

Міністерство освіти і науки України  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

**І. Г. Чиж**

# **Теорія оптичних систем**

**Підручник**

Затверджено Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
як підручник для студентів, які навчаються  
за спеціальністю 151 «Автоматизація  
та комп'ютерно-інтегровані технології»

Електронне мережне навчальне видання

Київ  
КПІ ім. Ігоря Сікорського  
2021

**Рецензенти:** *С. І. Черняк*, д-р техн. наук,  
головний конструктор ПрАТ «РАМЗАЙ»  
*В. М. Тягур*, д-р техн. наук, доц.,  
головний конструктор напрямку КП СП «Арсенал»

**Відповідальний редактор** *В. Г. Колобродов*, д-р техн. наук, проф.,  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

*Гриф надано Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
(протокол № 10 від 13.12.2021 р.)*

Викладено теоретичні основи геометричної оптики, гаусової оптики, теорії ідеальної оптичної системи, теорії діафрагм, деталей та вузлів оптичних систем. Наведено особливості енергетичних розрахунків оптичних систем, теорії та габаритних розрахунків телескопічних систем, мікроскопів, проєкційних систем, об'єктивів фото, кіно, цифрової апаратури.

Для студентів, які навчаються за спеціальністю 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології».

Реєстр. № П 21/22-008. Обсяг 19,4 авт. арк.  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»  
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056  
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців,  
виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від  
25.05.2017 р.

© І.Г. Чиж, 2021

© КПІ ім. Ігоря Сікорського (ПБФ), 2021

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП.....</b>	<b>9</b>
<b>РОЗДІЛ 1. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ОПТИЧНИХ СИСТЕМ ЯК ДИСЦИПЛІНИ І ГАЛУЗІ ЗНАНЬ .....</b>	<b>19</b>
<b>РОЗДІЛ 2. ПРАВИЛА ЗНАКІВ .....</b>	<b>28</b>
2.1. Правила знаків відрізків .....	29
2.2. Правила знаків кутів .....	32
2.3. Приклади використання правила знаків.....	32
2.3.1. Виготовлення рисунку.....	33
2.3.2. Складання рівнянь відрізків, рівнянь кутів .....	34
2.3.3. Підготовка вихідних даних про відрізки та кути для розрахунків за формулами.....	35
2.3.4. Складання матриці конструктивних параметрів оптичної системи.....	35
<b>РОЗДІЛ 3. ЗАКОНИ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ОПТИКИ .....</b>	<b>40</b>
3.1. Принцип Ферма.....	41
3.2. Закон заломлення променів .....	49
3.3. Закон відбиття променів.....	51
3.4. Закон оборотності ходу променів .....	54
3.5. Явище повного внутрішнього відбиття.....	54
3.6. Закон незалежного поширення променів .....	56
<b>РОЗДІЛ 4. ГЕОМЕТРИЧНА ОПТИКА ПРО ФОРМУВАННЯ ЗОБРАЖЕНЬ ПРЕДМЕТІВ ОПТИЧНИМИ СИСТЕМАМИ .....</b>	<b>57</b>
4.1. Предмет, зображення предмету.....	57
4.2. Простір предметів, простір зображень предметів .....	59
4.3. Про формування зображення точок реальними оптичними системами .....	60
<b>РОЗДІЛ 5. РОЗРАХУНОК ХОДУ ПРОМЕНІВ ЧЕРЕЗ ОПТИЧНУ ПОВЕРХНЮ ТА СИТЕМУ ОПТИЧНИХ ПОВЕРХОНЬ.....</b>	<b>62</b>
5.1. Оптичні поверхні у складі оптичних систем .....	64
5.2. Розрахунок ходу променю через оптичну систему, складену із сферичних поверхонь.....	67
5.3. Розрахунок ходу променю через асферичну оптичну поверхню .....	81

<b>РОЗДІЛ 6. ОПТИКА ПАРАКСІАЛЬНИХ ТА НУЛЬОВИХ ПРОМЕНІВ.....</b>	<b>86</b>
6.1. Параксіальні промені.....	87
6.2. Розрахунок ходу параксіального променя за формулою відрізків .....	89
6.3. Розрахунок ходу параксіального променя за формулою кутів і висот.....	93
6.4. Інваріант Сміта–Гельмгольца (Гюйгенса–Гельмгольца, Лагранжа–Гельмгольца).....	95
6.5. Розрахунок положення і поперечного збільшення зображення предмету, сформованого центрованою оптичною системою .....	99
6.6. Нульові промені .....	100
6.7. Кардинальні елементи оптичної системи.....	106
6.7.1. Задні кардинальні елементи оптичної системи .....	107
6.7.2. Передні кардинальні елементи оптичної системи .....	109
6.8. Розрахунки кардинальних відрізків оптичної системи.....	111
6.8.1. Розрахунки задніх кардинальних відрізків .....	111
6.8.2. Розрахунки передніх кардинальних відрізків.....	112
6.8.3. Розрахунки кардинальних відрізків оптичної системи через елементи гаусової матриці.....	115
6.9. Кардинальні відрізки оптичної поверхні.....	116
<b>РОЗДІЛ 7. ТЕОРІЯ ІДЕАЛЬНОЇ ОПТИЧНОЇ СИСТЕМИ .....</b>	<b>120</b>
7.1. Формула Ньютона.....	121
7.2. Властивість головних площин ідеальної оптичної системи.....	123
7.3. Співвідношення задньої $f'$ і передньої $f$ фокусних відстаней ідеальної оптичної системи.....	124
7.4. Формула Гауса.....	126
7.5. Розрахунок ходу нульового променя через оптичну систему, представлену кардинальними елементами компонентів.....	129
7.6. Оптична сила багатокомпонентної оптичної системи.....	139
7.7. Кутове збільшення. Вузлові точки оптичної системи .....	142
7.8. Поздовжнє збільшення .....	145
7.9. Зв'язок між зображеннями лінійним $\beta$ , кутовим $\gamma$ , та поздовжнім $\alpha$ .....	147
7.10. Графічний метод пошуку ходу нульового променя через оптичний компонент або оптичну систему, які представлені кардинальними елементами .....	148



<b>РОЗДІЛ 8. ОПТИЧНІ МАТЕРІАЛИ.....</b>	<b>163</b>
8.1. Оптичне скло безбарвне .....	165
8.2. Кварцове скло .....	169
8.3. Оптичне скло кольорове.....	171
8.4. Оптична кераміка .....	173
8.5. Кристали.....	174
8.6. Органічне скло .....	175
8.7. Оптичні ситали, церодури.....	176
8.8. Скло з особливими властивостями .....	178
8.8.1. Безкисневе скло .....	178
8.8.2. Лазерне скло .....	180
8.8.3. Фотохромне скло .....	180
8.8.4. Світлорозсіювальне скло .....	181
<b>РОЗДІЛ 9. ОПТИЧНІ ДЕТАЛІ .....</b>	<b>184</b>
9.1. Лінзи .....	186
9.1.1. Формули розрахунку відрізків лінзи $f', f, s'_F, s_F, s'_H, s_H$ .....	189
9.2. Пласко-паралельні пластини .....	196
9.2.1. Проходження пучка паралельних променів через пласкопаралельну пластину .....	197
9.2.2. Проходження гомоцентричного пучка променів через пласкопаралельну пластину .....	200
9.3. Призми .....	204
9.3.1. Відбивальні призми .....	205
9.3.2. Обертальні призми і призмкові системи.....	209
9.3.3. Правило позначення призм.....	213
9.3.4. Метод аналізу зображення, сформованого призмою чи системою призм.....	213
9.3.5. Дзеркальна розгортка призм.....	217
9.3.6. Редукування пластин та дзеркальних розгорток призм .....	219
9.3.7. Габаритний розрахунок призм .....	222
9.4. Дзеркала .....	224
9.4.1. Металізовані оптичні дзеркала.....	226
9.4.2. Діелектричні оптичні дзеркала.....	228
9.4.3. Дзеркальні поверхні, що віддзеркалюють через повне внутрішнє відбиття .....	229
9.4.5. Світлоподільні дзеркала.....	230

9.4.6. Про кардинальні елементи дзеркал, що мають оптичну силу .....	230
9.5. Світловоди та волоконно-оптичні елементи.....	231
<b>РОЗДІЛ 10. ТЕОРІЯ ДІАФРАГМ ОПТИЧНОЇ СИСТЕМИ.....</b>	<b>241</b>
10.1. Апертурна діафрагма та її властивості. Порядок виявлення в системі апертурної діафрагми.....	244
10.1.1. Порядок виявлення апертурної діафрагми в оптичній системі.....	245
10.2. Польова діафрагма та її властивості. Порядок виявлення в системі польової діафрагми .....	248
10.2.1. Порядок виявлення польової діафрагми в оптичній системі .....	249
10.2.2. Розміри поля зору оптичної системи при наявності польової діафрагми .....	250
10.3. Вільєтна діафрагма та її властивості. Порядок виявлення в системі вільєтних діафрагм.....	252
10.3.1. Порядок виявлення вільєтних діафрагм в оптичній системі.....	252
10.3.2. Вільєтування нахилених пучків променів. Розміри поля зору при його обмеженні вільєтною діафрагмою.....	253
10.3.3. Розміри поля зору оптичної системи при його обмеженні вільєтувальною діафрагмою.....	255
<b>РОЗДІЛ 11. ФОРМУВАННЯ І ПЕРЕДАЧА ОПТИЧНОЮ СИСТЕМОЮ ПОТОКІВ ВИПРОМІНЕННЯ.....</b>	<b>258</b>
11.1. Джерела оптичного випромінення, параметри та характеристики їх випромінювальної здатності .....	259
11.1.1. Потік оптичного випромінення.....	259
11.2. Параметри просторового розподілу випромінення від точкових та протяжних джерел .....	266
11.2.1. Точкові джерела випромінення .....	266
11.2.2. Протяжні джерела випромінення .....	268
11.3. Світлотехнічні розрахунки з використанням параметрів $I, M, L$ .....	270
11.3.1. Опроміненість, освітленість поверхні від точкового джерела світла.....	271
11.3.2. Опроміненість, освітленість поверхні від протяжного джерела світла.....	274

11.4. Світлова трубка, проходження світлових трубок через оптичну систему .....	281
11.4.1. Проходження світлової трубки через оптичну поверхню .....	283
11.4.2. Опроміненість осьової точки площини зображення .....	285
11.4.3. Опроміненість позаосьової зони площини зображення .....	287
11.5. Закон синусів Аббе. Робочі формули розрахунку $E_o$ .....	288
11.6. Коефіцієнт пропускання $\tau_{oc}$ оптичної системи.....	291
<b>РОЗДІЛ 12. ТЕОРІЯ ОПТИЧНИХ СИСТЕМ ОПТИЧНИХ ТА ОПТИКО-ЕЛЕКТРНИХ ПРИЛАДІВ .....</b>	<b>297</b>
12.1. Анатомічна будова ока .....	301
12.2. Функціональне призначення ока .....	303
12.3. Оптична система ока, що забезпечує оку фізичну рефракцію .....	303
12.4. Діафрагми оптичної системи ока .....	306
12.5. Сітківка як фотоприймач зображень .....	308
12.6. Просторово-роздільна здатність ока.....	312
12.7. Недоліки оптичної системи ока.....	315
<b>РОЗДІЛ 13. ТЕЛЕСКОПІЧНІ СИСТЕМИ .....</b>	<b>318</b>
13.1. Хід пучків променів в телескопічних системах Кеплера і Галілея.....	320
13.2. Історія виникнення зорових труб Галілея і Кеплера.....	323
13.3. Функціональні параметри телескопічних систем.....	324
13.3.1. Кутове ( $\gamma$ ) та видиме ( $\Gamma$ ) збільшення телескопічної системи .....	325
13.3.2. Кут поля зору в просторі предметів ( $2\omega$ ) та в просторі зображень ( $2\acute{\omega}$ ) .....	327
13.3.3. Положення і діаметри вхідної та вихідної зіниць телескопічних систем .....	334
13.3.4. Просторова роздільна здатність телескопічної системи .....	339
13.3.5. Корисне кутове або видиме збільшення телескопічної системи .....	342
13.4. Об'єктиви і окуляри зорових труб .....	343
13.5. Габаритний розрахунок телескопічних систем .....	348

<b>РОЗДІЛ 14. ОПТИЧНІ СИСТЕМИ ЛУП</b>	
<b>І МІКРОСКОПІВ.....</b>	<b>355</b>
14.1. Лупа .....	355
14.1.1. Видиме збільшення лупи.....	355
14.1.2. Поле зору лупи .....	358
14.1.3. Глибина простору різкого для ока зображення, сформованого лупою .....	361
14.2. Оптична система мікроскопа.....	365
14.2.1. Історія виникнення і розвитку оптичної мікроскопії .....	366
14.2.2. Основні функціональні параметри оптичних систем мікроскопів .....	368
14.3. Об'єктиви, окуляри та тубус мікроскопів .....	380
14.3.1. Об'єктиви мікроскопів .....	380
14.3.2. Окуляри мікроскопів .....	381
14.3.3. Тубус мікроскопа .....	382
14.3.4. Позначення на серійних об'єктивах та окулярах .....	382
<b>РОЗДІЛ 15. ПРОЕКЦІЙНІ ОПТИЧНІ СИСТЕМИ.....</b>	<b>385</b>
15.1. Основні функціональні параметри проєкційних систем .....	387
15.2. Освітлювальна підсистема проєкційних систем .....	389
15.3. Габаритний розрахунок проєкційної оптичної системи.....	390
<b>РОЗДІЛ 16. ОПТИЧНІ СИСТЕМИ ОБ'ЄКТИВІВ .....</b>	<b>393</b>
16.1. Основні функціональні параметри оптичних систем об'єктивів.....	393
16.1.1. Фокусна відстань і поле зору об'єктива.....	394
16.1.2. Відносний отвір об'єктива, діафрагмове число .....	395
16.1.3. Глибина простору предметів.....	395
16.1.4. Модуляційна передавальна функція об'єктивів.....	400
16.2. Оптичні системи об'єктивів фото, кіно, телевізійної апаратури .....	404
<b>КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ .....</b>	<b>408</b>
<b>ЛІТЕРАТУРА.....</b>	<b>415</b>
<b>ДОДАТКИ.....</b>	<b>417</b>
<b>ПОКАЖЧИКИ.....</b>	<b>419</b>

## ВСТУП

### Про дисципліну «Теорія оптичних систем»

**Оптичною системою** називають сукупність оптичних деталей (оптичних елементів) з такими оптичними, геометричними параметрами та взаємним розташуванням в просторі, при яких забезпечується виконання основних функцій оптичного приладу.

Що є основною функцією оптичного приладу? Для її виявлення знайдіть відповідь на питання – задля якої практичної мети був створений оптичний прилад? У якості прикладу візьмемо бінокль, зорову трубу чи астрономічний телескоп. Відомо, що спостерігаючи віддалені об'єкти через оптичні системи цих приладів ми нібито наближаємось до них. Іншими словами у порівнянні з кутовими розмірами об'єктів, які ми бачимо неозброєним оком, їх зображення, сформовані оптичними системами, мають істотно більші кутові розміри. Саме з цією метою і були створені ці прилади. Висновок – основною функцією вказаних приладів є забезпечення кутового збільшення зображень віддалених об'єктів.

Вірним є і зворотне визначення. Якщо основну функцію приладів здійснює оптична система то такі прилади є оптичними. Тому вище згадані біноклі, зорові труби і телескопи є оптичними приладами.

Оптичні системи складаються із оптичних деталей – лінз, призм, дзеркал та інших, виготовлених із прозорих для світла оптичних матеріалів. Такі деталі мають поліровані поверхні, які виготовляються з особливо високою точністю геометричної форми у вигляді сфери, чи еліпсоїду, чи параболоїду, або пласкої поверхні, тощо. Такі поверхні називають оптичними. Тому оптична система це упорядкована сукупність оптичних середовищ і оптичних поверхонь.

Дисципліна «Теорія оптичних систем» є системою науково обґрунтованих знань про закони розповсюдження оптичного випромінювання в оптичних середовищах, а також про функціональні властивості, параметри і характеристики типових оптичних елементів та типових оптичних систем.

Теорія оптичних систем є основою аналізу дії оптичних систем приладів. До того ж вона слугує теоретичним фундаментом проектування – синтезу оптичних систем оптичних приладів із наперед заданими функціями, параметрами та характеристиками. Через це теорію оптичних систем ще називають прикладною або технічною оптикою,

яка за своїм характером є дисципліною професійної та практичної підготовки спеціалістів.

### **Мета дисципліни «Теорія оптичних систем»**

Метою дисципліни є **отримання знань** про:

- закони та основні теоретичні положення геометричної оптики,
- теорію параксіальних та нульових променів,
- теорію ідеальної оптичної системи,
- оптичні матеріали та типові оптичні деталі з їх властивостями,
- теорію діафрагмування пучків променів у оптичних системах,
- теорію передачі потоків випромінювання оптичними системами,
- устрій та основні функції ока,
- теорію типових оптичних систем телескопічних, систем мікроскопів, проєкційних оптичних систем, систем об'єктивів,
- основи теорії аберацій оптичних систем і абераційного аналізу зображень, сформованих оптичними системами;

та **набуття умінь**:

- розраховувати хід дійсних, параксіальних та нульових променів через оптичну поверхню та системи оптичних поверхонь,
- розраховувати параксіальні параметри оптичних елементів та систем,
- використовувати теорію ідеальної системи при розрахунках параксіальних параметрів та характеристик оптичних систем,
- оцінювати дію діафрагм оптичної системи, їх вплив на передачу потоків оптичного випромінювання, вплив на розподіл опромінення в площині зображень та на розміри поля зору оптичних систем,
- оцінювати значення основних функціональних параметрів типових оптичних систем,
- оцінювати абераційні параметри та характеристики оптичних систем,
- використовувати сучасні комп'ютерні програми аналізу параметрів та характеристик оптичних систем.

## Роль оптичних приладів в розвитку науки, техніки та технологій

Перші оптичні прилади були виготовлені наприкінці XVI та початку XVII століття. В цей час з'явилися зорові труби та телескопи. Вони склалися всього з двох простих лінз – об'єктиву та окуляру. На рис. В.1 показана зорова труба тих часів.



*Рис. В.1.* Зорова труба голландського окулярного майстра Захарія Янсена, в основу оптичної системи якої покладена модель труби невідомого автора, датована 1590 роком

Голландія в ті часи була великою морською державою і зорові труби були потрібні для мореплавання. У 2008 році у Нідерландах (нова назва Голландії) було проведено святкування 400-річчя винаходу зорових труб. Честь винаходу на них була поділена між Янсенем і Ліпперсгеєм – ще одним можливим першим автором зорової труби.

Відомості про зорові труби дійшли до Галілео Галілея і він у 1609 році створив свою зорову трубу, яку пізніше буде названо телескопом. Оптична система телескопу Галілея до цього часу носить його ім'я. Перший телескоп Галілея мав трикратне кутове збільшення. Завдяки проведеній модернізації йому вдалося виготовити телескоп із тридцятикратним збільшенням. Завдяки йому він зробив астрономічні відкриття, значення яких для розвитку науки неможливо переоцінити. Так, він відкрив кратери та гори на Луні, знайшов чотири супутника Юпітера, які оберталися навколо нього, що дало можливість йому обґрунтувати геліоцентричну систему планет сонячної системи. Він першим встановив зміну фаз Венери і першим побачив, що Чумацький шлях складається з окремих зірок.



*Рис. В.2.* Італійський вчений  
Галілео Галілей (1564–1642) зі своїм телескопом

Динаміка планет сонячної системи, обґрунтована Галілеєм, разом із законами руху планет, відкритими Кеплером, привели Ньютона до відкриття закону всесвітнього тяжіння. Таким чином перші телескопічні оптичні системи, покладені в основу функціонування зорових труб та біноклів, надали можливість людині спостерігати структуру недосяжних для неозброєного ока віддалених на велику відстань об'єктів, спостерігати їх і зробити перші фундаментальні відкриття відносно будови макроміру.

Майже в ті самі часи, кінця XVI та початку XVII століття з'являється оптичний прилад, який потім отримав назву мікроскоп. Він також, як і зорова труба або телескоп мав у своєму складі дві примітивні лінзи із змінною відстанню між ними. Вважається, що авторами цього приладу були Захарій Янсен і його батько Ханс.



*Рис. В.3.* Перший мікроскоп був виготовлений у Голландії  
Хансом та Захарієм Янсенами

Подальша модернізація приладу, що здійснена Галілеєм та англійським вченим Робертом Гуком, дозволили вже у 1665 році мати мікроскоп із 30-кратним видимим збільшенням зображень мікрооб'єктів. У 1674 році голландський натураліст Антоні ван Левенгук

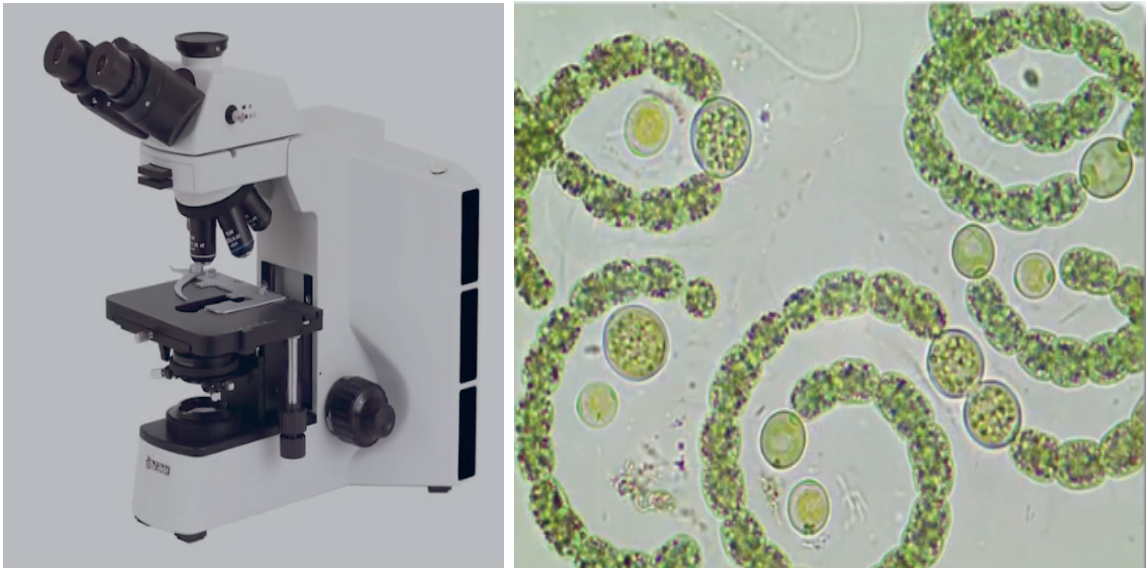


створив перший однолінзовий мікроскоп (мікролупу), що дозволяв мати видиме збільшення зображень до 300 разів. Технічні досягнення того часу у мікроскопії дали можливість зробити величезні відкриття у будові мікроміру. Так було виявлено наявність біологічних клітин, існування живих одноклітинних мікроорганізмів різної форми – бактерій, коків, бацил та інших мікроорганізмів, у тому числі патогенних, які викликали епідемії і знищення великої кількості людей. Тому винаходження мікроскопу дозволило відкрити людству існування мікросвіту, що також мало колосальне наукове і практичне значення.

Подальший розвиток теорії оптичних систем та технологій виготовлення оптичних деталей істотно покращив функціональні можливості, параметри та характеристики телескопів та мікроскопів. На рис. В.4 та рис. В.5 показано як виглядають сучасні прості моделі таких приладів.



*Рис. В.4.* Сучасний дзеркально-лінзовий телескоп  
й отримане ним зображення поверхні Місяця  
та однієї з галактик



*Рис. В.5.* Сучасний біологічний мікроскоп та отримане ним зображення мікроорганізму

Перші оптичні прилади, як і ті, що були сконструйовані пізніше, мали загальне призначення – надати людині можливість бачити те, що знаходиться за межами природніх можливостей неозброєного ока. Іншими словами оптичні зображення, що формувалися такими приладами та оптичною системою ока, опинялися на сітківці ока і аналізувалися зоровим апаратом людини. Вся сукупність таких приладів отримала назву візуальних.

З появою фоточутливих пластин та плівок, а потім і фотоелектричних приймачів, око людини поступово звільнялося від безпосереднього аналізу оптичних зображень, тому що сформовані приладами зображення вже могли реєструватися та зберігатися на відповідних носіях – фотопластинах, фотоплівках, або в оцифрованому вигляді у пристроях з електронною пам'яттю – комп'ютерах, мобільних телефонах на флешках та інших носіях, рис. В.6.

З появою лазерних випромінювачів спектр оптичних та оптико-електронних приладів і пристроїв суттєво розширився. Окрім отримання та збереження оптичної інформації про об'єкти, що нас оточують і нас цікавлять, оптичні системи стали широко задіяними в автоматизованих системах керування транспортними засобами, у військовій сфері, у наукових дослідженнях, у системах передачі інформації, а також у багатьох технологічних процесах.

Так, у виробництві інтегральних електронних мікросхем широке застосування мають оптичні системи, які використовуються в процесі літографії шарів мікросхеми та контролю їх топографії, рис. В.7.

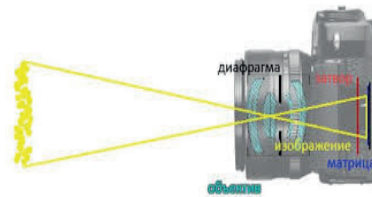


Рис. В.6. Сучасний фотоапарат з електронною реєстрацією оптичного зображення об'єкту

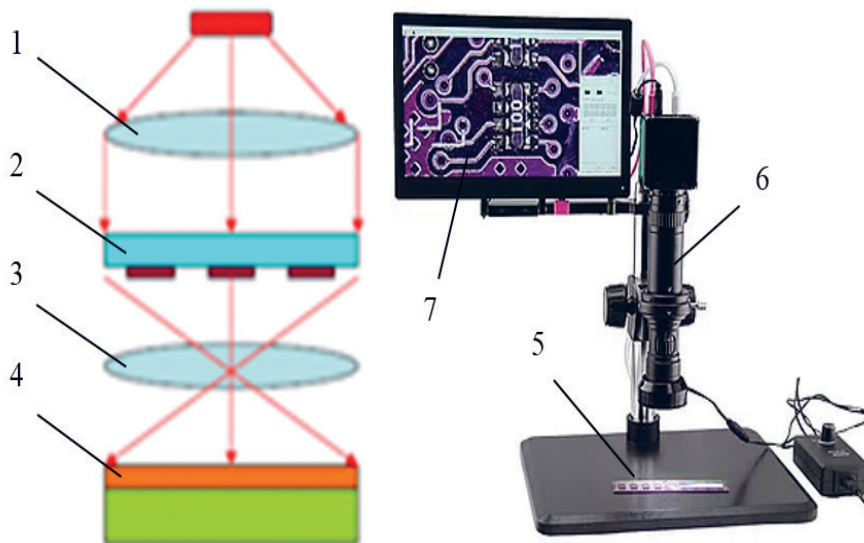
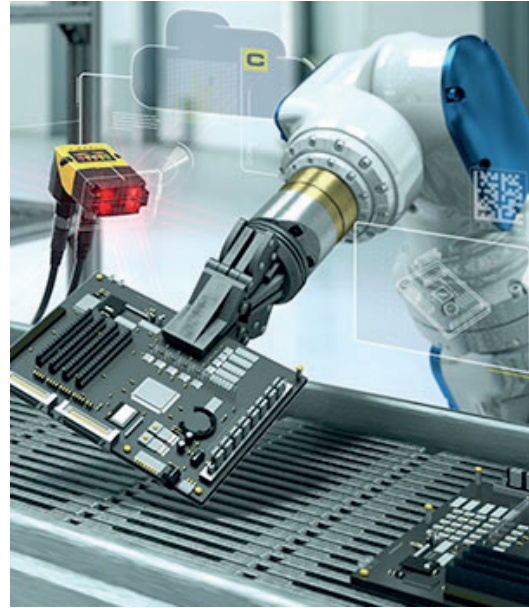


Рис. В.7. Зліва – спрощена схема установки для літографії при виготовленні шарів мікросхеми, справа – мікроскоп для контролю якості виготовлення мікросхеми: 1 – оптика освітлення шаблону шару мікросхеми; 2 – шаблон одного з декількох шарів мікросхеми; 3 – проєкційна оптична система, що створює зменшене зображення шаблону шару 4 мікросхеми на поверхні кремнієвої пластини; 5 – мікросхеми; 6 – оптичний мікроскоп з цифровою фотокамерою; 7 – екран монітора із зображенням поверхні мікросхеми, що контролюється



Четверта промислова революція, яка своєю метою має максимальну автоматизацію і всебічну роботизацію технологічних процесів, ставить нові задачі перед розробниками оптичних та оптико-електронних систем. Промислові роботи оснащені пристроями технічного зору – оптичними об'єктивами з фотоелектричними приймачами зображень і оперативною комп'ютерною обробкою отриманих ними зображень, рис. В.8.



*Рис. В.8.* Оптичні відеокамери в технологічних процесах та у промислових роботах

Візуальна інформація, яку надають такі штучні «очі» робота, рис. В.9, забезпечує роботам точне і надійне функціонування.



Источник: Basler

*Рис. В.9.* Фотоелектричні відеокамери – штучні «очі» робота в системах автоматизації технологічних процесів

Потужне випромінювання лазерів, сформоване і концентроване оптичними системами, дозволяє здійснювати механічну обробку матеріалів – різку, сварку, спаювання металів, різку та гравірування на склі, знищення військових об'єктів супротивника, рис. В.10 – В.13,

здійснювати складні хірургічні операції за допомогою спеціальної медичної оптичної апаратури, рис. В.14.



Рис. В.10. Лазерна фігурна різка метала

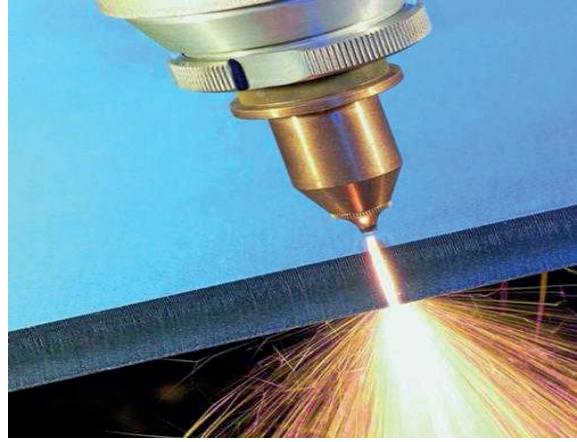


Рис. В.11. Лазерна різка скла

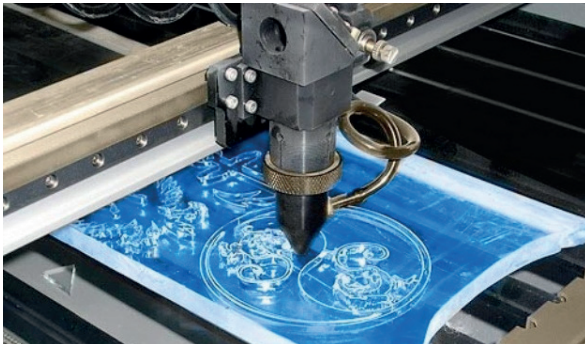


Рис. В.12. Лазерне гравірування



Рис. В.13. Лазерна гармата



Рис. В.14. Сучасний офтальмологічний мікроскоп

Наведене в цьому розділі є лише малою часткою прикладів використання оптики у сучасному світі.

Узагальнюючи вищевикладене можна впевнено стверджувати, що оптика та оптичні системи у поєднанні з мікроелектронікою

та мікропроцесорною і комп'ютерною технікою мають таке ж важливе значення для наукового і технологічного розвитку та існування людської цивілізації, яке має зоровий орган людини для її життя і працездатності. Тому у всіх промислово розвинутих країнах стабільно існує великий попит як на новітні розробки в галузі оптичного та оптико-електронного приладобудування, так і на висококваліфікованих спеціалістів у цій галузі, здатних розробляти оптичні системи новітніх технічних засобів задля забезпечення подальшого інформаційного та технологічного прогресу.

## Розділ 1. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ОПТИЧНИХ СИСТЕМ ЯК ДИСЦИПЛІНИ І ГАЛУЗІ ЗНАНЬ

Теоретичним фундаментом дисципліни «Теорія оптичних систем» є геометрична або променева оптика, яка описує закони проходження світла у вигляді променів через оптичні середовища.

Світло – процес розповсюдження електромагнітного поля у просторі. Суть цього процесу полягає в періодичній зміні у часі електричної напруженості  $\vec{E}$  електричного поля, яке відповідно викликає таку ж періодичну зміну у часі магнітної напруженості  $\vec{H}$  магнітного поля, а зміна магнітної напруженості в свою чергу породжує зміну електричної. І цей процес, як хвиля, поширюється у просторі із швидкістю  $\vec{v}$ .

Теорію існування електромагнітних хвиль у 1864 році висловив і математично описав геніальний шотландський фізик Дж. Максвел – засновник класичної електродинаміки. Рівняння Максвела, що є векторною формою математичного опису змін  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  у часі, показали, що ці вектори перпендикулярні до вектору швидкості  $\vec{v}$ . Цей вектор вказує напрям розповсюдження електромагнітної хвилі у просторі, а тому електромагнітна хвиля є поперечною відносно напрямку розповсюдження, рис. 1.1.



Джеймс Максвел,  
шотландський фізик  
(1831–1879)

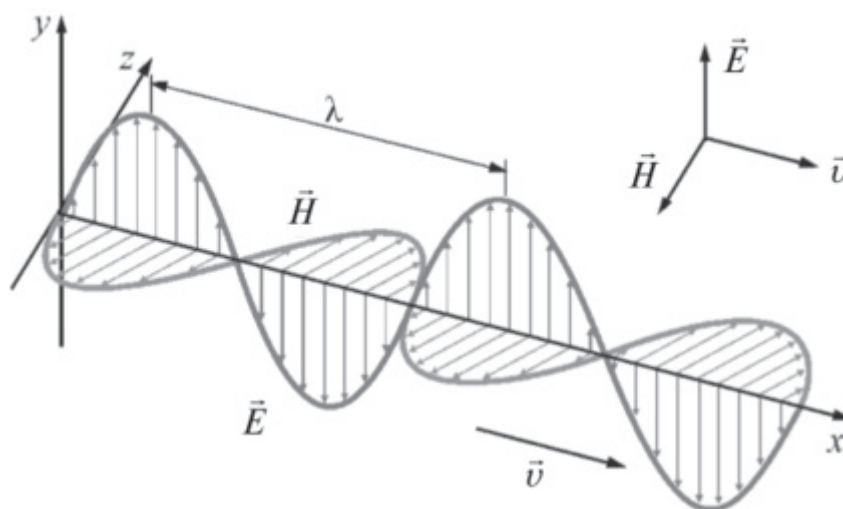


Рис. 1.1. Взаємне розташування векторів  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  та  $\vec{v}$ :  
 $\lambda$  – довжина електромагнітної хвилі



Експериментальне підтвердження факту існування електромагнітних хвиль здійснив видатний німецький фізик Г. Герц у період з 1886 по 1888 роки. Йому вдалось штучно утворити електромагнітні хвилі і прослідити їх властивості. Утворені хвилі демонстрували ті самі явища і властивості, що і світлові хвилі – відбиття, інтерференцію, дифракцію та поляризацію. Після його експериментів ніяких сумнівів щодо існування електромагнітних хвиль вже не було. Найважливішим результатом був висновок про те, що світло за своєю природою є електромагнітною хвилею.



Генріх Герц,  
німецький фізик  
(1857–1894)

Потрібно відмітити, що рівняння Максвела не є зручними для практичного використання через те, що вони описують векторні властивості електромагнітних хвиль у загальному випадку. Через те, що зміни електричного та магнітного полів теоретично можна розглядати незалежно одне від одного, від векторного опису поля можна перейти до більш простого – скалярного. Тому у переважній кількості випадків електромагнітне поле можна розглядати як скалярне. Скалярна теорія поля у математичному сенсі суттєво простіша ніж векторна, при цьому вона дозволяє точно аналізувати розповсюдження світла і процеси формування зображень оптичними системами.

У випадку *оптично-однорідних середовищ, в яких швидкість світла  $v$  скрізь однакова*, можна отримати менш складні хвильові рівняння. Із них витікають формула швидкості електромагнітних хвиль у однорідних середовищах і всі закони геометричної оптики.

Так, із хвильових диференціальних рівнянь скалярної теорії витікає, що електромагнітна хвиля у прозорому однорідному середовищі розповсюджується зі швидкістю [1]:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}}, \quad (1.1)$$

де  $\epsilon$  та  $\mu$  – діелектрична і магнітна проникність оптичного середовища, в якому розповсюджується електромагнітна хвиля;  $\epsilon_0$  та  $\mu_0$  – електрична та магнітна сталі,  $\epsilon_0 = 8,85419 \cdot 10^{-12}$  Ф/м,  $\mu_0 = 1,25664 \cdot 10^{-6}$  Гн/м.

Тоді згідно формулі (1.1) швидкість електромагнітних хвиль у вакуумі, в якому  $\epsilon = \mu = 1$ :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1},$$



Швидкість світла ще у сімнадцятому столітті вперше, але не дуже точно, експериментально встановив датський астроном О. Ремер. Набагато точніше швидкість світла була виміряна у 1920 році американським фізиком А. Майкельсоном.



*Олаф Ремер,*  
датський астроном  
(1644–1710)



*Альберт Майкельсон,*  
американський фізик  
(1852–1931)

А вже у 1970 році значення  $c$  було виміряне з відносною помилкою не більш ніж  $\pm 0.0000002\%$ . Саме таке точне значення  $c$  наведене вище.

Швидкість розповсюдження електромагнітних хвиль у вакуумі є фундаментальною фізичною сталою.

Частоту  $\nu$  гармонічних (синусоїдальних) коливань амплітуд векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  у часі визначає відстань  $\lambda$  між двома сусідніми максимумами амплітуди вектору  $\vec{E}$  або  $\vec{H}$ . Ця відстань має назву довжини хвилі. Часовий період одного коливання  $\frac{1}{\nu}$ . При відомій швидкості електромагнітної хвилі  $v$  у конкретному оптично- однорідному середовищі вона за час  $T$  пробігає відстань

$$\lambda = \frac{v}{\nu}, \quad (1.2)$$

а у вакуумі

$$\lambda = \frac{c}{\nu}. \quad (1.3)$$

Як видно із формули (1.2) одна і та ж електромагнітна хвиля з конкретною частотою коливань  $\nu$  може мати різні значення

довжини хвилі  $\lambda$  у різних оптичних середовищах через те, що швидкість  $v$ , згідно (1.1), залежить від значень  $\epsilon$  та  $\mu$  середовища, які в свою чергу також залежать від хімічного, температурного та агрегатного стану цього середовища. Зазвичай довжину хвилі електромагнітної хвилі вказують у вакуумі.

Треба відзначити, що значення  $v$  або  $\lambda$  характеризує строго монохроматичну електромагнітну хвилю. Така хвиля може існувати, якщо точкове джерело безперервно випромінює хвилю з однією частотою. Фактично реальна хвиля генерується в обмеженому інтервалі часу, через що вона втрачає монохроматичність, тобто єдине значення частоти  $\nu$ . Тому монохроматичну хвилю треба сприймати як корисну для теоретичного та практичного використання наукову абстракцію.

Оптичному діапазону електромагнітних хвиль у вакуумі умовно належить інтервал довжин  $\lambda \in (100\text{нм} \dots 1\text{мм})$ , див. рис. 1.2. Діапазон довжин електромагнітних хвиль, на які реагує зоровий орган людини, називають видимим. Він є малою часткою всього оптичного діапазону. Видимий діапазон у розгорнутому вигляді на рис. 1.2 показаний в кольорах від фіолетового (380 нм) до червоного (780 нм).

На діаграмі зліва розташоване більш короткохвильове рентгєнівське випромінювання, справа – більш довгохвильове радіовипромінювання, що починається з мікрохвиль. На рис. 1.2 нижня шкала наведена у частотах коливань  $\nu$  [ Гц ]. Гц (герц) – одне коливання в секунду.

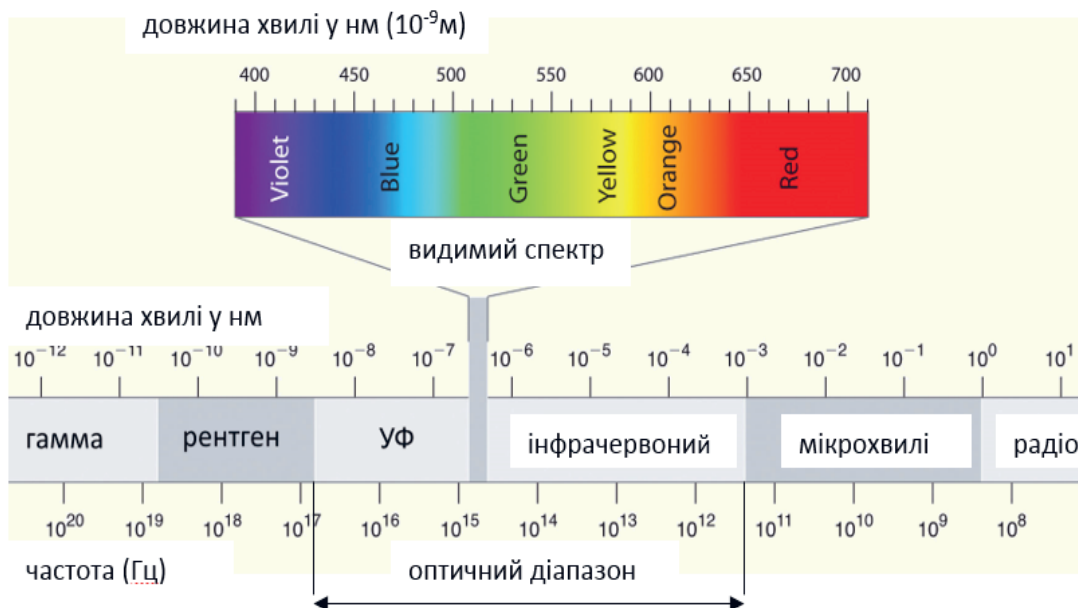


Рис. 1.2. Шкала електромагнітних хвиль, УФ – ультрафіолетовий діапазон

У вузькому розумінні світлом називають видимий оптичний діапазон, проте в науковій літературі нерідко світлом у широкому розумінні і для стислості називають весь оптичний діапазон.

Згідно теорії Максвелла електромагнітне поле виникає навколо носіїв електричного заряду, які пересуваються у просторі з прискоренням.

Випромінення електромагнітних хвиль оптичного діапазону виникає:

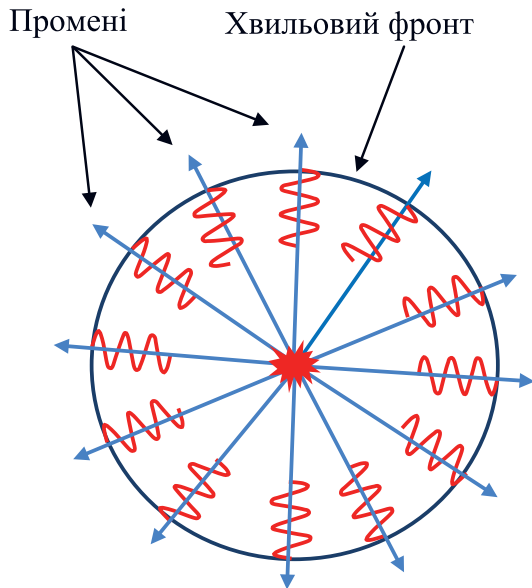
- в результаті переходу молекули чи атома з більш високого енергетичного стану в стан з меншою енергією, звільняючи частину своєї енергії, яка переходить в енергію електромагнітної хвилі;
- під час прискореного руху елементарних заряджених частинок;
- під час розпаду деяких ядер атомів;
- під час анігіляції – реакції між частинкою і античастинкою з породженням інших частинок і генерації електромагнітних хвиль.

Зважаючи на те, що розміри атомів, молекул та інших елементарних випромінювачів є набагато меншими у порівнянні з відстанями, на яких сприймаються їх електромагнітні хвилі, такі випромінювачі можна називати і називають *точковими джерелами випромінювання*.

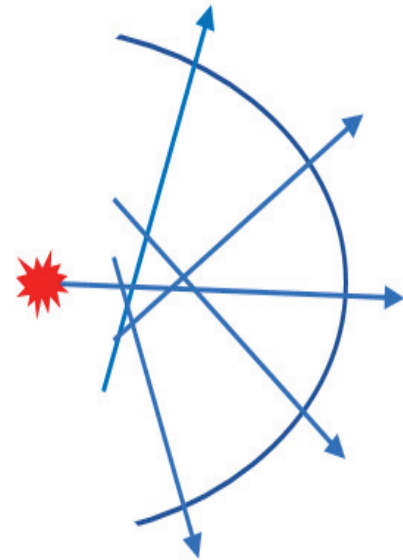
Електромагнітні хвилі від таких випромінювачів при їх розповсюдженні у оптично-однорідному середовищі, віддаляються від такого точкового джерела за кінцевий проміжок часу на однакову відстань у всіх можливих напрямках. При цьому сфера є геометричним місцем точок простору, де хвиля знаходиться в одній фазі коливання, наприклад, у першому максимумі або у початковому нульовому значенні амплітуди вектору  $\vec{E}$ , рис. 1.1. Поверхню такої сфери називають *хвильовим фронтом*, а нормалі до хвильового фронту – *променями*. Нормалі до цієї сфери у всіх точках її поверхні перетинаються в одній точці – центрі сфери, де знаходиться саме точкове джерело випромінювання. Якщо пучок променів має єдину точку їх перетину, то такий пучок називають *гомоцентричним*, рис. 1.3. Якщо ж хвильовий фронт розповсюджується у неоднорідному оптичному середовищі, в якому швидкість  $v$  не є сталою в різних точках середовища, то хвильовий фронт втрачає форму сфери, деформується, а нормалі до нього вже не перетинаються в одній точці. Пучок променів в такому випадку втрачає гомоцентричність, тобто стає *негомоцентричним*, рис. 1.4.

