УДК 681.784
І.Г.Чиж

ГЛОБАЛЬНА АПРОКСИМАЦІЯ АБЕРАЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ ОПТИЧНОЇ СИСТЕМИ ОКА

Вступ

Останнім часом спостерігається чергове підвищення інтересу до теоретичних та експериментальних досліджень абераційних властивостей оптичної системи ока людини. Причин цьому декілька. По-перше, завдяки появі потужної комп'ютерної техніки, нарешті з'явилась можливість створення досконалих вимірювачів аберацій ока, швидкодія та продуктивність яких дозволяє робити за дуже обмежений інтервал часу необхідну велику кількість точних офтальмологічних вимірювань на живому оці. По-друге, підвищились вимоги до обсягу і точності об'єктивних оцінок офтальмологічних характеристик якості зору людини. По-третє, з'явилась актуальна потреба у створенні високоточних офтальмологічних абераційних рефрактометрів, які б забезпечували реалізацію потенційних можливостей нових, досконалих лазерних технологій хірургічної корекції зору.

Переважна більшість давно відомих і запропонованих в останні роки офтальмологічних абераційних рефрактометрів здійснюють вимірювання так званої функції хвильової аберації. Це обумовлено тим, що вказана функція є універсальною кількісною характеристикою аберацій будь-якої оптичної системи. За її допомогою можна визначити практично всі відомі параметри і характеристики якості зображень на сітківці ока, які спотворюються внаслідок недосконалостей оптичної системи ока. Ця функція також дозволяє обчислювати геометричні параметри тіла рогівки, яке вилучається під час хірургічної корекції зору.

Хвильова аберація, як величина деформації світлової хвилі, що виникає при проходженні її через оптичні середовища (ОС) ока, є функцією зіничних координат, координат предметної точки в просторі предметів, довжини світлової хвилі, а також фізичного та психологічного стану людини під час вимірювань у неї абераційної рефракції ока. Функція хвильової аберації є відображенням наслідків фізіологічних порушень функції акомодації, спотворень форми поверхонь рогівки та кришталика, появи оптичної неоднорідності оптичних середовищ ока тощо.

Наявність складного причинно-наслідкового зв'язку між переліченими факторами і характером поведінки функції хвильової аберації істотно ускладнює математичне представлення функції хвильової аберації ОС ока. Тому традиційна математична форма цієї функції у вигляді звичайної двомірної степеневої чи поліноміальної апроксимації, яка успішно використовується для характеристики штучних центрованих оптичних систем, в офтальмологічній оптиці у загальному випадку є непридатною. Це, природно, призводить до необхідності пошуку і обгрунтування більш універсальної математичної форми представлення вказаної функції, що і є головною задачею даної статті. Мета - створення такої математичної моделі функції хвильової аберації, яка б, з одного боку, дозволяла відображати глобальну залежність деформації хвильового фронту від зіничних, предметних, акомодаційних, хроматичних, часових та інших параметрів, а з іншого боку – забезпечувала б нескладний і ефективний алгоритм визначення параметрів вказаної глобальної функціональної залежності.

Глобальна апроксимація функції хвильової аберації оптичної системи ока

Функцію хвильової аберації будь-якої оптичної системи, в тому числі й оптичної системи ока, канонічно зображають у площині вихідної зіниці (рисунок). Хвильова аберація W – оптична відстань між деформованим хвильовим фронтом та сферою порівняння уздовж її радіуса.

Центр сфери порівняння розміщують у точці умовно безабераційного зображення на сітківці тієї точки простору предметів, від якої в око надходить сферична хвиля, що аналізується на деформацію. Сфера порівняння має радіус R, при якому вона проходить через осьову точку площини вихідної зіниці.

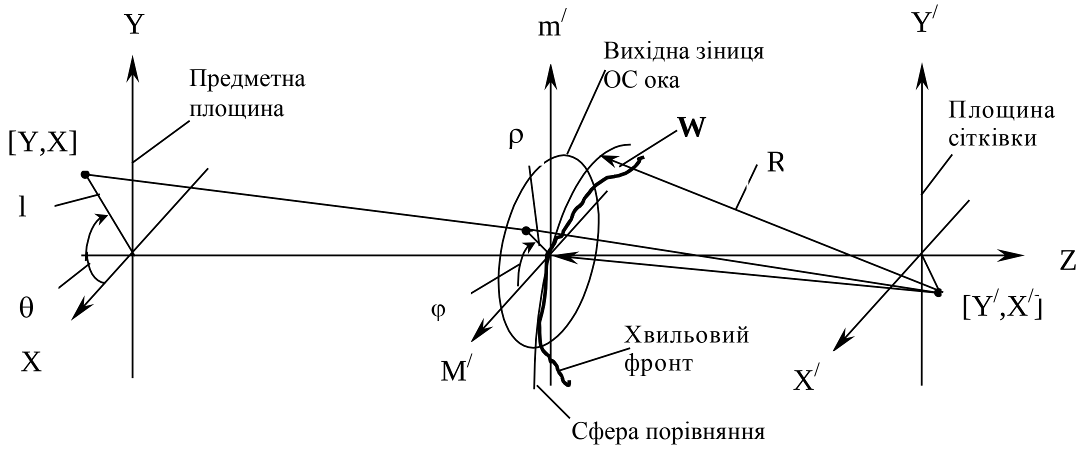
Як видно з рис.1, величина W є функцією зіничних координат $[\rho, \varphi]$, а також координат $[l, \theta]$ предметних точок, тому що кожній із них відповідає власна функція хвильової аберації.

