    'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
end
h=text(-0.0,0.7,'\theta = \theta_0 + \theta_m\sin(\omega_{tt} + \epsilon_t);',...
    'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
if OMf~=0
    h=text(-0.3,0.6,'\phi = \phi_0 + \Omega_{ft} + \phi_m*\sin(\omega_{ft} + \epsilon_f);',...
        'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
    h=text(0.6,0.6,sprintf('\Omega_f = %g'),OMf),'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
else
    h=text(-0.0,0.6,'\phi = \phi_0 + \phi_m*\sin(\omega_{ft} + \epsilon_f);',...
        'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
end
h=text(-0.3,0.5,sprintf('\psi_0 = %g;',P0*180/pi),'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
h=text(-0.3,0.4,sprintf('\theta_0 = %g;',T0*180/pi),'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
h=text(-0.3,0.3,sprintf('\phi_0 = %g;',F0*180/pi),'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
h=text(0.,0.5,sprintf('\psi_m = %g;',Pm*180/pi),'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
h=text(0.,0.4,sprintf('\theta_m = %g;',Tm*180/pi),'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
h=text(0.,0.3,sprintf('\phi_m = %g;',Fm*180/pi),'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
h=text(0.3,0.5,sprintf('\omega_p = %g;',omp),'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
h=text(0.3,0.4,sprintf('\omega_t = %g;',omt),'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
h=text(0.3,0.3,sprintf('\omega_f = %g;',omf),'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
h=text(0.8,0.5,sprintf('\epsilon_p = %g;',ep*180/pi),'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
h=text(0.8,0.4,sprintf('\epsilon_t = %g;',et*180/pi),'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
h=text(0.8,0.3,sprintf('\epsilon_f = %g;',ef*180/pi),'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
if kg~=0
    h=text(-0.2,0.2,sprintf('Момент горизонтальної корекції    N_k = - %g\cdot\beta',...
        kg),'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
end
if f1~=0
    h=text(-0.2,0.1,sprintf('Момент тертя по внутрішній осі    L = - %g\cdot\beta"',...
        f1),'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
end
if f2~=0
    h=text(-0.2,0.,sprintf('Момент тертя по зовнішній осі    N = - %g\cdot\alpha"',...
        f2),'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12);
end
h1=text(-0.2,-0.05,'-----');
h1=text(-0.2,-0.1,'Vypryam-efect-GN.m','FontName','MS Sans Serif');
h1=text(0.3,-0.1,'Лазарев Ю.Ф., каф. ПСОИ','FontName','MS Sans Serif');
h1=text(-0.2,-0.2,'-----');
tm=fix(clock);    Tv=tm(4:5);
h1=text(0.1,-0.17,[sprintf(' %g:',Tv),    ',date]);
=====

```

```

function z=gn_po_precession(t,y)
% GN_PO_precession
% Процедура обчислення правих частин
% прецесійних диференційних рівнянь
% гіроскопа напрямку на рухомій основі
% Вхідні величини:
% y(1) – alfa, y(2) – beta,    y(3) – alfao,    y(4) – betao

```

```

global dvoobs
global H f1 f2
global kg
[Usk,Ug]=feval(dvoobs, t);
tB=tan(y(4)); sB=sin(y(4)); cB=cos(y(4));
tP=tan(Ug(1)-y(3));sP=sin(Ug(1)-y(3));cP=cos(Ug(1)-y(3));
tT=tan(Ug(2));sT=sin(Ug(2));cT=cos(Ug(2));
tF=tan(Ug(3));sF=sin(Ug(3));cF=cos(Ug(3));
g0=atan2(sF*cP+sT*sP*cF,cT*cF*cB-sB*(sP*sF-cP*cF*sT));
sa=sin(y(1)); ca=cos(y(1)); sb=sin(y(2)); cb=cos(y(2)); tb=tan(y(2));

```

```

sg0=sin(g0); cg0=cos(g0);
Ucz2=Usk(3)*ca-Usk(2)*sa; Ucy2=Usk(2)*ca+Usk(3)*sa; Ucx2=Usk(1)-Ucz2*tb;
A=-Ucx2; B=-Ucy2-kg*y(2)/H/cb; kff=1+f1*f2/(H*cb)^2;
z(1)=(A+B*f1/H/cb)/kff;
z(2)=(B-A*f2/H/cb)/kff;
z(3)=f1*z(2)/H/cB*cg0 -(-kg*y(2)-f2*z(1))*sg0/H/cb/cB;
z(4)=(-kg*y(2)-f2*z(1))*cg0/H/cb +f1*z(2)/H*sg0;
z=z';

```

```

=====
function [Usk,Ug]=Ug_Dv_Ob(t)
global P0 OMv Pm omp ep
global T0 Tm omt et
global F0 OMf Fm omf ef
Ug(1)=P0+OMv*t+Pm*sin(omp*t+ep); Ug(2)=T0+Tm*sin(omt*t+et);
Ug(3)=F0+OMf*t+Fm*sin(omf*t+ef);
PsiT=OMv+Pm*omp*cos(omp*t+ep); TetaT=Tm*omt*cos(omt*t+et);
FiT=OMf+Fm*omf*cos(omf*t+ef);
Usk(1)=PsiT*cos(Ug(2))*cos(Ug(3))+TetaT*sin(Ug(3));
Usk(2)=-PsiT*cos(Ug(2))*sin(Ug(3))+TetaT*cos(Ug(3));
Usk(3)=PsiT*sin(Ug(2))+FiT;

```

Програми розрахунку і побудови графіків карданової похибки ГН

