

УДК 681.784

І.Г.Чиж

## АСТИГМАТИЗМ ОПТИЧНОЇ СИСТЕМИ ОКА

### Вступ

Відомо, що астигматизм оптичної системи (ОС) ока – це аберация, яка може істотно погіршувати гостроту зору. Тому астигматизм слід виправляти. З цією метою застосовують окуляри, контактні лінзи та штучні кришталіки з циліндричними оптичними поверхнями. Широкого розповсюдження набуває нова технологія ексимер-лазерної корекції астигматизму шляхом змінювання форми передньої поверхні рогівки. Результат корекції значною мірою залежить від точності попереднього вимірювання офтальмологічних параметрів астигматизму, а саме:  $A_S$  – різниці аметропії в головних перетинах ока та кутів нахилу площин цих перетинів до площини горизонтального перетину ока –  $\alpha_{max}$  та  $\alpha_{min}$  [1,2].

У статті [3] показано, що в координатах простору предметів і знічних координатах астигматизм ока у фовеальній зоні теоретично складається з астигматизму окремих степеневих порядків, починаючи з першого (первинного). Кожний з них має свої значення  $A_S$ ,  $\alpha_{max}$ ,  $\alpha_{min}$  і свою природу походження. Однак через певні обмеження обсягу публікації в названій статті не було представлено результати досліджень астигматизму ока, хоч вони мають теоретичну і практичну значущість. Тому головною задачею даної статті є виклад цих результатів, а метою – розробка теорії, яка сприятиме більш глибокому розумінню природи астигматизму оптичної системи ока і подальшому вдосконаленню методів і апаратних засобів її просторово-роздільної рефрактометрії.

**Астигматизм ока при наявності астигматизму 1, 2 і 3-го степеневих порядків**

Подвійна церніковська апроксимація функції хвильової аберации за координатами простору предметів і координатами знічки дозволяє встановити всі степеневі порядки ОС ока, починаючи з першого [3]. Розглянемо перші три порядки. Обґрунтованість такого обмеження полягає в тому, що фовеальна зона сітківки оптично спряжена з тією частиною простору предметів, яка знаходиться на невеликій (приблизно 5 градусів) кутовій відстані від оптичної осі ОС ока. Тому більш високими порядками астигматизму, які пропорційні  $(n - 1)$  степені вказаної кутової відстані, де  $n$  – порядок астигматизму, і які проявляються при великих кутових відстанях предметної точки відносно оптичної осі ока, можна знехтувати з огляду на їх малість. Але, як буде показано нижче, деякі закономірності поведінки загального астигматизму ока можна прогнозувати і не включаючи до розгляду більш високі порядки цієї аберации.

У відповідності з [3] поперечні аберации променя на сітківці  $\Delta X', \Delta Y'$  при наявності астигматизму тільки 1, 2 і 3-го степеневих порядків, мають математичні вирази:

$$\frac{\Delta X'}{R_0} = 2(a \cos \varphi + b \sin \varphi) \rho \quad (1)$$

$$\frac{\Delta Y'}{R_0} = 2(-a \sin \varphi + b \cos \varphi) \rho$$

де:  $a = d_1 + d_2 l + d_3 l^2$ ;  $b = e_1 + e_2 l + e_3 l^2$ ;  $d_1 = D_1$ ;

$$d_2 = K_2 \cos \theta + L_2 \sin \theta;$$

$$d_3 = I_3 + J_3 \cos 2\theta + K_3 \sin 2\theta; \quad (2)$$

$$e_2 = M_2 \cos \theta + N_2 \sin \theta;$$

$$e_3 = L_3 + M_3 \cos 2\theta + N_3 \sin 2\theta$$

$[\rho, \varphi]$  – канонічні полярні координати променя на знічці з відліком кута  $\varphi$  від горизонтальної осі  $OX$ ;

$[l, \theta]$  – канонічні полярні координати точки простору предметів з початком координат на оптичній осі ока з відліком кута  $\theta$  також від горизонтальної осі;

$R_0 = \frac{|f|}{r_m}$ ,  $|f|$  – модуль передньої фокусної відстані ОС ока;

$2r_m$  – діаметр зони знічки ока, в якій здійснюється апроксимація функції хвильової аберации і знаходяться абсолютні

значення коефіцієнтів подвійної церніковської апроксимації астигматизму першого порядку:

$$E_1 = CS_{22}^{00} - CS_{22}^{20} + CS_{22}^{40} - 3CS_{42}^{00} + 3CS_{42}^{20} - 3CS_{42}^{40} + 6CS_{62}^{00} - 6CS_{62}^{20} + 6CS_{62}^{40};$$

астигматизму другого порядку:

$$K_2 = CC_{22}^{11} - 2CC_{22}^{31} - 3CC_{42}^{11} + 6CC_{42}^{31} + 6CC_{62}^{11} - 12CC_{62}^{31};$$

$$L_2 = SC_{22}^{11} - 2SC_{22}^{31} - 3SC_{42}^{11} + 6SC_{42}^{31} + 6SC_{62}^{11} - 12SC_{62}^{31};$$

$$M_2 = CS_{22}^{11} - 2CS_{22}^{31} - 3CS_{42}^{11} + 6CS_{42}^{31} + 6CS_{62}^{11} - 12CS_{62}^{31};$$

$$N_2 = SS_{22}^{11} - 2SS_{22}^{31} - 3SS_{42}^{11} + 6SS_{42}^{31} + 6SS_{62}^{11} - 12SS_{62}^{31};$$

астигматизму третього порядку:

$$I_3 = 2CC_{22}^{20} - 6CC_{22}^{40} - 6CC_{42}^{20} + 18CC_{42}^{40} + 12CC_{62}^{20} - 36CC_{62}^{40};$$

$$J_3 = CC_{22}^{22} - 3CC_{42}^{22} - 3CC_{22}^{42} + 9CC_{42}^{42} + 6CC_{62}^{22} - 18CC_{62}^{42};$$

$$K_3 = SC_{22}^{22} - 3SC_{42}^{22} - 3SC_{22}^{42} + 9SC_{42}^{42} + 6SC_{62}^{22} - 18SC_{62}^{42};$$

$$M_3 = CS_{22}^{22} - 3CS_{42}^{22} - 3CS_{22}^{42} + 9CS_{42}^{42} + 6CS_{62}^{22} - 18CS_{62}^{42};$$

$$N_3 = SS_{22}^{22} - 3SS_{42}^{22} - 3SS_{22}^{42} + 9SS_{42}^{42} + 6SS_{62}^{22} - 18SS_{62}^{42}.$$

Вирази (1), (2) дозволяють знайти параметри  $A_s$ ,  $\alpha_{\max}$ ,  $\alpha_{\min}$  астигматизму як суми астигматизму 1-го, 2-го і 3-го порядків. З цією метою додамо до правої частини рівняння (1) доданок  $C_1 \cos \varphi$ , а до правої частини рівняння (2) доданок  $C_1 \sin \varphi$ , що надає можливість спостерігати еволюцію форми абераційної плями на сітківці при штучному дефокусуванні відносно неї абераційного зображення точки:

$$\Delta X' = 2R_0 [(C_1 + a) \cos \varphi + b \sin \varphi] \rho, \tag{3}$$

$$\Delta Y' = 2R_0 [(C_1 - a) \sin \varphi + b \cos \varphi] \rho$$

Коефіцієнт  $C_1$  – коефіцієнт аберації дефокусування.

Згідно (3) промінь з координатами  $[l, \theta, \rho, \varphi]$  має на сітківці поперечну аберацію:

$$\Delta(\rho, \varphi) = \sqrt{\Delta X'^2 + \Delta Y'^2} = 2R_0 \rho \sqrt{C_1^2 + a^2 + b^2 + 2C_1 \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\varepsilon + 2\varphi)}, \tag{4}$$

$$\text{де } \varepsilon = \arcsin \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Зрозуміло, що від'ємні значення  $C_1$  означають дефокусування зображення від сітківки у напрямку до зіниці, що відповідає більш сильній рефракції ОС ока.

Вираз (4) при  $C_1 \neq 0$  є рівнянням еліпса, який при деяких двох значеннях  $C_1$  вироджується у відповідні відрізки із взаємно перпендикулярною орієнтацією. Дані відрізки називають астигматичними фокусами ОС ока. Осьова відстань між ними (осьова довжина коноїду Штурма [1]) є кількісною мірою астигматизму. Перший астигматичний фокус, що розміщується ближче до зіниці, спостерігається при  $C_1 < 0$ ,  $\sin(\varepsilon + 2\varphi) = 1$  та  $C_1^2 + a^2 + b^2 + 2C_1 \sqrt{a^2 + b^2} = 0$ , звідки

$$[C_1]_{\max \Phi} = -\sqrt{a^2 + b^2}. \tag{5}$$

Другий астигматичний фокус, зміщений відносно першого в напрямку від зіниці, знаходиться аналогічно. Він має місце при  $[C_1]_{\min \Phi} = +\sqrt{a^2 + b^2}$ . Тоді, згідно з формулою (15) із [3], параметр обчислюється за формулою

$$A_{\Sigma\Sigma} = 2000 r_m^{-2} \{ [C_1]_{\min \Phi} - [C_1]_{\max \Phi} \} = 4000 r_m^{-2} \sqrt{a^2 + b^2} \text{ [дптр]} \tag{6}$$

де  $r_m, a, b$  мають розмірність у мм.

Азимутальний кут головного перетину ОС ока, в якому оптична сила ОС ока досягає найбільшої величини, відраховується від горизонтальної площини і обчислюється за формулою

$$\alpha_{\max \Sigma} = \frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2},$$

де

$$\varepsilon = \begin{cases} \arcsin \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, & \text{якщо } b \geq 0, \\ \pi - \arcsin \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, & \text{якщо } b < 0. \end{cases}$$

Кут  $\alpha_{\min \Sigma}$  відрізняється від  $\alpha_{\max \Sigma}$  на величину  $\pi/2$  ( $90^\circ$ ).

Якщо  $C_1 = 0$ , то, згідно з (4),

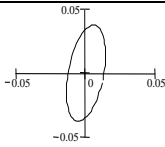
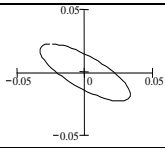
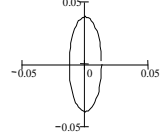
$$\Delta(\rho, \varphi) = 2R_0 \rho \sqrt{a^2 + b^2}, \tag{8}$$

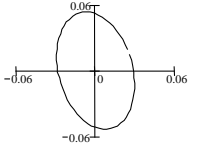
що свідчить про круглу форму абераційної плями на сітківці і суміщення сітківки з поверхнею Петцваля, [4].