Порушення гомоцентричності пучків через непоборні властивості чи через недосконалість оптичних систем є негативним явищем,

яке називають **абераціями**. Аберации псувають зображення, що сформовані такими оптичними системами. Аберации роблять зображення «нерізкими» або геометрично спотвореними. Усунення негативної аберацийної дії оптичних систем є найбільш складною задачею їх проектування.



*Рис. 1.3.* Хвильовий фронт від точкового джерела електромагнітної хвилі в однорідному оптичному середовищі є сферичним, пучок променів – гомоцентричний



*Рис. 1.4.* Хвильовий фронт у неоднорідному оптичному середовищі є несферичним, пучок променів – негомоцентричний

На нескінченно великій відстані від точкового джерела радіус кривизни хвильового фронту стає нескінченним, а фронт набуває пласкої форми. Всі нормалі до плаского фронту – промені при цьому становляться паралельними, а значить мають єдину точку перетину, що знаходиться на нескінченності в точковому джерелі випромінювання. Тому пучок паралельних променів є гомоцентричним, з центром їх перетину на нескінченності, рис. 1.5.

Оптичні системи призначені так формувати хвильові fronti світлових хвиль, щоб виконувалися основні та допоміжні функції технічного засобу, в якому працюють ці системи. Тому при аналізі чи синтезі оптичних систем оперують інформацією про геометричний стан чи форму хвильових фронтів. Використання для цього хвильових рівнянь скалярної теорії електромагнітних хвиль не є раціональним. По-перше, ці рівняння дають інформацію про амплітуду, фазу, положення у просторі площини поляризації хвилі. Ця інформація у переважній кількості випадків є надлишковою і тому є не потрібною.

По-друге, використання скалярної теорії на практиці передбачає у загальному випадку розв'язання диференціальних рівнянь, що суттєво ускладнює розв'язок навіть простих задач, спрямованих на пошук форми хвильових фронтів після проходження ними системи оптичних середовищ.

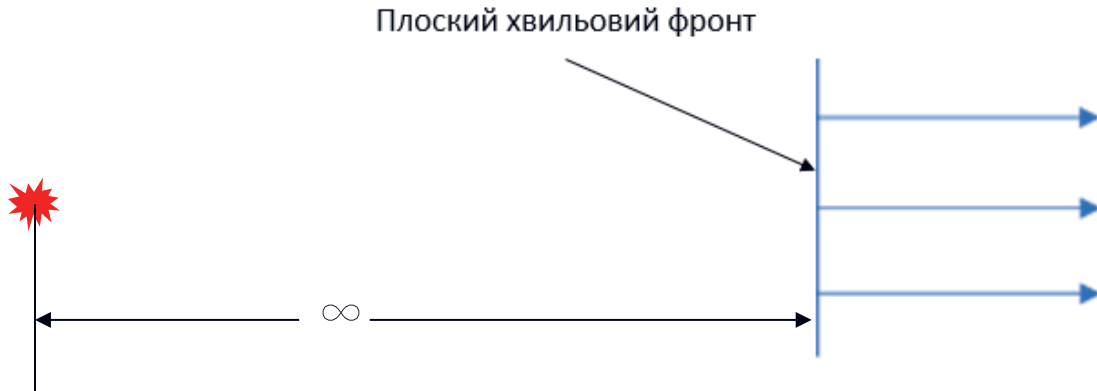


Рис. 1.5. Пучок паралельних променів – нормалей до плаского хвильового фронту

Найбільш раціональним методом відтворення форми хвильових фронтів, що розповсюджуються в системах однорідних або неоднорідних оптичних середовищ, є пошук тільки положення вектору  $\vec{v}$  в окремих точках хвильового фронту. Цей вектор вказує напрям променю у кожній точці простору і надає можливість знаходити траєкторію променю в системі оптичних середовищ.

**Використання такої математичної абстракції як світловий промінь дозволило розробити розділ оптики з назвою геометрична оптика, що тепер слугує теоретичним фундаментом дисципліни «Теорія оптичних систем». Безперобільшення можна стверджувати, що завдяки існуванню теоретично розвинутої геометричної оптики та використанню на практиці її основних законів створено майже весь спектр оптичних приладів та систем.**

Геометричну оптику також називають променевою оптикою.

Лише при аналізі тонких структур зображень, сформованих оптичними системами, використовують повний опис електромагнітної світлової хвилі, яку дає скалярна теорія і, яка дозволяє враховувати при формуванні зображень вплив на їх вигляд дифракції, інтерференції та поляризації, тобто у повній мірі враховувати хвильову природу світла.

Проте розробка оптичних систем не обмежується лише використанням геометричних параметрів світлових хвиль. Значна увага



приділяється також енергетиці світлових хвиль та їх потоків. Цим обумовлюється наявність в дисципліні «Теорія оптичних систем» розділу, присвяченому енергетиці оптичних систем, а точніше вивченню властивостей оптичних систем щодо їх впливу на розподіл світлової енергії в оптичних зображеннях.

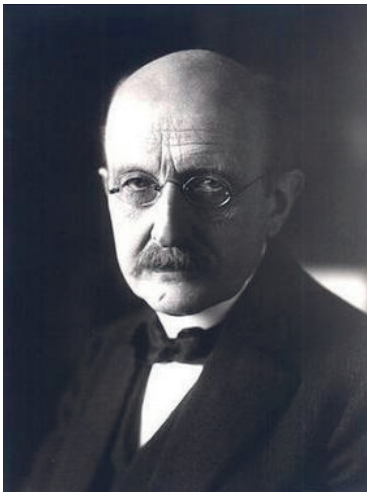
Пояснення природи виникнення та існування енергії в світлових хвилях дає квантова теорія. Так німецький фізик Макс Планк сформулював гіпотезу про те, що випромінювання електромагнітних хвиль атомами чи молекулами здійснюється не безперервно, а за обмежений період часу і порціями енергії, тобто квантами, які отримали потім назву фотонів. Згідно його теорії енергія кожного кванта [1]:

$$E = h\nu, \quad (1.4)$$

де  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – стала Планка.

На цьому факті базується корпускулярна теорія світла.

Проте взаємодія фотонів утворює у просторі такий розподіл енергії, який є характерним при взаємодії хвиль, тобто цей розподіл не протирічить хвильовій теорії світла.



*Макс Планк,  
німецький фізик  
(1858–1947)*

Оптичні явища, що підтверджують хвильову природу світла – дифракція, інтерференція, поляризація, детально вивчаються у дисципліні «Хвильова оптика».

Факт існування корпускулярних і хвильових проявів світлового випромінювання отримав назву корпускулярно-хвильового дуалізму.

Наприкінці цього розділу можна зробити узагальнюючий висновок щодо значення для практичного використання знань про корпускулярні та хвильові прояви оптичного випромінювання при аналізі та синтезі оптичних систем оптичних приладів.

Для аналізу процесу формування зображень об'єктів оптичними системами принципове значення має напрям розповсюдження хвиль – напрям вектору їх швидкості. Іншими словами такий аналіз раціонально здійснювати на основі положень геометричної або променевої оптики. Саме напрям і траєкторії пучків променів, що надходять в оптичну систему від джерел випромінювання, вказують на те, як проходить світло через оптичні системи і що світло утворює на виході з системи. Це дає можливість

прогнозувати вигляд світлового образу об'єкту, який називають зображенням об'єкту. Для переважної кількості оптичних систем формування зображень об'єктів є основною функцією. Саме її реалізація дозволяє отримувати інформацію про об'єкти, недосяжну для неозброєного ока, а також дає можливість зберігати візуальну інформацію про об'єкти на відповідних носіях чи використовувати її в автоматизованих системах керування технічними засобами.

Для кількісної оцінки електричної чи хімічної реакції фотоприймачів на оптичне випромінення, що концентрується на їхніх світлочутливих поверхнях, або при розрахунках просторової щільності енергії світла на поверхні матеріалів з метою їх механічної обробки, потрібно кількісно оцінювати енергію електромагнітних хвиль, тобто кількість і просторову щільність фотонів та їх сумарну енергетичну дію. В таких випадках для проведення так званих енергетичних розрахунків оптичних систем важливе теоретичне і практичне значення має корпускулярна чи фотонна теорія електромагнітних хвиль оптичного діапазону.

Проте дисципліна «Теорія оптичних систем» все ж починається з вивчення законів геометричної оптики, тобто законів розповсюдження променів у оптичних середовищах – природних чи штучно створених. Знання та практичне використання цих законів дозволяє в кінцевому результаті не тільки мати уяву про те, як оптичними системами утворюються зображення та від чого залежить їх якість, але й дають відповідь на питання, що треба робити для отримання зображень відповідної якості і енергетичного наповнення.

Першим кроком до вивчення законів геометричної оптики є ознайомлення з правилами знаків, без знання яких неможна правильно сприймати матеріал дисципліни та використовувати його при розв'язанні практичних задач.

## РОЗДІЛ 2. ПРАВИЛА ЗНАКІВ

В геометричній оптиці та в її прикладних розділах для визначення взаємного розташування у просторі спеціальних точок, ліній і площин, використовуються відрізки та кути. Наприклад, на осі існує точка А відносно якої на відстані 100 мм знаходиться точка Б (рис. 2.1).



Рис. 2.1. Взаємне розміщення точок А та Б у просторі

Якщо не вказано знак відрізка 100 мм, то неможливо знати де знаходиться точка Б відносно точки А – зліва чи справа?

Наприклад, відомо, що промінь нахилений до оптичної осі на кут  $30^\circ$ . Без відомості про знак цього кута також неможливо визначити, як нахилений промінь до осі – згори донизу чи навпаки знизу догори (рис. 2.2).

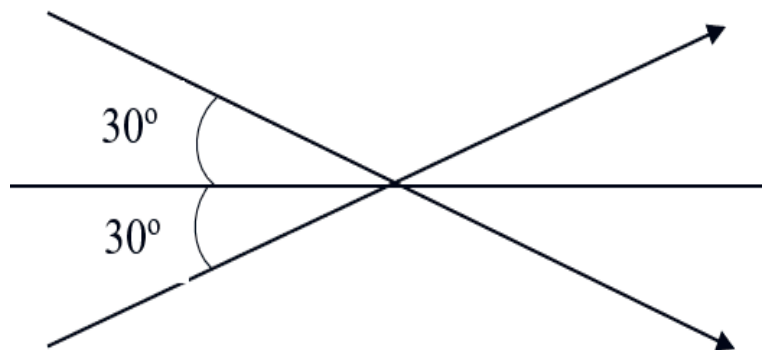


Рис. 2.2. Варіанти нахилу променя

Тому довжина кожного відрізка або величина кута повинні мати не тільки абсолютне значення, але й знак, який вказує напрямок руху точки чи напрямок обертання будь якої лінії. Проте, якщо кожен автор подібного рисунку буде на свій розум присвоювати знаки відрізкам та кутам, то до кожного такого рисунку потрібно бути прикладати інструкцію з правилом присвоєння знаків до відрізків та кутів. Без такої інструкції буде неможливим правильно робити розрахунки за формулами, які були складені з використанням таких рисунків, на яких знаки відрізків і кутів були призначені вільно, без правил.

Тому у галузі геометричної оптики для позначень знаків кутів та відрізків встановлюється єдиний порядок. Це є настільки важли-



вим, що такий порядок встановлюється державними або міжнародними стандартом.

В Україні також існує такий стандарт ДСТУ 2756-94 Геометрична оптика. Терміни, визначення та літерні позначення основних величин.

Виконання вимог вказаного стандарту є обов'язковим для всіх, хто використовує геометричну оптику в своїй роботі.

## 2.1. Правила знаків відрізків

Відрізки поділяють на дві групи. До першої належать горизонтальні відрізки, а до другої – вертикальні.

Кожен відрізок має початкову точку (від якої він відраховується), та кінцеву точку, де він закінчується.

### Правила знаків горизонтальних відрізків

Горизонтальному відрізку присвоюється знак  $+$ , якщо з початкової точки відрізка до його кінцевої точки **рух здійснюється зліва направо** (рис. 2.3).

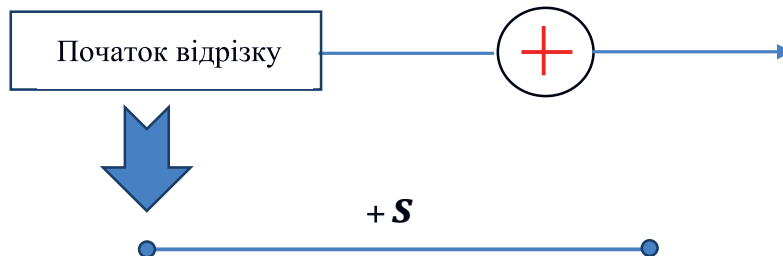


Рис. 2.3. Додатний напрямок горизонтального руху

Горизонтальному відрізку присвоюється знак  $-$ , якщо з початкової точки відрізка до його кінцевої точки **рух здійснюється справа наліво** (рис. 2.4).

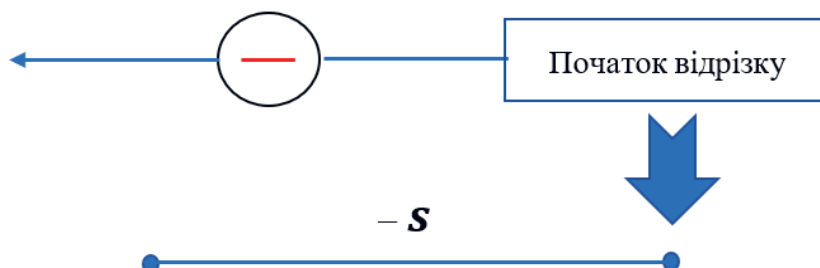


Рис. 2.4. Від'ємний напрямок горизонтального руху

З огляду на це правило точки та площини об'єктів, або джерела світла рекомендується розташовувати зліва від оптичної системи для того, щоб промені проходили через систему у додатному напрямку.

Що є точками, між якими знаходяться горизонтальні відрізки?

У переважній кількості практичних випадків такими точками є :

1)  $O_k$  – осьові точки оптичних поверхонь (де поверхня перетинається з оптичною віссю), індекс  $k$  означає номер поверхні в оптичній системі;

2)  $H, H'$  – головні точки оптичної системи, передня та задня відповідно;

3)  $N, N'$  – вузлові точки оптичної системи, передня та задня відповідно;

4)  $F, F'$  – точки фокусів оптичної системи, передня та задня відповідно;

5)  $C_k$  – центр сферичної поверхні з номером  $k$  ;

6)  $A_k$  – осьова точки, що є об'єктом для оптичної поверхні з номером  $k$  ;

7)  $A'_k$  – осьова точка, що є зображенням точки  $A_k$ , сформоване поверхнею з номером  $k$  .

У тому випадку, коли відрізок у якості початкової та кінцевої точки має ті, що присутні у наведеному списку, то початковою вважається та, що займає у списку вищий рядок. Наприклад, у відрізок  $A_k O_k$  початковою слід вважати точку  $O_k$ , тому що вона у списку точок зустрічається раніше (має вищий «ранг»).

Є відрізки, які обмежені точками одного «рангу», наприклад, відрізок  $O_k O_{k+1}$ . Тоді початковою є та, що має менше значення індексу  $k$ , тобто в оптичній системі промінь з нею перетинається раніше. У наведеному прикладі це точка  $O_k$  (рис. 2.5).

### **Знаки вертикальних відрізків**

Знаки вертикальних відрізків визначаються з урахуванням додатного чи від'ємного вертикального руху із початкової точки відрізка до кінцевої.

Додатним напрямком є рух знизу догори. Від'ємним напрямком є рух зверху вниз, рис. 2.5.

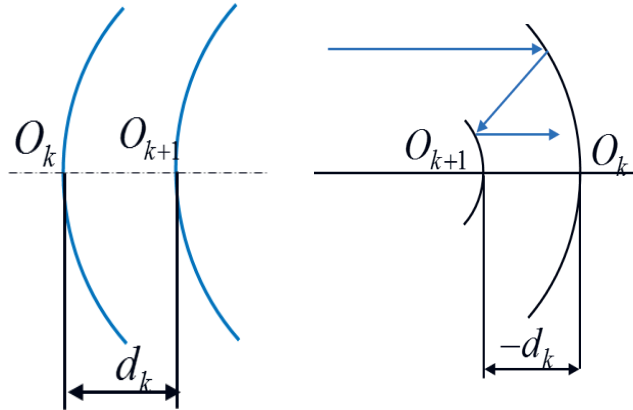


Рис. 2.5. До визначення знаків осьової відстані між оптичними поверхнями

### Правила знаків вертикальних відрізків

Вертикальному відрізку присвоюється знак  $+$ , якщо з початкової точки відрізка до його кінцевої точки **рух здійснюється знизу догори** (рис. 2.5).

Вертикальному відрізку присвоюється знак  $-$ , якщо з початкової точки відрізка до його кінцевої точки **рух здійснюється зверху вниз** (рис. 2.5).

У переважній кількості практичних випадків початкова точка вертикального відрізка знаходиться на оптичній осі системи центрованих оптичних поверхонь.

На рис. 2.6 показані відрізки – висоти променя на двох сусідніх оптичних поверхнях. Початок обох відрізків співпадає з оптичною віссю, тому відрізок  $h_k$  – додатний, бо рух від його початку до кінця є догори, тобто має додатний напрямок, а відрізок  $h_{k+1}$  є від'ємним, бо рух з початку до кінця відрізка йде у зверху вниз – у від'ємному напрямку.

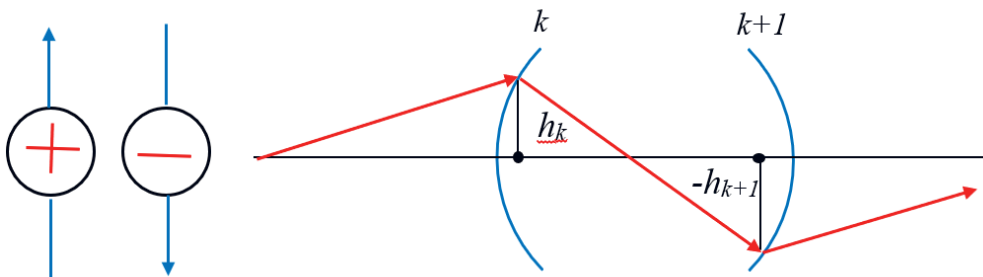


Рис. 2.6. Додатний та від'ємний напрямки вертикального руху, приклади додатного та від'ємного вертикальних відрізків

## 2.2. Правила знаків кутів

Кути в геометричній оптиці утворюються між лініями, якими є промені, нормалі до точок на оптичних поверхнях, оптична вісь центрованої оптичної системи та інші допоміжні лінії.

Кожен кут має початкову і кінцеву лінії. Якщо від початкової лінії до кінцевої обернення навколо вершини кута здійснюється за часовою стрілкою, то кут має додатний знак, якщо проти обернення часової стрілки, то у кута знак від'ємний (рис. 2.7).

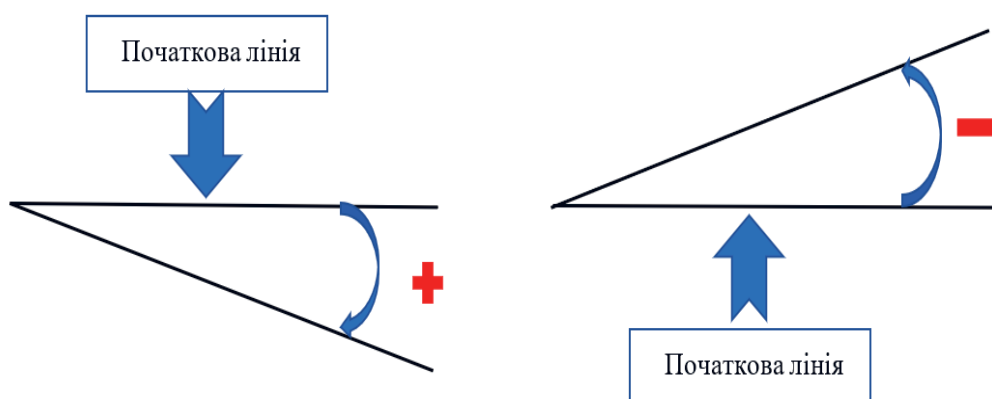


Рис. 2.7. До правила знаків кутів

Для визначення яка з двох ліній кута є початковою, тобто має вищий «ранг», можна використати наступний список ліній:

- 1) оптична вісь;
- 2) нормаль до оптичної поверхні;
- 3) промінь.

Лінія, що знаходиться в цьому списку вище визначається як початкова.

## 2.3. Приклади використання правила знаків

Правила знаків на практиці використовують у наступних типових випадках:

- 1) виготовлення рисунку, який далі буде використовуватися для складання рівнянь відрізків чи рівнянь кутів, які в свою чергу потім будуть використовуватися для отримання робочих розрахункових формул;

- 2) складання рівнянь відрізків, рівнянь кутів;

- 3) підготовка вихідних даних про відрізки та кути для розрахунків за формулами;

4) складання матриці конструктивних параметрів оптичної системи;

5) створення ескізу оптичної системи за даними матриці конструктивних параметрів.

### 2.3.1. Виготовлення рисунку

**Завдання 2.1.** Складіть з використанням правил знаків рисунок з ходом променя через оптичну сферичну поверхню з номером  $k$ , яка розділяє два різних оптичних середовища. Відомо, що промінь надходить в сферичну поверхню з радіусом  $r_k = 50$  мм від об'єктної точки  $A_k$  розташованої на оптичній осі на відстані  $s_k = -100$  мм від осьової точки  $O_k$  сферичної поверхні. Промінь на вході в поверхню має нахил до оптичної осі під кутом  $\sigma_k = -25^\circ$ . Після заломлення на сферичній поверхні промінь перетинає оптичну вісь на відстані  $s'_k = 120$  мм під кутом  $\sigma'_k = 28^\circ$ .

**Розв'язання.** На рис. 2.8 показано рисунок, складений згідно завданню та з використанням правил знаків для відрізків і кутів. Крім того на рисунку використані стандартні буквені позначення відрізків і кутів, регламентовані ДСТУ 2756-94. Знак ' біля буквених позначень точок, відрізків, кутів означає, що вони відображають елементи простору зображень після проходження променю через оптичну поверхню або системи поверхонь. Всі позначення без знаку ' мають відношення до елементів простору об'єктів. Більш детальні пояснення термінів простір об'єктів та простір зображень наведені в Розділі 4.

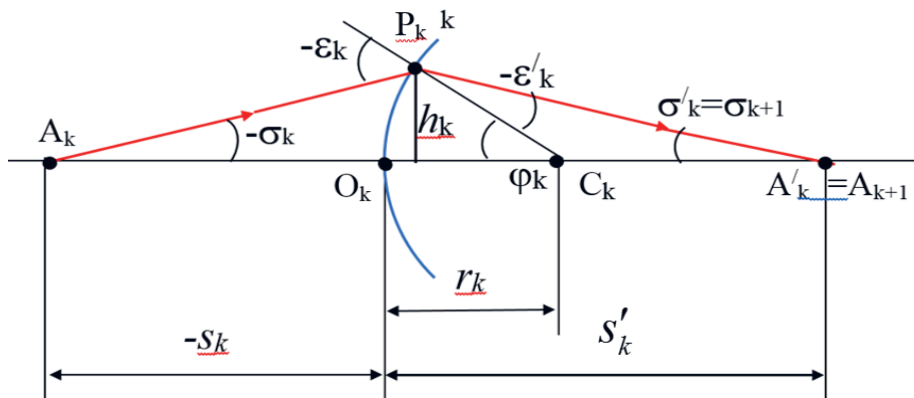


Рис. 2.8. До завдання 2.1 – складання рисунку з урахуванням правил знаків

Початком радіуса кривизни оптичної поверхні є осьова точка  $O_k$  оптичної поверхні. Кінцева точки радіуса  $C_k$  – центр кривизни поверхні. Так як рух з початкової точки радіуса до його кінцевої точки здійснюється у додатному напрямку, то радіус  $r_k$  має додатний знак. Знак  $+$  на рисунках не проставляють. Опукла оптична поверхня має додатний радіус, а увігнута – від’ємний (рис. 2.9).



Рис. 2.9. Знаки радіусів сферичних опуклої та увігнутої поверхонь

### 2.3.2. Складання рівнянь відрізків, рівнянь кутів

**Завдання 2.2.** Використовуючи рис. 2.8 складіть рівняння для відрізка  $A_k A_{k+1}$  через відрізки  $s_k$ ,  $s'_k$  і з цього рівняння виведіть формулу для розрахунку відрізка  $s'_k$ .

**Розв'язання.** При складанні рівняння відрізків використовують позначення відрізків з їх знаками, проставленими на рисунку:

$$A_k A_{k+1} = -s_k + s'_k,$$

звідки

$$s'_k = A_k A_{k+1} + s_k.$$

**Завдання 2.3.** Використовуючи рис. 2.8 складіть рівняння, яке поєднує кути  $\sigma_k$ ,  $\varepsilon_k$ ,  $\varphi_k$  і з цього рівняння отримайте формулу для розрахунку кута  $\varphi_k$

**Розв'язання.** Згідно теореми про зовнішній кут трикутника, який дорівнює сумі кутів не прилеглих до зовнішнього, маємо рівняння відносно трикутника  $A_k P_k C_k$ .

При складанні рівняння кутів використовують позначення кутів з їх знаками, проставленими на рисунку:

$$-\varepsilon_k = -\sigma_k + \varphi_k,$$

звідки

$$\varphi_k = \sigma_k - \varepsilon_k.$$

### 2.3.3. Підготовка вихідних даних про відрізки та кути для розрахунків за формулами

**Завдання 2.4.** Підготувати вихідні дані до відрізків  $s_k$ ,  $s'_k$  та розрахувати довжину відрізка  $A_k A_{k+1}$ .

**Розв'язання.** Дані до відрізків повинні відображати їх величини з їх знаками, проставленими на рисунку. Згідно рис. 2.8

$$s_k = -100 \text{ мм}, s'_k = 120 \text{ мм},$$

тому

$$A_k A_{k+1} = -s_k + s'_k = -(-100) + 120 = 220 \text{ мм}.$$

**Завдання 2.5.** Підготувати вихідні дані про кути  $\sigma_k$ ,  $\varepsilon_k$  та розрахувати значення кута  $\varphi_k$ .

**Розв'язання.** Дані про кути повинні відображати їх величини з їх знаками, проставленими на рисунку. Згідно рис. 2.6

$$\sigma_k = -25^\circ, \varepsilon_k = -70^\circ,$$

тому

$$\varphi_k = \sigma_k - \varepsilon_k = -25^\circ - (-70^\circ) = 45^\circ.$$

### 2.3.4. Складання матриці конструктивних параметрів оптичної системи

Конструктивними параметрами оптичної системи є:

$r_k$  – радіуси кривизни оптичних поверхонь на оптичній осі, індекс;

$k$  означає номер поверхні від першого до останнього,  $k \in [1, 2, 3, \dots, p]$ ,  $p$  – номер останньої поверхні оптичної системи;

$d_k$  – відстань вздовж оптичної осі між двома сусідніми оптичними поверхнями з номерами  $k$  і  $k+1$ , всього таких відстаней в оптичній системі  $p-1$ ;

$n_k$  – показник заломлення оптичного середовища з номером  $k$ , всього таких показників в оптичній системі.

Якщо в системі присутні асферичні оптичні поверхні, то до таких поверхонь ще додаються коефіцієнти асферики, які теж є конструктивними параметрами оптичної системи.

Конструктивні параметри оптичної системи прийнято записувати у вигляді матриці з порядком розташування даних про  $r_k$ ,  $d_k$ ,  $n_k$ , показаним в табл. 2.1. Дані про осьову товщину оптичного середовища і показник заломлення цього середовища повинні бути в одній строчці, яка розташована між строками даних про радіуси кривизни поверхонь, серед яких знаходиться оптичне середовище.

Таблиця 2.1.

**Матриця конструктивних параметрів оптичної системи**

		$n_1 =$
$r_1 =$		
	$d_1 =$	$n_2 =$
$r_2 =$		
	$d_2 =$	$n_3 =$
$r_3 =$		
		$n_4 =$
.....	.....	.....
.....	.....	.....
	$d_{p-1} =$	$n_p =$
$r_p =$		
		$n_{p+1} =$

**Завдання 2.6.** На рис. 2.10 показана лінзова оптична система. Абсолютні значення її конструктивних параметрів відомі. Потрібно скласти матрицю конструктивних параметрів цієї системи з дотриманням правил знаків для відрізків.

**Розв'язання.** З урахуванням знаків радіусів опуклих та увігнутих оптичних поверхонь (рис. 2.9) та правила визначення знаків відрізків одного «рангу» (рис. 2.5) матриця конструктивних параметрів оптичної системи, показана на рис. 2.10.

В представленій матриці повітряні оптичні середовища мають показник заломлення  $n_k = 1$ , неповітряні середовища, наприклад оптичне скло, мають показники заломлення  $n_k > 1$ .



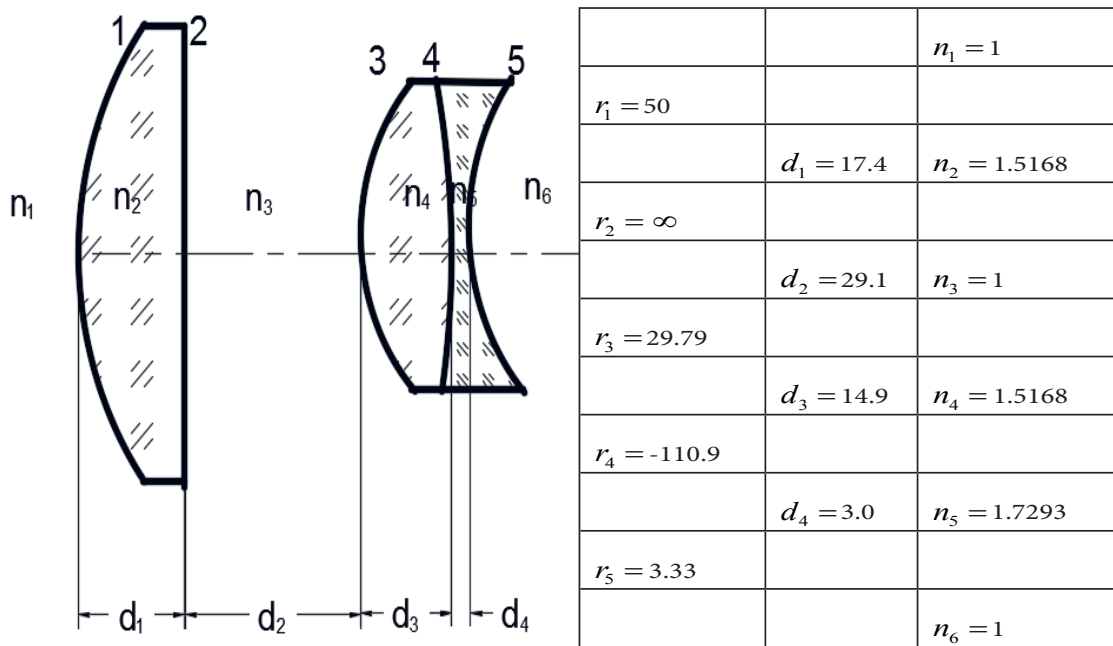


Рис. 2.10. Лінзова оптична система до завдання 2.6

**Завдання 2.7.** На рис. 2.11 показана дзеркальна оптична система. Абсолютні значення її конструктивних параметрів відомі. Потрібно скласти матрицю конструктивних параметрів цієї системи з дотриманням правил знаків для відрізків.

**Розв'язання.** На рис. 2.11 наведена матриця конструктивних параметрів, яка відповідає заданій оптичній системі.

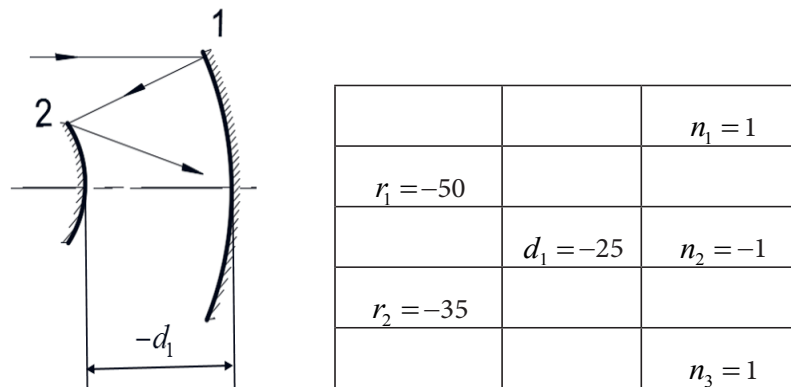


Рис. 2.11. Дзеркальна оптична система до завдання 2.7 та матриця її конструктивних параметрів

Від'ємні значення радіусів мають місце тому, що обидві поверхні є увігнутими, тобто центри їх сферичних поверхонь знаходяться зліва від самих поверхонь.

Осьова відстань також має від'ємне значення в наслідок того, що поверхня 2 знаходиться зліва від поверхні 1.

Дзеркальна система знаходиться у повітрі, тому всі три показники заломлення мають абсолютне значення  $n = 1$ , але протилежні знаки до та після дзеркальної поверхні.

В наступному розділі, в п. 3.3, буде показано, що відбиття променя є окремим випадком заломлення при умові, що показники заломлення до та після відбиваючої поверхні мають однакові абсолютні значення, але протилежні знаки.

**Отже, якщо  $n_{k+1} = -n_k$ , то оптична поверхня з номером  $k$  є дзеркальною (відбивальною).**

**Завдання 2.8.** На рис. 2.12 показана оптична система дзеркала Манжеса. Абсолютні значення її конструктивних параметрів відомі. Потрібно скласти матрицю конструктивних параметрів системи з дотриманням правил знаків для відрізків.

**Розв'язання.** Матриця конструктивних параметрів дзеркала Манжеса показана на рис. 2.12. Саме дзеркало виготовлене на базі меніскової лінзи. Друга поверхня лінзи є дзеркальною. Перша і третя поверхні є заломлюючими і співпадають, тому мають однакові радіуси. Всі поверхні лінзи увігнуті, через що їх радіуси від'ємні. Після відбиття від другої поверхні промінь знову попадає у середовище матеріалу, з якого виготовлена лінза. Тому абсолютне значення показника заломлення залишається тим самим, але його знак змінюється на протилежний. Поверхня 3 є заломлюючою і розділяє оптичний матеріал деталі і повітря. **На поверхнях, що заломлюють промені, знак показників до і після поверхні залишаються однаковими.** Тому показник заломлення четвертого середовища (повітря)  $n_4$  такий самий як і у  $n_3$ .

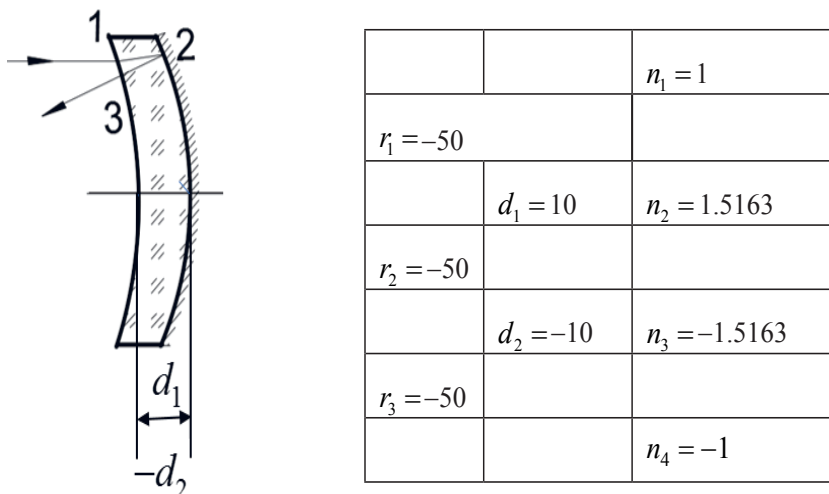


Рис. 2.12. До розв'язку завдання 2.8

Відтворення ескізу оптичної системи за даними матриці конструктивних параметрів

В інформаційних джерелах оптичну систему іноді представляють тільки матрицею її конструктивних параметрів. При відтворенні ескізу такої системи обов'язковим є використання правила знаків.

**Завдання 2.9.** Відтворіть ескіз оптичної системи з використанням заданої матриці конструктивних параметрів:

			$n_1 = 1$
$\varnothing_1 = 24$	$r_1 = -33.5$		
		$d_1 = 2$	$n_2 = 1.5168$
$\varnothing_2 = 24$	$r_2 = -34.67$		
		$d_2 = 60.6$	$n_3 = 1$
$\varnothing_3 = 24$	$r_3 = -159.22$		
		$d_3 = -59$	$n_4 = -1$
$\varnothing_4 = 9$	$r_4 = -59.81$		
			$n_5 = 1$

**Розв'язання.** На рис. 2.13 показана оптична система, складена відповідно до вихідних даних завдання 2.9.



Рис. 2.13. До розв'язку завдання 2.9

## РОЗДІЛ 3. ЗАКони ГЕОМЕТРИЧНОЇ ОПТИКИ

Дія оптичних систем базується на використанні закономірностей ходу променів в оптичних середовищах – оптичних матеріалах, з яких виготовлені оптичні деталі – лінзи, призми, пластини, та інше. Спеціальний заданий хід променів в них є головним фактором, що забезпечує виконання оптичною системою основних та допоміжних функцій оптичного приладу. Уява про хід променів в оптичних середовищах дає можливість розробникам оптичних приладів здійснювати як аналіз, так і синтез оптичних систем. Тому знання законів розповсюдження променів в оптичних середовищах є необхідною умовою для створення оптичних систем і основною темою прикладної геометричної оптики.

Закони геометричної оптики дозволяють точно визначати хід променів в оптичних середовищах, які розділяються на два типи – однорідні та неоднорідні.

**Оптично однорідними** називають ті **середовища**, в яких швидкість  $v$  розповсюдження електромагнітних хвиль оптичного діапазону у всіх точках та на всіх напрямках є однаковою.

**Оптично неоднорідними** називають **середовища**, в яких навпаки вказана швидкість  $v$  є функцією просторових координат  $[x, y, z]$ , тобто в різних точках середовища і в різних напрямках вона не є сталою величиною.

В оптичних приладах оптичні системи складаються із оптичних деталей, які виготовляють із оптичних матеріалів обох типів. Переважна більшість цих деталей виробляють із практично однорідних матеріалів. Але при цьому треба розуміти, що абсолютна однорідність оптичних матеріалів є недосяжною, вона може бути лише теоретичною. Степінь однорідності штучних оптичних матеріалів залежить від досконалості технології їх виробництва, яка в дійсний час є достатньо розвинутою. Проте в сучасному оптичному приладобудуванні наростає тенденція використання оптичних деталей виготовлених саме із штучних неоднорідних матеріалів. Вони мають ряд важливих переваг перед традиційними оптично однорідними матеріалами, чим і пояснюється їх привабливість.

Задача даного розділу полягає у вивченні законів геометричної оптики та у придбанні знань, умінь і навичок необхідних для знаходження ходу променів в будь-яких оптичних середовищах – однорідних і неоднорідних.

### 3.1. Принцип Ферма

Основоположним принципом, з якого безпосередньо витікають всі закони геометричної оптики, є принцип Ферма. П'єр Ферма, французький математик, вважав, що в основі його оптичного принципу лежить найбільш загальний метафізичний принцип економії в природі, а саме: природа діє по найкоротшому шляху.

Згідно принципу Ферма *серед всіх можливих шляхів між двома точками  $A$  і  $B$  в оптичному середовищі світловий промінь обирає таку траєкторію, яка потребує найменшого часу проходження.*

Цей принцип у 1662 році був сформульований П. Ферма.

Якщо оптичне середовище є оптично однорідним, тобто швидкість світла  $V$  скрізь однакова, то найменшого часу  $t_{AB} = \frac{AB}{V}$ , потребує траєкторія у вигляді прямої лінії, яка проходить через вказані точки, бо прямий відрізок  $AB$  між вказаними точками має найкоротшу довжину серед всіх можливих траєкторій. З цього витікає перший закон геометричної оптики:



П'єр Ферма,  
французький  
математик  
(1601–1655)

---

#### Промені в оптично однорідних середовищах розповсюджуються по прямих лініях

---

Потрібно відмітити, що закон прямолінійного розповсюдження променів порушується явищем дифракції через хвильову природу світла, яке призводить до відхилення променів на межі прозорих і непрозорих ділянок простору. Але, якщо вважати довжини світлових хвиль  $\lambda$  наближеними до нуля, то явищем дифракції можна нехтувати. На цьому припущенні й базується геометрична, або променева оптика.

Розглянемо випадок, коли оптичне середовище не є однорідним, тобто у кожній точці середовища швидкість світла  $V$  є функцією просторових координат  $V = V(x, y, z)$ . В цьому середовищі мають місце дві точки: точка  $A$  з координатами  $[x_A, y_A, z_A]$  та точка  $B$  з координатами  $[x_B, y_B, z_B]$ . Потрібно визначити траєкторію променя, який виходить з точки  $A$  і проходить через точку  $B$ . Згідно принципу Фер-

ма промінь, що проходить через ці точки, обирає траєкторію, яка потребує найменшого часу проходження  $(t_{AB})_{\min}$ . На рис. 3.1 показана можлива траєкторія променю між точками А і Б.

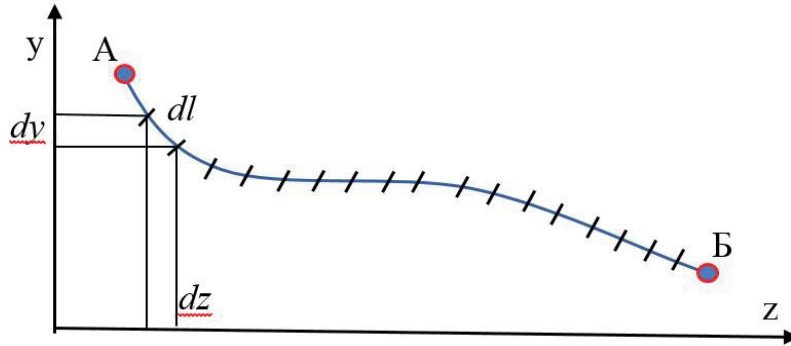


Рис. 3.1. Траєкторія променю в оптичному середовищі

Для пошуку значення  $(t_{AB})_{\min}$  траєкторію променю поділимо на такі малі ділянки, в кожній з яких швидкість світла будемо вважати незмінною. Тоді час проходження променем траєкторії АБ:

$$t_{AB} = \sum_i \frac{\Delta l_i}{V_i}, \quad (3.1)$$

де  $\Delta l_i$  – довжина ділянки з номером  $i$ ,  $V_i$  – швидкість світла на ділянці  $\Delta l_i$ .

Якщо праву і ліву частини рівняння (3.1) помножити на  $c$  – швидкість світла у вакуумі, то у правій частині рівняння

$$c \cdot t_{AB} = \sum_i \frac{c}{V_i} \Delta l_i = \sum_i n_i \Delta l_i \quad (3.2)$$

з'являється параметр  $\frac{c}{V} = n_{\text{абс}}$ , який називають **показником заломлення**

оптичного середовища на ділянці траєкторії з номером  $i$ , а сума  $\sum_i n_i \Delta l_i$  має назву **оптичної довжини** траєкторії променю.

Ліва частина рівняння (3.2) – це дистанція, яку проходить світло у вакуумі за час  $t_{AB}$ . Найбільша швидкість світла має місце лише у вакуумі, тому показник заломлення  $n$ , як відношення швидкості світла у вакуумі до швидкості світла у оптичному середовищі, завжди більше одиниці. Значення  $\frac{c}{V} = n_{\text{абс}}$  є **абсолютним показником заломлення**

оптичного середовища. На практиці вимірювання показників заломлення оптичних матеріалів здійснюють в атмосферному повітрі і на поверхні Землі. Швидкість світла у повітрі хоча дуже мало,



але все ж є меншою ніж швидкість світла у вакуумі. Дійсно, абсолютний показник заломлення повітря має значення

$$n_{\text{пов}} = \frac{c}{V_{\text{пов}}} \approx 1.0003,$$

яке мало відрізняється від показника заломлення вакууму – одиниці.

Тому показники заломлення оптичних матеріалів, наведені у науковій, технічній та у довідковій літературі, визначені за формулою

$$\frac{V_{\text{пов}}}{V} = n_{\text{відн}}, \quad (3.3)$$

де  $V_{\text{пов}}$  – швидкість світла у повітрі при температурі 20 С<sub>о</sub> та при нормальному атмосферному тиску у поверхні Землі  $P_{\text{атм}} = 760$  мм. рт. ст. Через це показники заломлення, визначені за формулою (3.3) відносно атмосферного повітря, називають **відносними показниками заломлення**.

У найбільш вживаного оптичного матеріалу – оптичного скла відносний показник заломлення  $n$  знаходиться в інтервалі 1.45–2.0, а у штучного кристалу германію він навіть досягає значення 4.

Отже згідно рівняння (3.2) час проходження променя із точки А в точку Б має вираз:

$$t_{AB} = \frac{\sum_i n_i \Delta l_i}{c}.$$

Зрозуміло, що  $t_{AB}$  отримує мінімальне значення, коли мінімальне значення буде мати чисельник  $\sum_i n_i \Delta l_i = L_{AB}$  – оптична довжина

траєкторії променя між точками А та Б. Тому принцип Ферма, у термінології геометричної оптики виглядає так:

**Проміні в оптично неоднорідних середовищах розповсюджуються за траєкторіями, які мають мінімальну оптичну довжину**

При нескінченно малих довжинах ділянок  $\Delta l_i \rightarrow dl_i$  оптична довжина траєкторії розраховується за допомогою криволінійного інтегралу:

$$L_{AB} = \int_{(AB)} n(x, y, z) dl, \quad (3.4)$$

в якому  $n(x, y, z)$  – функція розподілу у тривимірному просторі показника заломлення неоднорідного оптичного середовища;

$$dl = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt, \quad (3.5)$$

$x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  – функції, що описують траєкторію променя у параметричному вигляді через допоміжний параметр  $t$  ( $t$  не має ніякого відношення до часу). Тоді математична форма принципу Ферма має вигляд:

$$L_{AB} = \int_{(AB)} n(x, y, z) dl = \int_{t_A}^{t_B} n[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt \rightarrow MIN. \quad (3.6)$$

При заданій функції  $n(x, y, z)$  та відомих просторових координатах точок А і Б функції  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ , повинні забезпечувати мінімальне значення  $L_{AB}$ . Ці функції можна знайти, використовуючи методи варіаційного числення, основи якого були закладені відомими математиками Леонардом Ейлером та Жозефом-Луї Лагранжем у 1750 році.