```

% CardanOsh
t=0:0.001:1;
teta = 0; %fi = 45*pi/180;
fi=20*pi/180*sin(2*pi*t); %psi = t;
psi=50*pi/180;
CO=CardanO(psi,teta,fi);
plot(t,CO*180/pi,'-'), grid
set(gca,'FontSize',14,'FontName','MS Sans Serif') % title('Вираж з креном 45^o')
title('Хитавица з амплітудою 20^o, періодом 1 с, курс 50^o')
xlabel('t, с') % xlabel('Кут рискання, град.')
ylabel('Карданова похибка ГН, град.')
=====
function y=CardanO(psi,teta,fi)
tp=tan(psi); sf=sin(fi); cf=cos(fi); tt=tan(teta); ct=cos(teta);
y=(tp.*(1-cf./ct)-sf.*tt)/(1+(tp.*cf./ct-sf.*tt).*tp);

```

Програми інтегрування повних диференційних рівнянь ГН з врахуванням моменту горизонтальної корекції і побудовою графіку перехідного процесу

```

% KoreniGN
clear all, clc
global A J3 f1 f2 k H
H=100; A=10; J3=6; f1=5; f2=f1; k=40;
a3=A*J3; a2=f2*J3+f1*A; a1=H^2+f1*f2; a0=H*k;
Pol=[a3 a2 a1 a0]; Korn1=roots(Pol);
tspan=[0,10]; y0=[1 1 0]
[t,y]=ode45('GyroNap', tspan, y0);
plot(t,y(:,1),'-'), grid, set(gca,'FontName','MS sans Serif')
title('Гіроскоп напрямку з демпфіруванням (вільний рух)')
ylabel('\beta'), xlabel('Час, секунди')
=====
function z=GyroNap(t,y)
global A J3 f1 f2 k H
z(1)=y(2);

```

```

z(2)=(H*y(3)-f1*y(2))/J3;
z(3)=(-H*y(2)-f2*y(3)-k*y(1))/A;
z=z';

```

Програми розрахунку і побудови графіка змінювання віражної похибки ГН за час повного віражу

```

%      Virag
fi=45*pi/180;  edom=0:0.2:5;
at2om1=pi*edom.^2./(1+edom.^2)*sin(fi^2);  fi=30*pi/180;
at2om2=pi*edom.^2./(1+edom.^2)*sin(fi^2);  fi=15*pi/180;
at2om3=pi*edom.^2./(1+edom.^2)*sin(fi^2);
plot(edom,at2om1*180/pi,'-',edom,at2om2*180/pi,'+-',edom,at2om3*180/pi,'o-'),grid
set(gca,'FontName','MS Sans Serif','FontSize',12)
title(' Віражна похибка ГН (градуси) за час віражу (T=2pi/omega)')
xlabel('\epsilon/omega'),  ylabel('\Delta\alpha')
legend('\phi=45^o','\phi=30^o','\phi=15^o',0)
=====
function Uc=Vyrage(t)
global OMv Fi Ps0
Uc(1)=OMv*cos(Fi);  Uc(2)=-OMv*sin(Fi);  Uc(3)=0;

```