Хвильова аберація W є також функцією великої кількості внутрішніх параметрів і характеристик ОС ока, які називають конструктивними і до яких належать:

- параметри геометричної форми поверхонь розділу оптичних середовищ ока з різними показниками заломлення;

- параметри взаємного розташування у просторі вищевказаних поверхонь;
- показники заломлення оптичних середовищ, які є функціями просторових координат та довжини світлової хвилі λ.

параметрів ОС ока, на яку було вказано вище. Тому єдиною реальною можливістю математичного представлення функції *W* є її математична апроксимація.



До визначення функції хвильової аберації оптичної системи ока

Характерною для оптичної системи ока є залежність її конструктивних параметрів, насамперед форми оптичних поверхонь та їх взаємного розташування, від акомодаційного стану ока, або відстані a між оком та предметом, на якому фіксується погляд (див. рисунок). На конструктивні параметри ока також має вплив час доби, вік пацієнта, його фізичний та психічний стан. Вказані фактори можуть бути враховані через визначення залежності функції *W* конкретного ока від часу вимірювання цієї функції *t* .

Загальна аналітична залежність функції *W* від конструктивних параметрів оптичних систем дуже складна. Тому її практично не можна визначити, а тим більше використати для обчислення тих параметрів і характеристик якості зору, які пов'язані з *W*. Винятком є лише складові степеневого розкладу *W* за зіничними та предметними координатами степеневого порядку не вище четвертого, причому це відноситься лише до оптичних систем, складених з центрованих оптичних поверхонь із осьовою симетрією та степеню асферичності поверхонь, не вище другої.

Оптична система реального ока не є центрованою – вона не має осьової симетрії, тому її слід віднести до так званих просторових систем. Щодо останніх, то для них взагалі неможливо знайти придатні до практичного застосування аналітичні залежності *W* від конструктивних параметрів ОС. До того ж ця задача ще більше ускладнюється через несталість конструктивних

Глобальною апроксимацією функції хвильової аберації ОС ока називають знаходження математичного виразу $W = W(\rho, \varphi, l, \theta, a, \lambda, t, \vec{c})$, де $\vec{c}$ – багатомірний вектор значень параметрів апроксимації (сукупність всіх коефіцієнтів апроксимації).

Відомості про залежність *W* від вказаних аргументів, які використовуються для глобальної апроксимації, отримують або шляхом розрахунків ходу великої кількості променів в оптичній системі ока, якщо значення всіх її конструктивних параметрів і характеристик виявлені, або, що набагато ефективніше і реальніше, фізичними вимірюваннями *W*. Для таких вимірювань застосовують інтерферометричні методи [1–3]. Більш поширеними є методи опосередкованого визначення залежності функції *W* від її аргументів. Її знаходять за допомогою даних про значення поперечних аберацій великої кількості тонких світлових пучків на сітківці, що надходять з простору предметів і заповнюють отвір зіниці [4,5].

Дані про залежність функції *W* від усіх її аргументів неможливо визначити одноразово. Тому в процесі вимірювань їх одержують поступово, методом плавної чи дискретної зміни значень одного чи декілька аргументів при фіксованих значеннях інших. Так само здійснюється і глобальна апроксимація, яка робиться не водночас по всім аргументам, а поступово по одному чи групі аргументів з послідовним нарощуванням їх кількості (метод "матрьошки").

Апроксимація функції *W*= *W*(ρ, φ, *l*, θ)

Найбільш поширеними у теоретичній та прикладній оптиці є два методи апроксимації функції $W= W(\rho, \varphi, l, \theta)$. Один з них заснований на використанні степеневих рядів Тейлора, другий – базується на застосуванні поліномів Церніке [6]. Поліноми Церніке є ортогональними у межах кола із одиничним радіусом. Це надає суттєві зручності при здійсненні апроксимації в канонічних координатах зіниці ока, яка в переважній більшості випадків має саме круглу форму меж. До того ж ці поліноми забезпечують кращу обумовленість конструкційної матриці, що сприяє збільшенню точності визначення коефіцієнтів апроксимації, якщо воно здійснюється методом найменших квадратів, або методом сингулярного розкладу конструкційної матриці [7,8]. У зв'язку з цим вказані поліноми знайшли значно більше застосування в технічній та офтальмологічній оптиці у порівнянні з степеневими рядами Тейлора.

Функція апроксимації хвильового фронту поліномами Церніке у координатах зіниці та координатах простору предметів для оптичних систем з осьовою симетрією має вигляд:

$$W(\rho,\varphi,l) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{nml}\cdot R_n^m(\rho)\cdot\cos\, m\varphi\,, \qquad (1)$$

де $R_n^m(\rho)$ – поліноми Церніке, $\rho \le 1$,

$$R_n^m(\rho) = \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(n-m)} (-1)^k \frac{(n-k)!\cdot\rho^{n-2k}}{k!\cdot\left[\frac{1}{2}(n+m)-k\right]!\cdot\left[\frac{1}{2}(n-m)-k\right]!} \qquad (2)$$

n, m – цілі числа, $n - m \ge 0$, $n + m$ – парне число, a_{nml} – коефіцієнти апроксимації, залежні тільки від однієї, полярної координати l у просторі предметів.