*Ейлер Леонард,*  
швейцарський, російський,  
німецький математик і фізик  
(1707–1783)



*Лагранж Жозеф-Луї,*  
французький математик,  
фізик і астроном  
(1736–1813)

В термінології варіаційного числення оптична довжина траєкторії променя  $L_{AB}$  має назву **функціонал**, а підінтегральна в (3.6) функція отримала назву функції Лагранжа. Функції  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ , що забезпечують екстремум функціонала, мають назву **екстремалей**. Їх знаходять шляхом розв'язання спеціальних диференціальних рівнянь. Перше таке рівняння, яке стало початком варіаційного числення, було складено Ейлером і Лагранжем. Методику його практичного застосування можна прослідити на прикладі пошуку траєкторії променя в оптично неоднорідному середовищі.

**Завдання 3.1.** Нехай оптичне середовище в декартовій координатній системі  $YOZ$  має симетричний розподіл показника заломлення навколо осі  $OZ$ . Показник заломлення представлено функцією, яка не залежить від координати  $z$ , але має функціональну залежність від  $y$ :  $n(y) = 1.7 - 0.1y$ ,  $y \geq 0$ . При цьому показник заломлення лінійно зменшується при віддаленні від осі  $OZ$ .

В оптичному середовищі є дві точки – точка  $A$  з координатами  $[z_A = 0, y_A = 0]$  і точка  $B$  з координатами  $[z_B = 10, y_B = 2]$ , мм. Потрібно знайти функцію  $y(z)$ , яка описує траєкторію променя, що проходить через ці точки.

**Розв'язання.** Оптична довжина траєкторії променя між точками  $A$  і  $B$  згідно (3.4) має вираз

$$L_{AB} = \int_A^B n(y) dl.$$

Елементарну ділянку траєкторії  $dl$  можна представити через її проекції на координатні осі  $[dy, dz]$  (рис. 3.1):

$$dl = \sqrt{dy^2 + dz^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2} dz = \sqrt{1 + [y'(z)]^2} dz,$$

тоді

$$L_{AA} = \int_A^A n(y) dl = \int_0^{10} (1.7 - 0.1y) \sqrt{1 + [y']^2} dz. \quad (3.7)$$

Згідно принципу Ферма промінь із точки  $A$  потрапить в точку  $B$  за траєкторією, що представляється функцією  $y(z)$ , яка є екстремаллю, тобто забезпечує мінімальне значення функціоналу  $L_{AB}$ .

Варіаційне числення дає можливість знайти екстремаль  $y(z)$ , методом інтегрування диференційного рівняння Ейлера:

$$F_y - \frac{d}{dz} F_{y'} = 0, \quad (3.8)$$

в якому  $F = F(z, y, y')$  – підінтегральний вираз у (3.7),  $F_y = \frac{\partial}{\partial y} F(z, y, y')$ ,

$$F_{y'} = \frac{\partial}{\partial y'} F(z, y, y').$$

Відомо, що у випадку відсутності у підінтегральному виразі аргументу  $z$ , що й спостерігається у (3.7), рівняння Ейлера (3.8)

приймає вигляд

$$F(y, y') - y'F_{y'}(y, y') = C_1, \quad (3.9)$$

в якому згідно (3.7)

$$F(y, y') = (1.7 - 0.1y)\sqrt{1 + y'^2}, \quad (3.10)$$

$$F_{y'}(y, y') = \frac{\partial}{\partial y'} F(y, y') = \frac{(1.7 - 0.1y)y'}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad (3.11)$$

$C_1$  – константа, значення якої можна знайти через координати точок А і Б.

Після підстановки (3.10), (3.11) у (3.9), і відповідних спрощень, маємо кінцеве диференціальне рівняння:

$$\frac{1.7 - 0.1y}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1. \quad (3.12)$$

Найпростіше розв'язання рівняння (3.12) досягається при використанні заміни  $y'(t) = sh(t)$ , де  $sh(t)$  – гіперболічний синус,  $t$  – допоміжний параметр.

Так як  $\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + [sh(t)]^2} = ch(t)$ , де  $ch(t)$  – гіперболічний косинус, то після підстановки  $ch(t)$  у (3.12) отримуємо вираз  $1.7 - 0.1y = C_1 ch(t)$ , з якого

$$y(t) = 17 - 10C_1 ch(t). \quad (3.13)$$

Щоб повернутися від допоміжного параметру  $t$  до змінної  $z$  звернемося до похідної  $y' = \frac{dy}{dz}$ , звідки  $dz = \frac{dy}{y'}$ .

Диференціал  $dy$  можна отримати із виразу (3.13):

$$dy = -10C_1 sh(t) dt, \text{ а } y'(t) = sh(t),$$

тому

$$dz = \frac{-10\tilde{N}_1 sh(t) dt}{sh(t)} = -10C_1 dt,$$

звідки  $z = -10C_1 t + C_2$ , тому  $t = \frac{C_2 - z}{10C_1}$ ,  $C_2$  – додаткова константа, що

виникає при інтегруванні виразу для  $dz$ .

Підставляючи вираз  $t$  у (3.13) отримуємо шукану функцію екстремалі

$$y(z) = 17 - 10C_1 ch\left(\frac{C_2 - z}{10C_1}\right). \quad (3.14)$$

Для пошуку значень констант  $C_1$  та  $C_2$  скористуємося даними про координати точок А і Б, через які повинна пройти траєкторія променя. В точці А  $y=0$  і  $z=0$ . Після підстановки цих значень у (3.14) маємо рівняння

$$17 - 10C_1 ch\left(\frac{C_2}{10C_1}\right) = 0. \quad (3.15)$$

У точці Б  $y=2$ ,  $z=10$ , тому друге рівняння має вигляд

$$17 - 10C_1 ch\left(\frac{C_2 - 10}{10C_1}\right) = 2. \quad (3.16)$$

Із розв'язання системи рівнянь, складеної із (3.15) та (3.16), знаходимо значення  $C_1$  та  $C_2$ , а саме  $C_1 = 1.48507$ ,  $C_2 = 7.8964$ .

Після підстановки значень цих констант у рівняння (3.14) отримуємо остаточний вираз екстремалі, тобто траєкторії променя у вище означеному оптично неоднорідному середовищу:

$$y(z) = 17 - 14.8507 ch\left(\frac{7.8964 - z}{14.8507}\right). \quad (3.17)$$

На рис. 3.2 представлений графік траєкторії променя із точки А у точку Б.

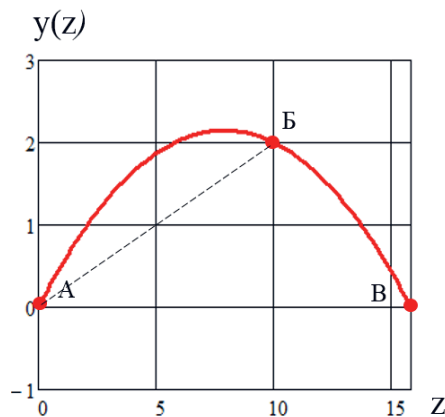


Рис. 3.2. Траєкторія променя в оптично-неоднорідному середовищі з розподілом показника заломлення за законом  $n(y) = 1.7 - 0.1y$

Перевіримо, чи справді оптична довжина криволінійної траєкторії із точки А до точки Б є меншою оптичної довжини прямої траєкторії, показаної на рис. 3.2 пунктирною лінією. Для цього двічі розрахуємо інтеграл (3.7) в межах від  $z_A = 0$  до  $z_B = 10$ , перший раз – для криволінійної траєкторії при підстановці в (3.7)  $y(z)$  у вигляді (3.17) та  $y'(z) = \frac{dy}{dz} \left( 17 - 10C_1 \operatorname{ch} \left( \frac{C_2 - z}{10C_1} \right) \right)$ , а другий раз – при підстановці у (3.7)  $y(z) = 0.2z$  – функції прямої лінії, що проходить через точки А і Б, та її похідній  $y' = 0.2$ .

Оптична довжина криволінійної траєкторії при  $y(z)$  згідно (3.17):

$$\int_0^{10} \left[ 1.7 - 0.1y(z) \sqrt{1 + (y'(z))^2} \right] dz = 16.041.$$

Оптична довжина прямолінійної траєкторії, від точки А до точки Б  $y(z) = 0.2z$ :

$$\int_0^{10} \left[ 1.7 - 0.1 \cdot 0.2z \sqrt{1 + (0.2)^2} \right] dz = 16.317.$$

Із наведених результатів розрахунку обох інтегралів видно, що криволінійна траєкторія дійсно має меншу оптичну довжину ніж прямолінійна траєкторія, хоча геометрична довжина криволінійної траєкторії вочевидь є набагато більшою ніж у прямолінійної.

Аналогічний результат можна отримати, порівнявши оптичні довжини траєкторій криволінійної та прямолінійної між точками А і В, рис. 3.2. Інтеграл (3.7) для криволінійної траєкторії інтегруємо в межах  $z_A = 0$  до  $z_B = 15.7929$  – В – точка, де криволінійна траєкторія перетинає координатну вісь OZ. При цьому інтеграл (3.7) отримує значення

$$\int_0^{15.7929} \left[ 1.7 - 0.1y(z) \sqrt{1 + (y'(z))^2} \right] dz = 25.792.$$

Оптичну довжину прямолінійної траєкторії АВ можна розрахувати без інтегрування, перемноживши геометричну довжину відрізка АВ = 15.7929 на показник заломлення  $n(y) = 1.7$ , який на протязі всієї цієї траєкторії є постійним, тому  $L_{AB} = 1.7 \times 15.7929 = 26.848$ .

Результат знову демонструє те, що криволінійна траєкторія має меншу оптичну довжину, а тому саме криволінійна траєкторія представляє собою дійсний шлях променю між точками А і В.



Висновок: в оптично неоднорідному середовищі закон прямолінійного розповсюдження променів не виконується.

### 3.2. Закон заломлення променів

Закон заломлення встановлює хід променю, що прямує із одного оптичного середовища в інше, розділені оптичною поверхнею.

Нехай існує два однорідних оптичних середовища з показниками заломлення  $n_1$  та  $n_2$ . Їх розділяє пласка оптична поверхня. В першому оптичному середовищі знаходиться точка А, в другому – точка Б, рис. 3.3. Потрібно знайти траєкторію ходу променю із точки А в точку Б.

З огляду на те, що обидва оптичні середовища є оптично однорідними, промені в них можуть розповсюджуватися тільки по прямих лініях, а вся траєкторія із точки А в точку Б буде мати вигляд ломаної лінії, як це показано на рис. 3.3. Злам траєкторії може виникнути при переході променю із першого середовища в друге на границі, що розділяє ці середовища, тобто в точці Р, рис. 3.3.

Положення точки Р на вказаній границі згідно принципу Ферма повинно забезпечувати мінімальну оптичну довжину траєкторії  $L_{AB}$ .

Для пошуку положення точки Р введемо декартову систему координат.

Для зручності аналізу і спрощення математичних викладок вісь ОХ проведемо через точку Б перпендикулярно до границі розділу двох середовищ, а вісь ОУ пропустимо через точку А, рис. 3.3. Таке розташування координатних осей не порушує загальності подальших висновків.

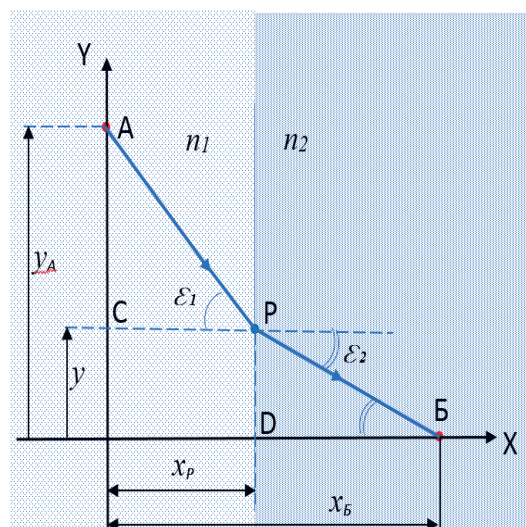


Рис. 3.3. Заломлення променю на границі двох різних оптично однорідних середовищ

За принципом Ферма:

$$L_{AB} = n_1 \cdot AP + n_2 \cdot PB \rightarrow \min .$$

Відрізок  $AP$  є гіпотенузою в трикутнику  $ACP$ , тому  $AP = \sqrt{(y_A - y)^2 + x_P^2}$ .

Відрізок  $PB$  є гіпотенузою в трикутнику  $PDB$ , тому  $PB = \sqrt{y^2 + (x_B - x_P)^2}$ . Сумарна оптична довжина траєкторії променю між точками  $A$  і  $B$ :

$$L_{AB}(y) = n_1 \sqrt{(y_A - y)^2 + x_P^2} + n_2 \sqrt{y^2 + (x_B - x_P)^2} . \quad (3.18)$$

Як видно з (3.18),  $L_{AB}$  є функцією, аргумент якої – координата « $y$ » точки  $P$ . Положення точки  $P$  визначає оптичну довжину траєкторії  $L_{AB}(y)$ .

Функція  $L_{AB}(y)$  може мати мінімальне значення при нульовому значенні похідної:

$$\frac{dL_{AB}(y)}{dy} = \frac{-n_1(y_A - y)}{\sqrt{(y_A - y)^2 + x_P^2}} + \frac{n_2 y}{\sqrt{y^2 + (x_B - x_P)^2}} = 0 . \quad (3.19)$$

З рис. 3.3 видно, що  $(y_A - y) = AC$ , тому у прямокутному трикутнику  $ACP$

$$\frac{(y_A - y)}{\sqrt{(y_A - y)^2 + x_P^2}} = \frac{AC}{AP} = \sin \varepsilon_1 .$$

В прямокутному трикутнику  $PDB$  катет  $PD = y$ , тому

$$\frac{(y_A - y)}{\sqrt{(y_A - y)^2 + x_P^2}} = \frac{AC}{AP} = \sin \varepsilon_1 .$$

Після підстановки двох останніх виразів у (3.19) отримуємо рівняння

$$-n_1 \cdot \sin \varepsilon_1 + n_2 \cdot \sin \varepsilon_2 = 0$$

або

$$\boxed{n_1 \cdot \sin \varepsilon_1 = n_2 \cdot \sin \varepsilon_2} . \quad (3.20)$$

При виконанні умови, представленій рівнянням (3.20), забезпечується мінімальне значення оптичної довжини траєкторії  $AB$ .

Рівняння (3.20) з приписом про те, що промінь, до заломлення, нормаль до границі розділу середовищ в точці падіння на неї проме-

ню та промінь після заломлення знаходиться в одній площині, називають **законом заломлення променя**. Цей закон в геометричній оптиці є основоположним.

Відомо, що закон заломлення відкрив В. Снеліус у 1621 році, проте він помер не опублікувавши його.



*Вілеброрд Снеліус (Снел),  
нідерландський астроном,  
фізик і математик  
(1580–1626)*



*Рене Декарт,  
французький математик,  
фізик і філософ  
(1596–1650)*

Вперше цей закон з'явився у праці Р. Декарта «Діоптрика» без посилання на Снеліуса. В сучасній науковій літературі закон заломлення називають законом Снеліуса-Декарта, хоча існують відомості про те, що цей закон все ж відкрив арабський вчений Ібн Саль ще у 984 році.

### **3.3. Закон відбиття променів**

На будь-якій оптичній поверхні, що розділяє два діелектричних оптичних середовища, промінь не тільки заломлюється, але й відбивається. Таке явище пояснюється хвильовою природою світла і описується формулами Френеля, які викладаються у хвильовій оптиці. Відбиття відбувається також і від металевих оптичних дзеркальних поверхонь.

Хід променя до і після відбиття від дзеркальної поверхні підпорядковується дії закону відбиття, який витікає із принципу Ферма.

Нехай в оптично-однорідному середовищі з показником заломлення  $n$  існують дві точки А, Б та пласка відбиваюча поверхня, рис. 3.4. Промені, що виходять із точки А у напрямку до вказаної поверхні, відбиваються від неї.

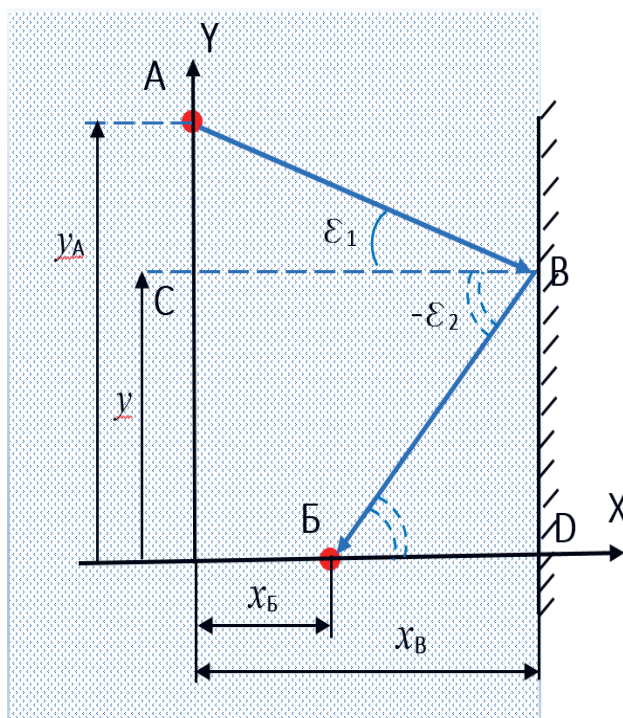


Рис. 3.4. До закону відбиття променю від відбиваючої поверхні

**Примітка.**

На рис. 3.4 кути  $\varepsilon_1$  і  $\varepsilon_2$  мають знаки згідно правила знаків для кутів, див. пункт 2.2. Кут  $\varepsilon_1$  називають **кутом падіння**, а кут  $\varepsilon_2$  – **кутом відбиття**.

Потрібно визначити в якій саме точці В на поверхні відбудеться відбиття променю, який після цього пройде через точку Б.

Траєкторія променю із точки А через точку В до точки Б буде складатися з двох прямих відрізків, тому що у оптично-однорідному середовищі промені розповсюджуються тільки по прямих лініях. Згідно принципу Ферма траєкторія променю повинна мати мінімальну оптичну довжину:

$$L_{AB} = n \cdot AB + n \cdot BB = n(AB + BB) \rightarrow \min. \quad (3.21)$$

З виразу (3.21) траєкторія променю повинна мати мінімальну геометричну довжину  $AB + BB$ .

При складанні рівняння (3.21) з метою спрощення математичних викладок проведемо координатну вісь ОХ перпендикулярно до відбиваючої поверхні і через точку Б. А вісь ОУ – через точку А, рис. 3.4. З трикутника АСВ гіпотенуза АВ:

$$AB = \sqrt{(y_A - y)^2 + x_B^2}, \quad (3.22)$$

а з трикутника ВВD гіпотенуза ВВ:

$$ВВ = \sqrt{y^2 + (x_B - x_B)^2}. \quad (3.23)$$

Підстановка (3.22), (3.23) у (3.21) показує, що і оптична, і геометрична довжина траєкторії  $L_{AB}$  є функцією аргументу  $y$ , який вказує положення точки В на відбиваючій поверхні. Мінімум функції

$L_{AB}(y)$  може мати місце, коли похідна  $\frac{dL_{AB}(y)}{dy} = 0$ , або

$$n \left[ \frac{-(y_A - y)}{\sqrt{(y_A - y)^2 + x_B^2}} + \frac{dy}{y \sqrt{y^2 + (x_B - x_B)^2}} \right] = 0. \quad (3.24)$$

$$\text{Але } \frac{(y_A - y)}{\sqrt{(y_A - y)^2 + x_B^2}} = \frac{AC}{AB} = \sin \varepsilon_1, \quad \frac{y}{\sqrt{y^2 + (x_B - x_B)^2}} = \frac{BD}{BB} = \sin(-\varepsilon_2).$$

Після підстановки цих виразів у (3.24) маємо:

$$n[-\sin \varepsilon_1 + \sin(-\varepsilon_2)] = 0,$$

звідки

$$\sin(-\varepsilon_2) = \sin \varepsilon_1,$$

або

$$\boxed{-\varepsilon_2 = \varepsilon_1}. \quad (3.25)$$

Рівняння (3.25) є математичною формою закону відбиття променя від оптичної поверхні. Згідно цього рівняння кут відбиття дорівнює куту падіння. До того ж промінь, що падає на поверхню, промінь, що відбивається від поверхні, та нормаль до поверхні в точці падіння променя разом знаходяться в одній площині.

Із порівняння формул (3.20) і (3.25) можна довести, що закон відбиття є окремим випадком закону заломлення. Так із закону заломлення (3.20):

$$\frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \varepsilon_2} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (3.26)$$

а із закону відбиття (3.25):

$$\frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \varepsilon_2} = -1.$$

Видно, що математично закон відбиття є окремим випадком закону заломлення, коли

$$n_2 = -n_1. \quad (3.27)$$

Дійсно, промінь до відбиття і після відбиття знаходиться в одному і тому ж середовищі з показником заломлення, який за абсолютною величиною не змінюється. Проте зміна знаку показника заломлення на протилежний є ознакою саме відбивальної поверхні. Цей факт використовується при запису матриць конструктивних параметрів оптичної системи (розд. 2, п. 2.3.4), а також дає можливість при розрахунках ходу променів в оптичних системах, в складі яких присутні заломлюючі та відбивальні поверхні, користуватися лише однією формулою – формулою закону заломлення Снеліуса–Декарта (3.20).

### 3.4. Закон оборотності ходу променів

Цим законом геометричної оптики визначається факт проходження променю із точки А у точку Б, чи у зворотному напрямку із точки Б у точку А по одній тій самій траєкторії незалежно від того, через які оптичні середовища пролягає ця траєкторія.

Закон оборотності ходу променю, як і попередні закони геометричної оптики, витікає з принципу Ферма. Дійсно, якщо промінь пройшов із точки А до точки Б простору за траєкторією, яка мала найменшу оптичну довжину із всіх її можливих значень, то при повороті променю в точці Б у строго протилежному зворотному напрямку, в ході від точки Б до точки А для цього променю не може бути якоїсь іншої траєкторії, яка б мала ще меншу оптичну довжину. А тому хід променю у зворотному напрямку пролягає через ту саму траєкторією, що і в прямому ході. В цьому і полягає закон оборотності ходу променю.

### 3.5. Явище повного внутрішнього відбиття

Закон заломлення Снеліуса–Декарта у формі

$$\frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \varepsilon_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (3.28)$$

свідчить про те, що кут падіння  $\varepsilon_1$ , або кут заломлення  $\varepsilon_2$ , буде більшим у тому середовищі, в якому показник заломлення має менше значення. На рис. 3.5, а для прикладу показано, що оптичне середовище справа від границі розділу має менше значення показника заломлення,



тобто  $n_2 < n_1$ , а тому кут заломлення  $\varepsilon_2$  є більшим ніж кут падіння  $\varepsilon_1$ .

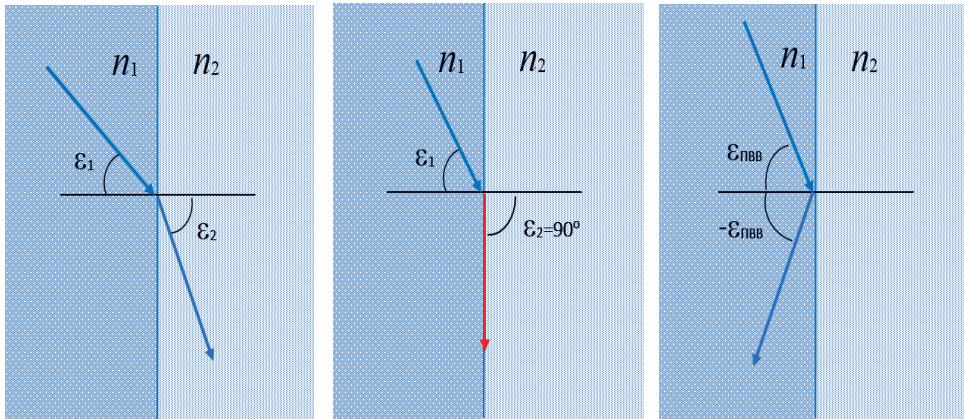


Рис. 3.5. До пояснення явища повного внутрішнього відбиття променю

При збільшенні кута  $\varepsilon_1$  кут  $\varepsilon_2$  може досягти значення  $90^\circ$ , як показано на рис. 3.5, б), при цьому  $\sin \varepsilon_2 = \sin 90^\circ = 1$ , а  $\sin \varepsilon_1 = \frac{n_2}{n_1}$ .

Уявімо, що промінь, який на рис. 3.5, б після заломлення йде вздовж границі розділу, якимось чином (наприклад, після відбиття від дзеркала, яке перпендикулярне до променю) повертається і йде назад вздовж границі розділу. Згідно закону оборотності він повинен повернутися назад у середовище, з якого він вийшов, тобто повністю відтворити попередню траєкторію. Ясно, що таке неможливо через відсутність механізму повернення променю у середовище з показником заломлення  $n_1$ . Але тоді не виконується закон оборотності ходу променю, що теж є неможливим. В цьому парадоксальному випадку, яке відноситься до так званих фізичних софізмів, є помилка в ході міркувань. Вона полягає в тому, що променю, який начебто йде вздовж границі розділу середовищ просто не існує. Він просто зникає, що показав Френель. В дійсності цей промінь повністю відбивається від границі розділу, як показано на рис. 3.5, в. Таке явище називають **повним внутрішнім відбиттям** променю від границі розмежування двох оптичних середовищ.

Фізика цього явища, обумовленого хвильовою природою світла, не може бути пояснена в межах геометричної оптики. Так у хвильовій оптиці доведено, що при проходженні світлової хвилі через границю розділу двох середовищ виникає не тільки заломлення, але й відбиття хвилі. Інтенсивність хвилі заломленої пропорційна коефіцієнту  $\tau$ , а відбитої – пропорційна коефіцієнту  $\rho$ . При відсутності поглинання світла  $\tau + \rho = 1$ . Збільшення кута падіння  $\varepsilon_1$  викликає зменшення коефіцієнта  $\tau$  та зростання коефіцієнта  $\rho$ . Коли кут падіння досягає значення:

$$\varepsilon_1 = \arcsin \frac{n_2}{n_1} = \varepsilon_{\text{ПВВ}}, \quad (3.29)$$

коефіцієнт  $\delta$  приймає нульове значення, а коефіцієнт відбиття  $\tilde{n}$  досягає максимального значення – одиниці. Ось чому не існує заломленого променя, показаного на рис. 3.5, б. При куті  $\hat{a}_1 = \hat{a}_{I\hat{A}\hat{A}}$  промінь повністю відбивається. Формули для коефіцієнтів  $\delta$  і  $\tilde{n}$ , як функцій кута падіння  $\hat{a}_1$ , мають назву формул Френеля. Вони викладаються у хвильовій оптиці [1].



*Огюстен Жан Френель,*  
французький фізик, оптик  
(1788–1827)

Кут  $\hat{a}_{I\hat{A}\hat{A}}$  має назву кута повного внутрішнього відбиття (ПВВ) променя на границі розділу двох оптичних середовищ.

Явище повного внутрішнього відбиття є корисним при створенні, наприклад, відбивальних призм. Але це ж саме явище може бути шкідливим, якщо воно перешкоджає проходженню променів через оптичні системи. Тому повне внутрішнє відбиття променів потребує особливої уваги розробників систем.

### 3.6. Закон незалежного поширення променів

Закон незалежного поширення променів вказує на факт відсутності впливу одного променя на хід іншого при їх перетині. Кожен промінь розповсюджується так, нібито інших променів не існує. Зміст цього закону є коректним лише до тих пір, поки інтенсивність оптичного випромінення не впливає на стан оптичного середовища, тобто не змінює його показника заломлення і не порушує його оптичної однорідності. Цей стан є умовою дії законів лінійної геометричної та хвильової оптики.

В тому випадку, коли випромінення змінює оптичні властивості оптичного середовища, вступають в силу закони нелінійної оптики. Тоді незалежність поширення променів зникає, бо промінь, що проходить через зону, наприклад, сфокусованого потужного лазерного випромінення, може змінювати траєкторію свого ходу залежно від просторового розподілу щільності лазерного випромінення в зоні його фокусування.

Історія становлення основ прикладної геометричної оптики, її законів та окремих її напрямків представлена в роботі [2].

## РОЗДІЛ 4. ГЕОМЕТРИЧНА ОПТИКА ПРО ФОРМУВАННЯ ЗОБРАЖЕНЬ ПРЕДМЕТІВ ОПТИЧНИМИ СИСТЕМАМИ

Феномен утворення оптичних зображень окремими оптичними деталями або їх системами з далеких часів викликав до себе особливий інтерес. Вигляд предметів, які можна спостерігати навіть через прозорі шліфовані камінці (з ювелірних прикрас), дивовижно перетворюються. У порівнянні з самими предметами їх зображення виглядають зменшеними чи навпаки збільшеними, перевернутими або геометрично спотвореними. З цих спостережень зародилася наука діоптрика, яка намагалася пояснювати такі явища. Діоптрика (грецьке *dioptrika*, от *dia* – через, та *opteuo* – бачу) стала початком розвитку основ сучасної геометричної оптики. Діоптрика вивчала проходження світла через границі розділу оптичних середовищ і системи таких границь, а тому її можна вважати застарілою початковою назвою геометричної оптики.

### 4.1. Предмет, зображення предмету

В геометричній оптиці розглядаються предмети, як випромінювачі, що самі випромінюють (**первинні джерела випромінення**) або відбивають чи розсіюють світло від сторонніх випромінювачів (**вторинні джерела випромінення**).

Всі такого роду джерела випромінення умовно поділяють на дві групи.

Перша група – **точкові джерела**, розміри яких набагато менші ніж відстані до них. Характерним прикладом таких джерел є зірки, або дуже віддалені штучні випромінювачі.

Друга група – **протяжні джерела**. Їх власні розміри сумірні з відстанями до них. Сонце, Луна, денне небо, навколишні предмети є прикладом протяжних джерел.

Випромінення точкових джерел геометрична оптика представляє пучком променів, який є **гомоцентричним**, тобто який має єдину точку, з якої виходять всі промені, рис. 4.1, а.

Протяжний предмет в геометричній оптиці вважається таким, що складається з безкінечної сукупності точок, тому його випромінення прийнято представляти гомоцентричними пучками променів, які надходять з кожної точки протяжного предмету, рис. 4.1, б. Зрозуміло, що протяжний предмет хоча і складається з безкінечної кількості точок, проте на практиці для аналізу його зображення достатньо

обрати декілька точок, з яких одна є центральною, або осьовою, а інші є периферійними.

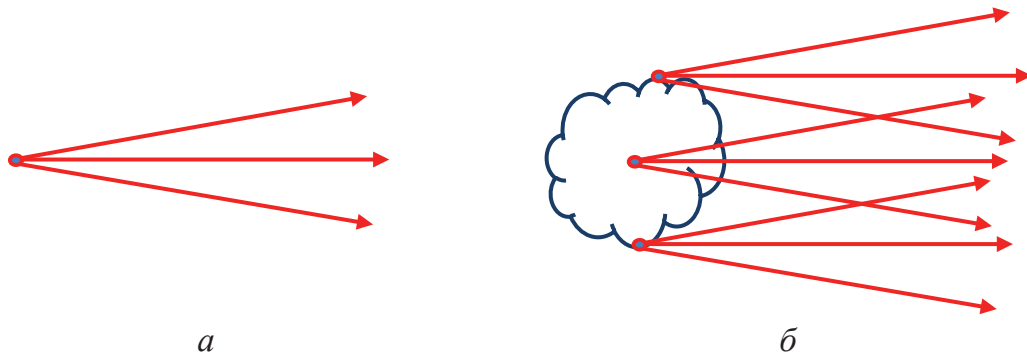


Рис. 4.1. Джерела випромінення: *a* – точкове; *б* – протяжне

Після проходження гомоцентричного пучка променів через оптичну систему хід променів змінюється внаслідок заломлення чи відбиття на оптичних поверхнях. Якщо оптична система не порушує гомоцентричності пучка променів, тобто вона перетворює гомоцентричний пучок у гомоцентричний, то тоді на виході з системи спостерігається одне з двох:

- або промені перетинаються дійсно і утворюють **дійсне зображення точки**, рис.4.2, а;
- або промені не перетинаються дійсно, але перетинаються уявно своїми продовженнями у зворотному напрямку і утворюють при цьому **уявне зображення точки**, рис. 4.2, б.

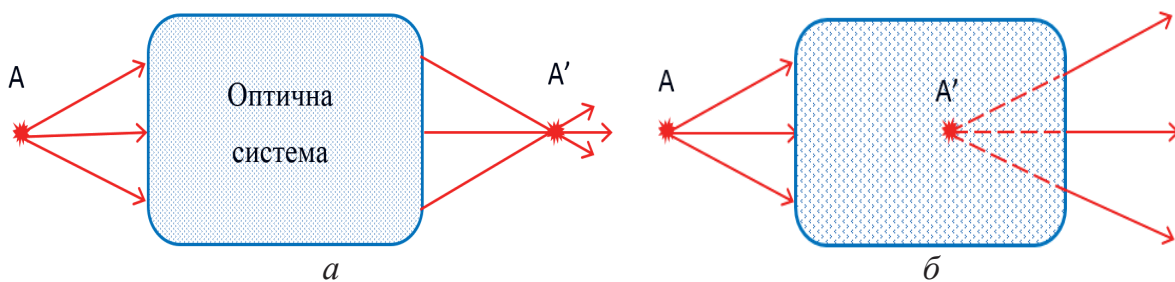


Рис. 4.2. Зображення точки оптичною системою: *a* – предметна точка *A* дійсна, її зображення – точка *A'* – дійсне; *б* – предметна точка *A* дійсна, її зображення – точка *A'* – уявне

На рис. 4.2 точка *A* показана як дійсна, проте вона може бути уявною, якщо вона є зображенням, сформованим попередньою частиною оптичної системи, або іншою оптичною системою. На рис. 4.3 показано такий випадок.

При уявному предметі – точці *A* її зображення може бути або дійсним (рис. 4.3, а), або теж уявним (рис. 4.3, б).



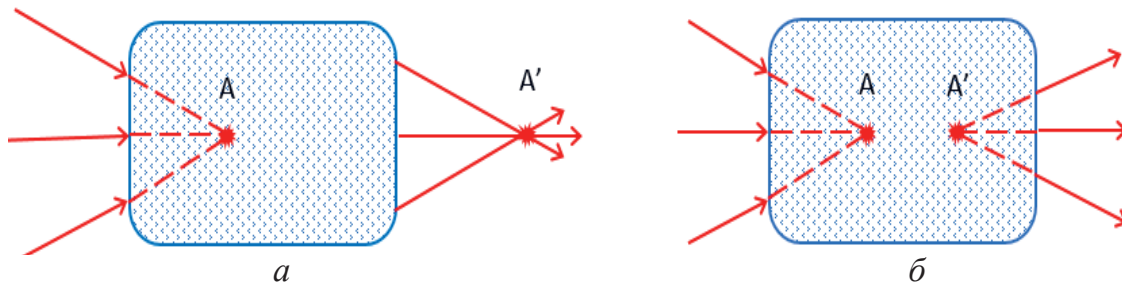


Рис. 4.3. Зображення уявної точки, сформоване оптичною системою:  
*a* – предметна точка *A* – уявна, зображення точки *A'* – дійсне;  
*б* – предметна точка *A* уявна, зображення точка *A'* – уявне

## 4.2. Простір предметів, простір зображень предметів

Можливі різні варіанти розташування предметів та їх зображень відносно оптичної системи:

- дійсні предмети розташовуються тільки перед оптичною системою;
- дійсні кінцеві зображення предметів розташовуються тільки після оптичної системи;
- уявні предмети розташовуються як в самій оптичній системі, так і уявно поза нею;
- уявні кінцеві зображення розташовуються уявно перед системою або в самій оптичній системі.

**Примітка.** В деяких оптичних системах утворюються проміжні зображення предметів. Прикладом може слугувати телескопічна система Кеплера, в якій існує проміжне зображення предметів, див. розд. 13. Кінцевими зображеннями є лише ті, що сформовані всією оптичною системою.

Весь простір, де розташовуються дійсні чи уявні предмети, має назву **простору предметів**.

Весь простір, де розташовуються дійсні кінцеві чи уявні кінцеві зображення предметів, має назву **простору зображень**.

### 4.3. Про формування зображення точок реальними оптичними системами

Гомоцентричність пучка променів, що формує зображення точки (рис. 4.2 та 4.3), може бути лише в тому випадку, коли оптична система не спотворює сферичність світлових хвильових фронтів. Якщо фронт на виході системи сферичний, то тоді всі промені – нормалі до сферичного фронту, сходяться в одній точці, і пучок є гомоцентричним (рис. 4.4).

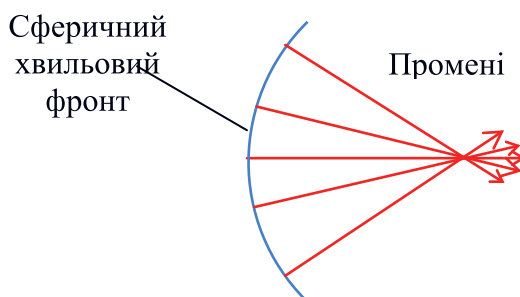


Рис. 4.4. Формування гомоцентричного пучка променів сферичним фронтом

В деяких випадках в реальних оптичних системах вдається формувати такі пучки. Такі оптичні системи називають безабераційними. Але переважна більшість реальних оптичних систем в тій чи іншій степені все ж деформують сферичні фронти. Це призводить до порушення гомоцентричності пучків променів – промені не перетинаються в одній точці. Таке явище називають **аберацією оптичної системи**. Зображення точки при порушенні оптичною системою гомоцентричності променів пучка має вигляд світлової плями, а оптичну систему, яка не забезпечує гомоцентричність пучків, називають **абераційною**.

Проте, якщо оптична система є безабераційною, то на вигляд зображення точки впливає дифракція – явище відхилення світла від прямолінійного напрямку поширення при проходженні поблизу перешкод. Такими перешкодами в оптичних системах є непрозорі оправки лінз, дзеркал, краї отвору в спеціальних непрозорих пластинах, які всі разом називаються діафрагмами. На рис. 4.5, а показана така діафрагма.

Діафрагми в оптичних системах, як правило, мають форму круглих отворів. Через отвір проходить лише незрізана частина сферичного хвильового фронту, що і призводить до дифракційного зображення точки у тому місті, де повинен бути центр гомоцентричного пучка. Дифракційне зображення точки має вигляд круглої центральної плями з світлими і темними інтерференційними кільцями навколо (рис. 4.5, б). Центральне ядро плями носить назву **кола Ері** і має діаметр [1]:



$$\varnothing = \frac{1.22\lambda}{n' \sin \sigma},$$

де  $\lambda$  – довжина світлової електромагнітної хвилі;  $n'$  – показник заломлення середовища в просторі, де знаходиться зображення точки, кут  $\sigma$ , показаний на рис. 4.6, а, вказує нахил до осі крайнього променя пучка, що пройшов через оптичну систему і формує зображення точки.

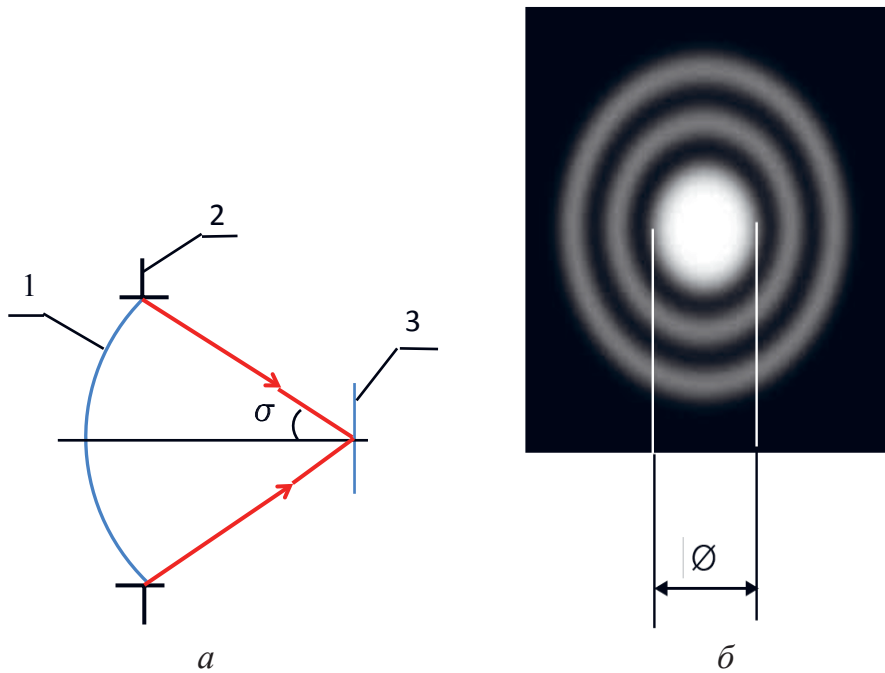


Рис. 4.5. До формування реального дифракційного зображення точки безабераційною оптичною системою:  
 а – позначено: 1 – хвильовий фронт, 2 – діафрагма, 3 – площина дифракційного зображення точки;  
 б – дифракційне зображення точки при круглому отвору діафрагми

При довжині хвилі  $\lambda = 0.55 \text{ мкм}$  (жовто-зелене випромінювання),  $n' = 1$ ,  $\sigma = 30^\circ$  діаметр кола Ері згідно вищенаведеної формулі  $\varnothing = 1.34 \text{ мкм} = 1.34 \cdot 10^{-3} \text{ мм}$ . Цей діаметр настільки малий, що таке дифракційне зображення точки вважають геометричною точкою. Лише при визначенні просторової роздільної здатності оптичної системи беруть до уваги реальне дифракційне зображення точки, обумовлене хвильовою природою світла.

## РОЗДІЛ 5. РОЗРАХУНОК ХОДУ ПРОМЕНІВ ЧЕРЕЗ ОПТИЧНУ ПОВЕРХНЮ ТА СИСТЕМУ ОПТИЧНИХ ПОВЕРХОНЬ

В попередньому розділі показано як оптичною системою утворюються зображення точок простору предметів. Для аналізу зображень, сформованих оптичними системами, потрібно точно знати хід променів через них. Найбільш точним способом пошуку ходу променів через оптичну систему є розрахунковий з використанням для цього законів геометричної оптики.

Порядок або алгоритм розрахунку ходу променів в оптичній системі залежить від типу оптичної системи. Вони за ознакою взаємного розташування оптичних поверхонь поділяються на три групи:

- центровані оптичні системи (рис. 5.1, *а*);
- децентровані оптичні системи (рис. 5.1, *б*);
- просторові оптичні системи (рис. 5.1, *в*).

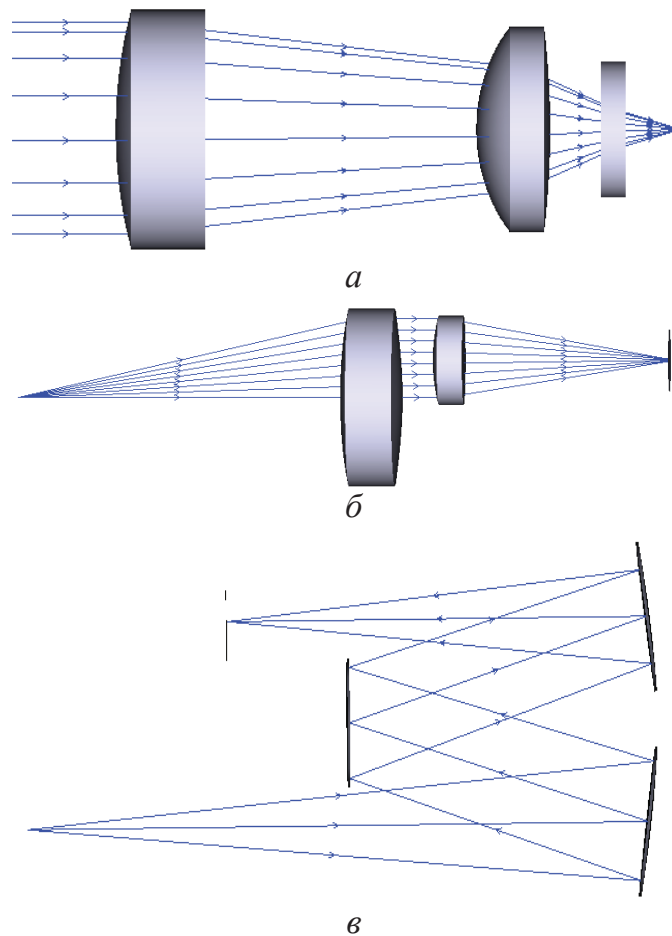


Рис. 5.1. Оптичні системи: *а* – центрована;  
*б* – децентрована; *в* – просторова

Центровані оптичні системи утворюються із оптичних поверхонь і оптичних деталей, які мають осьову симетрію, а осі симетрії всіх поверхонь і деталей в центрованих системах суміщені в одну лінію, яка має назву **оптичної осі**. Якщо в центрованій системі використовуються сферичні поверхні, то їх центри знаходяться на оптичній осі. Сферичні поверхні є достатньо технологічними, тому їх найчастіше використовують в оптичних системах.

В децентрованих оптичних системах окремі її оптичні елементи можуть мати осі симетрії рознесені у просторі, тобто не суміщені в одну лінію, але розташовані паралельно одна відносно одної – децентровано, як показано на рис. 5.1, б.

Просторові оптичні системи отримали таку назву через те, що осі симетрії їх оптичних поверхонь, або оптичних елементів, можуть мати будь-яке взаємне розташування в просторі, рис. 5.1, в.

Серед всіх оптичних систем найбільш поширеними є центровані. Майже всі класичні оптичні системи зорових труб, телескопів, мікроскопів, фотооб'єктивів та проєкційних систем є центрованими. Набагато менше зустрічаються децентровані оптичні системи, а просторові оптичні системи скоріш відносяться до екзотичних.

Пошук зображення точки в центрованих оптичних системах, як показано в розд. 4, зводиться до визначення того місця, де пучок променів перетинається після проходження всієї системи. Якщо система не порушує гомоцентричності пучків, то для пошуку зображення точки достатньо знати хід двох променів, що йдуть від предметної точки, з визначенням місця їх перетину.