```

[tout,yout]=ode23('GM1_PO',tspan,y0,options);
alfa=yout(:,1); beta=yout(:,2); t=tout;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Розрахунок поточної швидкісної похибки
n=length(t);
for k=1:n
    t0=t(k); V=V0;
    if t0>=t1 & t0<=t2, V=V+W0*(t0-t1); elseif t0>t2, V=V+W0*(t2-t1); end
    K=K0;
    if t0>=t3 & t0<=t4, K=K+OM*(t0-t3); elseif t0>t4, K=K+OM*(t4-t3); end
    VNsk = V*cos(K); VEsk = V*sin(K);
    UksiSk(k) = OMz*cf+VEsk/Rz; UetaSk(k) = UksiSk(k)*tf; UdzetaSk(k) = -VNsk/Rz;
end
alSk=atan(UdzetaSk./(om0+UetaSk));
btSk=atan(-UksiSk./((om0+UetaSk).*cos(alSk)+UdzetaSk.*sin(alSk)));
% Виведення графіків
subplot(2,2,1)
plot(alfa*180*60/pi,beta*180*60/pi,'.-',alSk*60*180/pi,btSk*180*60/pi,'sk-',...
    alS*180*60/pi,btS*180*60/pi,'sr',al0*180*60/pi,bt0*180*60/pi,'o'),grid
axis('equal'), axis('ij'), set(gca,'Fontname','MS Sans Serif','FontSize',12)
title('Картинна площина (вид згори)','FontWeight','bold')
xlabel('W \leftarrow \alpha, \text{мін.} \rightarrow E'),
ylabel('S \leftarrow \beta, \text{мін.} \rightarrow N')
set(gca,'Fontname','MS Sans Serif','FontSize',10), legend('Алекс','Рівновага','ппП','ппА',3)
subplot(2,2,4)
plot(t/60,alfa*60*180/pi,t/60,beta*180*60/pi,'.-'),grid
set(gca,'Fontname','MS Sans Serif','FontSize',12), title('Залежність від часу','FontWeight','bold')
xlabel('t, хв.','FontSize',12), legend('\alpha','\beta',4)
ylabel('Кут, мін.')
alb= alfa'-alSk; btb=beta'-btSk;
subplot(2,2,3)
set(gca,'Fontname','MS Sans Serif','FontSize',10)
if flag==1
    plot(alSk*60*180/pi,btSk*180*60/pi,'s',alb*60*180/pi,btb*180*60/pi,'.-'),grid
else
    plot(alSk*60*180/pi,btSk*180*60/pi,'s'),grid
end
axis('equal'), axis('ij')
set(gca,'Fontname','MS Sans Serif','FontSize',12), title('Похибка','FontWeight','bold')
xlabel('W \leftarrow \alpha, \text{мін.} \rightarrow E'),
ylabel('S \leftarrow \beta, \text{мін.} \rightarrow N')
set(gca,'Fontname','MS Sans Serif','FontSize',10)
if flag==1
    legend('швидкісна','балістична',3)
else
    legend('швидкісна',3)
end
% Текстове оформлення графічного вікна
subplot(2,2,2), axis off
h=text(-0.2,1.15,'ГІПОМАЯТНИК як гіровертикаль',...
    'FontSize',14,'FontWeight','bold','Fontname','MS Sans Serif');
h=text(-0.,1.06,sprintf('Географічна широта місця \phi_{\Gamma} = \%g^{\circ}',fig*180/pi),'Fontname','MS
    Sans Serif');
h=text(-0.2,0.98,'Період власних коливань','Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.5,0.98,sprintf('T_0 = \%g хв.;',T0/60),'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(-0.2,0.9,'Коеф-ти тертя','Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.5,0.9,sprintf('\mu_1 = \%g;',f1)); h=text(0.8,0.9,sprintf('\mu_2 = \%g;',f2));
h=text(-0.2,0.82,'Стали моменти','Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.5,0.82,sprintf('\mu_1 = \%g;',m0)); h=text(0.8,0.82,sprintf('\mu_2 = \%g;',m0));
h=text(-0.2,0.75,'Початкове положення:', 'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.5,0.75,sprintf('\alpha_0 = \%g\prime;',al0*180*60/pi));
h=text(0.8,0.75,sprintf('\beta_0 = \%g\prime;',bt0*180*60/pi));

```

```

h=text(0.2,.65,'Pyx OCHOBI:', 'FontSize', 12, 'Fontname', 'MS Sans Serif');
h=text(-0.2,.58,'V = V_o + W_ot | _t_1^t^2');
h=text(0.5,.58,'V_k = V_msin(\omega t+\epsilon_k)');
h=text(0.17,.5,'K = K_o + \Omega t | _t_3^t^4'); h=text(0.1,.45,'-----');
h=text(-0.2,0.35,sprintf('V_o = %g;', V0));
h=text(0.17,0.35,sprintf('K_o = %g^o', K0*180/pi));
h=text(0.5,0.35,sprintf('V_m = %g;', Vm)); h=text(-0.2,0.25,sprintf('W_o = %g;', W0));
h=text(0.17,0.25,sprintf('T_Ц = %g c', 2*pi/OM), 'Fontname', 'MS Sans Serif');
h=text(0.5,0.25,sprintf('T_X = %g c', 2*pi/om), 'Fontname', 'MS Sans Serif');
h=text(-0.2,0.15,sprintf('t_1 = %g хв', t1/60), 'Fontname', 'MS Sans Serif');
h=text(0.17,0.15,sprintf('t_3 = %g хв', t3/60), 'Fontname', 'MS Sans Serif');
h=text(0.5,0.15,sprintf('\epsilon = %g;', e*180/pi));
h=text(-0.2,0.05,sprintf('t_2 = %g хв', t2/60), 'Fontname', 'MS Sans Serif');
h=text(0.17,0.05,sprintf('t_4 = %g хв', t4/60), 'Fontname', 'MS Sans Serif');
h=text(-0.3,0,'=====');
h1=text(-0.3,-0.05,'Програма GM-PO-upr.m;', 'Fontname', 'MS Sans Serif');
h1=text(0.4,-0.05,'Автор Ю. Ф. Лазарев', 'Fontname', 'MS Sans Serif');
tm=fix(clock); Tv=tm(4:5); h1=text(0.35,-0.15,[sprintf(' %g:', Tv), ' ', date]);
h=text(-0.3,-0.2,'=====');

```

```

=====
function z=GM_PO(t,y)
% Процедура обчислювання правих частин диференціальних рівнянь
% руху ПИРОМАЯТНИКА на РУХОМІЙ основі
% Вхідні параметри:
% t - поточний час
% y - масив з п'яти змінних стану
% y1 = alfa - східне відхилення осі ГМ
% y2 = beta - південне відхилення осі ГМ