Вираз (1) може використовуватися лише тоді, коли оптична система ока вважається такою, що має осьову симетрію. Але реальне око як було вказано вище, в загальному випадку такої симетрії не має. Тому для апроксимації функції $W(\rho, \varphi, l, \theta)$ пропонується використовувати подвійний розклад поліномів Церніке за зіничними координатами [ρ, φ] та предметними координатами [l, θ], який застосовується до просторових оптичних систем [9,10], а саме:

$$W(\rho,\varphi,l,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left[C_{nm}(l,\theta)\cdot\cos(m\varphi)+S_{nm}(l,\theta)\cdot\sin(m\varphi)\right]\cdot R_n^m(\rho)\,, \qquad (3)$$

де замість коефіцієнтів a_{nml} використовується їх церніковська апроксимація у координатах простору предметів;

$$C_{nm}(l,\theta) = \sum_{n_l=0}^{\infty}\sum_{m_l=0}^{\infty}\left[CC_{nm}^{n_l m_l}\cdot\cos(m_l\cdot\theta)+SC_{nm}^{n_l m_l}\cdot\sin(m_l\cdot\theta)\right]\cdot R_{n_l}^{m_l}(l)\,, \qquad (4)$$

$$S_{nm}(l,\theta) = \sum_{n_l=0}^{\infty}\sum_{m_l=0}^{\infty}\left[CS_{nm}^{n_l m_l}\cdot\cos(m_l\cdot\theta)+SS_{nm}^{n_l m_l}\cdot\sin(m_l\cdot\theta)\right]\cdot R_{n_l}^{m_l}(l)\,, \qquad (5)$$

n_1, m_1 – числа, які мають той самий зміст і властивості, що й числа n, m, але стосовно до предметної координати l; $CC_{nm}^{n_l m_l}, SC_{nm}^{n_l m_l}$, $CS_{nm}^{n_l m_l}, SS_{nm}^{n_l m_l}$ – параметри подвійної церніковської апроксимації; l, θ – канонічні полярні координати в площині предметів або площини зображень, що оптично спряжені, причому $l \le 1$.

Поліном $R_{n_l}^{m_l}(l)$ визначається аналогічно $R_n^m(\rho)$ за формулою (2) із заміною m,n,ρ на m_l,n_l,l відповідно. (1)

Якщо площина предметів знаходиться на нескінченності, то координата l має значення кутової відстані між предметною точкою та оптичною віссю (візуальною віссю ока), на якій розташовується початок предметних полярних координат.

Методики визначення коефіцієнтів подвійної церніковської апроксимації будуть викладені нижче.

Апроксимація функції *W*= *W*(ρ, φ, *l*, θ, *a*)

Апроксимацію функції $W= W(\rho, \varphi, l, \theta, a)$ можна здійснити шляхом визначення $CC_{nm}^{n_l m_l}, SC_{nm}^{n_l m_l}$, $CS_{nm}^{n_l m_l}, SS_{nm}^{n_l m_l}$ для декількох значень відстані a (див. рис. 1) з подальшою їх апроксимацією степеневим багаточленом у формі Лагранжа або Ньютона, [11]. Наприклад, параметр $CC_{nm}^{n_l m_l}$ апроксимується у формі Лагранжа за формулою

$$CC_{nm}^{n_l m_l}(a) = \sum_{i_a=0}^{i_a=q} CC_{nm}^{n_l m_l}(a_{i_a})\cdot CC_{nm}^{n_l m_l}A_{i_a}(a)\,, \qquad (6)$$

де

$$CC_{nm}^{n_l m_l}A_{i_a}(a) = \frac{(a-a_0)\cdot\ldots\cdot(a-a_{i_a})\cdot(a-a_{i_a+1})\cdot\ldots\cdot(a-a_q)}{(a_{i_a}-a_0)\cdot\ldots\cdot(a_{i_a}-a_{i_a-1})\cdot(a_{i_a}-a_{i_a+1})\cdot\ldots\cdot(a_{i_a}-a_q)}\,, \qquad (7)$$

$q+1$ – кількість дистанцій від ока до площин предметів, на яких послідовно фіксується погляд ока, іншими словами, – кількість станів акомодації ока.

З виразу (7) видно, що

$$CC_{nm}^{n_l m_l} A_{i_a}(a_k) = \begin{cases} 1, \text{якщо} \quad i_a = k \\ 0, \text{якщо} \quad i_a \neq k \end{cases},$$

при цьому $CC_{nm}^{n_l m_l}(a) = CC_{nm}^{n_l m_l}(a_i)$, що відповідає умові інтерполяції.

У виразах (6) та (7) параметр a бажано представляти не в міліметрах, а в діоптріях [дптр], де $a[\text{дптр}] = \frac{1000}{a}$, що, по-перше, звичніше для офтальмологів, а, по-друге, не призводить до незручностей, коли відстань a (в мм) наближається до нескінченності. Таким чином формули (3)–(5) та (6), (7) дають змогу визначити функцію $W(\rho, \varphi, l, \theta, a)$ при будь-якому стані акомодації ока.