Якщо предметна точка знаходиться на оптичній осі центрованої системи, то її зображення знаходиться теж на оптичній осі. Для пошуку положення цього зображення достатньо знайти хід одного променя від точки і знайти місце, де він перетинає оптичну вісь. При цьому вважається, що другий промінь від точки, який перетинається з попереднім, розповсюджується вздовж оптичною осі, ніде з неї не виходить, а тому спеціального розрахунку не потребує.

Розрахунки ходу променів у децентрованих та у просторових оптичних системах потребують даних про положення у просторі системи координат, пов'язаної з кожною оптичною поверхнею чи оптичним елементом. Це ускладнює розрахунки ходу променів, але не викликає нездоланих перешкод.

Із наведеного головний висновок полягає в тому, що для пошуку дійсного ходу променів в будь-якій оптичній системі потрібно вміти розраховувати хід променя через кожен оптичну поверхню системи.

Розрахунки ходу променів в оптичних системах є важливою процедурою, яка дозволяє здійснювати аналіз дії і синтез оптичних систем, відтворювати параметри і характеристики, що характеризують оптичну систему як формувач зображень та як передатчик енергії електромагнітних хвиль оптичного діапазону. В теперішній час розрахунки ходу променів в оптичних системах автоматизовані за допомогою комп'ютерної техніки і тому позбавили розробників оптичних систем вручну виконувати цю трудомістку роботу. Проте знання порядку або алгоритмів, методики розрахунку ходу променів в оптичних системах не тільки дає корисну уяву щодо роботи комп'ютерної програми, але й слугує важливою умовою вивчення теоретичних основ прикладної геометричної оптики.

### 5.1. Оптичні поверхні у складі оптичних систем

Алгоритм розрахунку ходу променю через складну оптичну систему базується на методиці розрахунку ходу променю через одну окрему оптичну поверхню, що розділяє два оптичних однорідних середовища. Застосування цієї методики по чергово до всіх оптичних поверхонь системи дозволяє знайти хід променю через будь-яку складну оптичну систему. Вказана методика суттєво залежить від геометричної форми цієї поверхні.

За формою всі оптичні поверхні розділяються на сферичні та асферичні (несферичні). Плaska поверхня належить до сферичних з безкінечно великим радіусом. Несферичні поверхні представлені великою множиною їх різновидів, з переліком яких можна познайомитися в інструкціях до комп'ютерних програм, ZEMAX, OPAL-PC та інших. Але найбільш часто в оптичних системах використовують **асферичні поверхні** з осьовою симетрією, що спрощує технологію їх виготовлення. Серед них, як було вже вказано вище, найбільш технологічною є сферична поверхня тому, що вона в будь-якій точці має однакову кривизну. Через це сферичну поверхню використовують в оптичних системах переважно.

Для розрахунку ходу променю через оптичну поверхню потрібен її математичний опис. Якщо поверхня має осьову симетрію то вона утворюється обертанням графіка функції  $y(z)$  навколо осі  $Z$  (рис. 5.2).

Найпростішими є поверхні другого степеневого порядку, твірна функція яких має вигляд

$$y^2 = c_1 z + c_2 z^2, \quad (5.1)$$

де коефіцієнти  $c_1 = 2r$ ,  $c_2 = (e^2 - 1)$ ,  $r$  – радіус кривизни оптичної поверхні в точці на оптичній осі ( $z = 0, y = 0$ );  $e^2$  – квадрат ексцентриситету, як і конічна константа  $k = -e^2$ , вказує тип кривої лінії  $y(z)$ .

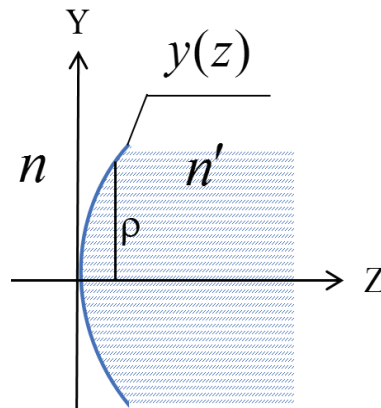


Рис. 5.2. Оптична поверхня:  $y(z)$  – твірна функція поверхні

Таблиця 5.1

**Параметри твірних другого степеневого порядку**

$e^2$	$k = -e^2$	Графік $y(z)$	Назва кривої	Назва поверхні
0	0	а)	Коло	Сфера
1	-1	б)	Парабола	Параболоїд
$0 < e^2 < 1$	$-1 < k < 0$	в)	Витягнутий еліпс	Витягнутий еліпсоїд
$e^2 < 0$	$k > 0$	г)	Сплюснутий еліпс	Сплюснутий еліпсоїд
$e^2 > 1$	$k > -1$	д)	Гіпербола	Гіперболоїд

Графіки твірної функції  $y(z)$  оптичної поверхні при  $r > 0$  показано на рис. 5.3.

При  $r < 0$  графіки  $y(z)$  будуть повернуті симетрично відносно осі Y.

Представлені на рис. 5.4 графіки твірних поверхонь є лініями перетину конуса площиною, відповідно зорієнтованою відносно конуса. Якщо площина перпендикулярна осі симетрії конуса, то у перетині буде коло. Якщо цю площину нахилити відносно осі конуса, то у перетині виникне еліпс. При паралельному розташуванні площини відносно утворюючої конуса в перетині буде парабола, а при перетині конуса площиною, яка паралельна осі конуса, відтворюється гіпербола. Константа  $k$  визначає орієнтацію площини перетину відносно осі конуса, тому вона називається конічною.

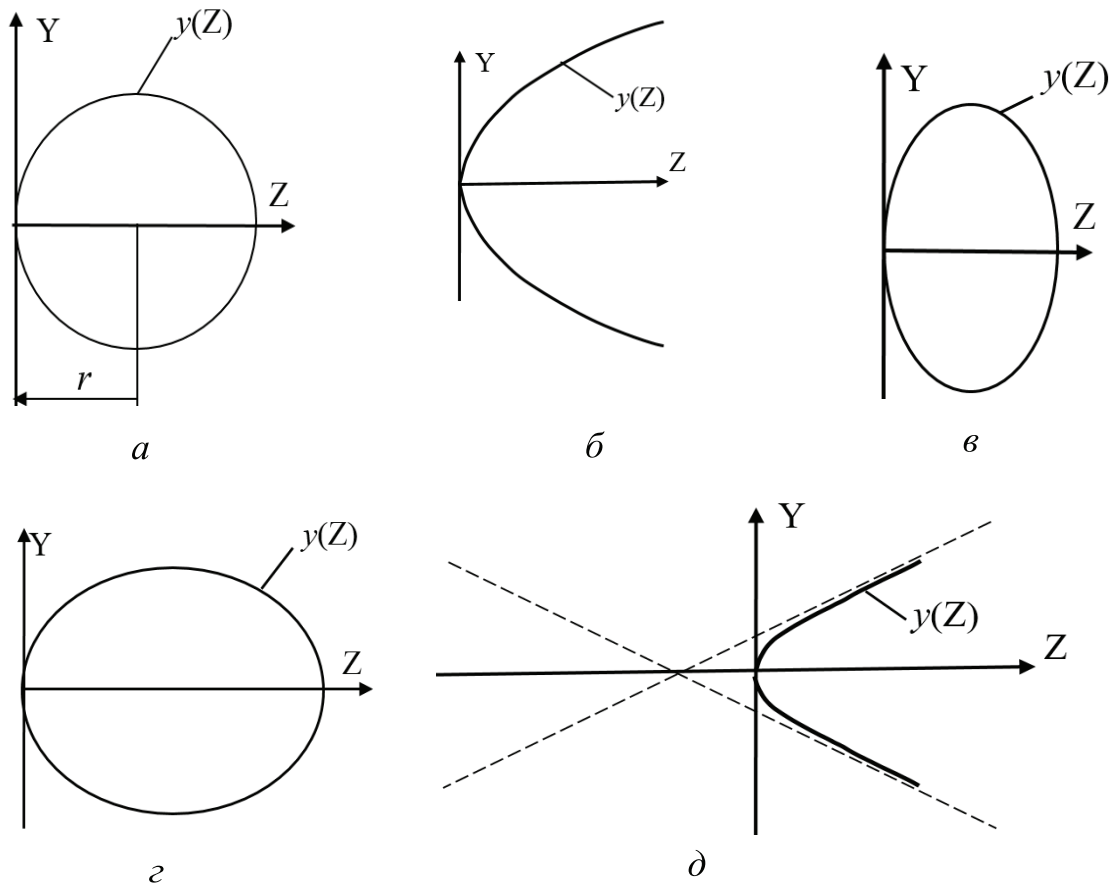


Рис. 5.3. Графіки твірної функції  $y(z)$  оптичної поверхні за  $r > 0$

Твірна функція може бути представленою інакше у вигляді  $z(y)$ . Так поверхня другого порядку з осьовою симетрією відносно осі  $Z$  має твірну:

$$z(y) = \frac{cy^2}{1 + \sqrt{1 - (1+k)c^2y^2}}, \quad (5.2)$$

де  $c = \frac{1}{r}$  – кривизна поверхні в точці на оптичній осі. Вираз (5.2) встановлює той самий зв'язок між  $y$  та  $z$ , що і вираз (5.1). У виразі (5.2) координата « $y$ » може бути замінена відрізком  $\rho = y$ , який є найкоротшою відстанню між заданою точкою на оптичній поверхні і оптичною віссю (рис. 5.2).

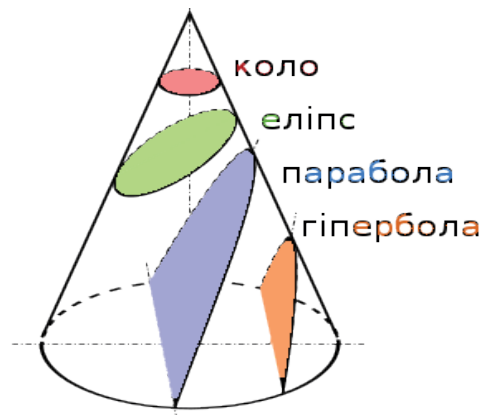


Рис. 5.4. Твірні оптичних поверхонь другого степеневого порядку

В оптичних системах все більше використовуються асферичні поверхні вищих степеневих порядків, у яких твірна має вирази:



для парної асферики з осью симетрії:

$$z(\rho) = \frac{c\rho^2}{1 + \sqrt{1 - (1+k)c^2\rho^2}} + a_1\rho^2 + a_2\rho^4 + a_3\rho^6 + a_4\rho^8 + \dots + a_8\rho^{16}, \quad (5.3)$$

де  $a_1, a_2, a_3 \dots a_8$  – коефіцієнти парної асферики вищих степеневих порядків; для непарної асферики з осью симетрії,

$$z(\rho) = \frac{c\rho^2}{1 + \sqrt{1 - (1+k)c^2\rho^2}} + \beta_1\rho^1 + \beta_2\rho^2 + \beta_3\rho^3 + \beta_4\rho^4 + \dots + \beta_8\rho^8, \quad (5.4)$$

де  $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \dots \beta_8$  – коефіцієнти непарної асферики вищих степеневих порядків.

## 5.2. Розрахунок ходу променя через оптичну систему, складену із сферичних поверхонь

Розрахунок ходу променів через оптичну систему виконують з метою відтворення параметрів зображень, отримання потрібних даних для здійснення енергетичних розрахунків та оцінки якості зображень.

Переважає кількість оптичних систем є центрованими і складеними із сферичних поверхонь. Володіючи алгоритмом розрахунку ходу променя через одну сферичну поверхню можна розрахувати хід променя через всю оптичну систему, складену з багатьох оптичних поверхонь.

На рис. 5.5 показано фрагмент оптичної системи – сферичної поверхні з номером  $k$ , яка розділяє два оптичних однорідних середовища з показниками заломлення  $n_k$  та  $n'_k = n_{k+1}$ . Показано також промінь, який виходить із осьової точки  $A_k$ .

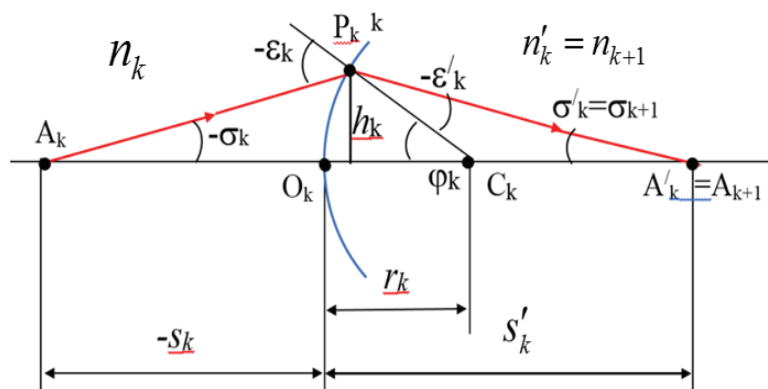


Рис. 5.5. До розрахунку ходу променя через сферичну поверхню

Вихідними даними про положення променя відносно оптичної поверхні є відстань  $s_k$  та кут  $\sigma'_k$ . Вихідними даними до самої оптичної поверхні є радіус  $r_k$  та показники заломлення  $n_k$ ;  $n'_k = n_{k+1}$ .

Хід променя після оптичної поверхні буде встановленим, якщо за допомогою розрахунку будуть знайдені відрізок  $s'_k$  та кут  $\sigma'_k$ .

Порядок розрахунку ходу променя:

1) розрахунок кута  $\sigma'_k$  – кута падіння променя на сферичну поверхню;

2) розрахунок кута  $\varepsilon'_k$  – кута заломлення променя на сферичній поверхні;

3) розрахунок  $\sigma'_k$  – кута нахилу променя до оптичної осі;

4) розрахунок відрізка  $s'_k$ .

Для розрахунку кута падіння  $\varepsilon_k$  потрібно використати теорему синусів до трикутнику  $A_k P_k C_k$ :

$$\frac{A_k C_k}{P_k C_k} = \frac{\sin \angle A_k P_k C_k}{\sin \angle P_k A_k C_k}.$$

Згідно рис. 5.5 та правил знаків (розд. 2) відрізки

$$A_k C_k = r_k - s_k, P_k C_k = r_k,$$

кути

$$\angle A_k P_k C_k = 180 - (-\varepsilon_k) = 180 + \varepsilon_k, \angle P_k A_k C_k = -\sigma_k,$$

тоді

$$\frac{r_k - s_k}{r_k} = \frac{\sin(180 + \varepsilon_k)}{\sin(-\sigma_k)} = \frac{-\sin \varepsilon_k}{-\sin \sigma_k},$$

звідки

$$\boxed{\sin \varepsilon_k = \frac{r_k - s_k}{r_k} \sin \sigma_k;} \quad (5.5)$$

$$\boxed{\varepsilon_k = \arcsin \left( \frac{r_k - s_k}{r_k} \sin \sigma_k \right).} \quad (5.6)$$

Може бути так, що права частина формули (5.5) за абсолютним значенням дорівнює 1 або більше одиниці. При цьому формула (5.6) не забезпечує дійсного значення кута  $\varepsilon_k$ . Такий випадок може трапитися тільки тоді, коли промінь не перетинається зі сферичною поверхнею, як показано на рис. 5.6.

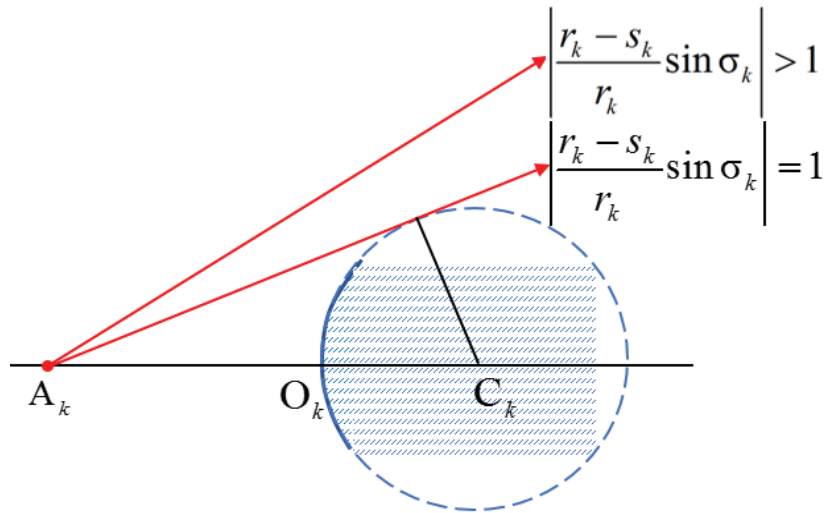


Рис. 5.6. Не проходження променю через оптичну поверхню через відсутність перетину з поверхнею

В такому випадку промінь вважається таким, що не проходить через оптичну поверхню і наступну частину оптичної системи.

При  $\left| \frac{r_k - s_k}{r_k} \sin \sigma_k \right| < 1$  далі згідно закону заломлення (3.20) розраховується кут заломлення  $\varepsilon'_k$  за формулою:

$$\sin \varepsilon'_k = \frac{n_k}{n_{k+1}} \sin \varepsilon_k = \frac{n_k}{n_{k+1}} \frac{r_k - s_k}{r_k} \sin \sigma_k \quad (5.7)$$

звідки

$$\varepsilon'_k = \arcsin \left( \frac{n_k}{n_{k+1}} \frac{r_k - s_k}{r_k} \sin \sigma_k \right) \quad (5.8)$$

Якщо права частина формули (5.7) за абсолютним значенням дорівнює 1 або більше одиниці, то це означає, що промінь не заломлюється. З ним на оптичній поверхні відбувається повне внутрішнє відбиття і далі промінь через оптичну систему не проходить (рис. 5.7). На цьому розрахунок ходу даного променю завершується.

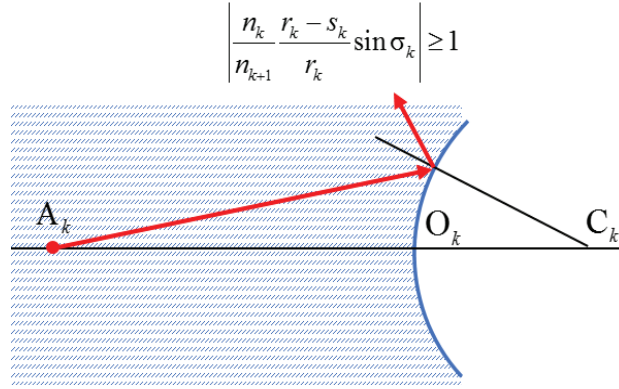


Рис. 5.7. Непроходження променя через оптичну поверхню через явище повного внутрішнього відбиття

При  $\left| \frac{n_k}{n_{k+1}} \frac{r_k - s_k}{r_k} \sin \sigma_k \right| < 1$  за формулою (5.8) визначається кут заломлення  $\varepsilon'_k$  і потім розраховується кут  $\sigma'_k$ .

Значення кута  $\sigma'_k$  можна знайти, використовуючи теорему про зовнішній кут трикутника, застосувавши її до двох трикутників  $\triangle A_k P_k C_k$  та  $\triangle C_k P_k A_{k+1}$  (рис. 5.5).

Із трикутника  $\triangle A_k P_k C_k$ :

$$-\varepsilon_k = \varphi_k + (-\sigma_k),$$

звідки

$$\varphi_k = \sigma_k - \varepsilon_k,$$

із трикутника  $\triangle C_k P_k A_{k+1}$ :

$$\varphi_k = -\varepsilon'_k + \sigma'_k.$$

Із цих двох останніх рівнянь випливає третє:

$$-\varepsilon'_k + \sigma'_k = \sigma_k - \varepsilon_k,$$

з якого кут  $\sigma'_k$ :

$$\boxed{\sigma'_k = \sigma_k + \varepsilon'_k - \varepsilon_k.} \quad (5.9)$$

Відстань  $s'_k$  може бути знайденою при використанні теореми синусів до трикутника  $\triangle P_k C_k A'_k$ . Згідно теореми синусів:

$$\frac{C_k A'_k}{C_k P_k} = \frac{\sin(-\varepsilon'_k)}{\sin(\sigma'_k)}.$$

Із рис. 5.5:  $C_k A'_k = s'_k - r_k$ ,  $C_k P_k = r_k$ . Після підстановки значень цих відрізків у попереднє рівняння отримуємо:

$$s'_k - r_k = -r_k \frac{\sin \varepsilon'_k}{\sin \sigma'_k} = -r_k \frac{n_k}{n_{k+1}} \frac{r_k - s_k}{r_k} \frac{\sin \sigma_k}{\sin \sigma'_k} = \frac{n_k}{n_{k+1}} (s_k - r_k) \frac{\sin \sigma_k}{\sin \sigma'_k},$$

звідки

$$s'_k = r_k + \frac{n_k}{n_{k+1}} (s_k - r_k) \frac{\sin \sigma_k}{\sin \sigma'_k}. \quad (5.10)$$

Формули (5.5)–(5.10) можна використовувати не тільки до заломлюючих, а і до дзеркальних поверхонь.

**Щоб здійснити розрахунок ходу променя після дзеркальної поверхні** достатньо у формулах (5.7), (5.8), (5.10) використати властиве для дзеркальних поверхонь відношення:  $\sigma_k = -\sigma'_k$ , а у формулі

(5.9) врахувати закон відбиття:  $\varepsilon'_k = -\varepsilon_k$ , через що формула (5.9) отримує вигляд:

$$\sigma'_k = \sigma_k - 2\varepsilon_k. \quad (5.11)$$

### Розрахунок ходу променя при $s_k = \infty$

Формули (5.5)–(5.11) непридатні для розрахунків, коли предметна точка  $A_k$  знаходиться нескінченності, тобто  $s_k = \infty$ . В цьому випадку промінь є паралельним оптичній осі, а його вихідними параметрами слугують висота променя над оптичною віссю  $h_k \neq 0$  та кут у градусах нахилу променя до осі  $\sigma_k = 0$  (рис. 5.8).

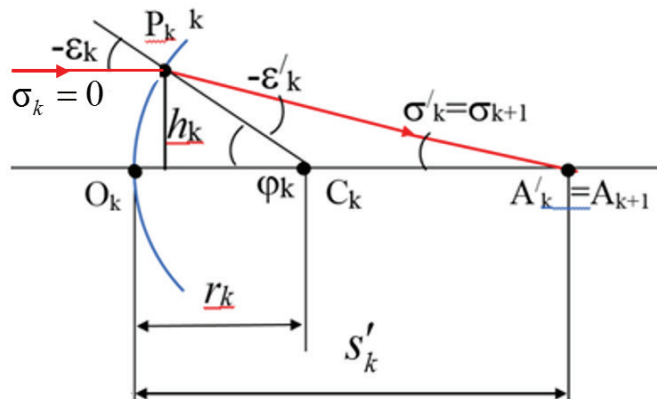


Рис. 5.8. До розрахунку ходу променя через сферичну поверхню при  $s_k = \infty$

Із рис. 5.8 видно, що кут  $-\varepsilon_k = \varphi_k$ , а тому

$$\sin(-\varepsilon_k) = \sin \varphi_k = \frac{h_k}{P_k C_k} = \frac{h_k}{r_k},$$

звідки

$$\boxed{\sin \varepsilon_k = -\frac{h_k}{r_k}}, \quad (5.12)$$

$$\boxed{\sin \varepsilon_k = -\frac{h_k}{r_k}}. \quad (5.13)$$

Ясно, що промінь не може перетинатися з оптичною поверхнею, якщо  $h_k \geq r_k$ .

При  $h_k < r_k$  далі розраховується  $\sin \varepsilon'_k$ : Згідно закону заломлення

$$\boxed{\sin \varepsilon'_k = \frac{n_k}{n_{k+1}} \sin \varepsilon_k}. \quad (5.14)$$

У випадку, коли  $\left| \frac{n_k}{n_{k+1}} \sin \varepsilon_k \right| \geq 1$ , промінь відбивається від поверхні через явище повного внутрішнього відбиття і далі через поверхню і оптичну систему не проходить.

Якщо  $\left| \frac{n_k}{n_{k+1}} \sin \varepsilon_k \right| < 1$ , то промінь заломлюється на оптичній поверхні і тоді кут

$$\boxed{\varepsilon'_k = \arcsin \left( \frac{n_k}{n_{k+1}} \sin \varepsilon_k \right)}. \quad (5.15)$$

У зв'язку з тим, що  $\sigma_k = 0$ , кут  $\sigma'_k$  згідно формулі (5.11) має вираз:

$$\boxed{\sigma'_k = \varepsilon'_k - \varepsilon_k}. \quad (5.16)$$

Відстань  $s'_k$  може бути знайденою при використанні теореми синусів до трикутника  $\Delta P_k C_k A'_k$ . Згідно цієї теореми:

$$\frac{C_k A'_k}{C_k P_k} = \frac{\sin(-\varepsilon'_k)}{\sin(\sigma'_k)}.$$



Із рис. 5.4:  $C_k A'_k = s'_k - r_k$ ,  $C_k P_k = r_k$ , а  $\sin(-\varepsilon'_k) = \frac{n_k}{n_{k+1}} \frac{h_k}{r_k}$ .

Після підстановки значень у попереднє рівняння, отримуємо:

$$s'_k - r_k = r_k \frac{\sin(-\varepsilon'_k)}{\sin \sigma'_k} = r_k \frac{n_k h_k}{n_{k+1} r_k} \frac{1}{\sin \sigma'_k} = \frac{n_k}{n_{k+1}} \frac{h_k}{\sin \sigma'_k}, \text{ звідки}$$

$$\boxed{s'_k = r_k + \frac{n_k}{n_{k+1}} \frac{h_k}{\sin \sigma'_k}}. \quad (5.17)$$

Розрахунок ходу променя через наступну оптичну поверхню з номером  $k+1$  потребує визначення для неї вихідних параметрів променя  $\sigma_{k+1}$  та  $s_{k+1}$ .

Кут  $\sigma_{k+1} = \sigma'_k$ , а відстань  $s_{k+1}$  можна знайти із рівняння відрізків (рис. 5.9):

$$s'_k - s_{k+1} = d_k,$$

звідки

$$s_{k+1} = s'_k - d_k. \quad (5.18)$$

Формули (5.5)–(5.18) дозволяють розрахувати хід **дійсного променя** через центровану оптичну систему з будь-якою кількістю оптичних поверхонь. Для цього вказані формули потрібно послідовно використовувати до кожної поверхні, починаючи з першої і до останньої. Послідовність таких дій показана у Завданнях, наведених нижче.

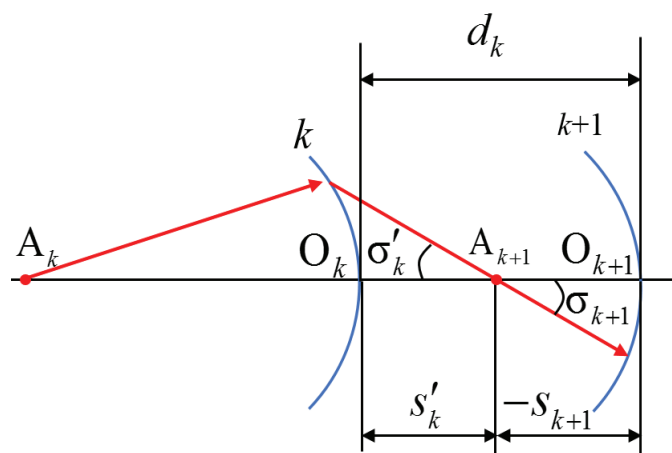


Рис. 5.9. До визначення параметрів променя відносно оптичної поверхні з номером  $k+1$

**Завдання 5.1.** Розрахувати хід заданого променя через оптичну систему з конструктивними параметрами:

$$\begin{aligned}
 n_1 &= 1 \\
 r_1 &= -50 \\
 d_1 &= 10 \quad n_2 = 1.5163 \\
 r_2 &= -50 \\
 d_2 &= -10 \quad n_3 = -1.5163 \\
 r_3 &= -50 \\
 n_4 &= -1
 \end{aligned}$$

Промінь на вході в систему паралельний оптичній осі,  $\sigma_1 = 0$ , і входить в систему на висоті  $h_1 = 25$  мм.

**Розв'язання.**

*Розрахунок ходу променя через оптичну поверхню з індексом  $k = 1$ .*

Кут нахилу променя до оптичної осі  $\sigma_1 = 0$ , це означає, що промінь паралельний оптичній осі, тому для розрахунку його ходу потрібно використовувати формули (5.12)–(5.17):

$$\text{а) } \sin \varepsilon_1 = -\frac{h_1}{r_1} = -\frac{25}{-50} = 0.5;$$

$$\text{б) } \varepsilon_1 = \arcsin\left(-\frac{h_1}{r_1}\right) = \arcsin(0.5) = 30^\circ;$$

$$\text{в) } \sin \varepsilon'_1 = \frac{n_1}{n_2} \sin \varepsilon_1 = \frac{1}{1.5163} \sin 30^\circ = 0.329750;$$

$$\text{г) } \varepsilon'_1 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \varepsilon_1\right) = \arcsin(0.329750) = 19.2536^\circ;$$

$$\text{д) } \sigma'_1 = \varepsilon'_1 - \varepsilon_1 = 19.2536 - 30^\circ = -10.7464;$$

$$\text{е) } s'_1 = r_1 + \frac{n_1}{n_2} \frac{h_1}{\sin \sigma'_1} = -50 + \frac{1}{1.5163} \frac{25}{\sin(-10.7464)} = -138. \text{ мм.}$$

*Розрахунок ходу променя через оптичну поверхню з індексом  $k = 2$ .*

Кут нахилу променя до оптичної осі  $\sigma_2 = \sigma'_1 = -10.7464$ ;  $s_2 = s'_1 - d_1 = -138.42271 - 10 = -148.42271$  мм, це означає, що предметна

точка для цієї поверхні знаходиться на кінцевій відстані,  $s_2 \neq \infty$ . Тому для розрахунку ходу променя через цю поверхню потрібно використовувати формули (5.5)–(5.11), але з урахуванням того, що друга поверхня дзеркальна, так як  $\frac{n_2}{n_3} = -1$ :

$$\text{а) } \sin \varepsilon_2 = \frac{r_2 - s_2}{r_2} \sin \sigma_2 = \frac{-50 - (-148.4223)}{-50} \sin(-10^\circ.7464) = 0.367043;$$

$$\text{б) } \varepsilon_2 = \arcsin(0.367043) = 21^\circ.53334;$$

$$\text{в) } \sin \varepsilon'_2 = \frac{n_2}{n_3} \sin \varepsilon_2 = -1 \cdot 0.367043 = -0.367043;$$

$$\text{г) } \varepsilon'_2 = \arcsin(-0.367043) = -21^\circ.53334;$$

$$\text{д) } \sigma'_2 = \sigma_2 + \varepsilon'_2 - \varepsilon_2 = -10^\circ.7464 + (-21^\circ.53334) - 21^\circ.53334 = -53^\circ.813;$$

$$\text{е) } s'_2 = r_2 + \frac{n_2}{n_3} (s_2 - r_2) \frac{\sin \sigma_2}{\sin \sigma'_2} = -50 + (-1) \cdot (-148.2227 - (-50)) \frac{\sin(-10.7464)}{\sin(-53^\circ.81308)} =$$

$$= -27.3077 \text{ мм.}$$

*Розрахунок ходу променя через оптичну поверхню з індексом  $k = 3$ .*

Кут нахилу променя до оптичної осі  $\sigma_3 = \sigma'_2 = -53^\circ.81308$ , предметна точка віддалена від оптичної поверхні на кінцеву відстань:

$$s_3 = s'_2 - d_2 = -27.3077 - (-10) = -17.3077 \text{ мм,}$$

тому для розрахунку ходу променя через цю поверхню потрібно використовувати формули (5.5)–(5.11)

$$\text{а) } \sin \varepsilon_3 = \frac{r_3 - s_3}{r_3} \sin \sigma_3 = \frac{-50 - (-17.3077)}{-50} \sin(-53^\circ.81308) = -0.527716;$$

$$\text{б) } \varepsilon_3 = \arcsin\left(\frac{r_3 - s_3}{r_3} \sin \sigma_3\right) = \arcsin(-0.527716) = -31^\circ.85126;$$

$$\text{в) } \sin \varepsilon'_3 = \frac{n_3}{n_4} \sin \varepsilon_3 = \frac{-1.5163}{-1} (-0.527716) = -0.800176;$$

$$\text{г) } \varepsilon'_3 = \arcsin\left(\frac{n_3}{n_4} \frac{r_3 - s_3}{r_3} \sin \sigma_3\right) = \arcsin(-0.800176) = -53^\circ.14689;$$

$$\text{д) } \sigma'_3 = \sigma_3 + \varepsilon'_3 - \varepsilon_3 = -53^\circ.81308 + (-53^\circ.14689) - (-31^\circ.85126) = -75.10871;$$

$$\text{е) } s'_3 = r_3 + \frac{n_3}{n_4} (s_3 - r_3) \frac{\sin \sigma_3}{\sin \sigma'_3} =$$

$$= -50 + \frac{-1.5163}{-1}(-17.3077 - (-50)) \frac{\sin(-53^\circ.81308)}{\sin(-75.10871)} = -8.6008(\text{мм}).$$

Задану оптичну систему і результат розрахунку ходу через неї заданого променя показано на рис. 5.10.

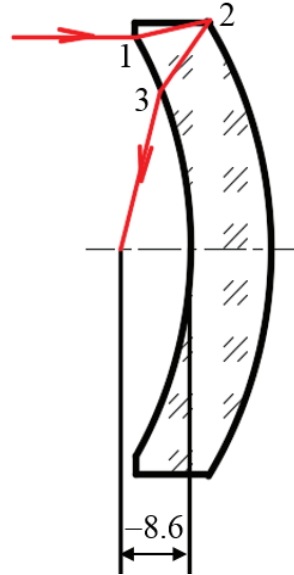


Рис. 5.10. До завдання 5.1: результат розрахунку ходу заданого променя через задану оптичну систем

### Розрахунок ходу променя при $r = \infty$

В оптичних системах доволі часто присутні плоскі оптичні поверхні. Ними можуть бути одна з двох поверхонь лінз, поверхні пластин, призм, дзеркал та інші. Плоску поверхню можна розглядати як сферичну з радіусом  $r = \infty$ . Але при такому значенні радіуса формули (5.5)–(5.10) отримують математичну невизначеність, через що їх неможливо використовувати в тому вигляді, який вони мають.

На рис. 5.11 показано плоску оптичну поверхню, що розділяє два оптичних середовища з показниками заломлення  $n_k, n_{k+1}$ . Промінь має вихідні параметри  $s_k$  та  $\sigma_k$ . Результатом розрахунку ходу променя повинно стати значення відрізка  $s'_k$  та кута  $\sigma'_k$ .

З представленого рисунку видно, що кут падіння  $\varepsilon_k = \sigma_k$ , а кут заломлення  $\varepsilon'_k = \sigma'_k$ .

Згідно закону заломлення

$$\boxed{\sin \varepsilon'_k = \frac{n_k}{n_{k+1}} \sin \varepsilon_k} \quad (5.19)$$

так як  $\sigma'_k = \varepsilon'_k$ , то

$$\sigma'_k = \arcsin \left( \frac{n_k}{n_{k+1}} \sin \varepsilon_k \right). \quad (5.20)$$

З рис. 5.11 видно, що відрізок  $s'_k = h_k \operatorname{ctg} \sigma'_k$ , а відрізок  $h_k = s_k \operatorname{tg} \sigma_k$ , звідки

$$s'_k = s_k \operatorname{tg} \sigma_k \operatorname{ctg} \sigma'_k, \text{ або } s'_k = s_k \frac{\operatorname{tg} \sigma_k}{\operatorname{tg} \sigma'_k}. \quad (5.21)$$

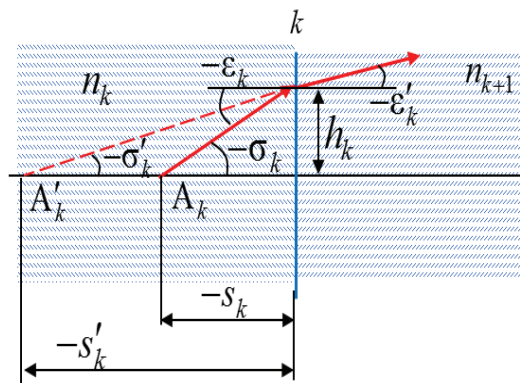


Рис. 5.11. До розрахунку ходу променю через пласку оптичну поверхню

**Завдання 5.2.** Розрахувати хід заданого променю через оптичну систему з конструктивними параметрами:

$$\begin{aligned} n_1 &= 1 \\ r_1 &= 50 \\ d_1 &= 10 & n_2 &= 1.5163 \\ r_2 &= \infty \\ d_2 &= -10 & n_3 &= 1 \end{aligned}$$

Предметна точка на безкінечності, тобто  $s_1 = \infty$ ,  $\sigma_1 = 0$ , висота променю над оптичною віссю  $h_1 = 20$ .

**Розв'язання.**

Розрахунок ходу променю через оптичну поверхню з індексом  $k = 1$ .

Кут нахилу променю до оптичної осі  $\sigma_1 = 0$ , це означає, що промінь паралельний оптичній осі, тому для розрахунку його ходу потрібно використовувати формули (5.12)–(5.17):

$$\text{a) } \sin \varepsilon_1 = -\frac{h_1}{r_1} = -\frac{20}{50} = -0.4;$$

$$\text{б) } \varepsilon_1 = \arcsin\left(-\frac{h_1}{r_1}\right) = \arcsin(-0.4) = -23.^\circ 57818;$$

$$\text{в) } \sin \varepsilon'_1 = \frac{n_1}{n_2} \sin \varepsilon_1 = \frac{1}{1.5163}(-0.4) = -0.263800;$$

$$\text{г) } \varepsilon'_1 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \varepsilon_1\right) = \arcsin(-0.263800) = -15.^\circ 29566;$$

$$\text{д) } \sigma'_1 = \varepsilon'_1 - \varepsilon_1 = -15.^\circ 29566 - (-23.^\circ 57818) = 8.^\circ 28252;$$

$$s'_1 = r_1 + \frac{n_1}{n_2} \frac{h_1}{\sin \sigma'_1} = 50 + \frac{1}{1.5163} \frac{20}{\sin(8.^\circ 28252)} = 141.562705 \text{ мм.}$$

Розрахунок ходу променю через оптичну поверхню з індексом  $k = 2$ .

Поверхня 2 має радіус  $r_2 = \infty$ , тому для розрахунку променю через цю поверхню потрібно використовувати формули (5.19)–(5.21):

$$\sigma_2 = \sigma'_1 = 8.^\circ 28252, \quad s_2 = s'_1 - d_1 = 141.56271 - 10 = 131.56271;$$

$$\text{а) } \varepsilon_2 = \sigma_2 = 8.^\circ 28252;$$

$$\text{б) } \sin \varepsilon'_2 = \frac{n_2}{n_3} \sin \varepsilon_2 = \frac{1.5163}{1} \sin 8.^\circ 28252 = 0.2184295;$$

$$\text{в) } \varepsilon'_2 = \arcsin(0.2184295) = 12.^\circ 616807;$$

$$\text{г) } \sigma'_2 = \varepsilon'_2 = 12.^\circ 616807;$$

$$\text{д) } s'_2 = s_2 \frac{\text{tg } \sigma_2}{\text{tg } \sigma'_2} = 131.56271 \frac{\text{tg } 8.^\circ 28252}{\text{tg } 12.^\circ 616807} = 85.5629 \text{ мм.}$$

Результат розрахунку ходу заданого променю через задану оптичну систему показано на рис. 5.12.

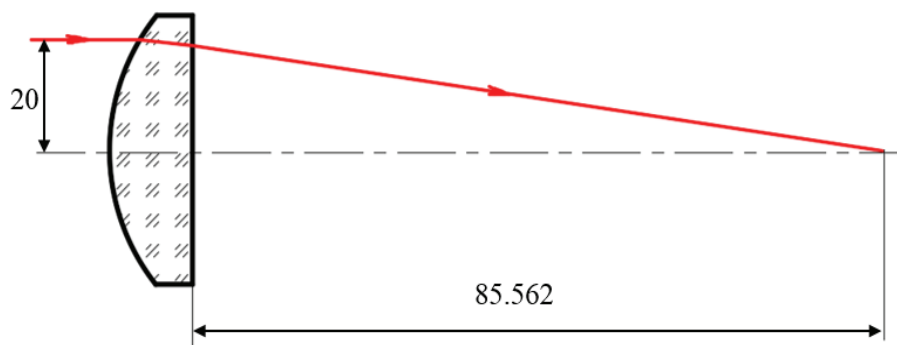


Рис. 5.12. До завдання 5.2:– результат розрахунку ходу заданого променю через задану оптичну систему



Формули (5.5)–(5.21) мають назву **тригонометричних формул розрахунку ходу дійсного променя** через оптичну поверхню. До появи комп'ютерної техніки такі розрахунки за цими формулами здійснювалися «вручну» з використанням семизначних таблиць тригонометричних функцій, таблиць логарифмів та механічних арифмометрів. Для усунення можливих помилок оптики-тригонометристи в парі незалежно один від одного здійснювали розрахунки ходу променя через кожну оптичну поверхню системи і на кожному кроці звіряли свої результати. При не співпадінні результатів, розрахунок повторювали.

Рутинна і дуже трудомістка робота, пов'язана з розрахунками ходу променів через оптичну систему, була нарешті автоматизована за допомогою комп'ютерної техніки. Але при цьому виявилися недоліки тригонометричних формул. По-перше, комп'ютер не може оперувати безкінечно великими цифрами. По-друге, не дуже зручним у програмуванні є перехід від однієї групи формул до інших. Але найбільшим недоліком цих формул є те, що в них використовуються функції  $\sin(x)$  і  $\arcsin(x)$ . Такі функції в комп'ютерних програмах представляються степеневими рядами, збіжність яких суттєво погіршується при зростанні значень їх аргументів. Особливо це стосується функції  $\arcsin(x)$ . Перші комп'ютери ще не мали тієї швидкодії і продуктивності, які мають сучасні комп'ютери, тому використання в комп'ютерних програмах алгоритму розрахунків ходу променів за допомогою тригонометричних формул виявилось дуже не раціональним. Через це почалася модернізація алгоритмів, спрямована на усунення недоліків тригонометричних формул. Найкращим виявився алгоритм американського оптика Д. Федера, якій в публікації від 1951 році запропонував векторний алгоритм розрахунку ходу променя. Цей алгоритм і досі використовується в комп'ютерних програмах. Його переваги над усіма іншими алгоритмами:

- 1) повна відсутність тригонометричних функцій;
- 2) використання в алгоритмі лише одного квадратного кореню на одну оптичну поверхню при тому, що це «найскладніша» математична функція в алгоритмі, степеневий ряд якої має набагато кращу збіжність у порівнянні з тригонометричними функціями;
- 3) відсутність змінних, таких як  $s'_k$  чи  $s_k$ , які можуть приймати безкінечні значення;
- 4) відсутність формул, які сприяють втраті потрібної точності розрахунків;

5) відсутність необхідності переходу до інших формул при безкінечних радіусах, властивих плоским оптичним поверхням.

З алгоритмом Д. Федера можна ознайомитися більш детально в монографії Г.Г. Слюсарєва [3].

Хоча через вище вказані недоліки тригонометричні формули розрахунку ходу променя через сферичні оптичні поверхні використовуються обмежено, тим не менш вони зіграли свою важливу теоретичну і практичну роль у прикладній геометричній оптиці. Тригонометричні формули стали основою теорії параксіальних та нульових променів, тобто теорії гаусової оптики, яка і досі є фундаментом сучасної теорії оптичних систем.

### **Завдання до самостійного розв'язку**

**Завдання 5.3.** Сферична оптична поверхня з радіусом  $r_1 = 50$  мм розділяє два оптичних середовища з показниками заломлення  $n_1 = 1$  та  $n_2 = 1.5163$ . Із безкінечно віддаленої осьової предметної точки на поверхню, паралельно оптичній осі надходять три промені. Вони в просторі предметів складають гомоцентричний пучок. Висоти променів на поверхні становлять відповідно  $h = 10, 20, 30$  мм. Визначте, чи перетинаються ці промені після проходження поверхні в одній точці, тобто чи зберігається після заломлення на сферичній поверхні гомоцентричність пучка?

**Відповідь.** Гомоцентричність пучка променів після їх заломлення на сферичній поверхні не зберігається, тому що кожний з променів перетинає оптичну вісь на різних від поверхні відстанях:  $s'_{11} = 145.55$  мм,  $s'_{12} = 141.56$  мм,  $s'_{13} = 134.38$  мм.

**Завдання 5.4.** На сферичну дзеркальну поверхню з радіусом  $r_1 = -200$  мм паралельно оптичній осі надходить пучок з трьох променів, висоти яких над оптичною віссю становлять відповідно 10, 20, 30 мм. Визначте, чи зберігається гомоцентричність цього пучка променів після відбиття від сферичної дзеркальної поверхні?

**Відповідь.** Гомоцентричність пучка променів після їх відбиття на сферичній дзеркальній поверхні не зберігається через те, що кожний з цих променів перетинає оптичну вісь після відбиття на різних від поверхні відстанях:  $s'_{11} = -100.125$  мм,  $s'_{12} = -100.5$  мм,  $s'_{13} = -101.12$  мм, тобто в різних точках.

**Завдання 5.5.** На плоску оптичну поверхню, що розділяє два оптичних середовища з показниками заломлення  $n_1 = 1$  та  $n_2 = 1.5163$ ,

надходить гомоцентричний пучок із трьох променів. Пучок виходить з точки на оптичній осі, яка віддалена від пласкої поверхні на відстань  $s_1 = -50$  мм. Промені мають кут  $\sigma_1$  нахилу до оптичної осі відповідно  $-10^\circ$ ,  $-20^\circ$ ,  $-30^\circ$ . Визначте, чи зберігається після заломлення на пласкій оптичній поверхні гомоцентричність цього пучка променів?

**Відповідь.** Гомоцентричність пучка променів після їх заломлення на пласкій поверхні не зберігається через те, що кожний з цих променів перетинає оптичну вісь після заломлення на різних від поверхні відстанях:

$$s'_{11} = -76.48 \text{ мм}, s'_{12} = -78.60 \text{ мм}, s'_{13} = -82.65 \text{ мм},$$

тобто в різних точках.