% Лазарев Ю. Ф. 16-06-2008 Останні зміни 14-12-2009
global OMz Rz cf tf g
global mx0 my0 fi1 fi2
global V0 W0 Vm om OM e K0 t1 t2 t3 t4
global om0
% 1) розрахунок швидкостей
V=V0;
if t>=t1 & t<=t2, V=V+W0*(t-t1); elseif t>t2, V=V+W0*(t2-t1); end
K=K0; Wk=0;
if t>=t3 & t<=t4, K=K+OM*(t-t3); Wk=V*OM; elseif t>t4, K=K+OM*(t4-t3); Wk=0; end
VN = V*cos(K); VE = V*sin(K);
% 2) розрахунок перевантажень
Vk=Vm*sin(om*t+e); dVk_dt=Vm*om*cos(om*t+e); dV_dt=0;
if t>=t1 & t<=t2, dV_dt=dV_dt+W0; end
Wp=dV_dt; Wk=dVk_dt+Wk;
nN = (Wp*cos(K)-Wk*sin(K))/g; nE = (Wp*sin(K)+Wk*cos(K))/g;
% 3) розрахунок проєкцій кут;=ової швидкості географічної СК
Uksi = OMz*cf+VE/Rz; Ueta = Uksi*tf; Udzeta = -VN/Rz;
% Проміжні розрахунки
sa=sin(y(1)); ca=cos(y(1)); tb=tan(y(2)); sb=sin(y(2)); cb=cos(y(2));
om1=om0+Ueta; Udzne=Udzeta+om0*nE;
A=-Uksi-(om1*ca+Udzne*sa)*tb-om0*nN+my0/cb; B=om1*sa-Udzne*ca-mx0/cb;
KS=1/(1+fi1*fi2/cb^2);
% Обчислення правих частин рівнянь
z(1)=KS*(A-B*fi1/cb); z(2)= KS*(B+A*fi2/cb);
z=z';

```


Програми моделювання поведження маятникового гірокомпаса на рухомій основі

```

%                               MGK_PO_upr
% Програма чисельного інтегрування прецесійних рівнянь
% Маятникового ГіроКомпаса на Рухомій основі

% Ю.Ф.Лазарев,   Почато 6-06-2008   Останні зміни 14-12-2009
clear all, clc
global OMz Rz cf tf g
global mz my fi1 fi2
global V0 W0 Vm om OM e K0 t1 t2 t3 t4
global om0
g=9.81; OMz=7.29e-5; Rz=6.4e6; fig=60*pi/180; cf=cos(fig); tf=tan(fig);
sname='Лазарев Ю. Ф.';
% Вшиті значення первісних даних
% 1. Період власних коливань гіромаятника
T0 = 1800%5064;
om0k=2*pi/T0; om0=om0k^2/(OMz*cf);
% 2. Сталі складові моментів сил
mz=0; my=0;
% 3. Коефіцієнти вязкого тертя
fi1= 2e-3; fi2 = 2e-3;
% 4. Параметри руху основи
% початкова продольна швидкість
V0=10;
% прискорення
W0=0.0;
% мить початку дії прискорення w0
t1=600;
% мить кінця дії прискорення
t2=1800;
% період хитавиці
Tk=20; om=2*pi/Tk;
% амплітуда хитавиці
fim=20*pi/180; Vm=fim*om*10;
% початкова фаза хитавиці зі швидкості
e=0;
% початковий курс корабля
K0=0*pi/180;
% період циркуляції
Tc=600; OM=2*pi/Tc;
% мить початку циркуляції
t3=0%600;
% мить кінця дії прискорення
t4=0%1200;
% 5. Тривалість інтегрування у періодах власних коливань
ntk=3;
% Підготовка початкових умов
t0=0;
% 1) розрахунок швидкостей
V=V0; K=K0; VN00 = V*cos(K); VE00 = V*sin(K);
% 2) розрахунок проєкцій кутової швидкості географічної СК
Uksi0 = OMz*cf+VE00/Rz, Ueta0 = Uksi0*tf, Udzeta0 = -VN00/Rz;
alS=atan(-Udzeta0/Uksi0); saS=sin(alS); caS=cos(alS);
btS=atan(Ueta0/(om0+Uksi0*caS-Udzeta0*saS));
% Початкові кути відхилення від вертикалі
al0=alS; bt0=btS; flag=1;
%al0=0; bt0=0; flag=2;
y0=[al0, bt0]; TK=T0*ntk; tspan=[0,TK];
%%%%%% Інтегрування диференційних рівнянь ГІРОКОМПАСА %%%%%%%%%

```