Аналіз виразів (6) – (7) зроблено на прикладі оптичної системи ока, якій має всі порядки астигматизму. Перший порядок астигматизму цієї системи має коефіцієнти апроксимації  $D_1=0,0021345$ ;  $E_1=-0,0007115$ ; другий порядок –  $K_2=L_2=-0,0100623$ ;  $M_2=-N_2=0,0201246$ ; третій порядок –  $J_3=K_3=-0,225$ ;  $M_3=N_3=0$ . Розмірність всіх коефіцієнтів – міліметри. Значення всіх коефіцієнтів підбрані таким чином, щоб кожний порядок астигматизму мав однакову величину параметра  $A_s$ , яка б, зокрема, дорівнювала одній діоптрії; другий порядок – обумовлювався децентруванням оптичних елементів ока; третій порядок – був наслідком неосьового розташування предметної точки, зображення якої аналізується на сітківці.

Кути нахилу головних перетинів кожного окремого порядку астигматизму приведені в табл. 1, де також показані окремо абераційні плями на сітківці від астигматизму кожного з вказаних порядків, як зображень предметної точки з координатами  $I=1; \theta=0$ .

**Таблиця 1.** Абераційні плями на сітківці при наявності астигматизму 1-го, 2-го і 3-го порядків та суми цих порядків. Розмірність координатних осей: [мм],  $r_m = 3$  мм,  $|f|=17$  мм,  $C1 = -0,001125$  мм (міопія – 0,5 дптр)

Порядок		$A_{S1}$ , дптр	$\alpha_{max}$ , град
1-й		1	$-5,24^\circ$
2-й		1	$59,76^\circ$
3-й		1	$0^\circ$

1+2+3-й		1,61	$10,5^\circ$
---------	-------------------------------------------------------------------------------------	------	--------------

Міопія введена в оптичну систему ока штучно для того, щоб викликане при цьому дефокусування поверхні Петцваля відносно сітківки дозволяло спостерігати еліптичну абераційну пляму, бачити її розмір та орієнтацію осей.

Аналіз виразів (6) – (7) дозволяє зробити такі висновки:

- 1) кожний степеневий порядок астигматизму має свій коноїд Штурма і на сітківці утворює свою абераційну еліптичну пляму, яка при дефокусуванні вироджується у астигматичні фокуси з відповідною лише цьому порядку відстанню між ними і кутовою орієнтацією астигматичних фокусних відрізків;
- 2) сумарний астигматизм теж має свій коноїд Штурма і також має пляму у вигляді еліпсу відповідної орієнтації з виродженням у астигматичні фокуси, причому параметри сумарного астигматизму  $A_{S\Sigma}$ ,  $\alpha_{max\Sigma}$ ,  $\alpha_{min\Sigma}$  залежні від аналогічних параметрів складових степеневих порядків і є результатом векторного складання астигматизму окремих степеневих порядків;
- 3) незалежно від співвідношень між коефіцієнтами апроксимації, що характеризують відповідні степеневі порядки астигматизму, площини головних перетинів ока завжди є взаємоперпендикулярними, а значення параметрів  $A_{S\Sigma}$ ,  $\alpha_{max\Sigma}$ ,  $\alpha_{min\Sigma}$  є незмінними по всьому отвору зіниці;
- 4) внаслідок природного несуміщення візуальної та оптичної осей ока на візуальній осі завжди виконується нерівність  $I \neq 0$ , тому у фовеальній зоні зіниці може спостерігатися астигматизм всіх степеневих порядків;
- 5) параметр  $A_{S\Sigma}$ , як модуль сумарного вектора астигматизму, може набувати нульового значення, що свідчить про можливість взаємної компенсації астигматизму різних степеневих порядків;
- 6) якщо у фовеальній зоні сітківки взаємокомпенсація степеневих порядків не спостерігається, то вона може виникнути в

інших зонах сітківки при відповідних значеннях координат  $l, \theta$ .

Викладене в шостому пункті підтверджується графіками функцій  $A_{S\Sigma}(l, \theta)$  та  $\alpha_{\max\Sigma}(l, \theta)$ , показаними на рис. 1. Ці графіки відповідають умовам демонстраційного прикладу оптичної системи ока, коефіцієнти апроксимації якої наведено вище. Як видно з цих графіків, при деяких значеннях координат  $l, \theta$  величина  $A_{S\Sigma}$  дійсно зменшується до нуля, а в зображенні деяких інших точок простору предметів (в інших точках сітківки) величина  $A_{S\Sigma}$  навпаки збільшується до максимального значення – 3 дптр. Це значення є скалярною сумою астигматизму всіх розглянутих у прикладі степеневих порядків або максимально можливою величиною їх векторної суми.

Орієнтація головних перетинів сумарного астигматизму також не є сталою відносно різних точок простору предметів. Про це переконливо свідчить графік функції  $\alpha_{\max\Sigma}(\theta)$  на рис. 1, б. Але з наближенням предметної точки до оптичної осі (зменшенні величини  $l$ ) діапазон зміни функції  $A_{S\Sigma}(l, \theta)$  та  $\alpha_{\max\Sigma}(\theta)$  істотно зменшується. При цьому значення параметрів сумарного астигматизму наближуються до відповідних значень первинного астигматизму – астигматизму першого порядку.

Виявлені закономірності і властивості сумарного астигматизму сприяють критичному ставленню до деяких результатів рефрактометричних досліджень ока. Так, наприклад, неперпендикулярність

головних перетинів ока, яка інколи спостерігається на рефракційних картах, очевидно не може бути проявом звичайного астигматизму. Найвірогідніше, що це результат некоректної методики обробки результатів вимірювання рефракції, або просто пов'язано з похибками вимірювання рефракції.