Апроксимація функції $W(\rho, \varphi, l, \theta, a, \lambda)$

Залежність функції W від довжини світлової хвилі – хроматична аберація ока – існує внаслідок наявності дисперсії в оптичних середовищах ока. Ці середовища мають показники заломлення в інтервалі 1,3 … 1,4 з коефіцієнтом дисперсії $\nu_e \cong$ 50 … 60, що дуже наближено до параметрів води. Тому оптична система ока має характер поведінки хроматичної аберації, схожий на характер поведінки хроматичної аберації одиночної лінзи.

Відомо, що сітківка реагує на світлове випромінювання в спектральному діапазоні $\lambda \cong 0{,}4$ … 0,7 мкм з максимальною чутливістю на довжині хвилі $\lambda \cong 0{,}55$ мкм. У такому невеличкому спектральному діапазоні показники заломлення оптичних середовищ ока $n = n(\lambda)$ дуже мало змінюються. Тому для визначення залежності $W = W(\lambda)$ достатньо провести вимірювання в трьох точках спектрального діапазону λ. За такі точки, згідно з існуючими стандартами, беруть λ_0=0,546 мкм, λ_1=0,48 мкм, λ_2=0,64 мкм.

Реально існуючі лазери, зокрема напівпровідникові, мають трохи інші довжини хвиль випромінювання. Наприклад, для лазерних діодів (лазерних модулів “DANGER”) довжина хвиль λ може бути такою: 0,405 мкм, 0,532 мкм, 0,63 … 0,67 мкм. Тим паче лазерні діоди дають можливість перекрити потрібний спектральний діапазон і забезпечити вимірювання хроматичних аберацій оптичної системи ока.

Таким чином, для здійснення апроксимації функції $W(\rho, \varphi, l, \theta, a, \lambda)$ потрібно виконати вимірювання монохроматичної хвильової аберації для кожної з наведених вище довжин хвиль та зробити окрему апроксимацію функції W= $W(\rho, \varphi, l, \theta, a)$ відповідно до кожної довжині хвилі. Потім кожний з коефіцієнтів $CC_{nm}^{n_l m_l}(a_{i_a}), CS_{nm}^{n_l m_l}(a_{i_a}), SC_{nm}^{n_l m_l}(a_{i_a}), SS_{nm}^{n_l m_l}(a_{i_a})$ може бути апроксимованим за довжиною хвилі λ степеневою функцією також у формі Лагранжа чи Ньютона, наприклад:

$$CC_{nm}^{n_l m_l} = \sum_{i_\lambda=0}^{i_\lambda=2} CC_{nm}^{n_l m_l}(a_{i_a}, \lambda_{i_\lambda}) \cdot CC_{nm}^{n_l m_l} L_{i_\lambda}(a_i, \lambda), \tag{8}$$

$$CC_{nm}^{n_l m_l} L_0(a_{i_a}, \lambda) = \frac{(\lambda - \lambda_1)\cdot(\lambda - \lambda_2)}{(\lambda_1 - \lambda_0)\cdot(\lambda_0 - \lambda_2)},$$
$$CC_{nm}^{n_l m_l} L_1(a_{i_a}, \lambda) = \frac{(\lambda - \lambda_0)\cdot(\lambda - \lambda_2)}{(\lambda_1 - \lambda_0)\cdot(\lambda_1 - \lambda_2)}, \tag{9}$$
$$CC_{nm}^{n_l m_l} L_2(a_{i_a}, \lambda) = \frac{(\lambda - \lambda_0)\cdot(\lambda - \lambda_1)}{(\lambda_2 - \lambda_0)\cdot(\lambda_2 - \lambda_1)}.$$

Практикою доведено, що апроксимація хроматичних аберацій методом інтерполяції квадратним тричленом є достатньою з точки зору забезпечення високої точності кількісної оцінки цієї аберації у світловому діапазоні λ.

Апроксимація функції $W= W(t)$

Апроксимація функції W=$W(t)$, де t – момент часу вимірювання аберацій оптичної системи ока, можна здійснювати в одній із форм, яка більше потрібна офтальмологу:

1) $W = W(\rho, \varphi, l, \theta, t)$ – монохроматична W в часі при фіксованому стані акомодації;
2) $W = W(\rho, \varphi, l, \theta, a, t)$ – монохроматична W в часі, як функція акомодації;
3) $W = W(\rho, \varphi, l, \theta, a, \lambda, t)$ – поліхроматична W в часі, як функція акомодації.

Для здійснення апроксимації по параметру t треба знайти значення відповідних параметрів апроксимації, що були наведені вище, для кожного фіксованого моменту часу – T_{i_t}, де i_t = 1 – N, N – порядковий номер моменту часу.