```

options=odeset('RelTol',1e-12);
[tout,yout]=ode45('MGK_PO',tspan,y0,options);
alfa=yout(:,1); beta=yout(:,2); t=tout;
    %%%%%%%%%%%%% Розрахунок поточної швидкісної похибки %%%%%%%%%
n=length(t);
for k=1:n
    t0=t(k);    V=V0;
    if t0>=t1 & t0<=t2,    V=V+W0*(t0-t1); elseif t0>t2,    V=V+W0*(t2-t1); end
    K=K0;
    if t0>=t3 & t0<=t4,    K=K+OM*(t0-t3); elseif t0>t4,    K=K+OM*(t4-t3); end
    VNsk = V*cos(K);    VEsk = V*sin(K);
    UksiSk(k) = OM*cf+VEsk/Rz;    UetaSk(k) = UksiSk(k)*tf;    UdzetaSk(k) = -VNsk/Rz;
end
alSk=atan(-UdzetaSk./UksiSk); saS=sin(alSk); caS=cos(alSk);
btSk=atan(UetaSk./(om0+UksiSk.*caS-UdzetaSk.*saS));
    % Виведення графіків
subplot(2,2,1)
plot(alfa*180/pi,beta*180/pi,'-',alSk*180/pi,btSk*180/pi,'sk-',...
    alS*180/pi,btS*180/pi,'sr',al0*180/pi,bt0*180/pi,'o'),grid
set(gca,'Fontname','MS Sans Serif','FontSize',12)
title('Картинна площа','FontWeight','bold')
xlabel('E \leftarrow \alpha, град. \rightarrow W'), ylabel('\beta, град. '),
set(gca,'Fontname','MS Sans Serif','FontSize',10), legend('Алекс','Рівновага','ппР','ппА',2)
subplot(2,2,4)
plot(t/60,alfa*180/pi,t/60,beta*180*60/pi,'-'),grid
set(gca,'Fontname','MS Sans Serif','FontSize',12)
title('Залежність від часу','FontWeight','bold'), xlabel('t, хв. '),
set(gca,'Fontname','MS Sans Serif','FontSize',10), legend('\alpha, град.', '\beta, мин.',4)
alb= alfa'-alSk;    btb=beta'-btSk;
subplot(2,2,3)
if flag==1
    plot(t/60,alSk*180/pi,'s',t/60,alb*180/pi,'-'),grid
else
    plot(t/60,alSk*180/pi,'s'),grid
end
set(gca,'Fontname','MS Sans Serif','FontSize',12)
if flag==1
    title('Похибка, град.','FontWeight','bold')
else
    title('Швидкісна похибка, град.','FontWeight','bold')
end
xlabel('t, хв. '), set(gca,'Fontname','MS Sans Serif','FontSize',10)
if flag==1
    legend('швидкісна','балістична',0)
end
% Текстове оформлення графічного вікна
subplot(2,2,2), axis off
h=text(-0.7,1.15,'Маятниковий гірокомпас на рухомій основі',...
    'FontSize',14,'FontWeight','bold','Fontname','MS Sans Serif');
h=text(-0.,1.06,sprintf('Географічна широта місця    \phi_\Gamma = %g^\circ',fig*180/pi),'Fontname','MS
Sans Serif');
h=text(-0.2,0.98,'Період власних коливань','Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.5,0.98,sprintf('T_0 = %g хв.:',T0/60),'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(-0.2,0.9,'Коеф-ти тертя','Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.5,0.9,sprintf('\phi_1 = %g;',f1));    h=text(0.8,0.9,sprintf('\phi_2 = %g;',f2));
h=text(-0.2,0.82,'Сталі моменти','Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.5,0.82,sprintf('\mu_Z = %g;',mz));    h=text(0.8,0.82,sprintf('\mu_Y = %g;',my));
h=text(-0.2,0.75,'Початкове положення:','Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.5,0.75,sprintf('\alpha_0 = %g\prime;',al0*180*60/pi));
h=text(0.8,0.75,sprintf('\beta_0 = %g\prime;',bt0*180*60/pi));
h=text(0.2,.65,'Пух ОСНОВИ:','Fontname','MS Sans Serif');
h=text(-0.2,.58,'V = V_0 + W_ot | _t_1^t^2');    h=text(0.5,.58,'V_k =

```

```

V_msin(\omega_t+\epsilon_k');
h=text(0.17,.5,'K = K_o +\Omegat | _t_3^t^4'); h=text(0.1,.45,'-----');
h=text(-0.2,0.35,sprintf('V_o = %g;',V0)); h=text(0.17,0.35,sprintf('K_o = %g^o',K0*180/pi));
h=text(0.5,0.35,sprintf('V_m = %g;',Vm)); h=text(-0.2,0.25,sprintf('W_o = %g;',W0));
h=text(0.17,0.25,sprintf('T_ц = %g c',2*pi/OM),'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.5,0.25,sprintf('T_X = %g c',2*pi/om),'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(-0.2,0.15,sprintf('t_1 = %g хв',t1/60),'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.17,0.15,sprintf('t_3 = %g хв',t3/60),'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.5,0.15,sprintf('\epsilon = %g;',e*180/pi));
h=text(-0.2,0.05,sprintf('t_2 = %g хв',t2/60),'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(0.17,0.05,sprintf('t_4 = %g хв',t4/60),'Fontname','MS Sans Serif');
h=text(-0.3,0,'=====');
h1=text(-0.3,-0.05,'MGK-PO-upr.m;', 'Fontname','MS Sans Serif');
h1=text(0.35,-0.05,'Автор Ю. Ф. Лазарев', 'Fontname','MS Sans Serif');
tm=fix(clock); Tv=tm(4:5); h1=text(0.4,-0.15,[sprintf(' %g:',Tv),' ',date]);
h=text(-0.3,-0.2,'=====');

```

```

=====
function z=MGK_PO(t,y)
% Процедура обчислювання правих частин прецесійних
% лифференційних рівнянь руху Маятникового ГіроКомпаса на РУХОМІЙ основі
% z=MGK_PO(t,y)
% Вхідні параметри:
% t - поточний час
% y - масив з двох змінних стану:
% y(1) = alfa - східне
% y(2) = beta - південне
% відхилення горішнього кінця осі ГМ від вертикалі
% Вихідний параметр:
% z - вектор похідних