**Завдання 5.6.** На сферичну поверхню з радіусом  $r_1 = 50$  мм надходить гомоцентричний пучок з трьох променів. Поверхня розділяє два оптичних середовища з показниками заломлення  $n_1 = 1$  та  $n_2 = 1.5163$ . Предметна точка уявна, тому що  $s_1 = 125.8150$  мм. Промені мають кут нахилу до оптичної осі  $10^\circ$ ,  $20^\circ$ , та  $30^\circ$  відповідно. Визначте, чи зберігається гомоцентричність пучка променів після їх заломлення на вказаній оптичній поверхні?

**Відповідь.** Гомоцентричність пучка променів після їх заломлення на вказаній сферичній поверхні зберігається, тому що кожний з цих променів перетинає оптичну вісь після заломлення на однаковій від поверхні відстані:

$$s'_{11} = 82.975 \text{ мм}, s'_{12} = 82.975 \text{ мм}, s'_{13} = 82.975 \text{ мм},$$

тобто в одній точці.

### 5.3. Розрахунок ходу променя через асферичну оптичну поверхню

На рис. 5.13 показана оптична асферична поверхня на яку надходить промінь із предметної точки А. Поверхня розділяє два оптичних однорідних середовища з показниками заломлення  $n$  та  $n'$ . Твірна  $y(z)$  асферичної поверхні задана функцією

$$y^2 = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots \quad (5.22)$$

Промінь, як лінія, задано функцією

$$y = a z + b. \quad (5.23)$$

Відрізок  $s$  та кут  $\sigma$ , дозволяють визначити значення параметрів променю  $a$  та  $b$ . Так з рис. 5.13 видно, що параметр  $b = s \cdot \operatorname{tg} \sigma$ .

При  $y = 0$   $z = s$ . Підстановка цих значень  $y$  та  $z$  у (5.23) призводить до рівняння  $as + s \cdot \operatorname{tg} \sigma = 0$ , з якого параметр  $a = -\operatorname{tg} \sigma$ , звідки кінцеве рівняння променю:

$$y = (s - z) \operatorname{tg} \sigma = s \operatorname{tg} \sigma - z \operatorname{tg} \sigma$$

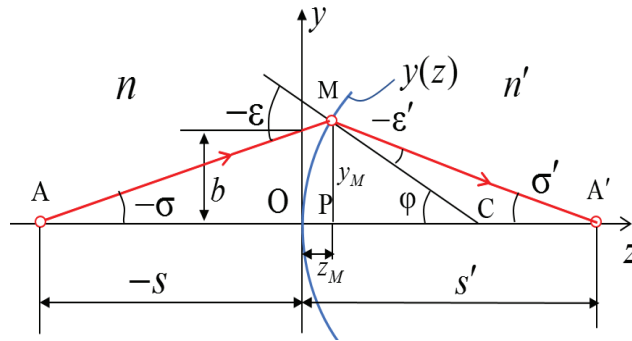


Рис. 5.13. До розрахунку ходу променю через асферичну поверхню

Порядок розрахунку ходу променю:

1. Знаходять координати точки М – точки перетину променю і оптичної поверхні шляхом розв’язання системи, складеної з рівнянь (5.22) і (5.23). Корені цієї системи є координатами точки М  $[y_M, z_M]$ . Якщо система рівнянь має декілька пар коренів, тобто лінія променю декілька раз перетинає лінію твірної, то обирають ту пару, яку промінь утворює вперше по ходу від точки А – координати точки М, показаної на рис. 5.13.

2. Розраховують кут  $\varphi$ . Для цього знаходять вираз похідної  $\left. \frac{dy}{dz} \right|_{y=y_M, z=z_M}$  від функції твірної (5.22) і розраховують її значення в

точці М.

3. Значення  $\operatorname{tg} \varphi = \left( \left. \frac{dy}{dz} \right|_{y=y_M, z=z_M} \right)^{-1}$ , звідки  $\varphi = \operatorname{arctg} \left( \left. \frac{dy}{dz} \right|_{y=y_M, z=z_M} \right)^{-1}$ . (5.24)

Якщо твірна оптичної поверхні задана як  $z(y)$ , див. (5.2) або (5.3), то

$$\operatorname{tg} \varphi = \left( \left. \frac{dz}{dy} \right|_{y=y_M, z=z_M} \right), \quad \varphi = \operatorname{arctg} \left( \left. \frac{dz}{dy} \right|_{y=y_M, z=z_M} \right). \quad (5.25)$$

4. Розраховують значення кута падіння:

$$\varepsilon = \sigma - \varphi. \quad (5.26)$$

5. Розраховують кут заломлення, використовуючи закон заломлення:

$$\sin \varepsilon' = \frac{n}{n'} \sin \varepsilon, \text{ звідки } \varepsilon' = \arcsin(\sin \varepsilon'). \quad (5.27)$$

6. Розраховують кут  $\sigma'$  з рівняння  $\varphi = -\varepsilon' + \sigma'$  (див. рис. 5.13), з якого

$$\varphi = -\varepsilon' + \sigma'. \quad (5.28)$$

7. З трикутника  $\triangle MPA'$ :

$$\frac{y_M}{s' - z_M} = \operatorname{tg} \sigma',$$

звідки:

$$s' = \frac{y_M}{\operatorname{tg} \sigma'} + z_M = y_M \operatorname{ctg} \sigma' + z_M. \quad (5.29)$$

**Завдання 5.7.** На асферичну дзеркальну поверхню – параболоїд з радіусом кривизни на оптичній осі  $r_1 = -200$  мм паралельно оптичній осі надходить пучок з трьох променів, висоти яких над оптичною віссю становлять відповідно 10, 20, 30 мм. Визначте, чи зберігається гомоцентричність цього пучка променів після відбиття від параболоїдної дзеркальної поверхні?

**Розв'язання.**

1. Розрахунки координат перетину променів з оптичною поверхнею.

Параболоїд – поверхня, твірна якої згідно виразу (5.1) і даних таблиці коефіцієнтів ексцентриситету поверхонь другого степеневого порядку, має вигляд:

$$y^2 = 2r_1 z = 2 \cdot (-200) z = -400 z.$$

Всі три промені паралельні оптичній осі, тому у всіх трьох променів кут  $\sigma = 0^\circ$ , а  $\sigma' = 0^\circ$ , де  $h_i$  – висота на поверхні променю з номером  $i$ . Координату  $z_{M_i}$  кожного променю можна знайти з рівняння твірної  $z_{M_i} = \frac{y_{M_i}^2}{2r_1}$ . Результати розрахунку координат  $[y_{M_i}, z_{M_i}]$  наведені в табл. 5.2.

2. *Розрахунки кута  $\varphi_i$  для кожного променя.*

Кут  $\varphi_i$  доцільно розраховувати за формулою (5.25), в якій твір-на представлена у вигляді

$$z = \frac{y^2}{2r_1},$$

похідна від якої:

$$\frac{dz}{dy} = \frac{y}{r_1}.$$

Значення похідної для кожного променя у точках М, де вони перетинають поверхню, розраховуються з використанням тільки координати  $y_M$ , так як у даному випадку параметр  $z$  у формулі похідної відсутній. Результати розрахунку похідної для кожного променя представлені в табл. 5.2.

3. *Розрахунки кута  $\varphi_i$ .*

Розрахунки здійснюються за формулою (5.25), результати представлені в табл. 5.2.

4. *Розрахунки кута падіння  $\varepsilon_i$ .*

Кут  $\varepsilon_i$  розраховується за формулою (5.26). При  $\sigma_i = 0$  кут  $\varepsilon_i = -\varphi_i$ , значення  $\varepsilon_i$  представлені у табл. 5.2.

5. *Розрахунки кута відбиття  $\varepsilon'_i$ .*

При відбитті  $\frac{n}{n'} = -1$ , тому, згідно (5.27)  $\varepsilon'_i = -\varepsilon_i$ , значення  $\varepsilon'_i$  представлені в табл. 5.2.

6. *Розрахунки кута  $\sigma'_i$ .*

Кут  $\sigma'_i$  розраховується за формулою (5.28):  $\sigma'_i = \varphi_i + \varepsilon'_i$ , результати розрахунку представлені в табл. 5.2.

7. *Розрахунки відрізка  $s'_i$ .*

Відрізок  $s'_i$  розраховується за формулою (5.29):  $s'_i = y_{M_i} \operatorname{ctg} \sigma'_i + z_{M_i}$ , результати розрахунку представлені в табл. 5.2.



## Результати розрахунку до завдання 5.7

$i$	$y_{M_i}$ [мм]	$z_{M_i}$ [мм]	$\left(\frac{dz}{dy}\right)_i = \frac{y_{M_i}}{r_1}$	$\varphi_i$ [град]	$\varepsilon_i$ [град]	$\varepsilon'_i$ [град]	$\sigma'_i$ [град]	$s'_i$ [мм]
1	10	0.25	-0.05	-2.8624	2.8624	-2.8624	-5.7248	-100.000
2	20	1.00	-0.10	-5.7106	5.7106	-5.7106	-11.4212	-100.000
3	30	2.25	-0.15	-8.5308	8.5308	-8.5308	-17.0615	-100.000

З представленого в таблиці видно, що значення  $s'_i$  у всіх трьох променях збігаються, а це означає, що дзеркальний параболоїд не порушує гомоцентричності відбитих променів, які надходять в дзеркало паралельним до оптичної осі пучком.

## РОЗДІЛ 6. ОПТИКА ПАРАКСІАЛЬНИХ ТА НУЛЬОВИХ ПРОМЕНІВ

В розд. 5 розглянуто алгоритми розрахунку ходу променів через оптичні поверхні, з яких складаються оптичні системи. Теоретичною основою цих алгоритмів слугують закони геометричної оптики. **Промені, які в оптичних системах заломлюються чи відбиваються згідно законам геометричної оптики безпосередньо на оптичних поверхнях, називають дійсними.**

Тригонометричні формули та інші аналогічні формули, створені для розрахунків ходу дійсних променів, точно моделюють хід будь-якого дійсного променя через оптичну систему. Їх головна перевага і практична цінність полягає в тому, що вони дозволяють виявляти і досліджувати абераційні властивості конкретних оптичних систем, отримувати параметри і характеристики якості зображень і на цій основі синтезувати оптичні системи з потрібними функціональними параметрами і можливостями.

Проте складність цих алгоритмів і велика трудомісткість їх використання суттєво перешкоджає їх застосуванню на ранніх стадіях синтезу оптичних систем, коли задача забезпечення якості зображень ще не є першочерговою, або не є принципово важливою чи критичною.



*Йоган Карл Фрідрих Гаус,  
німецький математик,  
фізик та астроном  
(1777–1855)*

Задача зменшення трудомісткості і математичної складності формул розрахунку ходу променів була особливо актуальною у період відсутності обчислювальної техніки. Це призвело до розробки розділу оптики, в якому дійсні промені обмежувалися параксіальною областю, а потім замість них стали використовуватися фіктивні нульові промені, що суттєво спростило аналіз дії і синтез оптичних систем.

Значний внесок у розвиток оптики параксіальних та нульових променів зробив німецький вчений І. Гаус. Тому оптику параксіальних та нульових променів називають гаусовою оптикою.

Наукова та практична цінність оптики параксіальних та нульових променів не втратили своєї значущості і в наш час – час існу-

вання потужної обчислювальної техніки, тому цей розділ геометричної оптики залишається важливим в сучасній теорії оптичних систем.

## 6.1. Параксіальні промені

Практика розрахунку ходу променів осьових пучків через оптичні системи свідчить про те, що після проходження через систему пучки променів дуже не часто зберігають гомоцентричність. Однак ці промені все ж перетинають оптичну вісь на недалекій відстані один від одного і дають більш-менш точну уяву про розташування на осі зображення осьової предметної точки. Чим ближче до оптичної осі розташовані промені осьового пучка, тим щільніше вони перетинають вісь навколо однієї точки, тим більше такий пучок наближається до гомоцентричного.

**Промені, які мають малий кут нахилу до оптичної осі чи малі кути падіння і заломлення (відбиття) називають параксіальними.** Термін *параксіальний* складається з двох слів: *para* (грецьке) означає *біля* та *axis* (латинське) означає *вісь*. Тобто параксіальний промінь – це той, що проходить через оптичну систему біля (близько до) оптичної осі, або близько до нормалі к оптичній поверхні в точці перетину променю з поверхнею.

Користь від використання параксіальних променів полягає в тому, що при малих кутах  $\sigma, \varepsilon, \varepsilon', \sigma'$  можлива заміна з деякою допустимою похибкою значень тригонометричних функцій значеннями їх аргументів в радіанах.

Така заміна можлива при малих значеннях аргументу  $x$ , що видно з розкладу цих функцій в степеневий ряд:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots;$$
$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots$$

Степеневі ряди вказаних функцій показують, що значення  $\sin x$  відрізняється від значення аргументу  $x$  в радіанах не більш ніж на:

$$\pm 1 \cdot 10^{-6} \text{ в діапазоні кутів } x \text{ від } 0^\circ \text{ до } \pm 1.04^\circ;$$
$$\pm 1 \cdot 10^{-5} \text{ в діапазоні кутів } x \text{ до } \pm 2.24^\circ;$$
$$\pm 1 \cdot 10^{-4} \text{ в діапазоні кутів } x \text{ до } \pm 4.83^\circ;$$

значення функції  $\operatorname{tg} x$  відрізняється від значення аргументу  $x$  в радіанах не більш ніж на:

$$\pm 1 \cdot 10^{-6} \text{ в діапазоні кутів } x \text{ до } \pm 0.83^\circ;$$

$$\pm 1 \cdot 10^{-5} \text{ в діапазоні кутів } x \text{ до } \pm 1.78^\circ;$$

$$\pm 1 \cdot 10^{-4} \text{ в діапазоні кутів } x \text{ до } \pm 3.83^\circ;$$

значення функції  $\sin x$  відрізняється від значення функції  $\operatorname{tg} x$  не більш ніж на:

$$\pm 1 \cdot 10^{-6} \text{ в діапазоні кутів } x \text{ до } \pm 1.04^\circ;$$

$$\pm 1 \cdot 10^{-5} \text{ в діапазоні кутів } x \text{ до } \pm 2.42^\circ;$$

$$\pm 1 \cdot 10^{-4} \text{ в діапазоні кутів } x \text{ до } \pm 4.82^\circ.$$

При розрахунках ходу дійсних променів з метою аналізу якості зображень достатня точність результатів досягається зазвичай при похибці визначення функцій  $\sin x$  чи  $\operatorname{tg} x$  в діапазоні  $\pm 1 \cdot 10^{-6}$ . Із наведеного вище витікає, що таку похибку заміною функцій  $\sin x$  чи  $\operatorname{tg} x$  значеннями їх аргументів у радіанах можна досягти, коли промені утворюють з осями кути в діапазоні приблизно від нуля до  $\pm 1^\circ$ . Такий діапазон кутів є областю параксіальних променів.

Розміри області параксіальних променів, як видно, залежать від вимог до допустимих похибок відтворення тригонометричних функцій, тому вони не можуть бути сталими.

В області параксіальних променів закон заломлення згідно (3.20) має вигляд

$$\boxed{n \cdot \varepsilon = n' \cdot \varepsilon'}, \quad (6.1)$$

а для оптичної поверхні з номером  $k$  в оптичній системі:

$$\boxed{n_k \cdot \varepsilon_k = n_{k+1} \cdot \varepsilon_{k+1}}. \quad (6.2)$$

Спрощений математичний вираз закону заломлення (6.1) суттєво спрощує розрахунки ходу параксіального променя через оптичні поверхні оптичної системи. Важливим для практики розрахунків є те, що **в параксіальній області асферичні поверхні центрованої оптичної системи сприймаються як сферичні** з радіусом кривизни на оптичній осі. В цьому є додаткова перевага використання параксіальних променів для аналізу дії оптичних систем, складених із різних типів оптичних поверхонь.

## 6.2. Розрахунок ходу параксіального променя за формулою відрізків

Для розрахунку ходу параксіального променя через будь-яку складну центровану оптичну систему з метою знаходження положення зображень та їх параметрів достатньо мати формули розрахунку параксіального променя через заломлюючу оптичну поверхню, які можна потім послідовно використати для кожної поверхні системи від першої до останньої.

Вихідними даними для розрахунку ходу параксіального променя через поверхню з поточним номером  $k$  є:

$r_k$  – радіус сферичної поверхні,

$n_k, n_{k+1}$  – показники заломлення до і після оптичної поверхні, та

$s_k$  – відстань від поверхні до предметної осьової точки  $A_k$  (рис. 6.1).

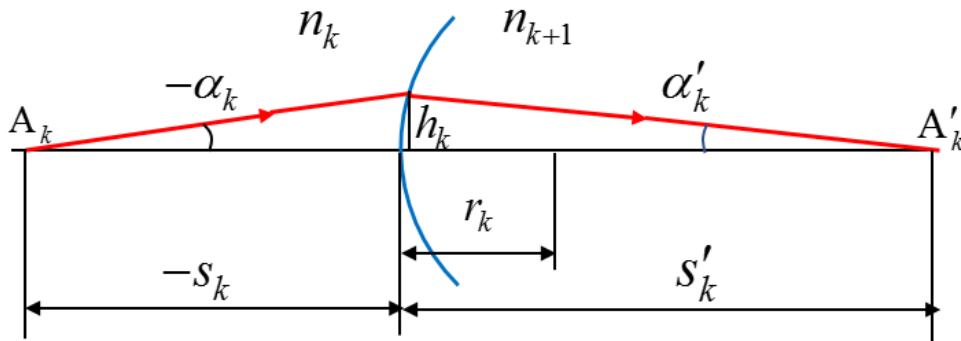


Рис. 6.1. До розрахунку ходу параксіального променя через оптичну поверхню

На рис. 6.1 кути нахилу параксіального променя до оптичної осі позначені буквою  $\alpha$  з метою відзначити, що вони належать саме параксіальному променю.

В результаті розрахунку ходу параксіального променя через оптичну поверхню потрібно знайти положення точки  $A'_k$  – зображення предметної точки, тобто потрібно знайти відрізок  $s'_k$ .

Параксіальний промінь – дійсний промінь, тому для розрахунку відрізка  $s'_k$  потрібно звернутися до формули (5.10) перетвореної до вигляду:

$$n_{k+1}(s'_k - r_k) = n_k(s_k - r_k) \frac{\sin \alpha_k}{\sin \alpha'_k}.$$

З рис. 6.1 в області параксіальних променів можна записати:

$$\sin \alpha_k \cong \operatorname{tg} \alpha_k = \frac{h_k}{s_k}, \quad \sin \alpha'_k \cong \operatorname{tg} \alpha'_k = \frac{h_k}{s'_k},$$

тому співвідношення  $\frac{\sin \alpha_k}{\sin \alpha'_k} = \frac{s'_k}{s_k}$ . Після підстановки цього співвідношення у попереднє рівняння отримуємо:

$$\frac{n_{k+1}(s'_k - r_k)}{s'_k} = \frac{n_k(s_k - r_k)}{s_k},$$

або

$$n_{k+1} \left( 1 - \frac{r_k}{s'_k} \right) = n_k \left( 1 - \frac{r_k}{s_k} \right). \quad (6.3)$$

Рівняння (6.3) називають **формулою Аббе** або **інваріантом Аббе**, хоча вперше вона була виведена Ньютоном. Після нескладного перетворення рівняння (6.3) отримує остаточний вигляд:

$$\boxed{\frac{n_{k+1}}{s'_k} - \frac{n_k}{s_k} = \frac{n_{k+1} - n_k}{r_k}}. \quad (6.4)$$

Рівняння (6.4) називають **формулою відрізків** параксіального променя. З цієї формули витікає формула розрахунку відрізка  $s'_k$ :

$$\boxed{s'_k = \frac{n_{k+1} r_k s_k}{(n_{k+1} - n_k) s_k + n_k r_k} = \frac{n_{k+1} r_k}{(n_{k+1} - n_k) + \frac{n_k r_k}{s_k}}}. \quad (6.5)$$

У випадку, коли оптична **поверхня є відбивальною** ( $n_{k+1} = -n_k$ ), рівняння (6.4) та формула (6.5) отримують вигляд:

$$\boxed{\frac{1}{s'_k} + \frac{1}{s_k} = \frac{2}{r_k}}, \quad (6.6)$$

$$\boxed{s'_k = \frac{r_k s_k}{2s_k - r_k} = \frac{r_k}{2 - \frac{r_k}{s_k}}}. \quad (6.7)$$

Формули (6.4)–(6.7) не мають в своєму складі тригонометричних функцій, що суттєво спрощує розрахунки відрізків  $s'_k$ . Точка  $A'_k$ , вона ж  $A_{k+1}$ , є предметною точкою для наступної оптичної



поверхні з номером  $k+1$ . Відрізок  $s_{k+1}$ , що вказує розташування точки  $A_{k+1}$  відносно поверхні з номером  $k+1$ , визначається за формулою:

$$\boxed{s_{k+1} = s'_k - d_k}, \quad (6.8)$$

Положення зображення, сформованого складною центрованою оптичною системою, яке визначається відрізком  $s'_p$ , де  $p$  – номер останньої оптичної поверхні, можна знайти шляхом розрахунку відрізків  $s'_k$ , починаючи з першого відрізка  $s'_1$ , застосовуючи для цього формули (6.5) або (6.7) та (6.8) послідовно до кожної оптичної поверхні.

**Завдання 6.1.** Знайдіть положення зображення осьової точки, сформоване оптичною системою із заданими конструктивними параметрами, якщо предметна осьова точка знаходиться на нескінченності:  $s_1 = \infty$ .

		$n_1 = 1$
$r_1 = 29.79$		
	$d_1 = 14.9$	$n_2 = 1.5168$
$r_2 = -110.9$		
	$d_2 = 3.0$	$n_3 = 1.7293$
$r_3 = 333.3$		
		$n_4 = 1$

**Розв'язання.**

1) розрахунок відрізка  $s'_1$ , що вказує положення зображення осьової точки, сформоване оптичною поверхнею 1: при  $s_1 = \infty$   $s'_1$  згідно формули (6.5):

$$s'_1 = \frac{n_2 r_1}{(n_2 - n_1) + \frac{n_1 r_1}{s_1}} = \frac{n_2 r_1}{n_2 - n_1} = \frac{1.5168 \cdot 29.79}{1.5168 - 1} = 87.4332 \text{ мм};$$

2) розрахунок відрізка  $s'_2$ , що вказує положення зображення осьової точки, сформоване оптичною поверхнею 2: предметна точка для поверхні 2 сформована поверхнею 1 і знаходиться від поверхні 2 на відстані  $s_2$ . Згідно (6.8):

$$s_2 = s'_1 - d_1 = 87.4332 - 14.9 = 72.5332 \text{ (мм)},$$

при цьому згідно (6.5):

$$s'_2 = \frac{n_3 r_2 s_2}{(n_3 - n_2) s_2 + n_2 r_2} = \frac{1.7293 \cdot (-110.9) \cdot 72.5332}{(1.7293 - 1.5168) \cdot 72.5332 + 1.5168 \cdot (-110.9)} = 91.0366 \text{ мм};$$

3) розрахунок відрізка  $s'_3$ , що вказує положення зображення осьової точки, сформоване оптичною поверхнею 3 і всією оптичною системою. Предметна точка для поверхні 3 сформована попередньою поверхнею 2 і знаходиться від поверхні 3 на відстані:

$$s_3 = s'_2 - d_2 = 91.0366 - 3 = 88.0366 \text{ (мм)},$$

при цьому

$$s'_3 = \frac{n_4 r_3 s_3}{(n_4 - n_3) s_3 + n_3 r_3} = \frac{1 \cdot 333.3 \cdot 88.0366}{(1 - 1.7293) \cdot 88.0366 + 1.7293 \cdot (333.3)} = 57.291 \text{ мм.}$$

Задана оптична система і розташування сформованого в параксіальних променях системою зображення  $A'_3$  безкінечно віддаленої осьової предметної точки  $A_1$  показано на рис. 6.3.

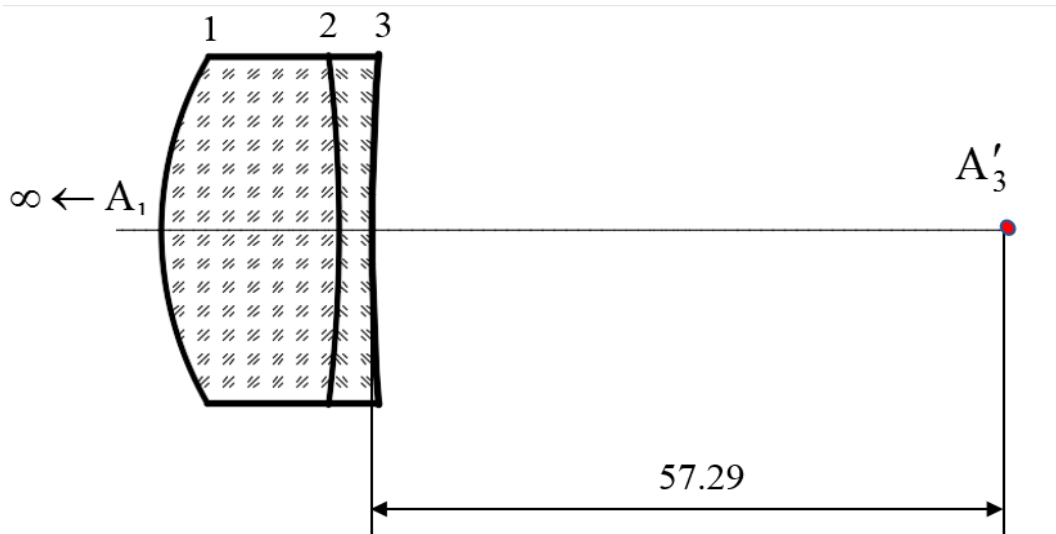


Рис. 6.3. До розрахунку відрізка  $s'_3$  згідно завдання 6.2

**Завдання 6.2 (для самостійного розв'язку).** Знайдіть положення сформованих заданою оптичною системою зображень двох осьових предметних точок, якщо перша предметна точка віддалена від першої поверхні системи на відстань  $s_1 = -\infty$ , а друга предметна точка – на відстань  $s_1 = -1000$  мм.

		$n_1 = 1$
$r_1 = -50$		
	$d_1 = 10$	$n_2 = 1.5163$
$r_2 = -50$		
	$d_2 = -10$	$n_3 = -1.5163$
$r_3 = -50$		
		$n_4 = -1$

**Відповідь.** Зображення першої осьової точки знаходиться на відстані  $s'_3 = -15.04$  мм, зображення другої точки – на відстані  $s'_3 = -20.34$  мм.

### 6.3. Розрахунок ходу параксіального променя за формулою кутів і висот

Формули (6.4)–(6.8) є набагато зручнішими у порівнянні з тригонометричними формулами при розрахунках ходу параксіальних променів в оптичних системах. Проте і вони не вільні від вад. Головна вада полягає в тому, що промені з малими кутами нахилу до оптичної осі мають великі значення відрізків  $s_k$  або  $s'_k$ , з якими незручно працювати, особливо при ручних розрахунках. У випадку, коли у формулі (6.5) знаменник приймає нульове значення, відрізок  $s'_k$  становиться безкінечно великим, що ускладнює алгоритм використання вказаних формул навіть в комп'ютерних програмах. Для усунення вказаного недоліку формули, де використовуються відрізки  $s_k$  та  $s'_k$ , трансформували до вигляду, де вони зовсім відсутні. Це формули кутів та висот параксіального променя. Їх можна отримати, якщо ліву і праву частини формули відрізків (6.4) помножити на висоту  $h$ , на якій параксіальний промінь перетинає оптичну поверхню (рис. 6.1):

$$\frac{n_{k+1}h_k}{s'_k} - \frac{n_k h_k}{s_k} = \frac{n_{k+1} - n_k}{r_k} h_k.$$

Але в зоні параксіальних променів

$$\frac{h_k}{s'_k} \cong \text{tg } \alpha_{k+1} \cong \alpha_{k+1}; \quad \frac{h_k}{s_k} \cong \text{tg } \alpha_k \cong \alpha_k,$$

тому формула відрізків перетворюється до вигляду:

$$n_{k+1}\alpha_{k+1} - n_k\alpha_k = (n_{k+1} - n_k)\frac{h_k}{r_k},$$

звідки

$$\alpha_{k+1} = \frac{n_k}{n_{k+1}}\alpha_k + \frac{(n_{k+1} - n_k)}{n_{k+1}}\frac{h_k}{r_k}. \quad (6.9)$$

Вираз (6.9) має назву **формули кутів параксіального променя**. В цій формулі дійсно відсутні відрізки  $s_k$  та  $s'_k$ , через що вдається позбавитися незручності, обумовленої необхідністю оперувати дуже великими або безкінечно великими значеннями цих відрізків.

Висота  $h_k$  та кут  $\alpha'_k = \alpha_{k+1}$  (див. рис. 6.1) дозволяють знайти відрізок  $s'_k$  із співвідношення:

$$\frac{h_k}{s'_k} = \alpha'_k = \alpha_{k+1},$$

$$s'_k = \frac{h_k}{\alpha_{k+1}}. \quad (6.10)$$

Для подальшого розрахунку ходу параксіального променя через наступну оптичну поверхню з номером  $k+1$ , потрібно мати значення висоти  $h_{k+1}$  (рис. 6.4).

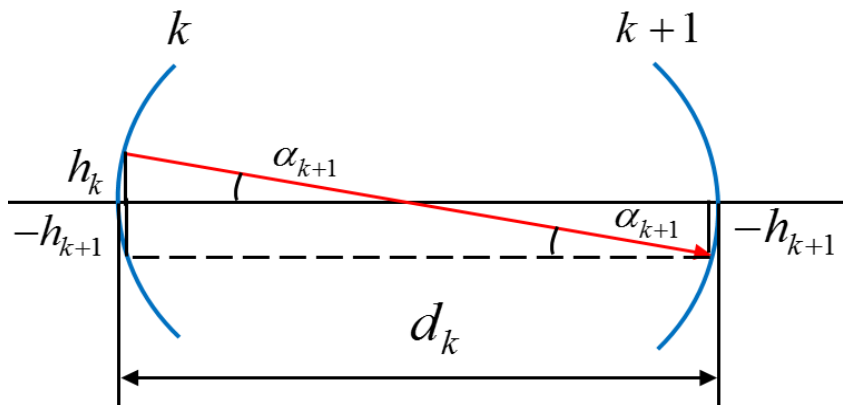


Рис. 6.4. До формули висот параксіального променя

Формулу висоти  $h_{k+1}$  можна знайти з співвідношення катетів трикутника, створеного параксіальним променем, допоміжною пунктирною лінією і катетом – відрізком  $h_k - h_{k+1}$ . В області параксіальних променів допустимим є вираз:

$$\frac{h_k - h_{k+1}}{d_k} = \operatorname{tg} \alpha_{k+1} = \alpha_{k+1},$$

з якого

$$\boxed{h_{k+1} = h_k - d_k \alpha_{k+1}}. \quad (6.11)$$

Вираз (6.11) називають **формулою висот параксіального променя**.

Для розрахунку ходу параксіального променя через всю оптичну систему достатньо застосувати формули кутів та висот (6.9), (6.11) послідовно до кожної оптичної поверхні, знайти значення останнього кута  $\alpha_{p+1}$  та висоти  $h_p$  і використати формулу (6.10) для розрахунку відрізка  $s'_p$ :

$$\boxed{s'_p = \frac{h_p}{\alpha_{p+1}}}, \quad (6.12)$$

який вказує положення зображення осьової предметної точки відносно останньої оптичної поверхні системи. Вихідними даними для такого розрахунку є конструктивні параметри оптичної системи і відрізок  $s_1$ , що вказує положення предметної осьової точки.

#### **6.4. Інваріант Сміта–Гельмгольца (Гюйгенса–Гельмгольца, Лагранжа–Гельмгольца)**

Інваріантом в теорії оптичних систем називають функцію, аргументами якої є параметри оптичної поверхні, оптичного середовища або параметри променя чи пучка променів, значення якої не змінюється при переході від параметрів простору предметів до параметрів простору зображень. Прикладами інваріанту може слугувати закон заломлення:

$$n_k \sin \varepsilon_k = n_{k+1} \sin \varepsilon_{k+1},$$

а також формула з комплексу тригонометричних формул до розрахунку ходу дійсного променя, що заломлюється на сферичній поверхні:

$$n'_k (s'_k - r_k) \sin \sigma'_k = n_k (s_k - r_k) \sin \sigma_k,$$

а також формула Аббе:

$$n_{k+1} \left( 1 - \frac{r_k}{s'_k} \right) = n_k \left( 1 - \frac{r_k}{s_k} \right).$$

Інваріант Сміта–Гельмгольца встановлює в параксіальній області зв'язок між розміром предмету і розміром його зображення, що сформоване окремою оптичною поверхнею або системою поверхонь. В деяких літературних джерелах він має назву **інваріанта Лагранжа–Гельмгольца**. А через те, що в більш простій формі цей інваріант був відомим ще Гюйгенсу і Котсу, в літературі існує ще одна назва цього інваріанту – **інваріант Гюйгенса–Гельмгольца** [1, 4, 5].

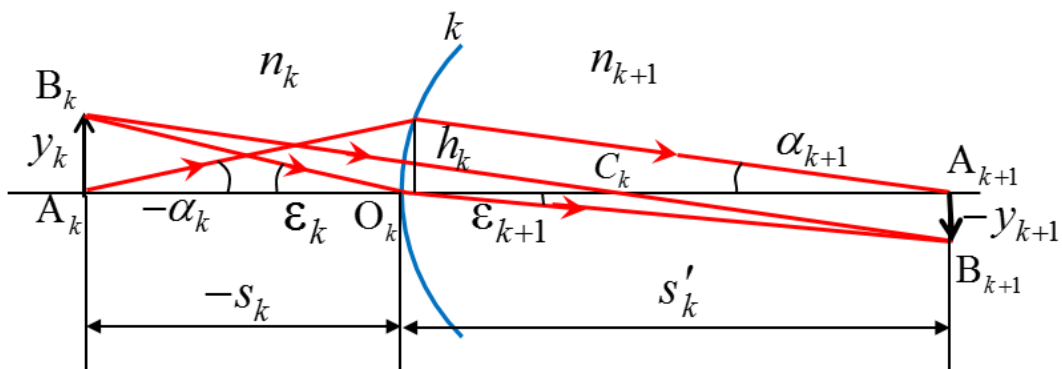


*Християн Гюйгенс,  
нідерландський фізик,  
механік, математик, астроном  
(1629–1695)*



*Герман Людвіг Фердинанд  
фон Гельмгольц,  
німецький фізик, фізіолог  
(1821–1895)*

На рис. 6.5 показана окрема оптична поверхня з номером  $k$ , що входить до складу оптичної системи і розділяє два середовища з показниками заломлення  $n_k$  і  $n_{k+1}$ .



*Рис. 6.5. До обґрунтування інваріанту*

Точка  $A_{k+1}$  є зображенням точки  $A_k$ , тобто ці точки оптично спряжені. В площині, перпендикулярній до оптичної осі, знаходиться позаосьова точка  $B_k$ , яка разом з точкою  $A_k$  утворює відрізок  $A_k B_k$  довжиною  $y_k$ . Із точки  $B_k$  на оптичну поверхню надходять два



промені. Один з них падає на поверхню нормально і проходить без заломлення через центр сферичної поверхні – точку  $C_k$ . Другий промінь йде через осьову точку поверхні  $O_k$ , заломлюється на ній, утворюючи кут падіння  $\varepsilon_k$  і кут заломлення  $\varepsilon_{k+1}$ .

В точці перетину вказаних променів утворюється зображення точки  $B_k$  – точка  $B_{k+1}$ . Разом ці точки утворюють відрізок  $A_{k+1}B_{k+1}$  довжиною  $-y_{k+1}$ , який розташований в площині перпендикулярній до оптичної осі, що проходить через точку  $A_{k+1}$ . Відрізок  $A_{k+1}B_{k+1}$  є зображенням відрізка  $A_kB_k$ , тому ці відрізки є оптично спряженими.

В області параксіальних променів згідно закону заломлення

$$n_k \cdot \varepsilon_k = n_{k+1} \cdot \varepsilon_{k+1}.$$

З прямокутного трикутника  $A_kB_kO_k$  маємо  $\frac{y_k}{-s_k} = \text{tg}(\varepsilon_k) = \varepsilon_k$ .

Аналогічно з трикутника  $A_{k+1}B_{k+1}O_k$   $\frac{-y_{k+1}}{s'_k} = \text{tg} \varepsilon_{k+1} = \varepsilon_{k+1}$ .

Після підстановки виразів кутів  $\varepsilon_k$ ,  $\varepsilon_{k+1}$  в рівняння закону заломлення отримуємо рівняння

$$\frac{y_k n_k}{s_k} = \frac{y_{k+1} n_{k+1}}{s'_k}.$$

Помноживши праву і ліву частину рівняння на висоту  $h_k$ , отримуємо рівняння  $\frac{y_k n_k h_k}{s_k} = \frac{y_{k+1} n_{k+1} h_k}{s'_k}$ , в якому  $\frac{h_k}{s_k} = \alpha_k$ ,  $\frac{h_k}{s'_k} = \alpha_{k+1}$ .

З цією заміною кінцевий вираз попереднього рівняння має вигляд:

$$\boxed{y_k n_k \alpha_k = y_{k+1} n_{k+1} \alpha_{k+1}.} \quad (6.13)$$

Рівняння (6.13) є інваріантом Сміта–Гельмгольца, або Гюйгенса–Гельмгольца, або Лагранжа–Гельмгольца.

Цей інваріант дозволяє визначати важливий параксіальний параметр оптично спряжених площин предмет-зображення – **лінійне або поперечне збільшення зображення**, яке має математичну форму:

$$\boxed{\beta_k = \frac{y_{k+1}}{y_k}.} \quad (6.14)$$

У формулі (6.14)  $y_k$  – величина предмету,  $y_{k+1}$  – величина зображення предмету.

Із інваріанту (6.13) лінійне (поперечне) збільшення зображення, сформованого оптичною поверхнею з номером  $k$ :

$$\beta_k = \frac{y_{k+1}}{y_k} = \frac{n_k \alpha_k}{n_{k+1} \alpha_{k+1}}. \quad (6.15)$$

Формула (6.15) свідчить про можливість розраховувати лінійне або поперечне збільшення зображення, використовуючи значення відповідних кутів параксіального променя, що проходить через осьові точки площини предмету і площини його зображення. В цьому полягає не тільки теоретична, але й суттєва практична цінність інваріанту Сміта–Гельмгольца.

Значення інваріанту Сміта–Гельмгольца є константою для всіх оптичних поверхонь системи від першої до останньої, тобто:

$$y_1 n_1 \alpha_1 = y_2 n_2 \alpha_2 = \dots = y_k n_k \alpha_k = \dots = y_{p+1} n_{p+1} \alpha_{p+1}. \quad (6.16)$$

При цьому треба розуміти, що значення цієї константи належить і зберігається лише для конкретної пари оптично спряжених площин предмет-зображення. Зсунувши предмет вздовж оптичної осі система сформує нове зображення теж зсунуте в інше місце вздовж оптичної осі і для цієї нової оптично-спряженої пари площин предмет-зображення значення інваріанту стане іншим.

Вираз (6.16) дозволяє розрахувати лінійне (поперечне) збільшення  $\beta$  зображення предмету, сформованого всією оптичною системою, складеної із  $p$  оптичних поверхонь:

$$\beta = \frac{y_{p+1}}{y_1}, \quad (6.17)$$

де  $y_1$  – лінійний розмір предмету,  $y_{p+1}$  – лінійний розмір зображення цього предмету, утвореного всією оптичною системою. Згідно виразу (6.16) формула (6.17) отримує вигляд:

$$\beta = \frac{n_1 \alpha_1}{n_{p+1} \alpha_{p+1}}. \quad (6.18)$$

Формула (6.18) потребує наступних коментарів:

1) якщо предметна площина знаходиться на нескінченності, то з її осьової точки параксіальний промінь надходить в оптичну систему на малій висоті  $h_1 \neq 0$ , але паралельно оптичній осі, через що  $\alpha_1 = 0$ . При кінцевій відстані до зображення предметної площини, тобто при  $\alpha_{p+1} \neq 0$ , лінійне збільшення  $\beta = 0$ ;

2) якщо в оптичній системі предмет на нескінченності ( $\alpha_1 = 0$ ), а зображення також знаходиться на нескінченності ( $\alpha_{p+1} = 0$ ), то в такому випадку поперечне збільшення, як параметр, не використовується. Замість нього використовують інший параметр – кутове збільшення, визначення якого буде розкрито в наступному розділі;

3) якщо предметна площина знаходиться від оптичної системи на кінцевій відстані ( $\alpha_1 \neq 0$ ), а зображення – на нескінченності ( $\alpha_{p+1} = 0$ ), то згідно (6.18)  $\beta = \infty$ .

## 6.5. Розрахунок положення і поперечного збільшення зображення предмету, сформованого центрованою оптичною системою

Вихідними даними для розрахунку положення і лінійного збільшення зображення предмету є:

- 1) значення конструктивних параметрів оптичної системи;
- 2) значення відрізка  $s_1$  – відстані вздовж оптичної осі між першою оптичною поверхнею системи і площиною предметів.

Розрахунку підлягає відрізок  $s'_p$  – відстань між останньою оптичною поверхнею системи і площиною зображення предмету, а також значення лінійного збільшення зображення –  $\beta$ .

Порядок розрахунку:

1. Визначаються чи призначаються значення  $\alpha_1$  і  $h_1$ :

– якщо предметна площина знаходиться на кінцевій відстані від оптичної системи, тобто  $s_1 \neq \infty$ , то в такому випадку першому куту  $\alpha_1$  призначається будь-яке мале значення  $\alpha_1 \neq 0$ , враховуючі те, що кут належить параксіальному променю. При цьому висота параксіального променю на першій оптичній поверхні також повинна бути достатньо малою, що регулюється значенням  $\alpha_1$ :

$$h_1 = \alpha_1 s_1; \quad (6.19)$$

– у тому випадку, коли предметна площина знаходиться на нескінченності, першому куту надають значення  $\alpha_1 = 0$ , а висоті  $h_1$  надають будь-яке мале значення, зважаючи на те, що промінь повинен бути параксіальним.

2. Розраховуються з використанням формул (6.9), (6.11), (6.12) значення кутів і висот параксіального променя послідовно на всіх оптичних поверхнях, це  $\alpha_2, h_2, \alpha_3, h_3 \dots \alpha_k, h_k, \dots \alpha_p, h_p, \alpha_{p+1}$ .

3. Розраховуються параметри зображення:

– за формулою (6.12) – відрізок  $s'_p$ ,

– за формулою (6.18) – лінійне збільшення  $\beta$ .

## 6.6. Нульові промені

Теорія параксіальних променів сприяла подальшому розвитку прикладної геометричної оптики, вчасності теорії ідеальної оптичної системи. Проте практичне використання формул кутів і висот для розрахунків ходу параксіального променя через оптичну систему показало їх суттєвий недолік – незручність оперування малими числами. В попередньому пункті, де викладено порядок розрахунку ходу параксіального променя, вже на першому кроці виникає питання про надання малих значень куту  $\alpha_1$  та висоті  $h_1$ . Якщо цей крок зроблено невдало, то може виявитися, що на якійсь оптичній поверхні кут і висота променя явно виходять за межі значень, яким повинен відповідати параксіальний промінь. В такому випадку потрібно повертатися до виконання першого кроку розрахунків, тобто зменшувати значення кута  $\alpha_1$  і висоти  $h_1$ .

Для усунення вказаного недоліку був знайдений спосіб, який полягає в заміні параксіальних променів так званими нульовими променями.

У верхній зоні рис. 6.6 показана оптична система та хід через неї параксіального променя. Якщо рисунок з цією оптичною системою розтягувати у напрямку перпендикулярному до оптичної осі, то точки перетину променем оптичної осі залишаться на тому самому місці, а співвідношення розміру зображення до розміру предмету теж не змінюється. При цьому розміри відрізків  $s_1, s'_p$  та значення лінійного збільшення  $\beta$ , як видно, не залежать від масштабу схеми у напрямку, перпендикулярному до оптичної осі. Але величини кутів нахилу променя до оптичної осі становляться набагато більшими, збільшуються величини висот точок перетину променя з оптичною поверхнею.

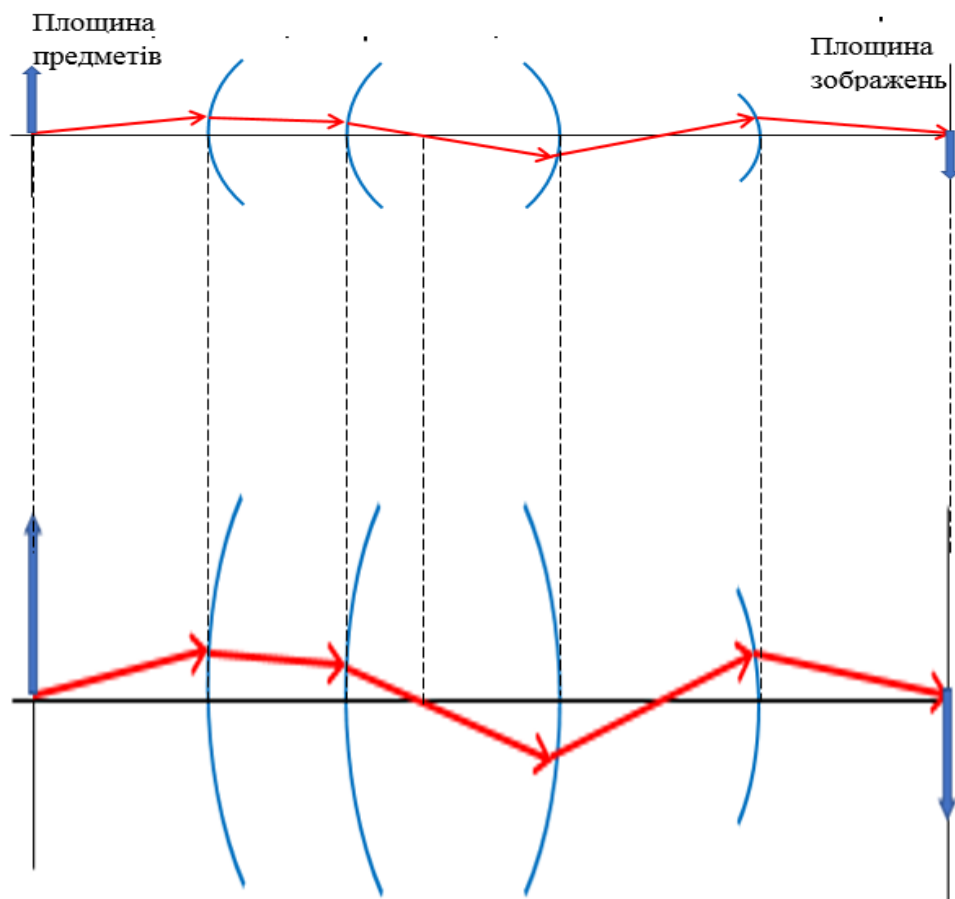


Рис. 6.6. До визначення нульових променів

Уявімо, що кути параксіального променя наближаються до нуля, а масштаб схеми у вертикальному до осі напрямку пропорційно збільшується. При цьому оптичні поверхні поступово вироджуються в прямі площини через збільшення радіусів цих поверхонь.