Для функції 1) треба знайти коефіцієнти апроксимації $CC_{nm}^{n_l m_l} T_{i_t}, SC_{nm}^{n_l m_l} T_{i_t}, CS_{nm}^{n_l m_l} T_{i_t}, SS_{nm}^{n_l m_l} T_{i_t}$,

для функції 2) – коефіцієнти

$CC_{nm}^{n_l m_l} A_{i_a} T_{i_t}, SC_{nm}^{n_l m_l} A_{i_a} T_{i_t}, CS_{nm}^{n_l m_l} A_{i_a} T_{i_t}, SS_{nm}^{n_l m_l} A_{i_a} T_{i_t}$,

для функції 3) – коефіцієнти

$$CC_{nm}^{n_l m_l} A_{i_a} L_{i_\lambda} T_{i_t}, SC_{nm}^{n_l m_l} A_{i_a} L_{i_\lambda} T_{i_t}, CS_{nm}^{n_l m_l} A_{i_a} L_{i_\lambda} T_{i_t}, SS_{nm}^{n_l m_l} A_{i_a} L_{i_\lambda} T_{i_t}$$

Щоб знайти безперервні значення функції $W=W(t)$ для кожної з наведених форм потрібно застосувати апроксимацію типу інтерполяції за однією з відомих форм (Лагранжа чи Ньютона) і за такою ж методикою, яка приводилася у попередніх пунктах.

Пошук коефіцієнтів глобальної апроксимації функції хвильової аберації ока

У відповідності з викладеним вище загальна формула глобальної апроксимації функції хвильової аберації оптичної системи ока має вигляд:

$$W(\mathrm{Arg}) = \sum_{n}\sum_{m}\sum_{n_l}\sum_{m_l}\sum_{i_a}\sum_{i_\lambda}\sum_{i_t} C_{n\,m\,n_l\,m_l\,i_a\,i_\lambda\,i_t} \cdot F_q(\mathrm{Arg}) \qquad (10)$$

де: $\mathrm{Arg} = \lfloor \rho, \varphi, l, \theta, a, \lambda, t \rfloor$ - сукупність аргументів функції глобальної апроксимації;

$F_q(Arg)$ – функції базису апроксимації, q – порядковий номер базисної функції,

$C_{n\,m\,n_l\,m_l\,i_a\,i_\lambda\,i_t}$ – коефіцієнти глобальної апроксимації (в узагальненому вигляді), які були визначені у попередніх розділах та формулах (4) – (9).

Алгоритм пошуку коефіцієнтів глобальної апроксимації залежить від методу апроксимації. Якщо апроксимація здійснюється методом інтерполяції, то на базі виразу (10) складається система рівнянь, в яких у лівій частині знаходиться сума одночленів за формулою (10), а у правій – значення хвильової аберації, що відповідає конкретній точці багатомірного простору незалежних аргументів. Функції базису апроксимації, обчислені в цій точці, є числовими множниками при невідомих коефіцієнтах апроксимації. Кількість рівнянь вказаної системи при інтерполяції повинна дорівнюватися кількості коефіцієнтів апроксимації, у зв'язку з чим для складання такої системи рівнянь потрібно, щоб кількість значень функції W на зіниці дорівнювала кількості коефіцієнтів апроксимації. Розв'язуючи систему рівнянь відносно коефіцієнтів апроксимації, знаходять конкретний вигляд функції (10).

Значення функції W не можна виміряти абсолютно точно. Тому метод інтерполяції, при якому функція апроксимації проходить через точки, не забезпечує потрібної точності апроксимаціїї W.

Для більш точної апроксимації W треба застосовувати метод регресії, в якому кількість значень W (кількість вимірювальних точок на зіниці) – набагато перевищує кількість коефіцієнтів апроксимації (в 3 – 5 разів). При цьому кількість рівнянь у стільки ж разів перевищує кількість невідомих. Тому система не має ні одного розв'язку, яке б задовольнило кожному рівнянню системи. В цьому випадку єдине "компромісний розв'язок" системи знаходять методом Гаусса – методом найменших квадратів (МНК), при якому сума, складена з квадратів різниць між правою та лівою частинами кожного рівняння, є мінімальною. Функція апроксимації (10), знайдена таким методом, не збігається з виміряними значеннями W, але проходить між ними, максимально наближаючись до них та згладжуючи "викиди" функції W, пов'язані з похибками її вимірювання. Такий метод апроксимації вважається більш коректним, тому що знайдена в такий спосіб функція апроксимації по суті є незміщеною оцінкою результату вимірювань W [7] .

У переважній кількості методів пошуку значень функції W, вимірюється не хвильова аберація безпосередньо, а вимірюються поперечні аберації на сітківці тих променів, які надходятьв око через відповідні вимірювальні точки зіниці, де повинні бути знайденими значення W [12 – 18]. Зв'язок між вказаними поперечними aбераціями променів та хвильовою аберацією встановлюється рівняннями [9]:

$$\begin{aligned} &\frac{R}{n}\left[\frac{\partial W(\mathrm{Arg})}{\partial \rho}\cdot\cos\varphi - \frac{\partial W(\mathrm{Arg})}{\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{\rho}\right] = \Delta'_y(\mathrm{Arg}), \\ &\frac{R}{n}\left[\frac{\partial W(\mathrm{Arg})}{\partial \rho}\cdot\sin\varphi + \frac{\partial W(\mathrm{Arg})}{\partial \varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{\rho}\right] = \Delta'_x(\mathrm{Arg}) \end{aligned} \qquad (11)$$

де R – радіус сфери порівняння,

$n \cong 1.337$ – показник заломлення оптичного середовища скловидного тіла – середовища перед сітківкою,

$\Delta'_y(\mathrm{Arg})$, $\Delta'_x(\mathrm{Arg})$ – проекції поперечної аберації конкретного променя на меридіональну та сагітальну площини оптичної системи ока відповідно, виміряні у площині сітківки. У формулах (11) кут φ відраховується від тієї площини, в якій знаходиться проекція $\Delta'_y(\mathrm{Arg})$.