Ще один важливий висновок полягає в тому, що при вимірюваннях рефракції ока потрібно серйозно ставлення до точності попереднього центрування візуальної осі ока та оптичної осі рефрактометра. Як видно з графіків на рис.1. при неточному центруванні вказаних осей астигматизм нефовеальної зони сітківки, який відрізняється за величиною і орієнтацією головних перетинів від фовеального, може бути прийнятий саме за фовеальний. Така помилка призводить до неточної корекції астигматизму ока.

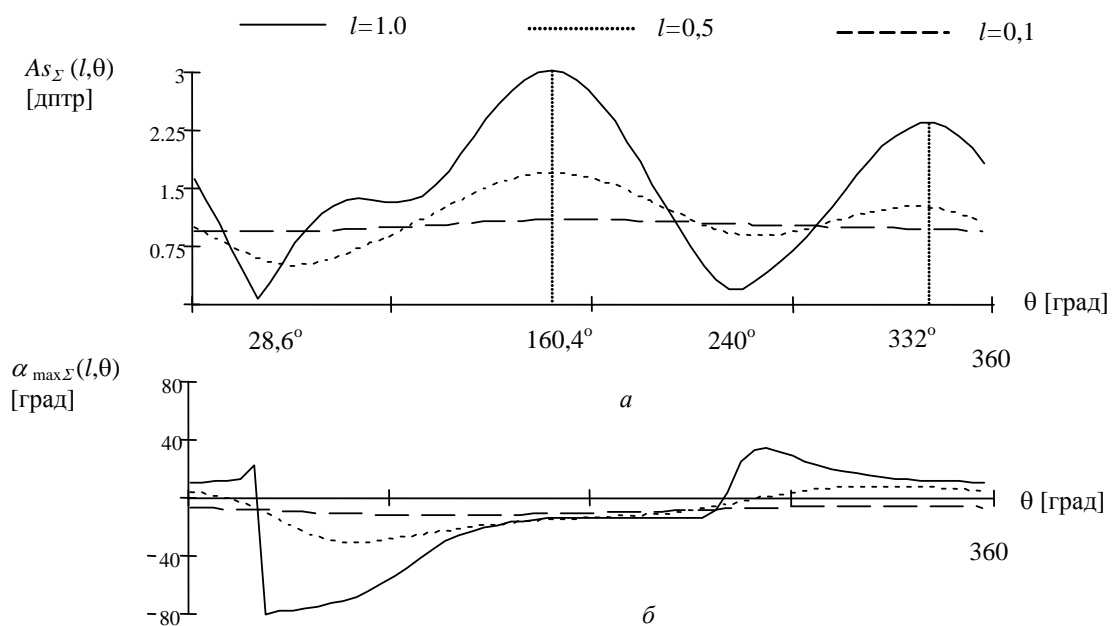


Рис. 1 Графіки залежностей величини сумарного астигматизму (а) та кута нахилу головного перетину (б) від координат предметної точки  $l, \theta$ : ————  $l = 1,0$ ; .....  $l = 0,5$ ; - - - - -  $l = 0,1$

### Сфероастигматизм ока

Експериментальні дослідження розподілу рефракції по зіниці на живому оці, які проводились за допомогою однопроменевого рефрактометра з просторовим розділенням [5, 6], інколи давали результати, в яких астигматизм на карті рефракції ока мав аномальний характер поведінки. Ця аномалія полягала в тому, що на відміну від встановлених у попередньому розділі властивостей звичайного астигматизму, реальний фовеальний астигматизм ока, поперше, не мав сталих значень параметрів  $A_{\Sigma\Sigma}$ ,  $\alpha_{max\Sigma}$ ,  $\alpha_{min\Sigma}$  у зоні зіниці. По-друге, спостерігалась детермінована залежність вказаних параметрів від відстані до осьової точки на зіниці (залежність від координати  $\rho$ ), а саме, величина  $A_{\Sigma\Sigma}$  зростала або зменшувалася із збільшенням величини  $\rho$ , а зональні головні перетини повертались на деякий кут відносно перетинів осьової зони. Такий характер поведінки астигматизму явно суперечить класичному, розглянутому в попередньому розділі, що спонукало шукати причину цього феномену. І вона була знайдена при більш детальному аналізі виразів сферичної аберації 3-го порядку. Виявилось, що оптичній системі ока, якщо вона просторова, властива аберація, яка схожа і на сферичну аберацію, і на астигматизм. Дійсно, аберація має місце не тільки по полю, але й на оптичній осі. Вона є ізопланатичною, тобто незалежною від координат  $l, \theta$ . Все це властиво для сферичної аберації 3-го порядку. Але, з іншого боку, абераційна пляма за виглядом і еволюцією форми (при дефокуванні зображення відносно сітківки) поводить себе як астигматизм. Тому такий тип аберації назвали сфероастигматизмом.