Вироджені у такий спосіб сферичні чи асферичні оптичні поверхні, перетворені у площини, називають **головними площинами** оптичних поверхонь.

Головна площина оптичної поверхні перпендикулярна до оптичної осі і перетинає її в осьовій точці поверхні, як показано на рис. 6.7.

Головна площина є математичною абстракцією, яка дозволяє вирішувати задачі параксіальної оптики без застосування малих значень кутів і висот променю.

**Нульовими променями називають фіктивні промені**, які заломлюються чи відбиваються не на реальних оптичних поверхнях, а фіктивно заломлюються або відбиваються на головних площинах цих оптичних поверхонь. Приклад ходу нульового променю в системі показано на рис. 6.7.

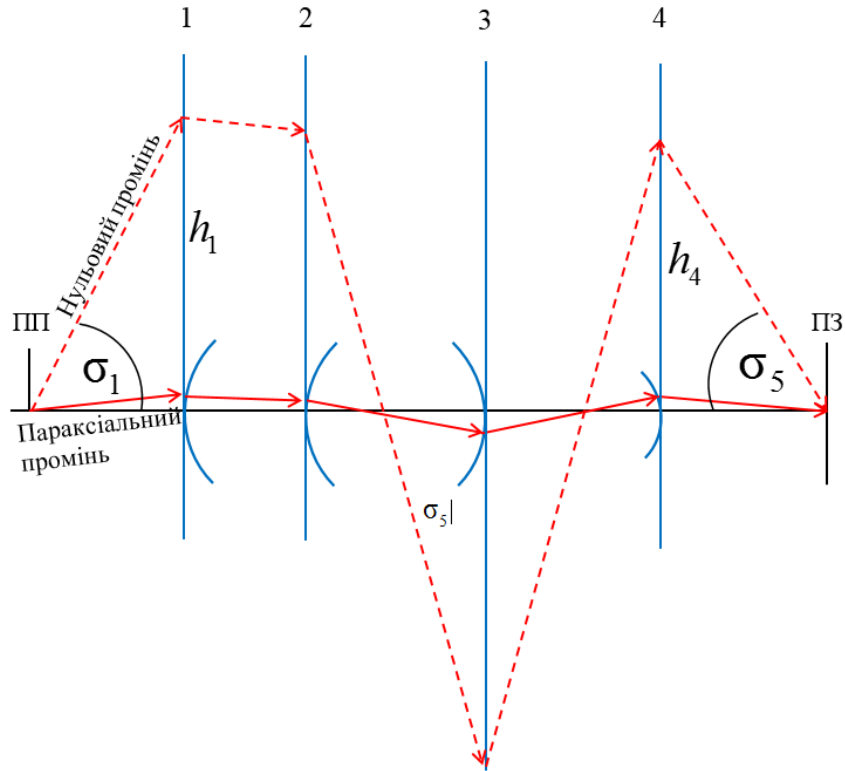


Рис. 6.7. Хід нульового променя через оптичну систему

Головна перевага нульових променів перед параксіальними – значення їх кутів і висот ніяк не обмежуються і вони можуть приймати будь-які великі, але зручні для використання значення.

При переході від параксіальних до нульових променів позначення кута  $\alpha_k$  замінюється позначенням  $\sigma_k$ , а у формулах (6.9)–(6.19)  $\alpha_k$  замінюється на  $\text{tg } \sigma_k$ :

$$\text{tg } \sigma_{k+1} = \frac{n_k}{n_{k+1}} \text{tg } \sigma_k + \frac{(n_{k+1} - n_k) h_k}{n_{k+1} r_k}. \quad (6.20)$$

Формула висот нульового променя:

$$h_{k+1} = h_k - d_k \text{tg } \sigma_{k+1}. \quad (6.21)$$

Формула відрізка, що вказує положення зображення осьової предметної точки, сформованого оптичною поверхнею з номером  $k$  в системі відносно цієї поверхні:

$$s'_k = \frac{h_k}{\text{tg } \sigma_{k+1}}. \quad (6.22)$$

Формула відрізка, що вказує положення зображення осьової предметної точки відносно останньої оптичної поверхні системи:

$$s'_p = \frac{h_p}{\operatorname{tg} \sigma_{p+1}}. \quad (6.23)$$

Формула лінійного збільшення зображення предмету, сформованого всією оптичною системою:

$$\beta = \frac{n_1 \operatorname{tg} \sigma_1}{n_{p+1} \operatorname{tg} \sigma_{p+1}}. \quad (6.24)$$

Формула висоти нульового променя на головній площині першої оптичної поверхні системи:

$$h_1 = s_1 \operatorname{tg} \sigma_1. \quad (6.25)$$

**Завдання 6.3.** Використовуючи завдання 6.1 за допомогою формул кутів та висот нульового променя знайдіть положення зображення осьової точки, відрізок  $s'_3$ , сформоване оптичною системою із заданими конструктивними параметрами. Предметна осьова точка знаходиться на нескінченності.

**Розв'язання.**

1. Предметна точка знаходиться на нескінченності, тому  $\operatorname{tg} \sigma_1 = 0$ , а висота  $h_1$  може бути будь-якою ненульовою. Нехай вона дорівнює значенню радіуса першої поверхні  $h_1 = 29.79$ .

2. Розрахунок параметрів нульового променя після першої поверхні здійснюється із застосуванням формул кутів і висот (6.20), (6.21);

$$\operatorname{tg} \sigma_2 = \frac{n_1}{n_2} \operatorname{tg} \sigma_1 + \frac{(n_2 - n_1) h_1}{n_2 r_1} = \frac{1}{1.5168} \cdot 0 + \frac{1.5168 - 1}{1.5168} \cdot \frac{29.79}{29.79} = 0.340717;$$

$$h_2 = h_1 - d_1 \operatorname{tg} \sigma_2 = 29.79 - 14.9 \cdot 0.340717 = 24.71331 \text{ мм.}$$

3. Розрахунок параметрів нульового променя після другої поверхні:

$$\operatorname{tg} \sigma_3 = \frac{n_2}{n_3} \operatorname{tg} \sigma_2 + \frac{(n_3 - n_2) h_2}{n_3 r_2} = \frac{1.5168}{1.7293} \cdot 0.340717 + \frac{1.7293 - 1.5168}{1.7293} \cdot \frac{24.71331}{-110.9} = 0.2714655;$$

$$h_3 = h_2 - d_2 \operatorname{tg} \sigma_3 = 24.71331 - 3 \cdot 0.2714655 = 23.89891 \text{ мм.}$$

4. Розрахунок  $\operatorname{tg} \sigma_4$ :

$$\operatorname{tg} \sigma_4 = \frac{n_3}{n_4} \operatorname{tg} \sigma_3 + \frac{(n_4 - n_3) h_3}{n_4 r_3} = \frac{1.7293}{1} \cdot 0.2714655 + \frac{1 - 1.7293}{1} \cdot \frac{23.89891}{333.3} = 0.4171516;$$



5. Розрахунок  $s'_3$ :  
згідно формули (6.23):

$$s'_3 = \frac{h_3}{\operatorname{tg} \sigma_4} = \frac{23.89891}{0.4171516} = 57.291 \text{ мм.}$$

Як видно, отриманий результат повністю збігається з результатом розрахунку того ж відрізка  $s'_3$ , знайденого у завданні 6.1 шляхом використання формули відрізків Аббе.

Формули нульових променів (6.20)–(6.25) є зручними для використання при теоретичному аналізі чи синтезі оптичних систем. Але в алгоритмах комп'ютерного розрахунку ходу нульових променів більш зручними є формули, в яких використовується матрична алгебра.

Дія оптичної системи на хід нульового променя представляється **гаусовою матрицею  $\mathbf{G}$**  [6]:

$$\mathbf{G} = \mathbf{R}_p \mathbf{D}_{p-1} \dots \mathbf{D}_2 \mathbf{R}_2 \mathbf{D}_1 \mathbf{R}_1 \mathbf{D}_0, \quad (6.26)$$

де матриця  $\mathbf{R}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho_k(1 - \mu_k) & \mu_k \end{pmatrix}$  – матриця заломлення нульового

променя на поверхні з номером  $k$ ;  $\rho_k = \frac{1}{r_k}$  кривизна поверхні з номе-

ром  $k$ ;  $\mu_k = \frac{n_k}{n_{k+1}}$ ;  $\mathbf{D}_k = \begin{pmatrix} 1 & -d_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  – матриця переносу променя на

наступну оптичну поверхню;  $\mathbf{D}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  – одинична матриця.

Операція множення двох матриць означає отримання нової матриці:

$$\begin{pmatrix} P & Q \\ R & T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PA + QC & PB + QD \\ RA + TC & RB + TD \end{pmatrix}.$$

Послідовне множення пар сусідніх матриць у (6.26), одна з яких є результатом множення попередньої пари матриць, дозволяє отримати матрицю  $\mathbf{G}$ .

Розрахунок матриці, яка в своєму складі має параметри нульового променя в просторі за оптичною системою, здійснюється за формулою

$$\mathbf{b}' = \mathbf{G}\mathbf{b}, \quad (6.27)$$

де  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \operatorname{tg} \sigma_1 \end{pmatrix}$  – матриця-вектор координат нульового променя в просторі перед першою поверхнею оптичної системи;  $\mathbf{b}' = \begin{pmatrix} h_p \\ \operatorname{tg} \sigma'_p \end{pmatrix}$  – матриця-вектор координат нульового променя в просторі за останньою поверхнею оптичної системи.

Згідно формул (6.27), (6.26) розрахунок параметрів нульового променя, які він має за оптичною системою, зводиться до перемноження відповідних матриць, що суттєво спрощує алгоритм і програмування розрахунку ходу нульового променя через будь-яку складну оптичну систему.

В якості прикладу використання матричного методу розрахунку ходу нульового променя через оптичну систему (табл. 6.1) візьмемо вихідні дані завдання 6.3.

Таблиця 6.1

**Розрахунок ходу нульового променя матричним методом в Mathcad**

<i>Конструктивні параметри оптичної системи</i>		
$r1 := 29.79$	$d1 := 14.9$	$n1 := 1$
$r2 := -110.9$	$d2 := 3.0$	$n2 := 1.5168$
$r3 := 333.3$		$n3 := 1.7293$
		$n4 := 1$
<i>Параметри нульового променя на вході в оптичну систему</i>	<i>Матриця вхідного нульового променя</i> $\mathbf{b} := \begin{pmatrix} h1 \\ \operatorname{tg}\sigma1 \end{pmatrix}$	<i>Елементи матриць <math>R_k</math></i> $\rho1 := \frac{1}{r1}$ $\rho2 := \frac{1}{r2}$ $\rho3 := \frac{1}{r3}$ $\mu1 := \frac{n1}{n2}$ $\mu2 := \frac{n2}{n3}$ $\mu3 := \frac{n3}{n4}$
$h1 := 29.79$ $\operatorname{tg}\sigma1 := 0$		
<i>Матриці співмножники виразу (6.26)</i>		
$R1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho1 \cdot (1 - \mu1) & \mu1 \end{bmatrix}$	$D0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	
$R2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho2 \cdot (1 - \mu2) & \mu2 \end{bmatrix}$	$D1 := \begin{pmatrix} 1 & -d1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	
$R3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho3 \cdot (1 - \mu3) & \mu3 \end{bmatrix}$	$D2 := \begin{pmatrix} 1 & -d2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	

Розрахунок гаусової матриці $G := R3-D2-R2-D1-R1-D0$	Результат розрахунку G:	$G = \begin{pmatrix} 0.802 & -11.591 \\ 0.014 & 1.044 \end{pmatrix}$
Розрахунок параметрів нульового променя на виході з оптичної системи $b1 := G \cdot b$	Результат розрахунку параметрів нульового променя:	$b1 = \begin{pmatrix} 23.898915 \\ 0.417152 \end{pmatrix}$ $h3 := 23.898915$ $tg\sigma4 := 0.417152$
Розрахунок відрізки $s'_3$ :	$s'_3 = \frac{23.898915}{0.417152} = 57.291$	

Бачимо повне збігання результатів розрахунків з використанням матриці Гауса та з використанням формул кутів та висот нульового променя.

На завершення теоретичного матеріалу про нульові промені потрібно відзначити, *що всі отримані за допомогою розрахунку ходу нульових променів параметри, які характеризують дію оптичної системи, стосуються лише параксіальної області оптичної системи.*

## 6.7. Кардинальні елементи оптичної системи

Теорія параксіальних та нульових променів стимулювала подальший розвиток методів розрахунку величин, що відображають положення відносно оптичної системи зображень предметів та їх лінійних чи кутових збільшень. Так виникли методи і формули, які дозволяють відтворювати значення вище вказаних величин, без розрахунку для цього ходу нульових променів. Сформувалася теорія ідеальної оптичної системи.

Основу означених методів і теорії склали уявлення про так звані кардинальні елементи оптичної системи, до яких відносяться:

- **кардинальні точки:**

- задній  $F'$  та передній  $F$  фокуси оптичної системи чи окремої оптичної поверхні;

- задня  $H'$  та передня  $H$  головні точки;

- задня  $N'$  та передня  $N$  вузлові точки;

- **кардинальні відрізки:**

- задня  $f'$  та передня  $f$  фокусні відстані;

- задній  $s'_{F'}$  та передній  $s_F$  відрізок, що вказують положення точок фокусів відносно оптичної системи;
- задній  $s'_{H'}$  та передній  $s_H$  відрізок, що вказують положення головних точок відносно оптичної системи;
- задній  $s'_{N'}$  та передній  $s_N$  відрізок, що вказують положення вузлових точок відносно оптичної системи;
- задня та передня фокальні площини;
- задня та передня головні площини.

### 6.7.1. Задні кардинальні елементи оптичної системи

Задні кардинальні елементи оптичної системи визначаються за допомогою нульових променів, що надходить в систему паралельно оптичній осі.

**Заднім фокусом  $F'$**  називають точку, яка у нульових променях є дійсним (рис. 6.8) чи уявним (рис. 6.9) зображенням осьової безкінечно віддаленої точки простору предметів, сформованим оптичною системою.

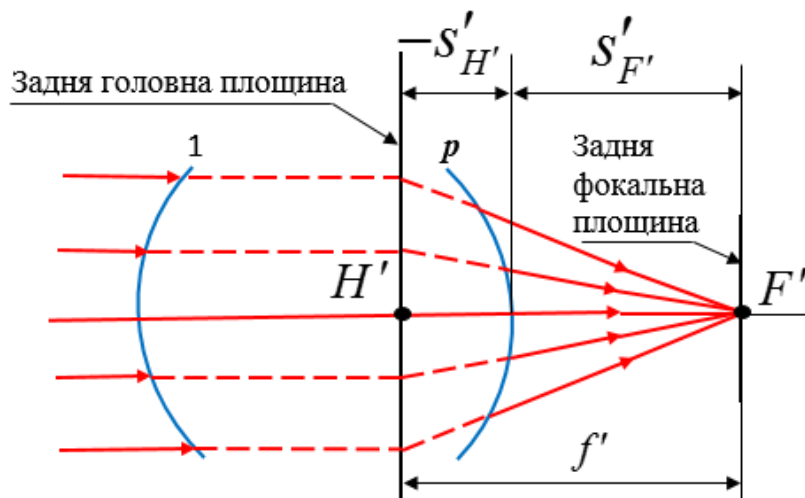


Рис. 6.8. Оптична система з дійсним заднім фокусом, задні кардинальні елементи:  $F'$  – дійсний задній фокус;  $H'$  – задня головна точка;  $f'$  – задня фокусна відстань;  $s'_{F'}$  – задній фокальний відрізок;  $s'_{H'}$  – відрізок, що вказує положення задньої головної точки

**Задній фокус  $F'$**  – осьова точка, в якій після проходження через систему дійсно чи уявно перетинаються промені, що надходять в систему паралельно оптичній осі. Слово фокус пішло від латинського *focus*, яке означає *вогнище*, мабуть через те, що сфоку-

суване лінзою чи сферичним дзеркалом зображення сонця на горючому матеріалі викликає його загоряння. На рис. 6.8 показано оптичну систему із дійсним заднім фокусом, тому що фокус знаходиться в точці дійсного перетину нульових променів.

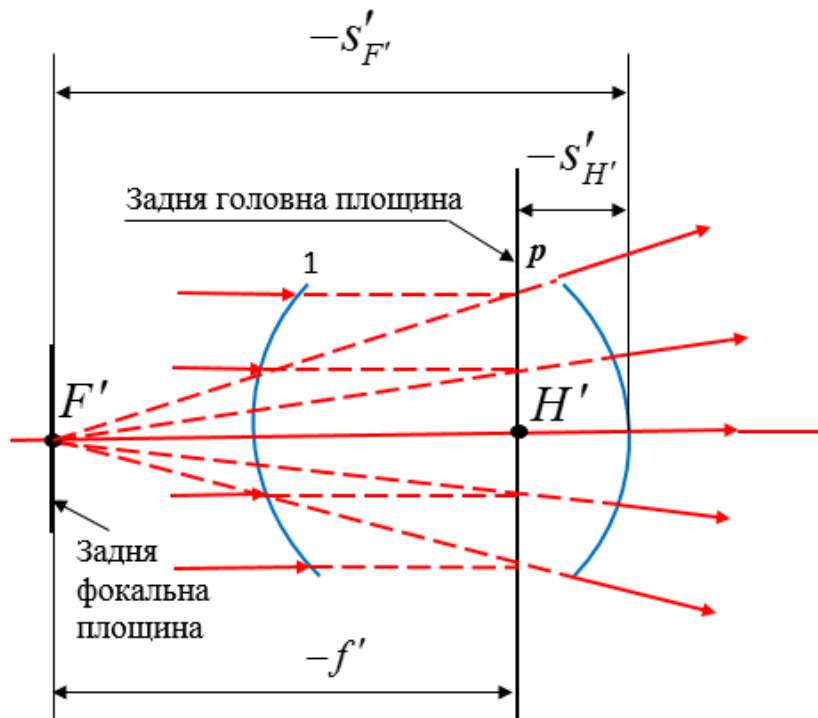


Рис. 6.9. Оптична система з уявним заднім фокусом

Існують оптичні системи, в яких задній фокус  $F'$  існує уявно, бо утворюється на уявному перетині нульових променів як показано на рис. 6.9.

При розрахунках через будь-яку центровану оптичну систему пучка паралельних оптичній осі нульових променів (променів, що надходять в систему від осьової нескінченно віддаленої осьової точки) з метою пошуку заднього фокусу, спостерігається наступне. Продовження будь-якого променя, що надходить в систему, і продовження того ж променя, що виходить із системи через задній фокус, завжди перетинаються в одній площині, перпендикулярній до оптичної осі (продовження променів показано пунктирними лініями на рис. 6.8 та 6.9). Ця площина є уявною, але вона начебто виконує заломлюючу дію на промені всієї сукупності оптичних поверхонь оптичної системи. Ця площина має назву **задня головна площина** оптичної системи, а точку, де вона перетинає оптичну вісь, називають **задньою головною точкою** оптичної системи із стандартним позначенням  $H'$  цієї точки.

Відрізок  $s'_F$  вказує положення заднього фокусу  $F'$  відносно останньої поверхні оптичної системи, його назва – **задній фокальний відрізок**. Відрізок  $s'_H$  вказує положення задньої головної точки  $H'$  відносно останньої поверхні системи (відрізок окремої назви не має).

Відстань  $f'$  між задньою головною точкою  $H'$  і заднім фокусом оптичної системи  $F'$ , тобто відрізок  $H'F'$ , має назву **задня фокусна відстань** оптичної системи. Фокусна відстань є важливим параксіальним параметром, який дає можливість розраховувати функціональні параметри оптичних систем.

Визначення задньої вузлової точки  $N'$  і відрізків, пов'язаних з нею, буде наведено в підрозд. 7.7.

### 6.7.2. Передні кардинальні елементи оптичної системи

Передні кардинальні елементи оптичної системи визначаються за допомогою пучка нульових променів, що виходять з системи паралельно оптичній осі.

**Переднім фокусом** оптичної системи називають дійсну чи уявну осьову предметну точку  $F$ , з якої в систему надходять нульові промені, які після проходження через систему йдуть паралельно оптичній осі.

**Передній фокус** – дійсна чи уявна осьова предметна точка  $F$ , зображення якої, сформоване оптичною системою у нульових променях, знаходиться на нескінченності (рис. 6.10 та 6.11).

Продовження вхідних та вихідних променів (на рис.6.10, 6.11 показані штриховими лініями) також перетинаються в одній уявній площині. Через те, що своєю дією ця площина нібито замінює дію всіх оптичних поверхонь системи, її назвали **передньою головною площиною**. Точка  $H$  перетину передньої головної площини з оптичною віссю має назву **передньої головної точки**.

Відрізок  $HF$  між передньою головною точкою і переднім фокусом називають **передньою фокусною відстанню** і позначають буквою  $f$ .

Відрізок  $s_F$  – **передній фокальний відрізок**, він вказує відстань між передньою оптичною поверхнею системи і переднім фокусом.

Відрізок  $s_H$ , що вказує положення передньої головної точки відносно першої оптичної поверхні системи спеціальної назви не має.

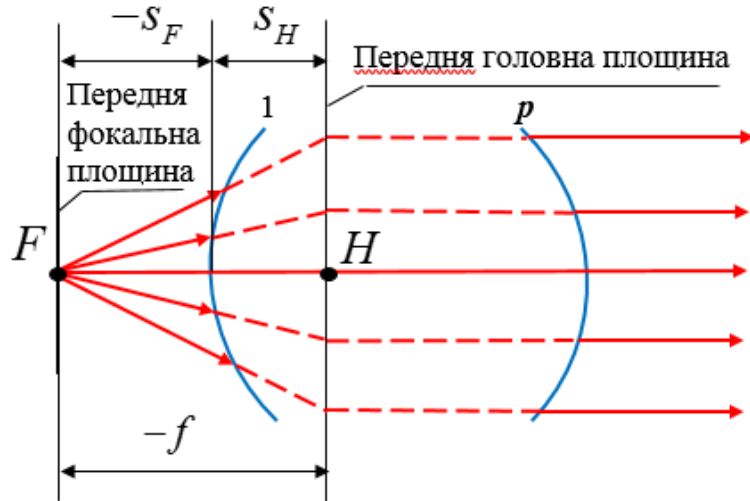


Рис. 6.10. Оптична система з дійсним переднім фокусом, передні кардинальні елементи:  $F$  – дійсний передній фокус;  $H$  – передня головна точка;  $f$  – передня фокусна відстань;  $S_F$  – передній фокальний відрізок;  $S_H$  – відрізок, що вказує положення передньої головної точки

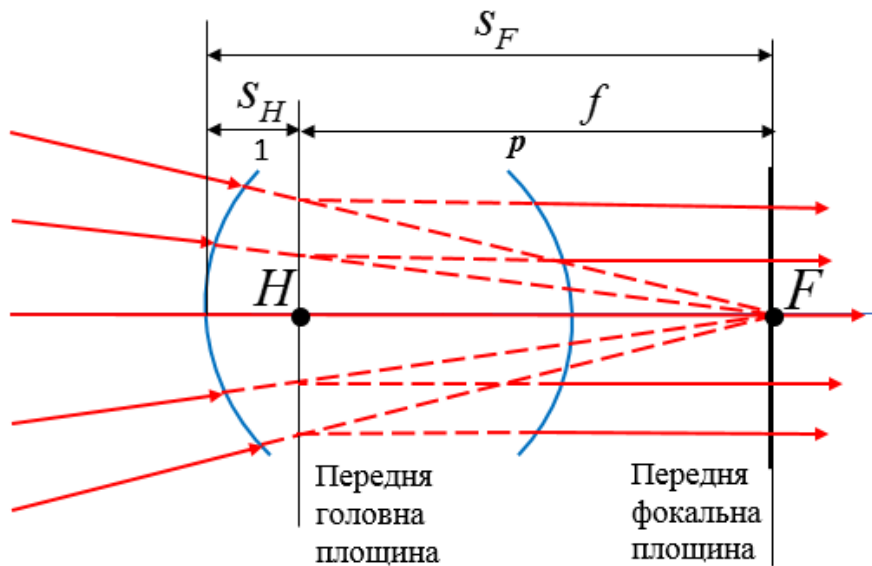


Рис. 6.11. Оптична система з уявним переднім фокусом

Нижче в п. 7.2. буде доведена важлива властивість головних площин, а саме: **передня і задня головні площини оптичної системи є оптично спряженими, тобто задня головна площина є зображенням передньої, до того ж головні площини системи утворюють єдину оптично-спряжену пару з лінійним збільшенням  $\beta_{HH'} = 1$ .**

**Примітка.** Представлені вище позначення кардинальних точок та відрізків, а також терміни відповідають стандарту ДСТУ 2756-94, а тому є обов'язковими для використання.



## 6.8. Розрахунки кардинальних відрізків оптичної системи

Кардинальні відрізки, що представлені в п. 6.6, дозволяють встановлювати положення кардинальних точок і площин в оптичних системах. Для визначення кардинальних відрізків використовують або метод розрахунку ходу нульового променя за формулами кутів і висот, формули (6.20)–(6.21), або матричний метод, формули (6.26)–(6.27). Перший метод більш придатний для аналітичного аналізу системи, другий – при складанні комп'ютерних програм.

Вихідними даними для розрахунку кардинальних відрізків оптичної системи задніх  $f', s'_{F'}, s'_{H'}$  та передніх  $f, s_F, s_H$  слугують конструктивні параметри системи та параметри вхідного променя:  $h_1 \neq 0$  та  $\text{tg } \sigma_1 = 0$ . Значення  $h_1$  може бути будь-яким, але не нульовим.

### 6.8.1. Розрахунки задніх кардинальних відрізків

Використовуючи рекурентні формули (6.20)–(6.21) послідовно до кожної поверхні, знаходять значення всіх висот  $h_2, h_3 \dots h_p$  та тангенсів кутів  $\text{tg } \sigma_2, \text{tg } \sigma_3, \dots, \text{tg } \sigma_{p+1}$  заданого нульового променя (рис. 6.12).

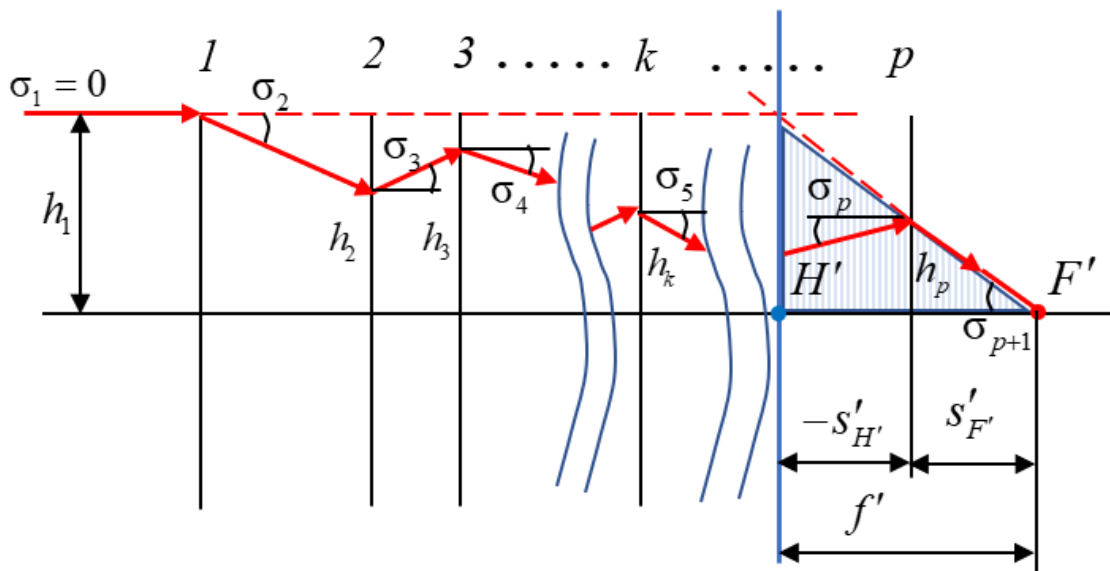


Рис. 6.12. До розрахунку нульового променя з метою визначення задніх кардинальних відрізків  $f', s'_{F'}, s'_{H'}$

Задня головна площина оптичної системи знаходиться на перехресті продовження вхідного променя та вихідного, показано штриховими лініями.

З прямокутного трикутника, де катетами є висота  $h_p$  та відрізок  $s'_{F'}$ :

$$\frac{h_p}{s'_{F'}} = \operatorname{tg} \sigma_{p+1},$$

звідки задній фокальний відрізок:

$$s'_{F'} = \frac{h_p}{\operatorname{tg} \sigma_{p+1}}. \quad (6.28)$$

З прямокутного трикутника, де один катет – висота  $h_1$  у головній площині, а другий катет – задня фокусна відстань  $f'$ , маємо:

$$\frac{h_1}{f'} = \operatorname{tg} \sigma_{p+1},$$

звідки задня фокусна відстань:

$$f' = \frac{h_1}{\operatorname{tg} \sigma_{p+1}}. \quad (6.29)$$

Відрізок  $s'_{H'}$  можна знайти з рівняння відрізків  $-s'_{H'} + s'_{F'} = f'$ , звідки

$$s'_{H'} = s'_{F'} - f'. \quad (6.30)$$

### 6.8.2. Розрахунки передніх кардинальних відрізків

Передні кардинальні відрізки теоретично можна було б розрахувати, спрямувавши нульовий промінь у останню поверхню справа наліво паралельно оптичній осі. Але формули кутів та висот нульового променя складені для розрахунку ходу променів в оптичній системі у напрямку додатного ходу променя, тобто зліва направо. Тому для розрахунку передніх відрізків потрібно оптичну систему повернути на  $180^\circ$ , розрахувати хід нульовий промінь зліва направо, отримати значення відрізків, а потім повернути оптичну систему у вихідне положення, тобто знову повернувши її назад на  $180^\circ$ , не забувши змінити знаки отриманих значень відрізків на протилежні.

При повороті оптичної системи на  $180^\circ$  всі конструктивні параметри міняються місцями. Так перший радіус стає останнім, а останній радіус стає першим, причому знаки радіусів змінюються на протилежні, тому що при ході променя через повернуту систему

зліва направо опукла поверхня стає увігнутою, а увігнута – опуклою. Аналогічно місцями міняються осьові відстані і показники заломлення без зміни знаків.

В табл. 6.1 показано перетворення матриці конструктивних параметрів при повороті оптичної системи на прикладі оптичній системи із завдання 6.3.

Таблиця 6.2

**Конструктивні параметри оптичної системи для прямого і зворотного ходу нульового променя**

Вихідні дані конструктивних параметрів оптичної системи із завдання 6.3			Конструктивні параметри тієї ж оптичної системи, але повернутої на 180°		
		$n_1 = 1$			$n_1 = 1$
$r_1 = 29.79$			$r_1 = -333.3$		
	$d_1 = 14.9$	$n_2 = 1.5168$		$d_1 = 3$	$n_2 = 1.7293$
$r_2 = -110.9$			$r_2 = 110.9$		
	$d_2 = 3.0$	$n_3 = 1.7293$		$d_2 = 14.9$	$n_3 = 1.5168$
$r_3 = 333.3$			$r_3 = -29.79$		
		$n_4 = 1$			$n_4 = 1$

Після повороту оптичної системи на 180° знову розраховується хід нульового променя, паралельного оптичній осі з вихідними параметрами  $\overline{tg} \sigma_1 = 0$ ,  $\overline{h}_1 \neq 0$ . За рекурентними формулами (6.20), (6.21) послідовно відтворюються значення тангенсів кутів та висот нульового променя відповідно до кожної оптичної поверхні:

$$\overline{tg} \sigma_2, \overline{tg} \sigma_3, \dots, \overline{tg} \sigma_k \dots \overline{tg} \sigma_{p+1};$$

$$\overline{h}_2, \overline{h}_3 \dots \overline{h}_k \dots \overline{h}_p.$$

Передні кардинальні відрізки знаходять за формулами:

$$s_F = -\frac{\overline{h}_p}{\overline{tg} \sigma_{p+1}}, \quad (6.31)$$

$$f = -\frac{\overline{h}_1}{\overline{tg} \sigma_{p+1}}, \quad (6.32)$$

$$s_H = s_F - f. \quad (6.33)$$

Знак « $\leftrightarrow$ » у формулах (6.31) та (6.32) означає повернення оптичної системи у вихідне положення, при якому знаки знайдених горизонтальних відрізків змінюються на протилежні.

Методику розрахунку кардинальних відрізків розглянемо на прикладі оптичної системи з конструктивними параметрами із завдання 6.3.

**Завдання 6.4.** Розрахувати задні і передні кардинальні відрізки оптичної системи з конструктивними параметрами (наведені в лівій частині табл. 6.2).

**Розв'язання.** Результати розрахунків ходу нульового променя в прямому ході візьмемо з розв'язання завдання 6.3 (табл. 6.3).

Таблиця 6.3

Результати розрахунку нульового променя через задану оптичну систему

$k$	1	2	3	4
$tg \sigma_k$	0	0.340717	0.2714655	0.4171516
$h_k$	29.79	24.71331	23.89891	–

Згідно формул (6.28), (6.29), (6.30):

$$s'_{F'} = \frac{h_p}{tg \sigma_{p+1}} = \frac{h_3}{tg \sigma_4} = \frac{23.89891}{0.4171516} = 57.2907 \text{ мм};$$

$$f' = \frac{h_1}{tg \sigma_{p+1}} = \frac{h_1}{tg \sigma_4} = \frac{29.79}{0.4171516} = 71.4129 \text{ мм};$$

$$s'_{H'} = s'_{F'} - f' = 57.2907 - 71.4129 = -14.1222 \text{ мм}.$$

Для отримання передніх кардинальних відрізків потрібно зробити аналогічні розрахунки, повернувши оптичну систему на  $180^\circ$  (див. конструктивні параметри у правій частині табл. 6.2). Результати такого розрахунку наведені в табл. 6.4.

Таблиця 6.4

Результати розрахунку нульового променя через систему, повернуту на  $180^\circ$

$k$	1	2	3	4
$\overleftarrow{tg \sigma_k}$	0	-0,421731	-0,9034636	4,66723
$\overleftarrow{h_k}$	333.3	334,565	348,0266	–

Згідно формул (6.31)–(6.33):

$$s_F = -\frac{\bar{h}_p}{\operatorname{tg} \sigma_{p+1}} = -\frac{\bar{h}_3}{\operatorname{tg} \sigma_4} = -\frac{348.0266}{4.66723} = -74.5681 \text{ мм};$$

$$f = -\frac{\bar{h}_1}{\operatorname{tg} \sigma_{p+1}} = -\frac{333.3}{4.66723} = -71.4129 \text{ мм};$$

$$s_H = s_F - f = -74.5681 - (-71.4129) = -3.1552 \text{ мм}.$$

На рис. 6.13 представлено оптичну систему та її кардинальні елементи згідно наведених результатів розрахунків

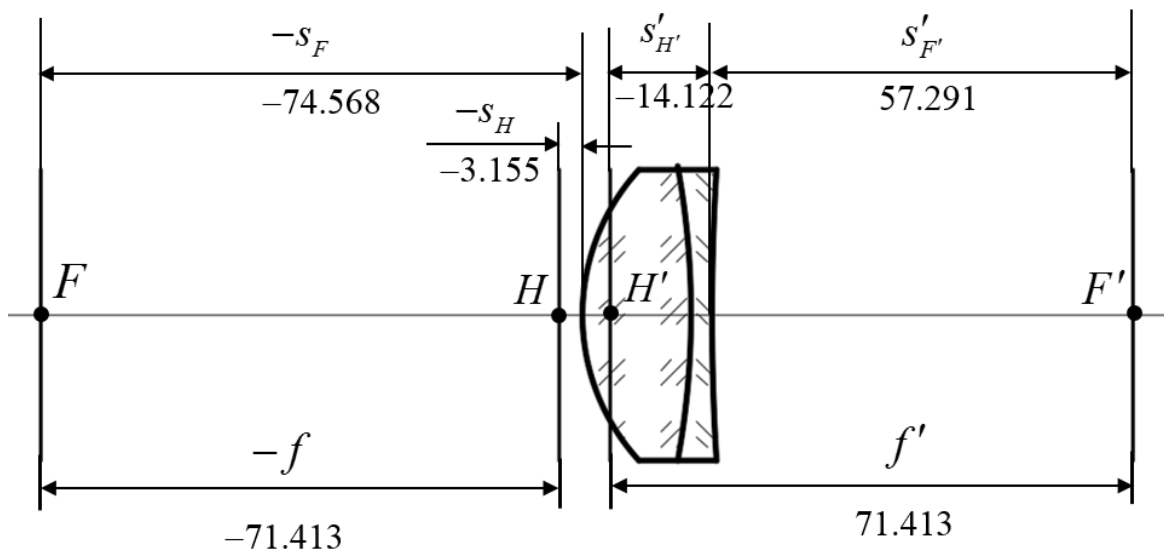


Рис. 6.13. Кардинальні елементи оптичної системи до завдання 6.4

### 6.8.3. Розрахунки кардинальних відрізків оптичної системи через елементи гаусової матриці

Кардинальні відрізки центрованої оптичної системи можна знайти з розрахованої гаусової матриці  $\mathbf{G}$ , в якій елементами є числа  $g_{11}$ ,  $g_{12}$ ,  $g_{21}$ ,  $g_{22}$ :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix},$$

що означають

$$g_{11} = \frac{s'_{F'}}{f'}, \quad g_{12} = \frac{f f' - s_F s'_{F'}}{f'}, \quad g_{21} = \frac{1}{f'}, \quad g_{22} = -\frac{s_F}{f'}.$$

З цих елементів гаусової матриці витікають формули розрахунків кардинальних відрізків:

$$f' = \frac{1}{g_{21}}; \quad (6.34)$$

$$s'_{F'} = \frac{g_{11}}{g_{21}}; \quad (6.35)$$

$$s_F = -\frac{g_{22}}{g_{21}}; \quad (6.36)$$

$$f = g_{12} - \frac{g_{11}g_{22}}{g_{21}}. \quad (6.37)$$

До завдання 6.3 за формулою (6.26) в математичному редакторі Mathcad була розрахована гаусова матриця і отримані значення її елементів:

$$G = \begin{pmatrix} 0.802246 & -11.590772 \\ 0.014003 & 1.044185 \end{pmatrix},$$

де  $g_{11} = 0.802246$ ,  $g_{12} = -11.590772$ ,  $g_{21} = 0.014003$ ,  $g_{22} = 1.044185$ .

Згідно формул (6.34)–(6.37):

$$f' = \frac{1}{g_{21}} = \frac{1}{0.014003} = 71.413 \text{ мм}; \quad s'_{F'} = \frac{g_{11}}{g_{21}} = \frac{0.802246}{0.014003} = 57.29 \text{ мм};$$

$$s_F = -\frac{g_{22}}{g_{21}} = -\frac{1.044185}{0.014003} = -74.568 \text{ мм};$$

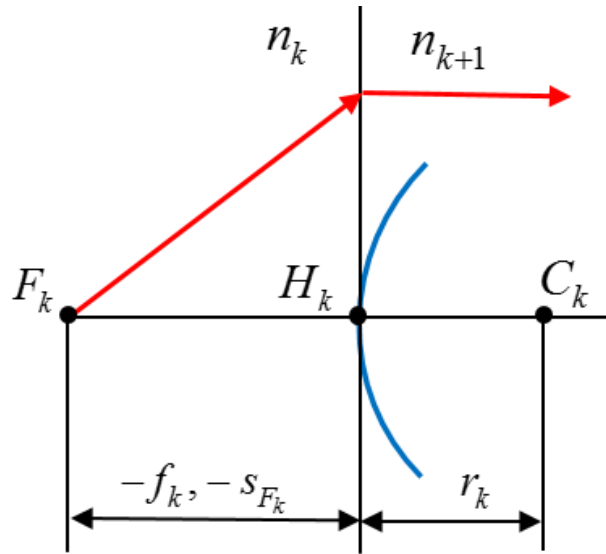
$$f = g_{12} - \frac{g_{11}g_{22}}{g_{21}} = -11.590772 - \frac{0.802246 \cdot 1.044185}{0.014003} = -71.413 \text{ мм}.$$

Результати розрахунків кардинальних відрізків матричним методом, як видно, повністю збігаються з результатами аналогічних розрахунків з використанням формул кутів та висот (6.20), (6.21) а також формул кардинальних відрізків (6.28), (6.29) та (6.31), (6.32).

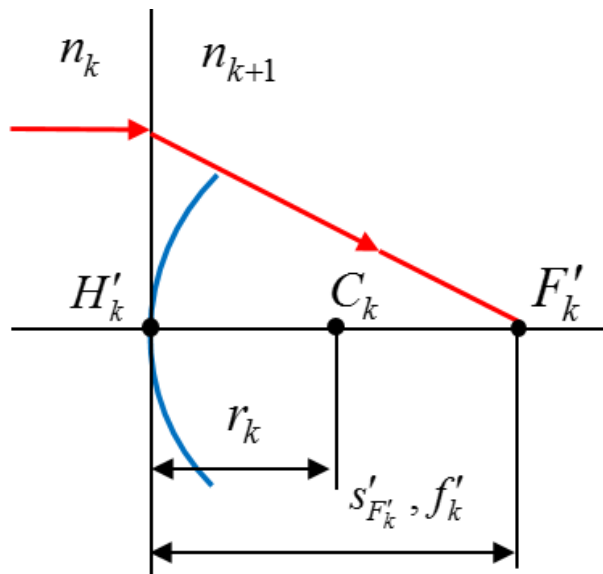
## 6.9. Кардинальні відрізки оптичної поверхні

Будь-яка оптична поверхня теж має свої кардинальні елементи – головні точки, точки фокусів, фокусні відстані, головні та фокальні площини. Головні точки суміщені з точками перетну оптичної по-

верхні з оптичною віссю, тому відповідні фокальні відрізки і фокусні відстані мають однакову довжину, рис. 6.14.



a



б

Рис. 6.14. Кардинальні елементи оптичної заломлюючої поверхні: а – передні кардинальні елементи; б – задні кардинальні елементи

Положення кардинальних точок і площин визначаються фокусними відстанями. Розрахунки фокусних відстаней оптичної поверхні можна здійснити за допомогою формули відрізків (6.4):

$$\frac{n_{k+1}}{s'_k} - \frac{n_k}{s_k} = \frac{n_{k+1} - n_k}{r_k}.$$



Задній фокус оптичної поверхні – зображення в нульових променях безкінечно віддаленої осьової предметної точки, коли  $s_k = \infty$ . При цьому відрізок  $s'_k = f'_k$  і формула відрізків приймає вигляд:

$$\frac{n_{k+1}}{f'_k} = \frac{n_{k+1} - n_k}{r_k},$$

звідки задня фокусна відстань оптичної поверхні:

$$\boxed{f'_k = \frac{n_{k+1}}{n_{k+1} - n_k} r_k.} \quad (6.38)$$

В оптичної поверхні точки  $O_k$  і  $H'_k$  є суміщеними, тому задня фокусна відстань і задній фокальний відрізок є рівними:  $s'_k = f'_k$ .

Передні кардинальні відрізки оптичної поверхні можна знайти також із визначення переднього фокусу, який є предметною осьовою точкою, зображення котрої знаходиться на нескінченності. Так при  $s'_k = \infty$ ,  $s_k = f_k$ , а формула відрізків приймає вигляд:

$$-\frac{n_k}{f_k} = \frac{n_{k+1} - n_k}{r_k},$$

звідки передня фокусна відстань:

$$\boxed{f_k = -\frac{n_k}{n_{k+1} - n_k} r_k.} \quad (6.39)$$

З формул (6.38), (6.39) можна знайти співвідношення між задньою і передньою фокусними відстанями:

$$\boxed{\frac{f'_k}{f_k} = -\frac{n_{k+1}}{n_k}.} \quad (6.40)$$

З формули (6.40) витікає важлива властивість заломлюючої поверхні: у неї задня і передня фокусні відстані не однакові за довжиною і протилежні за знаком.

Відбивальну оптичну поверхню можна розглядати як заломлюючу, у якої  $\frac{n_{k+1}}{n_k} = -1$ . Застосування цього співвідношення до формул (6.38)–(6.39) дає наступний результат:

$$\boxed{f'_k = f_k = \frac{r}{2},} \quad (6.41)$$

з якого виявляється що:

– задня і передня фокусні відстані сферичної відбивальної поверхні дорівнюють половині радіуса сфери;

– задня і передня фокусні відстані та фокальні відрізки є однаковими за величиною і знаком;

– точки переднього і заднього фокусів є суміщеними.

На рис. 6.15. показані увігнута та опукла відбивальні поверхні. Увігнута поверхня має дійсний передній і дійсний задній фокус. У опуклої поверхні точки фокусів – уявні.