% Лазарев Ю. Ф. 13-12-2009
global OMz Rz cf tf g
global mz my fi1 fi2
global V0 W0 Vm om OM e K0 t1 t2 t3 t4
global om0
% 1) розрахунок швидкостей
V=V0;
if t>=t1 & t<=t2, V=V+W0*(t-t1); elseif t>t2, V=V+W0*(t2-t1); end
K=K0; Wk=0;
if t>=t3 & t<=t4, K=K+OM*(t-t3); Wk=V*OM; elseif t>t4, K=K+OM*(t4-t3); Wk=0; end
VN = V*cos(K); VE = V*sin(K);
% 2) розрахунок перевантажень
Vk=Vm*sin(om*t+e); dVk_dt=Vm*om*cos(om*t+e); dV_dt=0;
if t>=t1 & t<=t2, dV_dt=dV_dt+W0; end
Wp=dV_dt; Wk=dVk_dt+Wk;
nN = (Wp*cos(K)-Wk*sin(K))/g; nE = (Wp*sin(K)+Wk*cos(K))/g;
% 3) розрахунок проєкцій кут;=ової швидкості географічної СК
Uksi = OMz*cf+VE/Rz; Ueta = Uksi*tf; Udzeta = -VN/Rz;
% Проміжні розрахунки
sa=sin(y(1)); ca=cos(y(1)); tb=tan(y(2)); sb=sin(y(2)); cb=cos(y(2));
ga=atan((nE*ca+nN*sa)/(cb-(nN*ca-nE*sa)*sb)); sg=sin(ga); cg=cos(ga);
A=-Ueta+(Uksi*ca-Udzeta*sa)*tb+om0*cg*(tb+nN*ca-nE*sa)-mz/cb;
B=-(Udzeta*ca+Uksi*sa)+om0/cb*(nE*(cg*ca*sb-sg*sa)+nN*(sg*ca+cg*sa*sb))+my/cb;
KS=1/(1+fi1*fi2/cb^2);
% Обчислення правих частин рівнянь
z(1)=KS*(A+B*fi1/cb); z(2)= KS*(B-A*fi2/cb); z=z';

```

АБЕТКОВИЙ ПОКАЖЧИК

А		гіровертикаль	11, 437, 489
автоколивання	260, 265	гірогоризонт	10, 11
адекватність	16	гірогоризонткомпас	11
Алексеев В.	13	гірокомпас	11
амортизатор	233	гірокомпас двоступеневий	415
амортизатор лінійний	234	гірокомпас маятниковий	515
амортизований об'єкт	233	гірокомпас тригіроскопний	11
амплітуда	117	гіромаятник	317, 489
амплітуда комплексна	118, 129, 224	гіромаятник вільний	319
амплітуда комплексна усереднена	224	гіромаятник симетричний	317
амплітуда нутаційних коливань симетричного зрівноваженого гіроскопа	288	гіромотор відкритий	390
антикомутативність	19	гіромотор закритий	390
Аншютц-Кемпфе Г.	11	гіроорбітант	13
АО	233	гіроприлади вільні	437
апекс гіроскопа	278, 342	гіроскоп	272
аргумент кватерніону	45	гіроскоп астатичний	275
астролябія	9	гіроскоп важкий	275, 317
АЧХ маятника	217	гіроскоп витягнутий	279, 302
АЧХ нелінійної системи	173, 191	гіроскоп двоступеневий	410
АЧХ параметричних коливань	201, 226, 227	гіроскоп зрівноважений	275
Б		гіроскоп напрямку	437, 464
Бреннан Л.	12	гіроскоп симетричний	278
Булгаков Б. В.	283	гіроскоп симетричний зрівноважений	278
В		гіроскоп симетричний зрівноважений вільний	284
вагон Шиловського	160	гіроскоп сплюснутий	279, 302
варіація	135	гіроскоп у кардановому підвісі	341
вектор власного кінетичного моменту гіроскопа	277	гіроскоп у кардановому підвісі вільний	344
вектор Гібса	40	гіроскоп Фуко другого роду	434
вектор-кватерніон	43	гіроскоп Фуко першого роду	415
вершина гіроскопа	278	гіроскоп швидкий	292, 298
вибіг ротора	391, 394	гіроскопічний момент	299
вимушені коливання	130	гіроскоп витягнутий	66
випрямний ефект	185, 222, 360, 419	гіроскоп кульовий	66
випрямний ефект у гіроскопі	449	гіроскоп симетричний	66
віброзахист	209	гіроскоп сплюснутий	66
віброзахист пасивний	233	гіроскопічний компас	11
відхилення	135	гіроскопічний момент	413
вікові члени	180	гіростабілізатор	12
віраж	471	гіротахометр	430
вісь вимірювальна	410	гіроширот	434
вісь власного обертання	281	ГКП	437
вісь власного обертання гіроскопа	274	глибина модуляції	200, 201
вісь гіроскопа головна	274, 277	глибина пульсації	200
вісь Ейлера	38	ГМ	489
вісь екваторіальна	65	ГН	464
вісь кінетична	283, 284	градшток	9
вісь прецесії	281	Граммель Р.	7
вісь фігури	66	ГТ	430
вісь чутливості двоступеневого гіроскопа	414	Гудстейн Р.	354
вузол нестійкий	258	Д	
вузол стійкий	258	Даламбер	72
Г		двоступеневий РВГ	541
гармоніка основна	120	ДГ	410
гіперкомплексне число	42	ДГК	415
гіроазимут	12	Джойа Ф.	9
гіроазимутгоризонт	12	девіація інтеркардинальна	531
		дзига	10, 317
		динамічна настройка	539
		динамічно настроєний гіроскоп	539
		дисбаланс динамічний	388
		дисбаланс пружний	399
		дисбаланс ротора динамічний	388
		дисбаланс статичний	399

кутова швидкість	52
кутова швидкість власного обертання гіроскопа	277

Л

лаг	9
Левенталь Е. Б.	409
лінеаризація гармонічна	169, 215
лінеаризація класична	165
лінеаризація нелінійностей	165