Рівняння (11) із підстановкою до них функції W, визначеної за формулою (10), також дають змогу скласти систему рівнянь, у правій частині якої будуть знаходитися виміряні значення поперечних аберацій відповідних променів, що надходять у око від певної кількості предметних точок з координатами $[l, \theta]$ через певну кількість точок зіниці з координатами $[\rho, \varphi]$ при заданих значеннях a, λ, t.

Знаходження коефіцієнтів глобальної апроксимації методом регресії із застосуванням МНК зображають у матричному вигляді [8]:

$$C = \left(A^T \cdot A\right)^{-1} \cdot A^T \cdot X, \qquad (12)$$

або

$$C = \left(A^T \cdot E \cdot A\right)^{-1} \cdot A^T \cdot E \cdot X, \qquad (13)$$

де C – матриця , елементи якої є шукані коефіцієнти апроксимації – $C_{n\,m\,n_l\,m_l\,i_a\,i_\lambda\,i_t}$;

A – конструкційна матриця, складена із значень диференційованих у відповідності з (10), (11) функцій при коефіцієнтах апроксимації, розрахованих при тих конкретних значеннях аргументів Arg, при яких проводяться вимірювання $\Delta'_y(\mathrm{Arg})$, $\Delta'_x(\mathrm{Arg})$ – елементів матриці-стовпця X; E – діагональна матриця вагових коефіцієнтів, яка застосовується у випадку потреби здійснити більш точне визначення тих чи інших конкретних коефіцієнтів апроксимації.

Пошук елементів матриці C може також бути здійсненим за допомогою так званого сингулярного розкладу матриці A за формулою [8]:

$$C = U \cdot D^{-1} \cdot V^T \cdot X, \qquad (14)$$

де матриці U, D, V є матрицями сингулярного розкладу матриці A:

$$A = V \cdot D \cdot U^T, \qquad (15)$$

D – діагональна матриця сингулярних чисел матриці A,
V та U – ортогональні матриці повороту.

Методика та алгоритми обчислень елементів матриць U, D, V приводяться у багатьох літературних джерелах як стандартні програми матричних **SVD**–процедур, наведені, наприклад, у [19].

Розрахунок коефіцієнтів апроксимації за формулою (14) має декілька суттєвих переваг. По-перше, не потребується процедура обертання матриці $\left(A^T \cdot A\right)$, яка є дуже "трудомісткою" навіть для комп'ютера і яка породжує похибки відтворення елементів матриці C, пов'язані з округленням чисел. По-друге, діагональна матриця D дає змогу при її обертанні заздалегідь відкинути ті її елементи, які відносяться до "зайвих" внаслідок того, що вони мають малі значення. Інакше – виключити пошук коефіцієнтів при тих одночленах розкладу за формулами (10) та (11), які майже не впливають на значення й поведінку функції W, але мають дуже неточно визначені коефіцієнти апроксимації при цих одночленах.

Фактором, що серйозно впливає на точність та трудомісткість матричних перетворень за формулами (12) – (15), є розмір матриці A. За умов глобальної апроксимації він потребує обов'язкового попереднього аналізу. Такий аналіз доцільно зробити на розгляді конкретного визначення тих чи інших типів та порядків аберацій оптичної системи ока.

Нехай лікарю-офтальмологу необхідно виявити в оптичній системі ока пацієнта поліхроматичні аберації, визначені за трьома довжинами хвиль λ (i_λ=3), поперечні аберації до п'ятої степені степеневого розкладу по зіничних координатах ($n_{\max}$ = 6), до третьої степені розкладу по предметних координатах ($n_{l\max}$ =4), для трьох станів акомодації (i_a =3), виміряних, наприклад, при $a = \infty$, 1 м, 250 мм. Всі виміри потрібно зробити у три різні моменти часу, наприклад вранці, вдень та ввечері (i_t =3).

Загальна кількість одночленів у правій частині виразу (10), які повинні входити також у формулах (11), тобто загальна кількість q коефіцієнтів апроксимації, або, що теж саме, кількість елементів рядка матриці A обчислюється за формулою:

$$q = q_{n,m} \cdot q_{n_l,m_l} \cdot i_a \cdot i_\lambda \cdot i_t, \qquad (16)$$

де

$$q_{n,m} = \frac{2\,n \cdot m - m^2 + 2\,(n+m) + Z_{nm}}{2} - z_{onm}, \qquad (17)$$

$$q_{n_l,m_l} = \frac{2\,n_l \cdot m_l - m_l^2 + 2\,(n_l + m_l) + Z_{n_l m_l}}{2} - z_{o\,n_l\,m_l}. \qquad (18)$$

Значення параметрів у формулах (16)–(18) визначаються у такому порядку:

$n = n_{\max}$, $m = m_{\max}$, $n_l = n_{l\max}$, $m_l = m_{l\max}$;