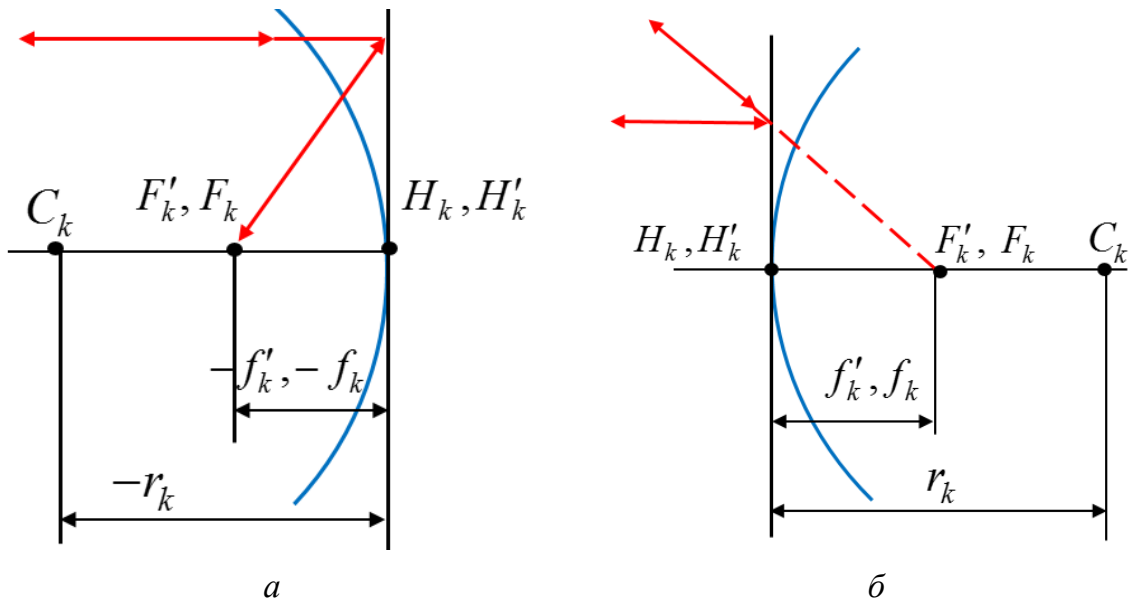


Рис. 6.15. Відбивальні сферичні поверхні: *a* – увігнута відбивальна поверхня, точки фокусів та фокальні площини суміщені дійсні; *б* – опукла відбивальна поверхня, точки фокусів та фокальні площини суміщені уявні

## РОЗДІЛ 7. ТЕОРІЯ ІДЕАЛЬНОЇ ОПТИЧНОЇ СИСТЕМИ

Поява в геометричній оптиці поняття про нульовий промінь стала передумовою створення теорії ідеальної оптичної системи. Нульові промені при проходженні через оптичні системи не порушують гомоцентричності пучків і не спотворюють геометричну подібність між предметом та його зображенням.

Ідеальною вважають таку оптичну систему, яка відповідає вимогам оптики солінійної спорідненості або колінеарного зв'язку між простором предметів і простором зображень.

Основні положення оптики солінійної спорідненості:

**1. Будь яка пряма лінія простору предметів спряжена з однією і тільки однією прямою лінією простору зображень.**

Промінь в оптично однорідному середовищі простору предметів є прямою лінією. Якщо після проходження через оптичну систему промінь знову опиняється в оптично однорідному середовищі, то через це він знову отримує форму прямої лінії, яка по відношенню до вихідного променя є єдиною в просторові зображень. Ці дві лінії, належать тільки одному променю і вони є оптично спряженими. Таким чином вникає уява і теоретичне положення про обов'язкову попарну солінійну спорідненість ліній, яку забезпечує будь яка оптична система між зонами простору предметів і зоною простору зображень. Тому і з'явився термін **солінійна спорідненість**.

**2. Кожній точці простору предметів належить лише одна і тільки одна оптично спряжена точка простору зображень.**

Це положення не може витікати із першого положення. Більше того, якщо перше положення дійсно витримується в реальних оптичних системах, то друге положення витримується лише в окремих оптичних системах з ідеально виправленими абераціями. В загальному випадку друге положення в реальних системах не виконується через їх властивість порушувати гомоцентричність пучків променів. Тому вводячи друге положення солінійної спорідненості оптичну систему ідеалізують.

**3. Кожній площині простору предметів оптично спряженою є одна і лише одна площина простору зображень.**

Дійсно, якщо в оптичній системі виконуються перше і друге положення оптики солінійної спорідненості, то із них витікає третє положення. Нехай в просторі предметів є дві прямі лінії, які перетинаються, утворюючи площину. При виконанні першого і другого

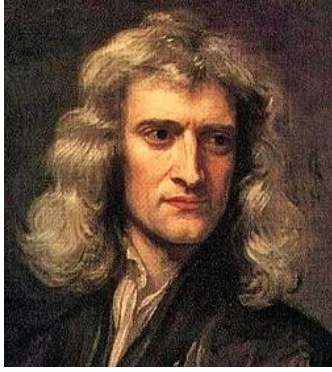
положення ці лінії в просторі зображень також є прямими і перетинаються в точці, оптично спряженою з точкою перетину прямих у просторі предметів. Тоді зображення вказаних ліній в просторі зображень також утворюють площину, яка є єдиною, оптично спряженою з площиною у просторі предметів. З цього витікає, що площина, перпендикулярна до оптичної осі центрованої оптичної системи у просторі предметів, має єдину і тільки єдину оптично спряжену площину у просторі зображень, яка також є перпендикулярною до оптичної осі.

Зрозуміло, що положення оптики солінійної спорідненості можуть виконуватися повністю лише в ідеальних оптичних системах і при проходженні через них монохроматичного випромінювання. Але при використанні з метою аналізу дії реальних оптичних систем оптики нульових променів, які є фіктивними, оптична система також фіктивно стає ідеальною, тому що відносно нульових променів виконуються всі три положення оптики солінійної спорідненості.

Чи є така ідеалізація виправданою? Так, на ранніх стадіях проектування оптичних систем така ідеалізація безумовно є виправданою, тому що вона надає можливість в першому наближенні виявляти або забезпечувати потрібні функціональні можливості оптичної системи, визначати або забезпечувати потрібні кардинальні параметри як самої системи, так і її складових – компонентів, і лише потім на наступних етапах проектування розв'язувати задачі забезпечення оптичній системі стану, який наближує її до ідеальної в межах вимог технічного завдання. Саме такий підхід і метод створення оптичних систем оптичних приладів забезпечив можливість мати велику кількість існуючих на сьогодні оптичних приладів і систем.

## 7.1. Формула Ньютона

Кардинальні елементи оптичної системи дозволяють при розв'язанні задач, пов'язаних з пошуком положення оптичних зображень та їх розмірів, зовсім не використовувати розрахунки ходу нульових променів через оптичну систему, що суттєво спрощує аналіз дії оптичних систем. З цього виникли основні формули теорії ідеальної оптичної системи та формули розрахунків тих параметрів, які характеризують положення і розміри ідеальних (згідно положень оптики солінійної спорідненості) оптичних зображень.



Исаак Ньютон,  
англійський фізик,  
математик, механік  
і астроном  
(1643–1727)

На рис. 7.1 показана оптична система, кардинальні елементи якої відомі і знайдені за допомогою розрахунку ходу відповідних нульових променів (див. п. 6.6). Перед оптичною системою знаходиться площина предметів на відстані  $z$  від переднього фокусу. Площина перпендикулярна до оптичної осі. В цій площині присутній предмет – відрізок  $AB$  довжиною  $y$ . Потрібно знайти положення площини, де знаходиться зображення – відрізок  $A'B'$ , та його довжину  $y'$ . Якщо оптична система ідеальна, то зображення знаходяться в площині, також перпендикулярній до оптичної осі.

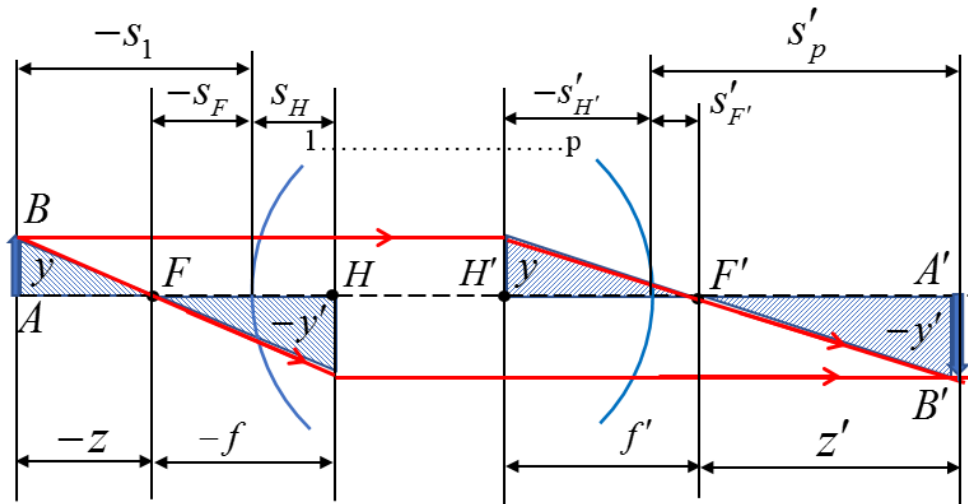


Рис. 7.1. До формули Ньютона

Із лівої пари подібних заштрихованих трикутників знаходимо співвідношення:  $\frac{y}{-y'} = \frac{-z}{-f}$ , із правої пари подібних заштрихованих трикутників знаходимо співвідношення:  $\frac{y}{-y'} = \frac{f'}{z'}$ , звідки  $\frac{z}{f} = \frac{f'}{z'}$ , або

$$\boxed{z z' = f f' .} \quad (7.1)$$

Рівняння (7.1) має назву формули Ньютона. Ця формула дозволяє без розрахунку ходу нульового променя знайти положення зображення відносно заднього фокусу через відрізок  $z'$  і визначити відрізок  $s'_p$ :

$$s'_p = s'_{F'} + z' . \quad (7.2)$$

Із геометричної подібності заштрихованих на рис. 7.1 пар трикутників також можна без розрахунку ходу нульового променя отримати формули лінійного збільшення:

$$\beta = \frac{y_{p+1}}{y_1} = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{z}, \quad (7.3)$$

$$\beta = \frac{y_{p+1}}{y_1} = \frac{y'}{y} = -\frac{z'}{f'}. \quad (7.4)$$

## 7.2. Властивість головних площин ідеальної оптичної системи

Формула Ньютона дозволяє виявити важливу властивість головних площин ідеальної оптичної системи. Для цього достатньо розмістити предмет – відрізок  $AB$  в передню головну площину і знайти місце розташування зображення цього відрізка.

Якщо відрізок  $AB$  знаходиться в передній головній площині, то для нього відрізок  $z = -f$ .

Тоді відрізок  $z'$  згідно (7.2) має значення  $z' = \frac{f f'}{-f} = -f'$ , яке вказує на те, що зображення предмету – відрізок  $A'B'$  знаходиться в задній головній площині. У відповідності з формулою (7.4) лінійне збільшення зображення відрізка  $A'B'$ :  $\beta = -\frac{z'}{f'} = -\frac{-f'}{f'} = 1$ .

Вище викладене демонструє властивість головних площин:

---

**Головні площини оптичної системи є оптично спряженими із лінійним збільшенням  $\beta = +1$ .**

---

Вірним є і зворотне визначення головних площин, а саме: **пара оптично спряжених площин, для яких лінійне збільшення  $\beta = +1$ , є головними площинами оптичної системи.**

Важливим наслідком із того, що  $\beta = +1$  є наступне: **будь-якій нульовий промінь, який своїм продовженням перетинає передню головну площину в точці на висоті  $h$ , виходить із оптичної системи так, що його зворотне продовження перетинає задню головну площину в точці на тій самій висоті  $h' = h$ , бо відрізки довжиною  $h$  і  $h'$  є оптично спряженими з лінійним збільшенням  $\beta = +1$  (рис. 7.2).**

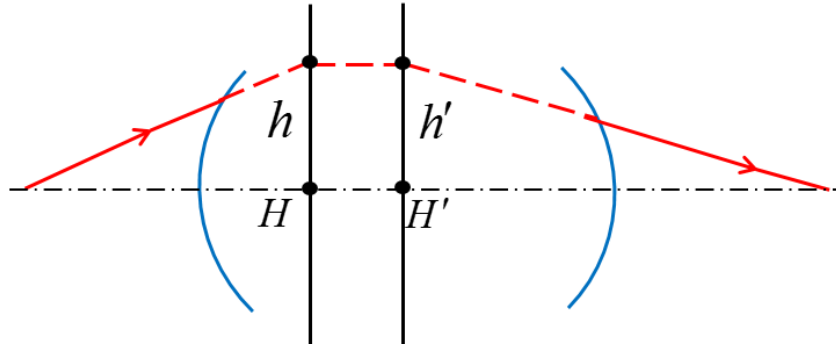


Рис. 7.2. До факту рівності висот нульового променя на головних площинах оптичної систем

### 7.3. Співвідношення задньої $f'$ і передньої $f$ фокусних відстаней ідеальної оптичної системи

На рис. 7.3 показана оптична система, яка представлена кардинальними елементами, а також показниками заломлення перед системою  $n_1$  і за системою  $n_{p+1}$ .

В систему надходять двоє паралельних нульових променів, нахилених до оптичної осі під кутом  $\sigma$ . Промінь з номером 2 проходить через передній фокус  $F$ , тому після перетинання з передньою головною площиною йде далі паралельно оптичній осі. Промінь з номером 1 потрапляє у передню головну точку  $H$ , а тому згідно змісту п. 7.2 він виходить через задню головну точку  $H'$ . Так як обидва промені на вході в систему паралельні один до одного, то це означає, що вони надходять від безкінечно віддаленої точки простору предметів, а тому ці промені повинні перетинатися у задній фокальній площині. Точка перетину променя 2 із задньою фокальною площиною (рис. 7.3) є водночас точкою перетину з променем 1.

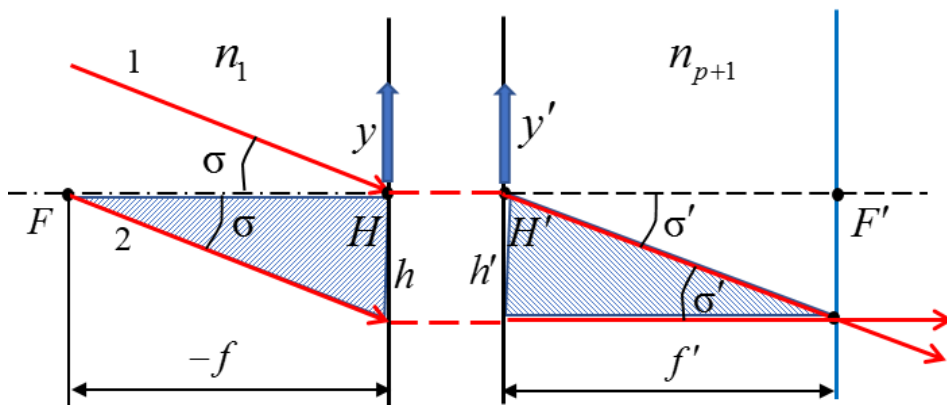


Рис. 7.3. До співвідношення передньої та задньої фокусних відстаней оптичної системи



Якщо по ходу променю 1 в передній головній площині в точці  $H$  розмістити предмет – відрізок  $y$ , то його зображення – відрізок  $y'$ , згідно властивості головних площин, буде знаходитись у задній головній площині і мати довжину  $y' = y$ .

Відносно променю 1 інваріант Гюйгенса-Гельмгольца (6.13) буде мати вираз:

$$y \cdot n_1 \cdot \operatorname{tg} \sigma = y' \cdot n_{p+1} \operatorname{tg} \sigma',$$

а з урахуванням рівності  $y' = y$ :

$$n_1 \operatorname{tg} \sigma = n_{p+1} \operatorname{tg} \sigma'. \quad (7.5)$$

У лівому заштрихованому на рис. 7.3 прямокутному трикутнику  $\frac{h}{-f} = \operatorname{tg} \sigma$ , у правому прямокутному заштрихованому трикутнику  $\frac{h'}{f'} = \operatorname{tg} \sigma'$ . При цьому рівняння (7.5) перетворюється до вигляду:

$n_1 \frac{h}{-f} = n_{p+1} \frac{h'}{f'}$ , або  $\frac{n_1}{-f} = \frac{n_{p+1}}{f'}$ , з якого витікає співвідношення фокусних відстаней:

$$\boxed{\frac{f'}{f} = -\frac{n_{p+1}}{n_1}}. \quad (7.6)$$

Вираз (7.6) свідчить про те, що:

1) задня і передня фокусні відстані мають різні значення, якщо  $n_{p+1} \neq n_1$ ;

2) задня і передня фокусні відстані мають однакові за абсолютною величиною значення, якщо  $n_{p+1} = n_1$ ;

3) в оптичному середовищі з більшим показником заломлення абсолютне значення фокусної відстані є більшим;

4) співвідношення фокусних відстаней оптичної системи (7.6) і фокусних відстаней однієї оптичної поверхні (6.40) не відрізняються.

У випадку  $n_{p+1} = n_1$ , коли  $f' = -f$ , формула Ньютона змінюється до вигляду:

$$z \cdot z' = -(f')^2, \quad (7.7)$$

або

$$z \cdot z' = -(f)^2.$$

Для прикладу оптична система ока людини має різні за довжиною фокусні відстані. Задній фокус оптичної системи ока знаходиться у скловидному тілі з показником заломлення  $n_{p+1}=1.33$ , передній фокус знаходиться у повітрі з показником заломлення  $n_1=1$ . Тому згідно (7.6) задня фокусна відстань оптичної системи ока у 1.33 разів є більшою і протилежною за знаком ніж передня фокусна відстань.

### 7.4. Формула Гауса

Відрізки  $z$  та  $z'$ , які використовуються у формулі Ньютона, не завжди є зручними для розрахунків, особливо у тих випадках коли оптична система вважається тонкою, або заданою тільки головними площинами і точками фокусів. В таких випадках зручніше положення площини предметів або площини зображень визначати відрізками, які мають стандартні позначення  $a$  або  $a'$  (рис. 7.4). Вказані відрізки відкладаються від головних площин оптичної системи, що визначає їх знаки.

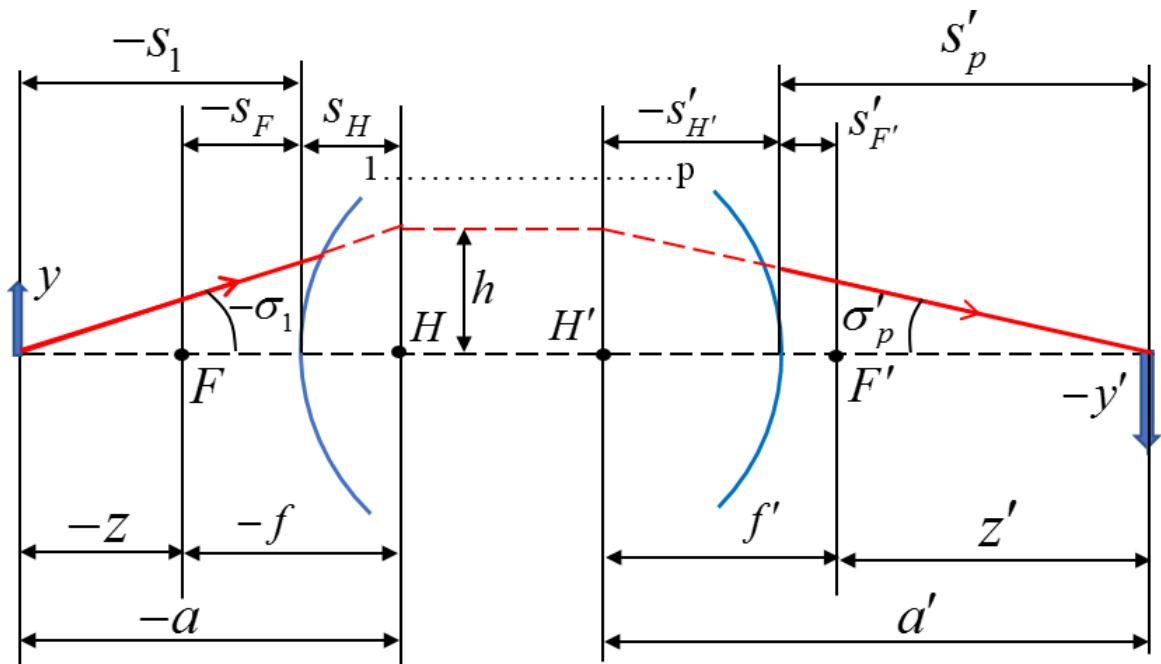


Рис. 7.4. До формули Гауса

З рис. 7.4 видно, що  $z = a - f$ ,  $z' = a' - f'$ . Після підстановки цих замін у формулу Ньютона (7.1) і простих перетворень отримуємо нову формулу:

$$\boxed{\frac{f'}{a'} + \frac{f}{a} = 1}, \quad (7.8)$$

яку називають **формулою Гауса**.

Якщо  $n_{p+1} = n_1$ , то  $f' = -f$ , і формула Гауса перетворюється до вигляду:

$$\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f'}, \quad (7.9)$$

або

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}. \quad (7.10)$$

Величина, зворотна фокусній відстані, має назву **оптичної сили** і позначається:

$$\Phi = \frac{n_{p+1}}{f'} = -\frac{n_1}{f}. \quad (7.11)$$

Розмірність оптичної сили  $\text{мм}^{-1}$ . В розрахунках незручно використовувати зворотні значення відрізків  $a$ ,  $a'$  через те, що їх зворотні значення, як правило, є малими числами. В таких випадках  $\Phi$  відповідно до (7.11) теж має малі значення. Якщо у рівняннях (7.9), (7.10) ліву і праву частини помножити на 1000 мм, то вказана незручність усувається. Так виникла діоптрійна міра оптичної сили:

$$\Phi[\text{дптр}] = \frac{n_{p+1} 1000 \text{мм}}{f'_{\text{мм}}}. \quad (7.12)$$

Якщо фокусна відстань  $f' = 1000 \text{мм}$ , то оптична сила згідно формулі (7.12)  $\Phi = 1$  діоптрія = 1 [дптр].

В діоптрійній мірі формула Гауса (7.9) для оптичної системи у повітрі чи з однаковими оптичними середовищами в просторі предметів і просторі зображень, отримує вигляд:

$$\boxed{A' - A = \Phi}, \quad (7.13)$$

де  $A'[\text{дптр}] = \frac{1000}{a'}$ ,  $A[\text{дптр}] = \frac{1000}{a}$ ,  $\Phi[\text{дптр}] = \frac{1000}{f'}$ .

Дані про відрізки  $a$  і  $a'$  дозволяють визначити лінійне збільшення  $\beta$  зображення. Щоб довести це використаємо формулу (7.4)

у двох виглядах:  $\beta = -\frac{f}{z}$  і  $\beta = -\frac{z'}{f'}$ .

Так як  $z = a - f$  (див. рис. 7.4), то  $\beta = -\frac{f}{a - f}$ , звідки  $a = \frac{\beta - 1}{\beta} f$ .

Відрізок  $z' = a' - f'$ , тому  $\beta = -\frac{a' - f'}{f'}$ , через що  $a' = (1 - \beta)f'$ .

Тоді відношення відрізків  $\frac{a'}{a} = \frac{(1 - \beta)f'}{\frac{\beta - 1}{\beta} f} = -\frac{f'}{f} \beta$ .

Згідно (7.6)  $\frac{f'}{f} = -\frac{n_{p+1}}{n_1}$ , тому  $\frac{a'}{a} = \frac{n_{p+1}}{n_1} \beta$ , а лінійне збільшення:

$$\boxed{\beta = \frac{n_1}{n_{p+1}} \frac{a'}{a}} \quad (7.14)$$

У тому випадку, коли у оптичній системі  $n_1 = n_{p+1}$ , тобто зліва і справа система має однакове за показником заломлення середовище, наприклад повітря, тоді

$$\boxed{\beta = \frac{a'}{a}} \quad (7.15)$$

**Завдання 7.1.** Об'єktiv діaproектора формує зображення слайда на екрані. Між слайдом та екраном відстань 3 м. Слайд – прямокутник зі сторонами 24 мм × 36 мм. Екран – прямокутник з розмірами 1200 мм × 1800 мм. Яке положення і яку фокусну відстань повинен мати об'єktiv проєктору при умові, що зображення слайду займає весь екран. Об'єktiv можна вважати тонкою оптичною системою.

**Розв'язання.** Положення об'єктиву між слайдом і екраном визначається відрізками  $a$  і  $a'$ . Якщо значення цих відрізків будуть визначеними, то фокусну відстань об'єктиву можна знайти за допомогою формули Гауса.

Для пошуку значень вказаних відрізків потрібно скласти систему з двох рівнянь, в яких відрізки будуть шуканими невідомими (рис. 7.5).

З рис. 7.5 можна скласти перше рівняння системи:

$$-a + a' = 8000 \quad (7.16)$$

Для складання другого рівняння використаємо формулу лінійного збільшення (7.15):  $\beta = \frac{a'}{a}$ . Згідно рисунку зображення є перевернутим, до того ж форма слайда і форма екрана є подібними прямо-

кутниками, тому можна використати їх вертикальні розміри і записати:  $\beta = \frac{y'}{y} = \frac{-1200}{24} = -50$ , звідки друге рівняння:

$$\frac{a'}{a} = -50. \quad (7.17)$$

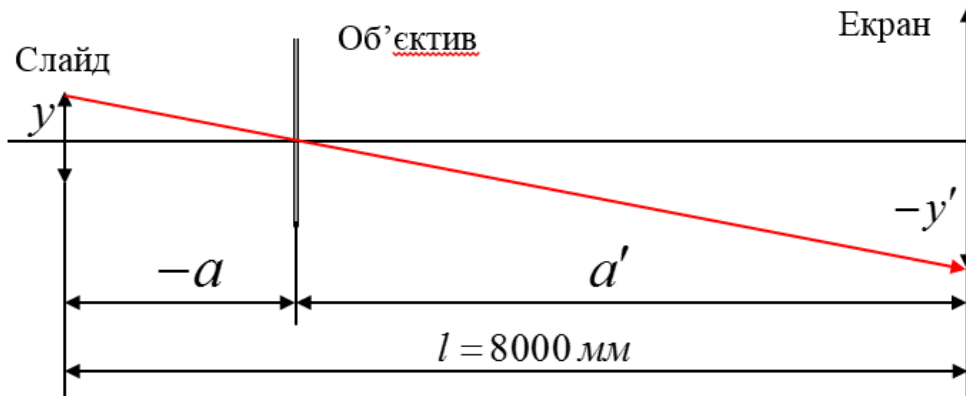


Рис. 7.5. До завд. 7.1

Розв'язок системи рівнянь, складеної з виразів (7.16) і (7.17) має корні:

$$a = -156.86 \text{ мм}; \quad a' = 7843.14 \text{ мм}.$$

Розрахунок задньої фокусної відстані об'єктиву можна здійснити із формули (7.9):

$$f' = \frac{a \cdot a'}{a - a'} = \frac{-156.86 \cdot 7843.14}{-156.86 - 7843.14} = 153.78 \text{ мм}.$$

## 7.5. Розрахунок ходу нульового променя через оптичну систему, представлену кардинальними елементами компонентів

Оптичні системи оптичних приладів, як правило, складаються із окремих компонентів. Компонентом є компактна група окремих оптичних поверхонь, що виконують в системі спеціальну функцію. Прикладом може слугувати оптична система зорової труби, в якій компонентами є об'єктив, лінзова оберտальна система, окуляр. Оберտальна система сама складається з двох лінзових компонентів. На рис. 7.6 показано таку систему.

Об'єктив формує дійсне перевернуте зображення віддалених предметів. Лінзи оберտальної системи ще раз перевертають це

зображення і роблять його прямим. Окуляр забезпечує оку комфортне спостереження зображення, сформованого всією оптичною системою зорової труби.

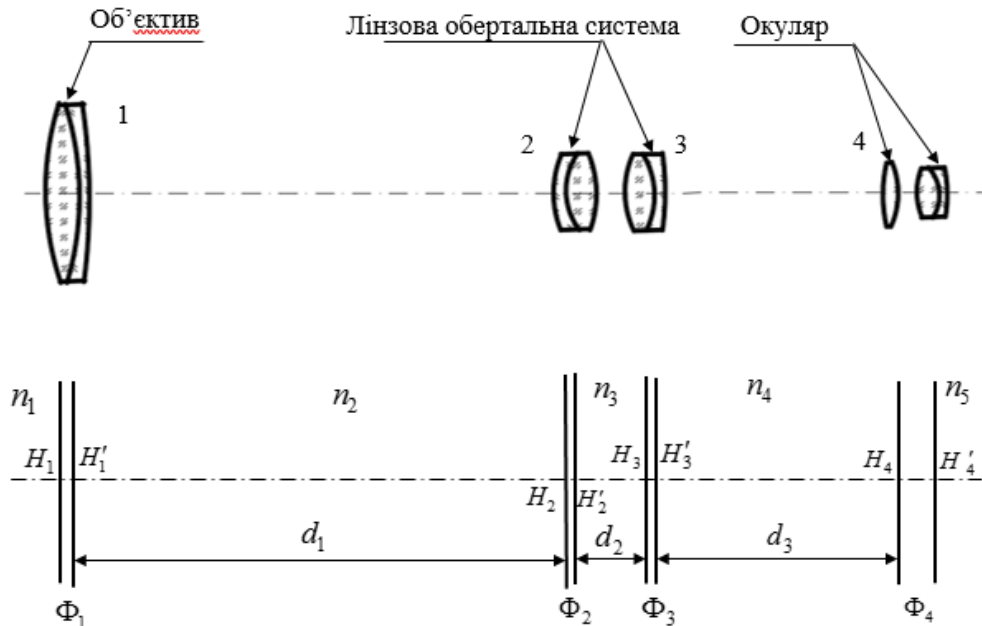


Рис. 7.6. Оптична система зорової труби з лінзовою обертальною системою, знизу – оптична система зорової труби, яка представлена оптичним компонентами

На рис. 7.6 компоненти представлені кардинальними елементами – головними площинами, оптичними силами  $\Phi_i$ , відстанями між компонентами  $d_i$ , та показниками заломлення середовищ між компонентами  $n_i$ . В переважній більшості оптичних систем між компонентами знаходиться повітря з показником заломлення  $n_i = 1$ .

В такому вигляді оптичні системи представляють на ранніх стадіях їх проектування (стадії ескізного проекту), коли структура компонентів та конструктивні параметри компонентів ще залишаються невідомими. Проте і на таких стадіях виникає потреба розрахунків ходу нульових променів при пошуку тих діафрагм, що обмежують проходження через систему потоку випромінення, обмежують поле зору оптичної системи. Розрахунок ходу нульових променів через систему, задану компонентами, потрібен також при підготовці даних до абераційного синтезу оптичної системи, який дозволить потім відтворити конструктивні параметри компонентів.

Формула Гауса дає можливість адаптувати формули кутів і висот нульового променя до розрахунків його ходу через оптичні компоненти, представлені кардинальними елементами.

На рис. 7.7 показано окремий компонент оптичної системи, через який прямує нульовий промінь. Вихідними даними до розрахунку його ходу є:

- координати променю  $a_i, \sigma_i$ ;
- оптична сила компоненту  $\Phi_i$  або його задня  $f'$  чи передня  $f$  фокусні відстані, а також показники заломлення до  $n_i$  і після  $n_{i+1}$  компоненту.

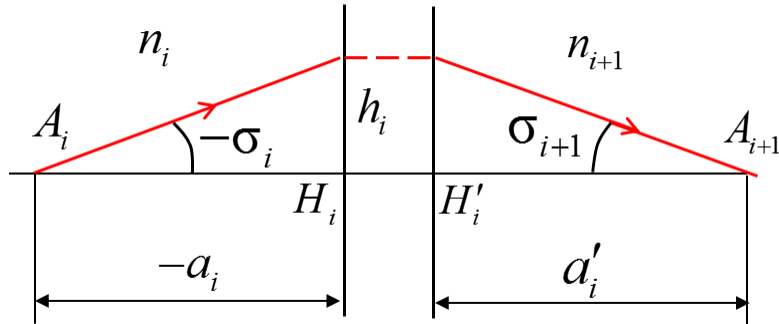


Рис. 7.7. До розрахунку ходу нульового променю через компонент з оптичною силою  $\Phi_i$

Результатом розрахунку повинні стати параметри нульового променю після компоненту – значення  $\sigma_{i+1}$  та  $a'_i$ .

Для розрахунку використаємо формулу Гауса (7.8), обидві частини якої помножимо на висоту  $h_i$ :

$$\frac{f'_i}{a'_i} h_i + \frac{f_i}{a_i} h_i = h_i.$$

З рис. 7.7 видно, що  $\frac{h_i}{a_i} = \text{tg } \sigma_i$ , а  $\frac{h_i}{a'_i} = \text{tg } \sigma_{i+1}$ . Тоді попереднє рівняння трансформується до вигляду:

$$f'_i \cdot \text{tg } \sigma_{i+1} + f_i \cdot \text{tg } \sigma_i = h_i,$$

або

$$\text{tg } \sigma_{i+1} = -\frac{f_i}{f'_i} \text{tg } \sigma_i + \frac{h_i}{f'_i}.$$

Згідно (7.6)  $-\frac{f_i}{f'_i} = \frac{n_i}{n_{i+1}}$ , тому  $\text{tg } \sigma_{i+1} = \frac{n_i}{n_{i+1}} \text{tg } \sigma_i + \frac{h_i}{f'_i}$ . Якщо другий доданок у правій частині цього рівняння помножити в чисельнику і знаменнику на показник заломлення  $n_{i+1}$ :

$$tg \sigma_{i+1} = \frac{n_i}{n_{i+1}} tg \sigma_i + \frac{h_i}{f'} \frac{n_{i+1}}{n_{i+1}},$$

то згідно визначення оптичної сили компонента (7.11)  $\Phi_i = \frac{n_{i+1}}{f'_i}$  попередній вираз перетворюється до вигляду:

$$\boxed{tg \sigma_{i+1} = \frac{n_i}{n_{i+1}} tg \sigma_i + \frac{h_i \Phi_i}{n_{i+1}}.} \quad (7.18)$$

Формула (7.18) є формулою кутів нульового променя, що адаптована до розрахунку нульового променя через заданий компонент.

Практично, в переважній кількості випадків, компоненти оптичної системи знаходяться в повітрі, коли  $n_i = n_{i+1} = 1$ . Тоді формула (7.18) спрощується до вигляду:

$$\boxed{tg \sigma_{i+1} = tg \sigma_i + h_i \Phi_i,} \quad (7.19)$$

де  $\Phi_i = \frac{1}{f'_i}$ .

Формула висот нульового променя на головних площинах компонентів залишається у тому вигляді, якій вона мала в п. 6.6, формула (6.21), а саме:

$$\boxed{h_{i+1} = h_i - d_i tg \sigma_{i+1},} \quad (7.20)$$

де осьова відстань  $d_i$ .

Якщо метою розрахунків ходу нульового променя є пошук кардинальних елементів, то кардинальні відрізки системи розраховуються за формулами:

$$f' = \frac{h_1}{tg \sigma_{p+1}}; \quad (7.21)$$

$$a'_{F'} = \frac{h_p}{tg \sigma_{p+1}}; \quad (7.22)$$

$$a'_{H'} = a'_{F'} - f'; \quad (7.23)$$

$$f = -\frac{\overleftarrow{h}_1}{tg \sigma_{p+1}}; \quad (7.24)$$



$$a_F = -\frac{\bar{h}_p}{\text{tg } \bar{\sigma}_{p+1}}; \quad (7.25)$$

$$a_H = a_F - f. \quad (7.26)$$

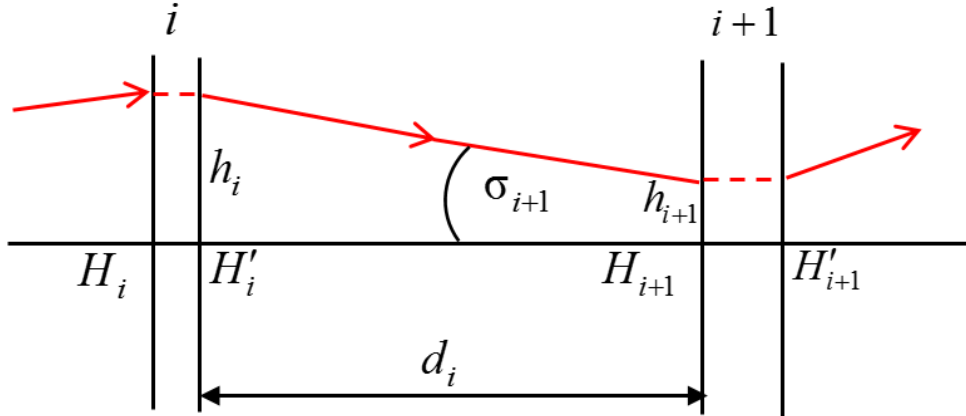


Рис. 7.8. До формули висот нульового променю на компонентах оптичної системи

Розрахунок ходу нульового променю через оптичну систему задану своїми компонентами можна здійснити матричним методом за допомогою матриці Гюйгенса  $\mathbf{G}$ :

$$\mathbf{b}' = \mathbf{G}\mathbf{b}, \quad (7.27)$$

де  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \text{tg } \sigma_1 \end{pmatrix}$  – матриця-вектор координат нульового променю на вході в оптичну систему, тобто на першому оптичному компоненті;

$\mathbf{b}' = \begin{pmatrix} h_p \\ \text{tg } \sigma'_p \end{pmatrix}$  – матриця-вектор координат нульового променю після проходження через оптичну систему – за останнім компонентом оптичної системи:

проходження через оптичну систему – за останнім компонентом оптичної системи:

$$\mathbf{G} = \mathbf{R}_p \mathbf{D}_{p-1} \dots \mathbf{D}_2 \mathbf{R}_2 \mathbf{D}_1 \mathbf{R}_1 \mathbf{D}_0, \quad (7.28)$$

матриці:  $\mathbf{R}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\Phi_i}{n_{i+1}} & \mu_i \end{pmatrix}$ ,  $\mu_i = \frac{n_i}{n_{i+1}}$ ;  $n_i$ ,  $n_{i+1}$  – показники заломлення

середовищ перед та за компонентом з номером  $i$  відповідно (рис. 7.6);  $\Phi_i = \frac{1}{f'_i}$ ,  $f'_i$  – задня фокусна відстань компонента, яку він має у повітрі,

має у повітрі,

$$\mathbf{D}_i = \begin{pmatrix} 1 & -d_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{D}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відрізок  $a'_p$ , що вказує положення площини зображення відносно останнього компоненту оптичної системи, розраховується з використанням матриці  $\mathbf{b}'$  за формулою:

$$a'_p = \frac{h_p}{\operatorname{tg} \sigma_{p+1}}, \quad (7.29)$$

а лінійне збільшення зображення – з використанням елементів матриць  $\mathbf{b}$  і  $\mathbf{b}'$

$$\beta = \frac{n_1 \operatorname{tg} \sigma_1}{n_{p+1} \operatorname{tg} \sigma_{p+1}}. \quad (7.30)$$

Формули розрахунків кардинальних відрізків оптичної системи з використанням елементів матриці Гюйгенса  $\mathbf{G}$ .

При розташуванні елементів у матриці  $\mathbf{G}$ :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix};$$

$$f' = \frac{1}{g_{21}}; \quad (7.31)$$

$$a'_{F'} = \frac{g_{11}}{g_{21}}; \quad (7.32)$$

$$a_F = -\frac{g_{22}}{g_{21}}; \quad (7.33)$$

$$f = g_{12} - \frac{g_{11}g_{22}}{g_{21}}. \quad (7.34)$$

Формули (7.23)–(7.30) дозволяють розраховувати кардинальні елементи оптичної системи, що складена з окремих компонентів, або знаходити положення площини зображень, а також лінійного чи інших типів збільшень зображення, сформованого такою оптичною системою.

Нижче у завданні 7.2 наведено приклад практичного використання формул (7.18)–(7.34).

**Завдання 7.2.** Знайти кардинальні елементи оптичної системи, представлені компонентами (рис. 7.9).

$$f_1' = 100 \text{ мм}, f_2' = -200 \text{ мм}, d_1 = 50 \text{ мм}, n_1 = 1, n_2 = 1, n_3 = 1.$$

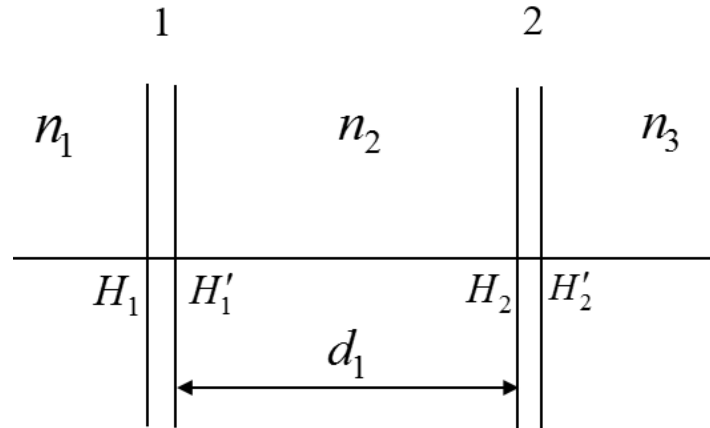


Рис. 7.9. Оптична система до завдання 7.2

**Розв'язання.** Розрахунки кардинальних відрізків здійснимо за допомогою розрахунку ходу нульового променя, що надходить в систему з безкінечності, та формул (7.18), (7.19):

1. Нульовий промінь на вході в систему паралельний оптичній осі, тому  $\text{tg } \sigma_1 = 0$ , а висота променя довільна, наприклад  $h_1 = 100 \text{ мм}$ .

Так як всі компоненти оптичної системи згідно вихідних даних знаходяться у повітрі, то для розрахунку кутів нульового променя можна використовувати формулу (7.19):

$$\text{tg } \sigma_2 = \text{tg } \sigma_1 + h_1 \Phi_1 = 0 + 100 \cdot \frac{1}{100} = 1;$$

висота променя  $h_2 = h_1 - d_1 \text{tg } \sigma_2 = 100 - 50 \cdot 1 = 50 \text{ (мм)}$ ;

$$\text{tg } \sigma_3 = \text{tg } \sigma_2 + h_2 \Phi_2 = 1 + 50 \cdot \frac{1}{-200} f = -\frac{\overline{h_1}}{\text{tg } \sigma_{p+1}} = 0.75.$$

2. Задня фокусна відстань оптичної системи (7.21):

$$f' = \frac{h_1}{\text{tg } \sigma_{p+1}} = \frac{100}{0.75} = 133.(3) \text{ мм}.$$

3. Задній фокальний відрізок (7.22):  $a_{F'}' = \frac{h_2}{\text{tg } \sigma_3} = \frac{50}{0.75} = 66.(6) \text{ мм}.$

4. Відрізок, що вказує розташування задньої головної площини оптичної системи відносно її останнього компоненту (7.23):

$$a'_{H'} = a'_{F'} - f' = 66.(6) - 133.(3) = -66.(6) \text{ мм.}$$

Для розрахунку передніх кардинальних відрізків оптичної системи потрібно її повернути на  $180^\circ$ . Компоненти міняються місцями, але їх оптичні сили не змінюються ні за величиною, ні за знаком:

$$f'_1 = -200 \text{ мм}, f'_2 = 100 \text{ мм}, d_1 = 50 \text{ мм}, n_1 = 1, n_2 = 1, n_3 = 1.$$

1. В систему знов направляється нульовий промінь паралельний оптичній осі, з  $\text{tg } \bar{\sigma}_1 = 0$  і з довільною висотою, наприклад  $\bar{h}_1 = -200 \text{ мм}$ . Тоді

$$\text{tg } \bar{\sigma}_2 = \text{tg } \bar{\sigma}_1 + \bar{h}_1 \Phi_1 = 0 + (-200) \cdot \frac{1}{-200} = 1;$$

$$\bar{h}_2 = \bar{h}_1 - d_1 \text{tg } \bar{\sigma}_2 = -200 - 50 \cdot 1 = -250 \text{ мм};$$

$$\text{tg } \bar{\sigma}_3 = \text{tg } \bar{\sigma}_2 + \bar{h}_2 \Phi_2 = 1 + (-250) \cdot \frac{1}{100} = -1.5.$$

2. Передня фокусна відстань (7.24):

$$f = -\frac{\bar{h}_1}{\text{tg } \bar{\sigma}_3} = -\frac{-200}{-1.5} = -133.(3) \text{ мм.}$$

3. Передній фокальний відрізок (7.25):

$$a_F = -\frac{\bar{h}_2}{\text{tg } \bar{\sigma}_3} = -\frac{-250}{-1.5} = -166.(6) \text{ мм.}$$

4. Відрізок, що вказує розташування передньої головної площини оптичної системи відносно її переднього компоненту (7.26):

$$a_H = a_F - f = -166.(6) - (-133.(3)) = -33.(3) \text{ мм.}$$

Ті самі розрахунки можна здійснити з використанням матриці Гюйгенса, формули (7.27)–(7.34):

$$\mathbf{G} = \mathbf{R}_2 \mathbf{D}_1 \mathbf{R}_1 \mathbf{D}_0,$$

$$\text{де } \mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\Phi_2}{n_3} & \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1/(-200)}{1} & \frac{1}{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 \cdot 10^{-3} & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -d_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -50 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\Phi_1}{n_2} & \mu_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1/(100)}{1} & \frac{1}{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 \cdot 10^{-2} & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{D}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розрахунок матриці  $\mathbf{G}$  в Mathcad дає результат:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0.5 & -50 \\ 7.5 \cdot 10^{-3} & 1.25 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Згідно (7.31): } f' = \frac{1}{g_{21}} = \frac{1}{7.5 \times 10^{-3}} = 133.(3) \text{ мм.}$$

$$\text{Згідно (7.32): } a'_{F'} = \frac{g_{11}}{g_{21}} = \frac{0.5}{7.5 \cdot 10^{-3}} = 66.(6) \text{ мм.}$$

$$\text{Згідно (7.33): } a_F = -\frac{g_{22}}{g_{21}} = -\frac{1.25}{7.5 \cdot 10^{-3}} = -166.(6) \text{ мм.}$$

$$\text{Згідно (7.34): } f = g_{12} - \frac{g_{11}g_{22}}{g_{21}} = -50 - \frac{0.5 \cdot 1.25}{7.5 \cdot 10^{-3}} = -133.(3) \text{ мм.}$$

Як видно, результати даного розрахунку не відрізняються від результатів розрахунків попереднім методом.

**Завдання 7.3.** Між першим і другим компонентами оптичної системи (див. завдання 7.1) розміщено рідину (воду) з показником заломлення  $n_2 = 1.33$ . Яка зміна виникне в кардинальних елементах такої системи?