лінеаризація по кінцях	167, 214
лінеаризація пряма	168, 214
лінійна система амортизації	240
лінійна теорія віброзахисту	236
лінія переключення	263
Ляпунов А.	7, 8

М

магнітна стрілка	9
Магнус К.	354
малий параметр	164
математична модель	18
матриця кососиметрична	24
матриця моментів інерції	64
матриця напрямних косинусів	29
матриця невивроджена	23
матриця обернена	23
матриця ортогональна	24
матриця симетрична	24
матриця характеристична	124
маятник	209
МГК	515
метод збурень	165, 179, 218
метод ітерацій	266
метод кінетостатики	72
метод комплексних амплітуд	125
метод компресії рівнянь	303, 329
метод Ніколаї	348, 351, 365, 369
метод Н. М. Крилова і М. М. Боголюбова	165
метод О. М. Крилова	165, 182
метод Остроградського-Ляпунова	165, 183
метод послідовних наближень	420
метод Пуанкаре	165
метод Пуассона	165, 179
метод усереднення	165, 187, 192, 198
метод фазового простору	253
метод Четаєва	140
методи асимптотичні	165
методи лінеаризації	164, 214, 216
методи малого параметру	164
мікромеханічний гіроскоп	555
міна Уайтхеда	10
ММГ	555
модель адекватна	16
модель гіромаятника лінеаризована	333
модель гіроскопа у кардановому підвісі лінеаризована	346
модель гіроскопа у кардановому підвісі прецесійна	345
модель математична	15, 16
модуль кватерніону	45
момент імпульсу	61, 62, 538
момент імпульсу сил	286
момент інерції відносно осі	64
момент інерції відцентровий	64
момент інерції екваторіальний	65
момент інерції осьовий	66
момент пружного дисбалансу	399, 400
момент кінетичний гіроскопа власний	277
момент маятниковий опорний	322
моменти однойменні	449

моменти перехресні	449
моменти сил в'язкого тертя	369
момент сил інерції коріолісового прискорення	299
момент сил сухого тертя	371, 402
моменти інерції	64
моменти сил інерції	73, 399
моменти сторонніх сил	390

Н

наближення друге	267
наближення нульове	266
наближення перше	266
навігація	9
напрямні косинуси	20
напрямні косинуси осі фігури	278
неізохронність коливань	166, 183, 210, 213
нелінійність гладка	134, 166
нелінійність суттєва	134
Ніколаї С. Л.	348
Ноздровський С. А.	12
норма кватерніону	44
нормальна форма Коші диференціальних рівнянь	134, 187, 189, 197, 210, 223
нутація	276, 285

О

обертальна частина моменту імпульсу	63
Обрі Л.	10
ОВГ	536
октант	9
операція усереднення	186, 224, 419, 421
опорні кутові координати	437
орт векторної частини кватерніону	45
осі інерції головні	65
осі Резаля	299, 303
осциляторний вібраційний гіроскоп	536
осциляторний гіроскоп	555

П

параметр малий	219
параметри Ейлера	47
параметри Родріга-Гамільтона	47
параметри системи	196
парціальна коливальна система	561
парціальна частота	568
парціальні частоти	561
ПДЕ	233, 243, 245
ПДЕ з внутрішнім тертям	245
передатна функція	126
передатна функція частотна	126
передатні функції частотні	132
період нутації Землі	294
період Шюлера	491, 503
петля гістерезису	241
питома швидкість корекції	471
підвіс – сферичний шарнір	273
підвіс аеродинамічний	274
підвіс аеростатичний	274
підвіс гідростатичний	274
підвіс гіроскопа	273
підвіс електростатичний	274
підвіс карданів	274
підвіс магнітний	275
Плаймель Б.	354
площина динамічна екваторіальна	65
площина зображувальна	304, 372

площина картинна.....	280
площина картинна гіромаятника.....	330
площина прецесії.....	281
площина фазова.....	254
положення рівноваги гірокомпаса.....	421
положення рівноваги двоступеневого гіроскопа.....	414
полуденна лінія.....	415
полюс.....	27
портрет фазовий.....	253, 256
потенціальна енергія.....	72, 560
похибка.....	398
похибка гірокомпаса швидкісна.....	418
похибка гіроскопа напрямку віражна.....	471
похибка гіроскопа напрямку карданова.....	466
похибка двоступеневого гірокомпаса.....	415
похибка двоступеневого гірокомпаса вібраційна.....	419, 421, 426
похибка двоступеневого гірокомпаса через невертикальність вимірювальної осі.....	416
похибка гірокомпаса швидкісна.....	517
похибки гіроскопа як вказівника напрямку.....	448
похибка інтеркардинальна.....	520
похибка маятникового гірокомпаса балістична.....	519
похибка швидкісна гіромаятника.....	502