1) $z_{nm} = 4$; $z_{n_l m_l} = 4$, якщо n, m, n_l, m_l – парні;
2) $z_{nm} = 3$; $z_{n_l m_l} = 3$, якщо n, m, n_l, m_lи – непарні, або n, n_l – парні , а m, m_l – непарні;
3) $z_{nm} = 2$; $z_{n_l m_l} = 2$, якщо n, n_l – непарні, а m, m_l – парні;
4) $z_{onm} = \frac{n+4}{2}$; $z_{o\,n_l\,m_l} = \frac{n_l + 4}{2}$, якщо n, n_l – парні;
5) $z_{onm} = \frac{n+3}{2}$; $z_{o\,n_l\,m_l} = \frac{n_l + 3}{2}$, якщо n, n_l – непарні.

Враховуючи вихідні дані, а також той факт, що у відповідності з властивостями поліномів Церніке $m \le n$, тобто $m_{\max}=6$ та $m_{l\max}=4$, після підстановки значень всіх індексів у (17), (18), а потім у (16) маємо $q_{nm}=27$, $q_{n_l m_l}=14$, при цьому $q=10206$. Таким чином, рядок матриці A повинен налічувати 10206 елементів-чисел.

Для забезпечення методом регресії достатньої точності апроксимації потрібно, щоб кількість рядків k у матриці A було не менш ніж у три рази більше кількості стовпчиків q. Звідки $k=3q=30618$. При цьому матриця A повинна містити $k \times q$ = 312487308 елементів.

Безумовно, це – гігантська матриця, матричні перетворення і арифметичні дії над якою у відповідності з (12)–(15) потребують колосальної кількості елементарних операцій, великої пам’яті комп’ютера та великого часу на виконання комп’ютерної програми матричних перетворень. Проблематичним при цьому залишається питання забезпечення точності перетворень, яка має тенденцію до погіршення при зростанні формату матриці A. У зв’язку з цим більш ефективним є інший алгоритм глобальної апроксимації функції W, суть якого полягає у проведенні окремої апроксимації за різними групами аргументів із всієї множини аргументів (Arg). Для цього пропонується така послідовність дій:

1. Для кожної окремої предметної точки з координатами [l, θ] здійснюється сканування ока по всім вимірювальним точкам зіниці і для кожної предметної точки за формулами (12), (13) або (14) знаходяться значення коефіцієнтів апроксимації, що відповідають виразу (3). При цьому матриця A за умов вище наведеного вище прикладу буде мати лише $q_{nm}=27$ стовпчиків та втричі більше рядків – 81. Число 81 показує потрібну кількість вимірювальних точок на зіниці. При цьому кількість елементів матриці A у даному випадку дорівнює 2187, що приблизно у $1{,}5 \cdot 10^6$ менше ніж у попередньому випадку.

2. Процедура за п.1 у відповідності з вихідними умовами прикладу виконується в $3 \times q_{n_l m_l}$ точках простору предметів, де число 3 взято з умови забезпечення задовільної точності визначення коефіцієнтів апроксимації $C_{nm}(l,\theta), S_{nm}(l,\theta)$ методом найменших квадратів. За умов прикладу $q_{n_l m_l}=14$, тому предметних точок має бути 42.

3. За знайденими в п.1 та п.2 значеннями коефіцієнтів $C_{nm}(l,\theta), S_{nm}(l,\theta)$ для кожної із 42 предметних точок відповідно до формул (3), (4), (5) та (11) складаються нові системи рівнянь, з яких знову методом найменших квадратів знаходять коефіцієнти апроксимації $CC_{nm}^{n_l m_l}$, $SC_{nm}^{n_l m_l}$, $CS_{nm}^{n_l m_l}$, $SS_{nm}^{n_l m_l}$. Кожна з визначених вище систем буде мати конструкційну матрицю розміром 14×42 елементів. Всього таких систем буде $q_{nm}=27$. Тому в результаті буде знайдено $q_{nm} \times q_{n_l m_l} = 27 \times 14 = 378$ коефіцієнтів подвійної церніковської апроксимації монохроматичних аберацій оптичної системи ока.

4. При необхідності мати акомодаційну або поліхроматичну апроксимацію коефіцієнтів монохроматичних аберацій потрібно для кожного акомодаційного стану ока чи для кожного з декількох кольорів випромінювання лазера виконати дії за п. 1–3. Потім до кожного з “монохроматичних” коефіцієнтів подвійної церніковської апроксимації застосувати інтерполяцію у формі Лагранжа чи у формі Ньютона у відповідності з (6), (7) або (8), (9).

Наведений алгоритм дозволяє за рахунок послідовної апроксимації коефіцієнтів монохроматичних аберацій здійснити глобальну апроксимацію при суттєво менших форматах конструкційних матриць та відповідно менших затратах часу та вимог до ресурсу обчислювального пристрою. До того ж, такий алгоритм є більш гнучким і здатним до адаптації під конкретні практичні потреби офтальмологічних досліджень аберації ока пацієнта.

Висновки

1. Запропонований метод глобальної апроксимації аберацій дозволяє практично здійснювати математичне моделювання дії оптичної системи ока як системи, що формує зображення на сітківці, причому з урахуванням значень діаметру зіниці, просторового положення предметних точок, довжини хвилі, акомодаційного стану, часових змін конструктивних параметрів оптичної системи ока.