Кількісний аналіз сфероастигматизму зробимо за допомогою формул, наведених у статті [3] для сферичної аберації 3-го степеневого порядку. Якщо у цих формулах степеневі тригонометричні функції подати через тригонометричні функції кратних аргументів, то тоді вони набудуть вигляду:

$$\Delta X' / R_0 = [4X_3 \cos \varphi + 3(Y_3 \cos \varphi + Z_3 \sin \varphi) + (Y_3 + 4Y_3) \cos 3\varphi + (Z_3 + 4ZZ_3) \sin 3\varphi] \rho^3 \quad (9)$$

$$\Delta Y' / R_0 = [4X_3 \sin \varphi - 3(Y_3 \sin \varphi - Z_3 \cos \varphi) + (Y_3 - 4Y_3) \sin 3\varphi - (Z_3 - 4ZZ_3) \cos 3\varphi] \rho^3 \quad (10)$$

де

$$X_3 = 6CC_{40}^{00} - 6CC_{40}^{22} + 6CC_{40}^{40} - 30CC_{60}^{00} + 30CC_{60}^{20} - 30CC_{60}^{40}$$

$$Y_3 = 4CC_{42}^{00} - 4CC_{42}^{20} + 4CC_{42}^{40} - 20CC_{62}^{00} + 20CC_{62}^{20} - 20CC_{62}^{40}$$

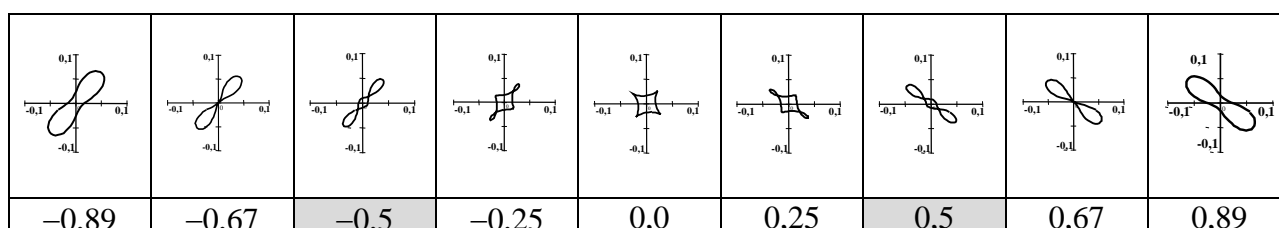
$$Z_3 = 4CS_{42}^{00} - 4CS_{42}^{20} + 4CS_{42}^{40} - 20CS_{62}^{00} + 20CS_{62}^{20} - 20CS_{62}^{40}$$

$$Y_3 Y_3 = CC_{44}^{00} - CC_{44}^{20} + CC_{44}^{40} - 5CC_{64}^{00} + 5CC_{64}^{20} - 5CC_{64}^{40}$$

$$Z_3 Z_3 = CS_{44}^{00} - CS_{44}^{20} + CS_{44}^{40} - 5CS_{64}^{00} + 5CS_{64}^{20} - 5CS_{64}^{40}$$

У виразах (9) – (10) одночлени, що містять коефіцієнт  $X_3$ , є класичною сферичною аберацією 3-го порядку центрованих оптичних систем. А коефіцієнти  $Y_3, Z_3$  належать до одночленів, які відповідають саме за сфероастигматизм просторових систем. З індексів коефіцієнтів, котрі входять до складу  $Y_3, Z_3$ , видно, що вони пов'язані з наявністю в ОС ока астигматизму п'ятого порядку. Підтвердженням цього є вигляд абераційної плями на сітківці при  $X_3 = 0, Y_3 \neq 0$ ,

Таблиця 2. Форма абераційної плями на сітківці при наявності сфероастигматизму із  $A_{S\text{сф}} = 1$  дптр,  $\alpha_{max} = -38^\circ$  та аметропії в діоптріях, що вказана під кожним графіком. Розмірність координатних осей дана мм.



Аметропія в табл. 2 введена штучно щоб продемонструвати еволюцію форми абераційної плями в площині сітківки при дефокусуванні відносно неї абераційного зображення предметної точки.

Як видно з таблиці, у площині найкращого зображення (аметропія дорівнює нулю) форма плями на відміну від класичного астигматизму має не круглу форму, а форму подушки. Астигматичні фокуси теж на відміну від класичної форми (прямі відрізки) мають специфічну форму, схожу на пропелер (виділено сірим фоном при аметропії  $-0,5$  дптр та  $+0,5$  дптр або  $\pm 1/2 A_{S,CF}$ ).

Якщо коефіцієнти  $X_3, Y_3, Z_3, Y_3, Z_3$  мають значення, наведені вище, то вирази (9) і (10) перетворюються на формули такого вигляду:

$$\Delta X' / R_0 = [(4X_3 + 3Y_3) \cos \varphi + 3Z_3 \sin \varphi] \rho^3; \quad (11)$$

$$\Delta Y' / R_0 = [(4X_3 - 3Y_3) \sin \varphi + 3Z_3 \cos \varphi] \rho^3. \quad (12)$$

А якщо до правих частин (11) і (12) ще додати одноклени дефокусування  $2C_1 \rho \cos \varphi$  та  $2C_1 \rho \sin \varphi$  відповідно, то

$$\Delta X' / 2R_0 = [(C + A) \cos \varphi + B \sin \varphi] \rho; \quad (13)$$

$$\Delta Y' / 2R_0 = [(C - A) \sin \varphi + B \cos \varphi] \rho, \quad (14)$$

де  $A = 3Y_3 \rho^3$ ;  $B = 3Z_3 \rho^3$ ;  $C = 4X_3 \rho^3 + 2C_1 \rho$ .