похибки гіромаятника балістичні.....	502
похибки гіромаятника швидкісні.....	490
похибки швидкісні гіромаятника.....	491
похідна вектора абсолютна.....	52
похідна вектора локальна.....	52
правило диференціювання вектора.....	52
правило Жуковського.....	300
правило прецесії.....	298
прецесійні рівняння.....	437
прецесія.....	281
прецесія антициклоїдальна.....	282
прецесія вимушена.....	275
прецесія гіпоциклоїдальна.....	282
прецесія гіромаятника повільна.....	326
прецесія гіромаятника регулярна.....	151, 326
прецесія гіромаятника швидка.....	326
прецесія епіциклоїдальна.....	285
прецесія епіциклоїдальна.....	282
прецесія Землі.....	294
прецесія перициклоїдальна.....	282, 285
прецесія псевдoreгулярна.....	367, 368
прецесія регулярна.....	281
прецесія симетричного зрівноваженого гіроскопа вимушена.....	291
прецесія симетричного зрівноваженого гіроскопа природна.....	285
прецесія симетричного зрівноваженого гіроскопа псевдoreгулярна.....	293
прилад.....	398
принцип рівної жорсткості.....	401
принцип Даламбера.....	72, 300
прискорення абсолютне.....	55
прискорення відносне.....	56
прискорення доосьове.....	56
прискорення коріолісове.....	56, 299
прискорення обертальне.....	56
прискорення переносне.....	56
прискорення полюса.....	56
простір станів.....	135
простір фазовий.....	135, 253
процес коливальний.....	116
процес стаціонарний.....	419
пружно-демпфірувальний елемент.....	233
прямий метод Ляпунова.....	137

Р

РВГ.....	546
РВГ триступеневий.....	545, 554
резонанс параметричний.....	203
рівняння вільного гіроскопа у кардановому підвісі лінеаризовані.....	345
рівняння вільного гіроскопа у кардановому підвісі повні.....	344
рівняння вільного гіроскопа у кардановому підвісі прецесійні.....	345
рівняння вільного гіроскопа у кардановому підвісі скорочені.....	345
рівняння вільного гіроскопа у кардановому підвісі спрощені.....	345
рівняння вільного гіроскопа у кардановому підвісі технічні.....	345
рівняння власного обертання.....	278
рівняння гіромаятника характеристичне.....	493
рівняння диференціальне однорідне.....	125
рівняння гіромаятника характеристичне.....	329
рівняння гіроскопа прецесійні.....	296, 297
рівняння другого наближення.....	219, 420
рівняння Ейлера динамічні.....	294
рівняння Ейлера кінематичні.....	53
рівняння Жільбера.....	72
рівняння Лагранжа другого роду.....	72, 317
рівняння лінеаризовані.....	130, 165, 369, 419
рівняння нутаційного руху.....	278
рівняння орієнтації Ейлера.....	57
рівняння орієнтації кватерніонне.....	59, 61
рівняння орієнтації кінематичні.....	57
рівняння орієнтації Пуассона.....	57
рівняння першого наближення.....	137, 219, 420
рівняння прецесійного руху.....	278, 298
рівняння породжуюче.....	182
рівняння Пуассона кінематичне.....	60
рівняння руху гіроскопа у кардановому підвісі в опорних координатах.....	438
рівняння руху гіроскопа у кардановому підвісі у відносних координатах.....	438
рівняння симетричного зрівноваженого гіроскопа у формі Булгакова.....	278, 284, 288, 297
рівняння усереднені.....	188
рівняння усереднені наближені.....	188, 193
рівняння характеристичне.....	346
розгін ротора.....	391
розлад частоти.....	191, 197
розсіювання енергії.....	241
рух абсолютний.....	54
рух відносний.....	54
рух вільний.....	123
рух збурений.....	135
рух незбурений.....	135
рух переносний.....	54
рух прихований.....	146
рух сталий.....	116
рух стаціонарний.....	149, 150
рух явний.....	146
ряд Фур'є.....	120

С

Свині Ф.....	13
секстант.....	9, 10
секулярні члени.....	180
сепаратриса.....	260
середнє значення.....	120
середнє квадратичне відхилення.....	121
середнє квадратичне значення.....	120

чутливий елемент	398
чутливий елемент маятникового гірокомпаса	515

Ш

швидкість абсолютна	55
швидкість вектора	51
швидкість вектора відносна	52
швидкість вектора переносна	52
швидкість відносна	55
швидкість кутова власна	281
швидкість кутова прецесії	281
швидкість переносна	55
швидкість полюса	55
Шерль А.	12
Шиловський П. П.	12
Шлік О.	12
Шюлер М.	11, 503