2. Метод одночасового пошуку всіх коефіцієнтів глобальної апроксимації призводить до гігантських форматів конструкційної матриці, математичні операції над якою потребують використання суперпотужної та суперпродуктивної обчислювальної техніки.

Для практичного здійснення глобальної апроксимації раціонально використовувати метод послідовної та роздільної апроксимації по зіничних, просторових, акомодаційних, часових координатах та довжині хвилі випромінювання, що надає можливість використовувати звичайну комп'ютерну техніку та будувати алгоритм досліджень аберацій ока більш адаптованим під конкретні потреби офтальмолога.

I.Г.Чиж

ГЛОБАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ АБЕРРАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ГЛАЗА

Предложена методика глобальной апроксимации функции волновой аберрации оптической системы глаза с использованием в качестве ее аргументов зрачковых и предметных координат, длины волны излучения, дистанции аккомодации глаза, времени. Приведенны формулы и алгоритмы апроксимации. Для представления монохроматической волновой аберрации предложено использование двойного церниковского разложения. Показано, что для экономии машинного времени и ресурсов компьютера глобальную апроксимацию целесообразно осуществлять последовательно в множестве отдельных групп аргументов.

I.G. Chyzh

GLOBAL APPROXIMATION OF THE ABERRATION FUNCTION OF THE EYE OPTICAL SYSTEM

The technique is proposed for global approximation of the wave aberration function of the eye optical system in terms of the pupil and object coordinates, radiation wavelengths, eye accommodation distance, and time. The formulas and algorithms of approximation are given. To describe monochromatic wave aberration, the double Zernike decomposition is proposed. It is shown that for economy of time and computer resources, global approximation is to be performed in separate groups of arguments.

1. *Чиж И.Г., Сокуренко В.М.* Методи измерения рефракции глаза с пространственным разрешением по зрачку // Оптический журнал. – 2001. – Т. 68. – № 3. – С.19–25.
2. *Колобродов В.Г., Сокуренко В.М., Чиж І.Г.* Рефрактометрія ока з просторовим розділенням // Вісник Житомирського інж.-технол. Ін-ту. – 2000. – № 12. – С. 128 –135.
3. *Williams D. Brainard D., Mc Mahon M., Navarro R.* Double and interferometiric measures of the optical quality of the eye // J. Opt. Soc. Am. – 1994. – Vol. 11, № 12. – P. 3123–135.
4. *Liang J., Grimm B., Goelz S.* and *Bille J. F.* Objective measurement of wave aberrations of the human eye with the use of a Hartmann-Shack wave-front sensor // J. Opt. Soc. Am. A. – 1994. – Vol. 11. – P. 1949–1957.
5. *Liang J.* and *Williams D.R.* Aberrations and retinal image quality of the normal human eye // J. Opt. Soc. Am. – 1997. – Vol. 14. – P. 2873–2883.
6. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. – М.: Наука, 1970. – 856 с.
7. *Худсон Д.* Статистика для физиков. – М.: Мир, 1970. – 296 с.
8. *Родионов С.А.* Автоматизация проектирования оптических систем. – Л.: Машиностроение, 1982. – 270 с.
9. *Howland B.* and *Howland H. C.* A subjective method for the measurement of monochromatic aberrations of the eye // J. Opt. Soc. Am. – 1977. – Vol. 67. – P. 1508–1518.
10. *Сокольский М.Н.* Допуски и качество оптических изображений. – Л.: Машиностроение, 1989. – 220 с.
11. *Kwee I., Braat J.* Double Zernike expansion of the optical aberrastion function // Appl. Opt. – 1993. – P. 21 –32.
12. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике.- М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. литературы, 1986. – 544 с.
13. *Смирнов М.С.* Измерение волновой аберрации глаза / Биофизика. – 1961. – Т. 6. – С. 776–794.
14. *Van den Brink.* Measurement of the geometrical aberrations of the eye // Vision Res. – 1962. – Vol. 2. – P. 233–244.
15. *Сергиенко Н.М.* Офтальмологическая оптика. – М.: Медицина, 1991. – 142 с.
16. *Walsh G., Charman W.N.* and *Howland H.C.* Objective technique for the determination of monochromatic aberrations of the human eye // J. Opt. Soc. Am. A. – 1984. – Vol. 1. – P. 987–992.
17. *Liang J., Grimm B., Goelz S.* and *Bille J.F.* Objective measurement of wave aberrations of the human eye with the use of a Hartmann-Shack wave-front sensor // J. Opt. Soc. Am. A. – 1994. – Vol. 11. – P. 1949–1957.
18. *Чиж І.Г., Сокуренко В.М.* Визначення просторового розподілу рефракції ока за результатами вимірювань його поперечних аберацій // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2000. – № 3. – С. 105–109.
19. *Сборник* научных программ на ФОРТРАНе. Руководство для программистов. Вып. 2. Матричная и линейная алгебра.- М.: Статистика, 1974. – 223 с.

Рекомендована Радою
Приладобудівного факультету НТУУ
«КПІ»

Надійшла до редакції
24 травня 2001 року