Неважко помітити, що вирази (13) і (14) аналогічні виразам (3), а тому поперечна аберація променя у площині сітківки

$$\Delta_{III} / 2R_0 = \quad (15)$$

$$= \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + 2C \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\gamma + 2\varphi)}$$

$$\text{де } \gamma = \begin{cases} \arcsin \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, & B \geq 0; \\ \pi - \arcsin \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, & B < 0. \end{cases}$$

Вираз (15) дозволяє знайти положення сфероастигматичних фокусів. Так, один з них, що відповідає більшій оптичній силі ока, знаходиться при  $C < 0$ ,  $\sin(\gamma + 2\varphi) = 1$  та  $\Delta_{III} = 0$ , звідки  $C = -\sqrt{A^2 + B^2}$ . Інший астигматичний фокус має місце при

$C = +\sqrt{A^2 + B^2}$ . Саме за цими формулами й були знайдено сфероастигматичні фокуси, які виділені в табл. 2 сірим фоном.

Величина відстані між сфероастигматичними фокусами дозволяє обчислити офтальмологічні параметри сфероастигматизму за формулами

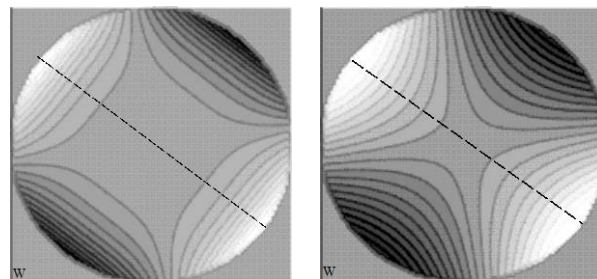
$$A_{S,CF} = 6000 \sqrt{Y_3^2 + Z_3^2} \rho^2 r_m^{-2};$$

$$\alpha_{\max S} = \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} + \pi k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (16)$$

де  $\rho = r / r_m$ ;  $r$  – абсолютна полярна координата точки на зіниці.

Із (16) випливає, що на відміну від параметра  $A_S$ , параметр  $A_{S,CF}$  залежить від  $\rho$ , що й спостерігається на рефракційних картах ока в деяких пацієнтів. Але в даному випадку параметр  $\alpha_{\max S}$  все-таки незалежний від  $\rho$ .

Щоб продемонструвати різницю в розподілі абераційної рефракції ока при звичайному астигматизмі і сфероастигматизмі, на рис. 2 для порівняння приведені контурні карти функції хвильової аберації ока з передньою фокусною відстанню  $|f| = 17$  мм, які відповідають цим типам астигматизму. Зона зіниці, де визначена хвильова аберація, має діаметр 6 мм. На рис. 2 прийнято такі значення параметрів:  $a = Y_3 = 0,0003638$ ;  $Z_3 = -0,0014552$ ;  $\max W = 1,5$  мкм;  $\min W = -1,5$  мкм;  $A_{S,CF} = 1$  дптр;  $\alpha_{\max} = -37,2^\circ$ ;  $b = D_1 = 0,0005457$ ;  $E_1 = -0,0021828$ ;  $\max W = 2,25$  мкм;  $\min W = -2,25$  мкм;  $A_S = 1$  дптр;  $\alpha_{\max} = -37,2^\circ$ . Величини  $\max W$ ,  $\min W$  показують найбільше (світла зона) та найменше (темна зона) значення хвильової аберації на зіниці.



а) б)  
 Рис. 2. Контурні графіки функції хвильової аберації в площині зіниці : *a* – при наявності сфероастигматизму, *б* – при наявності звичайного астигматизму першого порядку. Штрихова лінія на картах показує положення головного перетину, де оптична сила ока – найбільша.

У приведених графіках видно, що сфероастигматизм, який на краю зіниці має таку ж величину  $A_{\Sigma\text{сф}}$ , що і звичайний астигматизм, а також однакову з ним орієнтацію головних перетинів, властивий істотно інший характер деформації хвильового фронту або інша карта рефракції. Так, сфероастигматизм менше деформує хвильовий фронт у центральній зоні зіниці, але швидше змінюється в периферійній зоні зіниці. Як видно з порівняння графіків, сфероастигматизм також властива менша величина хвильової аберації, що впливає із значень  $\max W$  та  $\min W$ , наведених на рис. 2, *a* і *б*.

Таким чином, наведений приклад показує, що залежність величини астигматизму від координати  $\rho$  є наслідком існування сфероастигматизму. Але цей приклад не виявляє причини залежності величини  $\alpha_{\max}$  від тієї ж координати. Тому розглянемо астигматизм ока, якщо його оптична система має звичайний астигматизм і сфероастигматизм

**Астигматизм ока при наявності сфероастигматизму і астигматизму 1-го та інших степеневих порядків**

У даному випадку проекції поперечної аберації променя на сітківці на координатні осі з урахуванням аберації дефокусування відповідно виразам (1) та (13), (14) обчислюються за формулами

$$\Delta X'_{\Sigma} / R_0 = [(C_{\Sigma} + A_{\Sigma}) \cos \varphi + B_{\Sigma} \sin \varphi] \rho; \quad (16)$$

$$\Delta Y'_{\Sigma} / R_0 = [(C_{\Sigma} - A_{\Sigma}) \sin \varphi + B_{\Sigma} \cos \varphi] \rho, \quad (17)$$

де  $C_{\Sigma} = 2\rho C_1 + 4\rho^3 X_3$ ;  $A_{\Sigma} = 2\rho a + 3\rho^3 Y_3$ ;  $B_{\Sigma} = 2\rho b + 3\rho^3 Z_3$ .

Аналогічно виразу (15) поперечна аберация променя знаходиться за формулою

$$\Delta_{\Sigma} / R_0 = \sqrt{A_{\Sigma}^2 + B_{\Sigma}^2 + C_{\Sigma}^2 + 2C_{\Sigma} \sqrt{A_{\Sigma}^2 + B_{\Sigma}^2} \sin(\gamma_{\Sigma} + 2\varphi)}, \quad (18)$$

де: 
$$\gamma_{\Sigma} = \begin{cases} \arcsin \frac{A_{\Sigma}}{\sqrt{A_{\Sigma}^2 + B_{\Sigma}^2}}, & B_{\Sigma} \geq 0; \\ \pi - \arcsin \frac{A_{\Sigma}}{\sqrt{A_{\Sigma}^2 + B_{\Sigma}^2}}, & B_{\Sigma} < 0. \end{cases}$$

Звідси маємо офтальмологічні параметри сумарного астигматизму:

$$A_{\Sigma\Sigma} = 2000 r_m^{-2} \times \sqrt{(2a + 3Y_3 \rho^2)^2 + (2b + 3Z_3 \rho^2)^2} \quad [\text{дптр}], \quad (19)$$

$$\alpha_{\max\Sigma} = \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma_{\Sigma}}{2} + \pi k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (20)$$

Вирази (19), (20) свідчать про те, що на відміну від попередньо розглянутих типів астигматизму, у випадку звичайного астигматизму і сфероастигматизму вже не тільки величина  $A_{\Sigma\Sigma}$ , але й кут  $\alpha_{\max\Sigma}$  є залежним від координати  $\rho$ .

На рис. 3 показано результат сумарної дії звичайного астигматизму та сфероастигматизму (*a* –  $\max W = 2,25$  мкм;  $\min W = -2,25$  мкм; *б* –  $\max W = 1,16$  мкм;  $\min W = -1,16$  мкм).

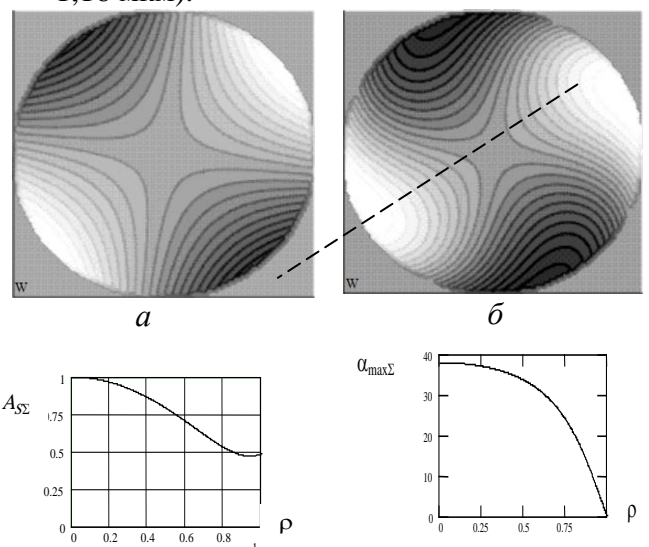


Рис. 3. Графіки хвильової аберації ока до аналізу суміші первинного астигматизму та сфероастигматизму: *a* – контурний графік хвильової аберації на зіниці ока з первинним астигматизмом; *б* – те саме при наявності одночасно первинного астигматизму та



сфероастигматизму; *в* – графік функції  $A_{\Sigma\Sigma}(\rho)$ ; *г* – графік функції  $\alpha_{\max\Sigma}(\rho)$  у випадку типів астигматизму, що відповідають графіку *б*

Звичайний астигматизм (Рис. 3, *а*) представлений лише першим степеневим порядком. Його параметри та коефіцієнти апроксимації при  $r_m = 3$  мм мають значення:  $D_1 = 0,0005457$ ;  $E_1 = 0,0021828$ . При цих параметрах  $A_S = 1$  дптр,  $\alpha_{\max\Sigma} = 37,2^\circ$ . Сфероастигматизм, має ті самі параметри і коефіцієнти, що й на рис. 2, *а*. Штриховими лініями показано положення головних перетинів.

Як видно з графіків рис. 3, *в*, *г*, на яких  $A_{\Sigma\Sigma}(\rho)$  дано в діоптріях, а  $\alpha_{\max\Sigma}(\rho)$  – в градусах, сумарна дія звичайного первинного астигматизму та сфероастигматизму призводить до того, що величина астигматизму змінюється по зіниці. Те саме спостерігається і з величиною  $\alpha_{\max\Sigma}$ . Тому в кожній радіальній зоні зіниці, залежно від величини  $\rho$  існує своя величина астигматизму й своє кутове положення головних площин, внаслідок чого головний перетин на рис. 3, *б* має вигляд кривої лінії.

Таким чином аномальна поведінка астигматизму ока може бути пояснена наявністю суміші звичайного та сферичного астигматизму.

Аналіз функцій  $A_{\Sigma\Sigma}(\rho)$ ,  $\alpha_{\max\Sigma}(\rho)$  також показав, що в окремих випадках сфероастигматизм і звичайний астигматизм разом може давати й пряму площину головного перетину. На рис. 4 показано графік хвильової аберації у випадку, коли сфероастигматизм має ті самі параметри, що й на рис. 2, *а*, (*а* –  $\max W = 2,25$  мкм;  $\min W = -2,25$  мкм; *б* –  $\max W = 0,84$  мкм;  $\min W = -0,84$  мкм), а звичайний астигматизм представлено первинним астигматизмом з коефіцієнтами  $D_1 = -0,0005457$ ;  $E_1 = 0,0021828$ , та параметрами  $A_S = 1$  дптр,  $\alpha_{\max\Sigma} = 52,3^\circ$ .

Характерним у даному випадку є те, що сумарний астигматизм на краю зіниці зменшується до нуля, (див. рис. 3, *в*), тобто на краю зіниці виникає повне виправлення астигматизму. А кутова орієнтація головного

перетину не змінюється і відповідає кутовій орієнтації первинного астигматизму.

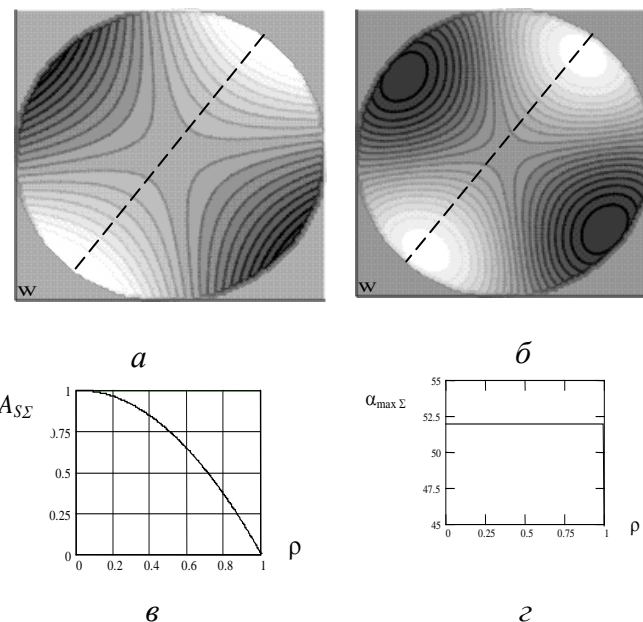


Рис. 4. Графіки хвильової аберації ока: *а* – контурний графік хвильової аберації на зіниці ока з первинним астигматизмом; *б* – те саме при суміші первинного астигматизму та сфероастигматизму; *в* – графік функції  $A_{\Sigma\Sigma}(\rho)$ ; *г* – графік функції  $\alpha_{\max\Sigma}(\rho)$  у випадку типів астигматизму, показаних на графіку *б*.

## Висновки

1. Астигматизм оптичної системи ока будь-якого типу та степеневого порядку може вважатися векторною величиною, модуль якого представляється параметром  $A_S$ , а напрямком кутом  $\alpha_{\max}$ . При цьому об'єднання різних типів та порядків астигматизму ока треба визначати як векторну суму всіх наявних складових астигматизму.

2. Вимірювання астигматизму оптичної системи ока відносно однієї предметної точки або відносно однієї точки сітківки дає змогу встановити лише сумарний астигматизм і не дозволяє виявити його складові. Для знаходження вказаних складових астигматизм треба вимірювати в кількох зонах сітківки або відносно декількох точок поля зору ока.

3. Визначення характеристик степеневих порядків астигматизму, які пов'язані з з положенням оптичної осі відносно оптичної



системи ока, дозволить більш точно виявити положення оптичної та візуальної осей ока в площині зіниці, що разом з інформацією про степеневі порядки буде сприятиме підвищенню точності хірургічної ексимер-лазерної корекції астигматизму.

4. Наявність сфероастигматизму в оптичній системі ока може вважатися свідченням відсутності в неї осьової симетрії, а тому параметри сфероастигматизму можуть використовуватися як кількісна міра “просторовості” оптичної системи ока.

5. Виявлені в даній статті властивості складових астигматизму змушують переглянути методики його вимірювання на живому оці, а отримані робочі формули дозволяють модернізувати математичний апарат, який використовується в просторово-роздільній рефрактометрії ока.

И.Г. Чиж

#### АСТИГМАТИЗМ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ГЛАЗА

Исследованы свойства астигматизма глаза 1-го, 2-го и 3-го степенных порядков. Выявлен астигматизм со свойствами сферической aberrации. Показано, что распределение в зоне зрачка величин параметров астигматизма зависит от наличия обычного астигматизма и сфероастигматизма. Это распределение зависит также от соотношений между соответствующими коэффициентами аппроксимации функции волновой aberrации глаза полиномами Цернике. Получены рабочие формулы расчета офтальмологических параметров астигматизма.

I.G. Chyzh

#### ASTIGMATISM OF OPTICAL SYSTEM OF AN EYE

The properties of primary astigmatism of an eye, as well as the second and third orders astigmatism are investigated. astigmatism with properties of spherical aberration is revealed. It is shown that the distribution of astigmatism sizes in the pupil zone depends on presence of ordinary usual astigmatism and spherical astigmatism. This distribution also depends on size coefficients of the eye wave aberration by **Zernike polynomials**. The operation working formulas of account of **ophthalmic** astigmatism parameters are obtained.

1. Сергиенко Н.М. Офтальмологическая оптика. – М.: Медицина, 1991. – 142 с.
2. ГОСТ 14934-88 Офтальмологическая оптика. Термины и определения.
3. Чиж И.Г. Монохроматичні аберації оптичної системи ока // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2002. – № 1. – С. 98–110.
4. Турьгин И.А. Прикладная оптика. – М.: Машиностроение, 1966. – 430 с.

5. Чиж И.Г., Сокуренько В.М. Методы измерения рефракции глаза с пространственным разрешением по зрачку // Оптический журнал. – 2001. – 68. № 3. – С.19–25.
6. Чиж И.Г., Сокуренько В.М. Визначення просторового розподілу рефракції ока за результатами вимірювань його поперечних аберацій. // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2000. – № 3. – С. 105–109.