**Розв'язання.** Для розрахунку нових значень кардинальних відрізків використаємо матрицю Гюйгенса

$$\mathbf{G} = \mathbf{R}_2 \mathbf{D}_1 \mathbf{R}_1 \mathbf{D}_0,$$

в якій

$$\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\Phi_2}{n_3} & \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1/(-200)}{1} & \frac{1.33}{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 \cdot 10^{-3} & 1.33 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -d_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -50 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\Phi_1}{n_2} & \mu_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1/(100)}{1.33} & \frac{1}{1.33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.007518797 & 0.7518797 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{D}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розрахунок матриці  $\mathbf{G}$  в Mathcad дає результат:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0.6240602 & -37.593985 \\ 6.879699 \cdot 10^{-3} & 1.18797 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Згідно (7.31): } f' = \frac{1}{g_{21}} = \frac{1}{6.879699 \cdot 10^{-3}} = 145.355 \text{ мм.}$$

$$\text{Згідно (7.32): } a'_{F'} = \frac{g_{11}}{g_{21}} = \frac{0.6240602}{6.879699 \cdot 10^{-3}} = 90.7104 \text{ мм};$$

$$\text{Згідно (7.33): } a_F = -\frac{g_{22}}{g_{21}} = -\frac{1.18797}{6.8797 \cdot 10^{-3}} = -172.678 \text{ мм.}$$

Згідно (7.34):

$$f = g_{12} - \frac{g_{11}g_{22}}{g_{21}} = -37.593985 - \frac{0.624060 \cdot 1.18797}{6.8797 \cdot 10^{-3}} = -145.355 \text{ мм};$$

$$a'_{H'} = a'_{F'} - f' = 90.7104 - 145.355 = -54.6446 \text{ мм};$$

$$a_H = a_F - f = -172.678 - (-145.355) = -27.323 \text{ мм.}$$

На рис. 7.10 показано кардинальні елементи заданої оптичної системи за результатами розрахунків кардинальних відрізків. На рис. 7.10, *а* представлено систему, компоненти якої знаходяться у повітрі. На рис. 7.10, *б* показано систему, складену з тих самих компонентів, але між ними знаходиться рідина (вода). Видно, що поява іншого середовища між компонентами суттєво змінила положення кардинальних точок відносно компонентів системи. Головні точки  $H$  і  $H'$  всієї системи зсунулися вправо. Задня головна точка  $H'$  опинилася між головними площинами компонента 1. Збільшились значення фокусних відстаней всієї системи:  $f'$  (задньої) та  $f$  (передньої).

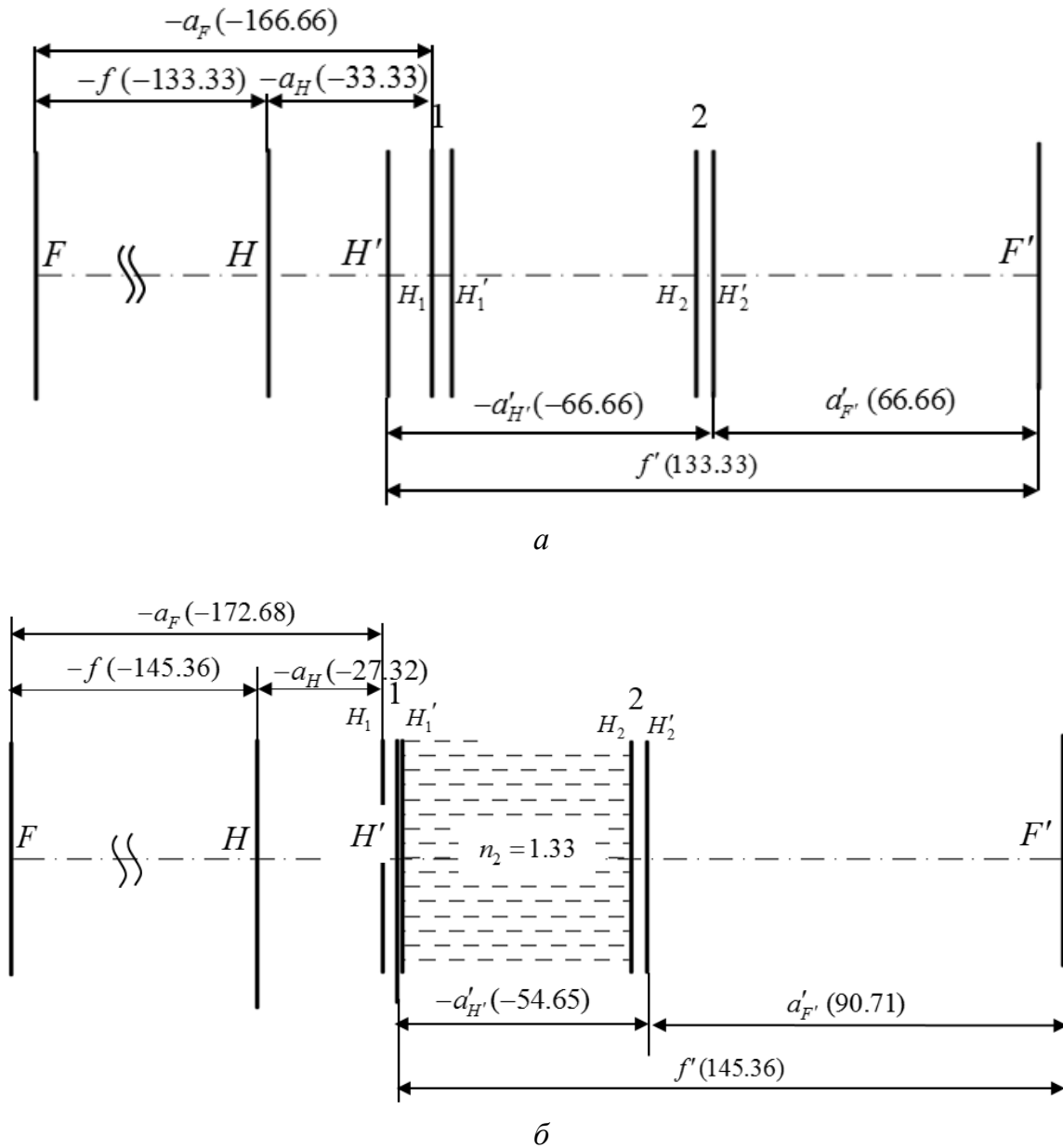


Рис. 7.10. Кардинальні елементи оптичної системи, представлені компонентами: *a* – до завдання 7.1; *б* – до завдання 7.2

## 7.6. Оптична сила багатокомпонентної оптичної системи

Методи розрахунків фокусних відстаней багатокомпонентних оптичних систем, викладені в попередньому п. 7.5, не дають наочного уявлення про вплив тих чи інших компонентів на оптичну силу всієї оптичної системи. Тому для аналізу такого впливу потрібно мати формулу, в якій оптичні сили компонентів присутні в явному вигляді. На рис. 7.11 показана багатокомпонентна оптична система,

параметри якої – оптичні сили компонентів  $\Phi_i$ , осьові відстані між компонентами  $d_i$  та показники заломлення оптичних середовищ між компонентами  $n_i$  відомі.

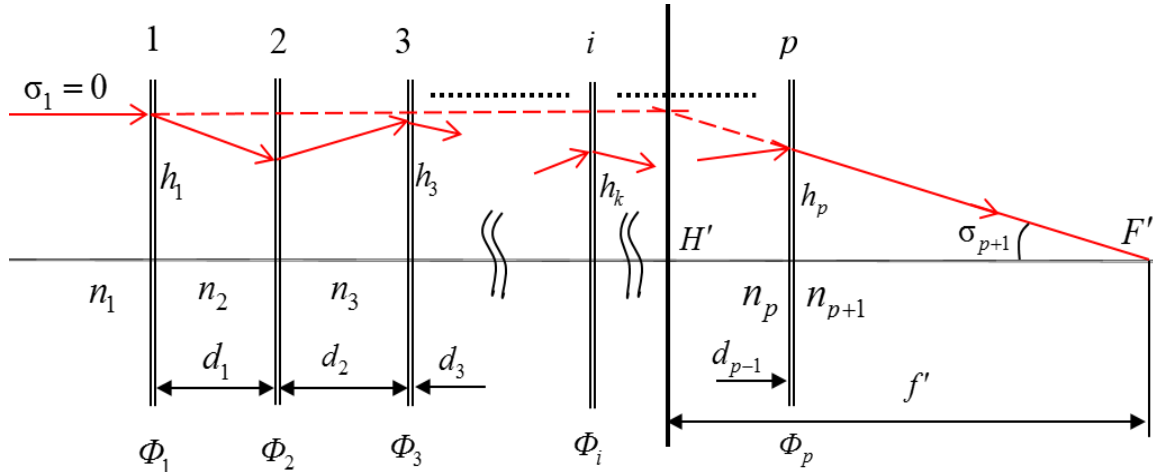


Рис. 7.11. До виводу формули оптичної сили багатоконпонентної системи

Оптична сила системи  $\Phi = \frac{n_{p+1}}{f'}$ , фокусна відстань системи

$$f' = \frac{h_1}{\operatorname{tg} \sigma_{p+1}}, \text{ тому}$$

$$\Phi = \frac{n_{p+1}}{h_1} \operatorname{tg} \sigma_{p+1}. \quad (7.35)$$

Нульовий промінь, що використовується для пошуку точки заднього фокусу заходить в оптичну систему паралельно оптичній осі  $\sigma_1 = 0$  на довільній висоті  $h_1$ . Згідно формул (7.18) та (7.20):

$$\operatorname{tg} \sigma_2 = \frac{n_1}{n_2} \operatorname{tg} \sigma_1 + \frac{h_1 \Phi_1}{n_2} = \frac{h_1 \Phi_1}{n_2};$$

а висота  $h_2 = h_1 - d_1 \operatorname{tg} \sigma_2$

$$\operatorname{tg} \sigma_3 = \frac{n_2}{n_3} \operatorname{tg} \sigma_2 + \frac{h_2 \Phi_2}{n_3} = \frac{n_2}{n_3} \frac{h_1 \Phi_1}{n_2} + \frac{h_2 \Phi_2}{n_3} = \frac{h_1 \Phi_1 + h_2 \Phi_2}{n_3};$$

$$h_3 = h_2 - d_2 \operatorname{tg} \sigma_3;$$

$$\operatorname{tg} \sigma_4 = \frac{n_3}{n_4} \operatorname{tg} \sigma_3 + \frac{h_3 \Phi_3}{n_4} = \frac{n_3}{n_4} \frac{h_1 \Phi_1 + h_2 \Phi_2}{n_3} + \frac{h_3 \Phi_3}{n_4} = \frac{h_1 \Phi_1 + h_2 \Phi_2 + h_3 \Phi_3}{n_4}.$$



З порівняння виразів для  $tg \sigma_2$ ,  $tg \sigma_3$ ,  $tg \sigma_4$  неважко помітити тенденцію зміни їх правої частини, яка дозволяє зробити екстраполяцію щодо вигляду формули для  $tg \sigma_{p+1}$ :

$$tg \sigma_{p+1} = \frac{h_1 \Phi_1 + h_2 \Phi_2 + h_3 \Phi_3 + \dots + h_p \Phi_p}{n_{p+1}} = \frac{\sum_{i=1}^{i=p} h_i \Phi_i}{n_{p+1}}. \quad (7.36)$$

Підстановка (7.36) у (7.35) дає формулу оптичної сили багатокомпонентної оптичної системи:

$$\Phi = \frac{1}{h_1} \sum_{i=1}^{i=p} h_i \Phi_i. \quad (7.37)$$

З формули (7.37) витікають наступні висновки:

– компонент вносить більший внесок в оптичну силу системи, якщо його далі відсувають від площини кінцевого чи проміжного зображення, в якій висота  $h_i = 0$ ;

– компонент з будь-якою оптичною силою, що знаходиться в кінцевій чи проміжній площині зображень, де висота  $h_i = 0$ , не вносить ніякого внеску в оптичну силу оптичної системи;

– якщо осьові відстані між компонентами настільки мали, що висоти нульового променя на них практично однакові, тобто допустимо вважати, що  $h_2 = h_3 = \dots = h_p = h_1$ , то в такому випадку формула (7.37) приймає вигляд:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{i=p} \Phi_i. \quad (7.38)$$

Формулу (7.38) називають формулою оптичної сили тонкої системи, в якій осьові відстані між компонентами вважаються нульовими.

**Завдання 7.4.** Розрахувати оптичну силу оптичної системи, що задана у завданні 7.1, використовуючи формулу (7.35) та результати розрахунку ходу нульового променя, отриманого при розв'язку завдання 7.1:  $f_1' = 100\text{мм}$ ,  $f_2' = -200\text{мм}$ ,  $h_1 = 100\text{мм}$ ,  $h_2 = 50\text{мм}$ .

**Розв'язання.**

$$\Phi_1 = \frac{1}{f_1'} = \frac{1}{100} = 0.01\text{мм}^{-1},$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{f'_2} = \frac{1}{-200} = -0.005 \text{ мм}^{-1}. \text{ Згідно (7.35):}$$

$$\Phi = \frac{1}{h_1} \sum_{i=1}^{i=p} h_i \Phi_i = \frac{1}{h_1} (h_1 \Phi_1 + h_2 \Phi_2) = \Phi_1 + \frac{h_2}{h_1} \Phi_2 = 0.01 + \frac{50}{100} (-5 \cdot 10^{-3}) = 0.0075 \text{ мм}^{-1}.$$

Звідки задня фокусна відстань оптичної системи :

$$f' = \frac{1}{\Phi} = \frac{1}{0.0075} = 133.(3) \text{ мм}.$$

## 7.7. Кутове збільшення. Вузлові точки оптичної системи

Серед оптичних приладів велику частку складають ті, що мають в своєму складі так звану телескопічну систему. Детально ці системи розглянуті в розд. 13. Відносно телескопічної системи предметна площина знаходиться на безкінечності. Зображення, сформоване телескопічною системою, теж знаходиться на безкінечності. Типовими приладами, в яких використовується телескопічна система, є зорові труби, біноклі, телескопи, розширювачі лазерних пучків, приціли рушниць та інших військових озброєнь.

Розміри безкінечно віддалених предметів та розміри їх зображень можуть бути представленими лише в кутовій мірі. Тому в такому випадку потрібен такий параметр, як кутове збільшення.

**Кутове збільшення**  $\gamma$  визначається за формулою:

$$\gamma = \frac{\text{tg } \sigma_{p+1}}{\text{tg } \sigma_1}, \quad (7.39)$$

де  $\sigma_{p+1}$  – кут нахилу нульового променя до оптичної осі на виході з оптичної системи,  $\sigma_1$  – кут нахилу до оптичної осі того самого нульового променя на вході в оптичну систему, рис. 7.12.

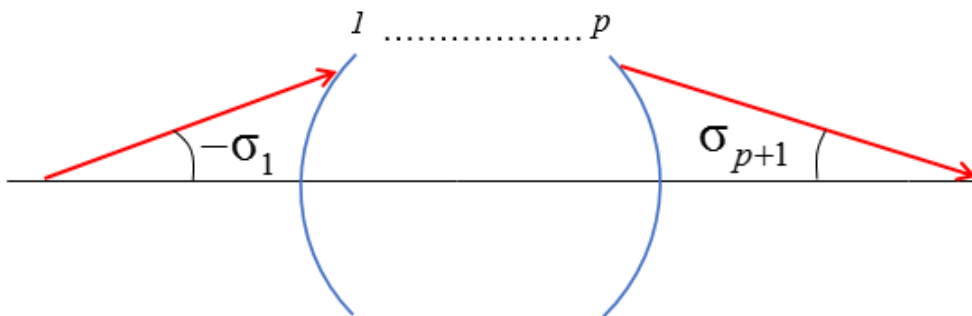


Рис. 7.12. До визначення кутового збільшення оптичної системи

В телескопічних системах, які згадувалися,  $\sigma_{p+1}$  – кутовий розмір зображення,  $\sigma_1$  – кутовий розмір предмету.

Кутове збільшення пов'язане з лінійним збільшенням  $\beta$ . Для встановлення цього зв'язку звернемося до рис.7.4. із якого видно, що  $\operatorname{tg} \sigma_{p+1} = \frac{h}{a'}$ , а  $\operatorname{tg} \sigma_1 = \frac{h}{a}$ . Після підстановки цих виразів у (7.39)

маємо: 
$$\gamma = \frac{\frac{h}{a'}}{\frac{h}{a}} = \frac{a}{a'}$$

Згідно (7.14)  $\frac{a}{a'} = \frac{n_1}{n_{p+1} \beta}$ , тому

$$\boxed{\gamma = \frac{n_1}{n_{p+1} \beta}} \quad (7.40)$$

Якщо  $n_1 = n_{p+1}$ , то формула (7.40) перетворюється до вигляду:

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\beta}} \quad (7.41)$$

Із кутовим збільшенням пов'язані дві кардинальні точки оптичної системи – вузлові точки –  $N$  (передня) та  $N'$  (задня).

**Вузловими** називають дві оптично спряжені точки на оптичній осі, для яких кутове збільшення  $\gamma_{NN'} = 1$ . Вказане значення кутового збільшення означає, що якщо нульовий промінь надходить в оптичну систему через передню вузлову точку  $N$  під кутом  $\sigma_1$ , то він виходить з системи через задню вузлову точку  $N'$  під кутом  $\sigma_{p+1} = \sigma_1$ , рис. 7.13.

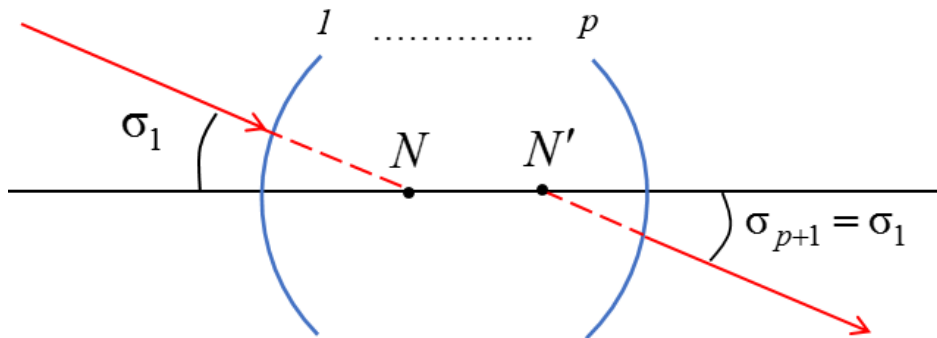


Рис. 7.13. Вузлові точки оптичної системи:  $N$  – передня вузлова точка,  $N'$  – задня вузлова точка

Вузлові точки дуже зручні при графічному методі пошуку ходу нульового променя через оптичну систему, задану кардинальними елементами, що буде показано у наступному підрозділі.

Вузлові точки  $N$  і  $N'$ , як виявляється, пов'язані з головними точками  $H$  і  $H'$ . На рис. 7.14 представлені кардинальні точки оптичної системи.

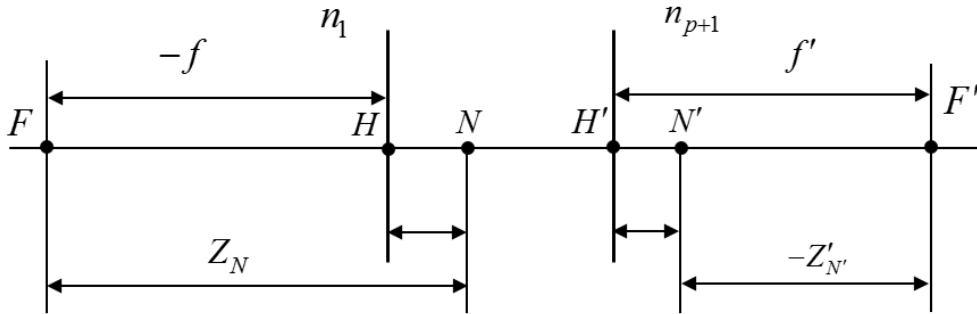


Рис. 7.14. До встановлення взаємного розташування головних та вузлових точок оптичної системи

Оскільки кутове збільшення у вузлових точках згідно (7.40)

$\gamma_{NN'} = \frac{n_1}{n_{p+1} \beta_{NN'}} = 1$ , то пов'язане з ним лінійне збільшення  $\beta_{NN'}$  у вузлових точках:

$$\beta_{NN'} = \frac{n_1}{n_{p+1}}.$$

В п. 7.3 показано, що фокусні відстані оптичної системи співвідносяться як показники заломлення середовищ до та після системи (7.6):  $\frac{f'}{f} = -\frac{n_{p+1}}{n_1}$ , тому

$$\beta_{NN'} = \frac{n_1}{n_{p+1}} = -\frac{f}{f'}. \quad (7.42)$$

В п. 7.1 наведена формула лінійного збільшення (7.4):  $\beta = -\frac{f}{z} = -\frac{z'}{f'}$ .

Використаємо її для встановлення положення на оптичній осі вузлових точок  $N$  і  $N'$ . Згідно (7.3), (7.4) та (7.42):

$\beta_{NN'} = -\frac{f}{z_N} = -\frac{f}{f'}$ , звідки  $Z_N = f'$ , аналогічно  $\beta_{NN'} = -\frac{z'_{N'}}{f'} = -\frac{f}{f'}$ , звідки  $Z'_{N'} = f$ .

Згідно рис. 7.14

$$-f + HN = Z_N = f',$$

тому відстань між передніми головною та вузловою точками, відрізок  $HN$ :

$$HN = f + f'.$$

Згідно рис. 7.14  $H'N' - Z'_{N'} = f'$ , то  $H'N' = f' + Z'_{N'} = f' + f$ .

Видно, що відрізки  $HN$  і  $H'N'$  мають однакові значення:

$$HN = H'N' = f + f'. \quad (7.43)$$

Вираз (7.43) дозволяє зробити наступні важливі висновки:

– пара вузлових точок є зміщеною відносно пари головних точок на відстань  $(f + f')$ , яка не дорівнює нулю при  $n_{p+1} \neq n_1$ ;

– відстань між вузловими точками дорівнює відстані між головними точками, тобто відрізок  $NN' = HH'$ ;

– якщо показники заломлення перед і за системою однакові то згідно (7.6)  $f' = -f$ , і  $f' + f = 0$ , звідки  $HN = H'N' = 0$ , тобто передні головна і вузлова точки є суміщеними, а також суміщеними є задня головна точка і задня вузлова точка системи;

– якщо  $n_{p+1} > n_1$  і  $f' + f > 0$ , то пара вузлових точок зсувається відносно пари головних точок на додатній відрізок  $HN = H'N' > 0$ , тобто вузлові точки є зсунутими відносно головних точок в сторону простору навколо системи з більшим показником заломлення, в даному випадку в сторону простору зображень.

## 7.8. Поздовжнє збільшення

Зсув площини предметів вздовж оптичної осі викликає відповідний зсув оптично спряженої з нею площини зображень, рис. 7.15.

**Поздовжнім збільшенням**  $\alpha$  оптичної системи називають відношення безкінечно малого відрізка  $\Delta Z'$  вздовж оптичної осі в просторі зображень до оптично спряженого з ним відрізка  $\Delta Z$  в просторі предметів:

$$\alpha = \lim_{\Delta Z \rightarrow 0} \frac{\Delta Z'}{\Delta Z}. \quad (7.44)$$

Для отримання відношення у виразі (7.43) достатньо диференціювати формулу Ньютона  $z \cdot z' = f \cdot f'$  за змінними  $z$  і  $z'$ . Оскільки

права частина формули Ньютона є константою, то її диференціювання призводить до рівняння:

$$\frac{\partial(z \cdot z')}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial(z \cdot z')}{\partial z'} \Delta z' = 0 \text{ або } z' \cdot \Delta z + z \cdot \Delta z' = 0 \text{ звідки}$$

$$\alpha = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z'}{\Delta z} = -\frac{z'}{z}. \quad (7.45)$$

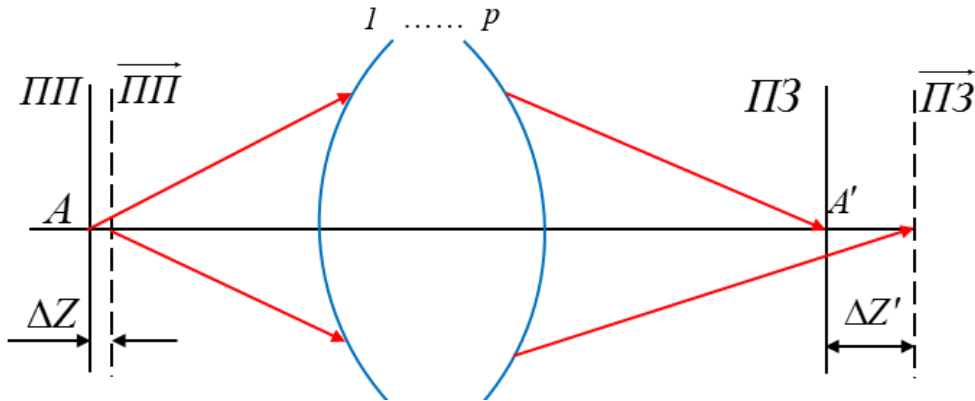


Рис. 7.15. До визначення поздовжнього збільшення, ПП – площина предметів, ПЗ – площина зображень оптично спряжена з ПП, ПП̄ – зсунута площина предметів, ПЗ̄ – зсунута площина зображень

З формули Ньютона  $z' = \frac{f \cdot f'}{z}$ , тому після підстановки  $z'$  у (7.45) маємо кінцеву формулу поздовжнього збільшення:

$$\alpha = -\frac{f \cdot f'}{z^2}. \quad (7.46)$$

При заміні  $z = \frac{f \cdot f'}{z'}$

$$\alpha = -\frac{(z')^2}{f \cdot f'}. \quad (7.47)$$

Якщо  $n_1 = n_{p+1}$ , то  $f = -f'$ , і формули (7.46), (7.47) перетворюються до вигляду:

$$\alpha = \left(\frac{f'}{z}\right)^2, \quad (7.48)$$

або

$$\alpha = \left(\frac{z'}{f'}\right)^2. \quad (7.49)$$

Формули (7.46)–(7.47) свідчать про те, що:

– при наближенні площини зображень до переднього фокусу  $z \rightarrow 0$  поздовжнє збільшення  $\alpha \rightarrow \infty$  і площина зображень зсувається на безкінечність;

– якщо передня і задня фокусні відстані мають протилежні знаки, то зсув предметної площини і зсув оптично спряженої з нею площини зображень відбувається в одному напрямку вздовж оптичної осі;

– у випадку, коли передня і задня фокусні відстані мають однакові знаки (наприклад у дзеркальних системах), зсув предметної площини і зсув оптично спряженої з нею площини зображень відбувається в протилежних напрямках.

### 7.9. Зв'язок між зображеннями лінійним $\beta$ , кутовим $\gamma$ , та поздовжнім $\alpha$

Формулу (7.47) можна представити у вигляді:  $\alpha = -\frac{(z')^2}{f \cdot f'} = -\frac{z'}{f'} \cdot \frac{z'}{f}$ .

Оскільки згідно (7.6)  $f = -\frac{n_1}{n_{p+1}} f'$ , то

$$\alpha = \left(-\frac{z'}{f'}\right) \cdot \left(-\frac{z'}{f'}\right) \left(\frac{n_{p+1}}{n_1}\right).$$

Так як  $-\frac{z'}{f'} = \beta$  (див. (7.4)), то між  $\alpha$  і  $\beta$  існує зв'язок:

$$\boxed{\alpha = \frac{n_{p+1}}{n_1} \beta^2}, \quad (7.50)$$

а при  $n_1 = n_{p+1}$

$$\boxed{\alpha = \beta^2}. \quad (7.51)$$

Оскільки  $\gamma = \frac{n_1}{n_{p+1}} \beta$  (див. (7.40)), то формулу (7.50) можна

перетворити до вигляду

$$\alpha = \frac{n_{p+1}}{n_1} \beta^2 = \frac{\beta}{\frac{n_1}{n_{p+1}} \beta}, \text{ або } \boxed{\alpha = \frac{\beta}{\gamma}}. \quad (7.52)$$

Вираз (7.52) демонструє зв'язок між трьома збільшеннями ідеальної оптичної системи.

### 7.10. Графічний метод пошуку ходу нульового променя через оптичний компонент або оптичну систему, які представлені кардинальними елементами

Графічним називають метод пошуку ходу нульового променя через компонент чи систему компонентів, який не потребує ніяких розрахунків і виконується лише з використанням інструментів для креслення або за допомогою графічних комп'ютерних редакторів.

Хоча графічний метод не може конкурувати за точністю з аналітичними методами, проте він має свої незаперечні переваги, а саме:

- відсутність потреби мати «під рукою» обчислювальну техніку і необхідні для розрахунків формули та додатні інформаційні матеріали;

- відносно висока швидкість отримання розв'язку нескладних задач, пов'язаних з пошуком положення зображень та їх розмірів;

- наочний вигляд впливу компонентів на хід нульових променів, що сприяє кращому розумінню функціонування оптичної системи;

- можливість у першому наближенні перевірити результати аналітичних розрахунків з метою виявлення грубих помилок.

Графічна побудова ходу нульового променя через кожний окремий компонент оптичної системи базується на використанні способу, суть якого полягає у наступному:

- до **заданого променя**, хід якого треба знайти, «прив'язують» у пучок так званий **допоміжний промінь**, хід якого наперед відомий, бо він обов'язково проходить через відповідну кардинальну точку компонента або системи компонентів;

- точка перетину, або взаємне розташування обох променів (заданого і допоміжного) наперед відома через відомі властивості кардинальних елементів, чим визначається хід заданого променя через компонент чи систему компонентів.

Допоміжний промінь обов'язково проходить або через точку фокусу (передню або задню), або через вузлову точку (передню і задню). Тому існують лише чотири допоміжних променів. В табл. 7.1 показано ці допоміжні промені і спосіб їх використання для побудови заданого променя через оптичний компонент. З метою спрощення



вигляду рисунків в табл. 7.1 представлені тільки тонкі компоненти, в яких головні площини є суміщеними.

В таблиці зліва показані компоненти з додатною оптичною силою ( $f' > 0$ ), справа – компоненти з від'ємною оптичною силою ( $f' < 0$ ).

Червоним кольором представлено заданий нульовий промінь, хід яких вишукується. Синім кольором показані допоміжні промені. В кожному окремому рядку таблиці використано один з чотирьох допоміжних променів.

**В рядку 1** використано допоміжний промінь, який паралельний заданому і який проходить через передній фокус. Тому допоміжний промінь виходить з компоненту паралельно оптичній осі. Оскільки обидва промені паралельні один до одного в просторі предметів компонента, то вони повинні перетинатися у задній фокальній площині. У додатного компонента вони перетинаються дійсно, у від'ємного компонента ці промені перетинаються уявно (показано штриховими лініями). Точка перетину допоміжного променя із задньою фокальною площиною, що обведена колом, є точкою перетину заданого і допоміжного променя. Ця точка вказує хід заданого променя після проходження через компонент.

**В рядку 2** допоміжний промінь теж паралельний заданому в просторі предметів, але він проходить без зміни напрямку через вузлові точки компоненту. Якщо перед і за компонентом показники заломлення однакові, то вузлові точки  $N$  і  $N'$  і головні точки  $H$  і  $H'$  співпадають. В такому випадку на рисунку у другому рядку замість вузлових точок можуть бути вказаними головні точки компонента, які знаходяться в тому ж місці, що і вузлові. Точка перетину обох променів знаходиться у задній фокальній площині. У додатного компонента вона є дійсною, а у від'ємного – уявною. Точки перетину обведені колом. Положення цієї точки обумовлює хід заданого променя після проходження через компонент.

**В рядку 3** точка перетину заданого і допоміжного променів знаходиться у передній фокальній площині. У додатного компонента вона дійсна, знаходиться перед компонентом, у від'ємного компонента вона уявна і знаходиться за компонентом. Якщо обидва промені перетинаються у передній фокальній площині, то вони повинні бути паралельними в просторі зображень, тобто за компонентом. Хід допоміжного променя обирається паралельним оптичній осі, тому на виході з компоненту цей промінь пройде через точку

заднього фокусу  $F'$  дійсно у додатного компонента і уявно у від'ємного компонента. Хід заданого променя за компонентом є паралельним ходу допоміжного променя

**В рядку 4** допоміжний промінь проходить без зміни напрямку через вузлові точки (вони ж є головними, якщо показники заломлення перед і за компонентом однакові). Точка перетину допоміжного променя із заданим знаходиться у передній фокальній площині, тому вони є паралельними за компонентом. Точка перетину променів дійсна у додатного компонента, у від'ємного компонента вона уявна. Точки перетину променів обведені колом.

В табл.7.2 показано приклади побудови ходу заданого нульового променя через оптичний компонент або оптичну систему, що не є тонкими.

**В рядку 1** обидва промені (заданий та допоміжний), досягнувши передньої головної площини кожний на своїх висотах, згідно властивостей головних площин виходять із задньої головної площини на тих самих висотах. Допоміжний промінь виходить із компонента паралельно оптичній осі, бо він надходить в компонент через точку переднього фокусу, а заданий промінь проходить через точку перетину допоміжного променя із задньою фокальною площиною, тому що ці промені паралельні у просторі перед компонентом (просторі предметів).

Особливістю ходу допоміжного променя на вході у від'ємний компонент (права колонка) є те, що він спрямовується у передній уявний фокус  $F$  так, наче головних площин не існує. Досягнувши передньої головної площини цей промінь на тій самій висоті переноситься у задню головну площину і на виході компонента прямує паралельно оптичній осі. Його уявне продовження назад перетинається із задньою фокальною площиною в точці, через яку уявно пройде заданий промінь після проходження компоненту. Заданий промінь, досягнувши задньої головної площини, виходить з неї так, що своїм уявним продовженням назад проходить через точку перетину допоміжного променя з задньою фокальною площиною. **Для уявного продовження цього променя у зворотному напрямку головні площини не існують.** Тому при уявному продовженні назад заданий, як і допоміжний промінь, з головними площинами не взаємодіє.

**В рядку 2** заданий і допоміжний промені у прямому ході також виходять із задньої головної площини компонента на тих

висотах, на яких вони перетинають передню головну площину. Далі промені, що проходять через компонент із додатною оптичною силою (ліва колонка) за компонентом перетинаються дійсно. На виході із компонента промені, «ігноруючи» наявність головних площин, своїми уявними продовженнями у зворотному напрямку перетинаються в задній фокальній площині, в тій точці, де її перетинає допоміжний промінь. Ця точка визначає хід заданого променю за компонентом.

Побудова ходу нульового променю через дзеркальний компонент – сферичне дзеркало – показана в табл. 7.3.

У сферичного дзеркала точки заднього і переднього фокусів є суміщеними. Головні і вузлові точки також є суміщеними і знаходяться в місті перетину дзеркальної поверхні з оптичною віссю. Це обумовлює деякі особливості побудови ходу заданого і допоміжного променів через дзеркальну поверхню.

Для побудови ходу заданого нульового променю можна використовувати один із чотирьох допоміжних нульових променів. В табл. 7.3 вони пронумеровані. Червоним кольором представлено заданий нульовий промінь, синім – допоміжний. Як і у попередньому матеріалі, заданий промінь «прив'язують» до допоміжного променю.

**Рядок 1** Допоміжний промінь з номером 1 надходить у дзеркало паралельно оптичній осі через точку, де заданий промінь перетинає передню фокальну площину. Далі, відбившись від головної площини, він виходить через задній фокус  $F'$ . Оскільки обидва промені перетинаються у передній фокальній площині, то вони після відбиття від головної площини дзеркала повинні бути паралельними. Цим визначається хід заданого променю після відбиття. В увігнутому дзеркалі перетин променів є дійсним, а у опуклому дзеркалі перетин уявний, що показано штриховими лініями.

**Рядок 2** Допоміжний промінь з номером 2 надходить у дзеркало паралельно заданому, але через точку переднього фокусу  $F$ . Далі він відбивається від головної площини дзеркала і виходить з нього паралельно оптичній осі, перетинаючи задню фокальну площину, яка проходить через задній фокус  $F'$ . Так як обидва промені паралельні перед дзеркалом, то вони повинні перетинатися в задній фокальній площині, там де її перетнув допоміжний промінь. Перетин променів, відбитих від увігнутого дзеркала відбувається дійсно, від опуклого – уявно.

**Рядок 3** Допоміжний промінь з номером 3 надходить у дзеркало паралельно заданому через головні точки. Після відбиття від головної площини під кутом відбиття, який дорівнює куту падіння, але з протилежним знаком. Цей промінь перетинає задню фокальну площину у точці, через яку повинен пройти заданий промінь, бо заданий і допоміжний промені є паралельними перед дзеркалом. Перетин вказаних променів відбувається дійсно після увігнутого дзеркала, і уявно після відбиття від головних площин опуклого дзеркала.

**Рядок 4** Допоміжний промінь з номером 4 надходить у дзеркало паралельно заданому, але через центр кривизни дзеркала – точку  $C$ . Такий допоміжний промінь повертається після відбиття від дзеркала знову через точку  $C$ , бо він по суті є нормальним до сферичної поверхні. Допоміжний промінь перетинає задню фокальну площину у точці, через яку після відбиття повинен пройти заданий промінь через те, що вони паралельні перед дзеркалом. Перетин вказаних променів відбувається дійсно після увігнутого дзеркала, і уявно після відбиття від головних площин опуклого дзеркала.

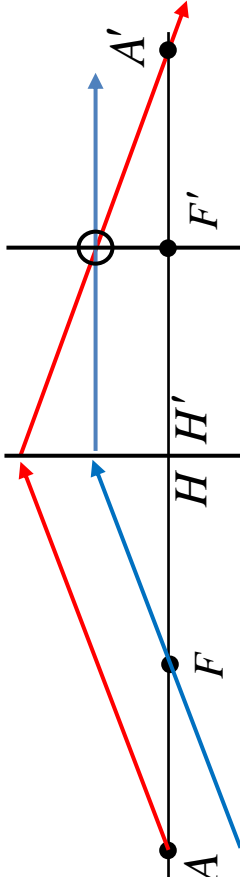
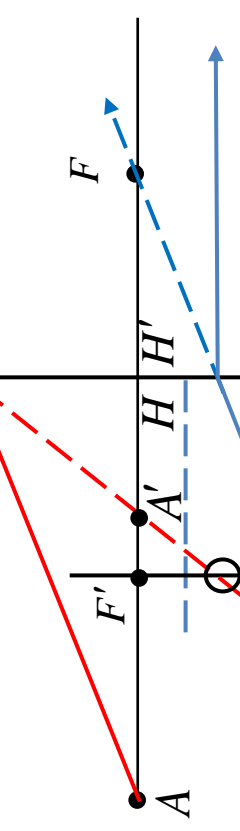
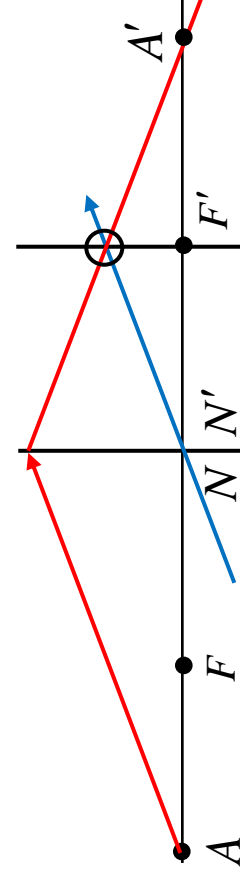
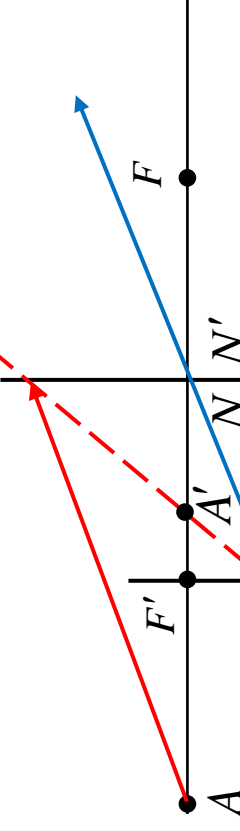
У всіх таблицях (табл. 7.1, табл. 7.2, табл. 7.3) точка  $A$  – осьова точка простору предметів, точка  $A'$  – зображення точки  $A$ .

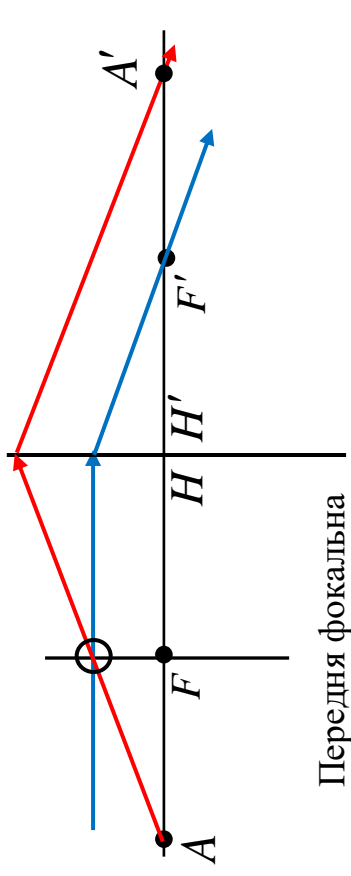
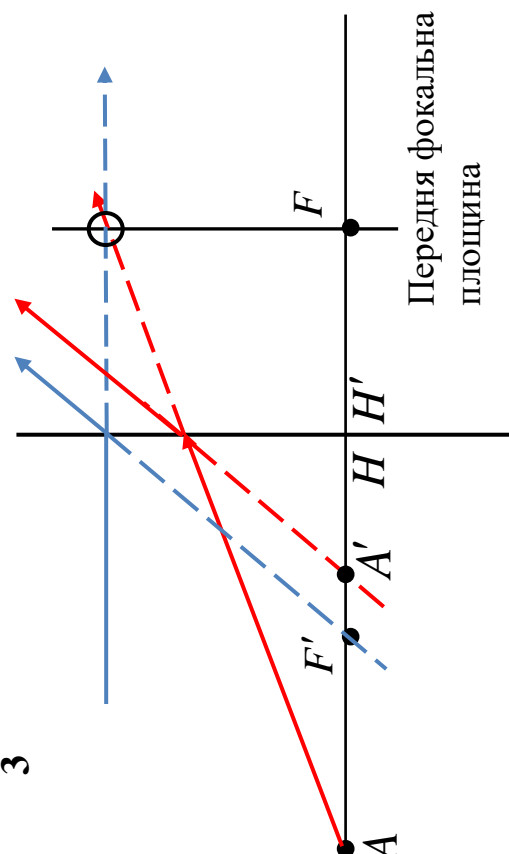
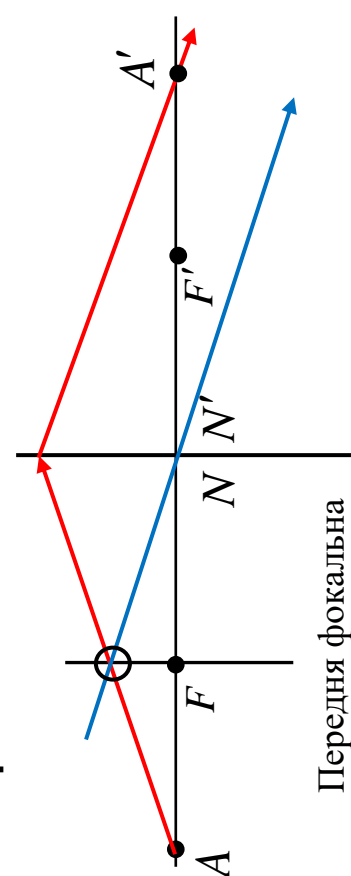
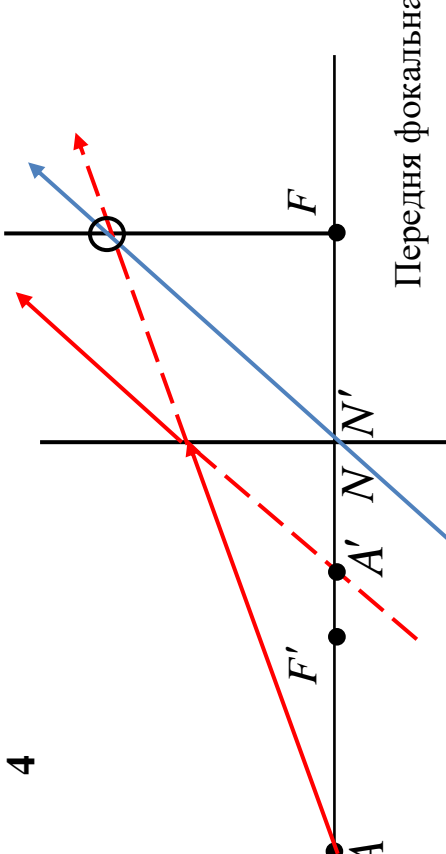
**Примітка:** Для пошуку зображення будь-якої точки простору предметів потрібно випустити з неї два нульових промені, належних до чотирьох допоміжних, хід яких через компонент (систему) є наперед відомий. Точка дійсного чи уявного перетину цих променів після їх проходження через компонент (оптичну систему) буде зображенням предметної точки.

Приклади пошуку зображення точки, сформованого лінзовим компонентом (оптичною системою) чи сферичним дзеркалом, див. у розв'язку завдання 7.7.

Таблиця 7.1

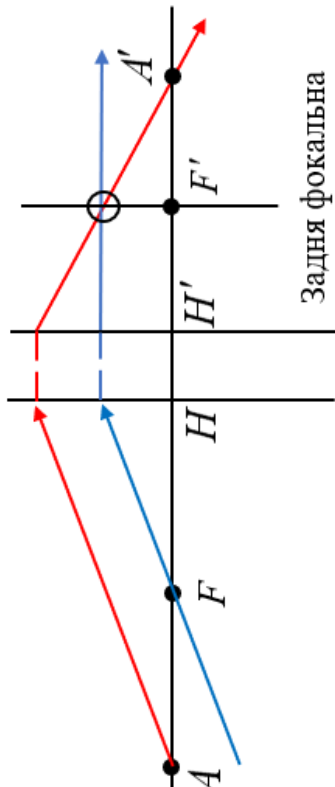
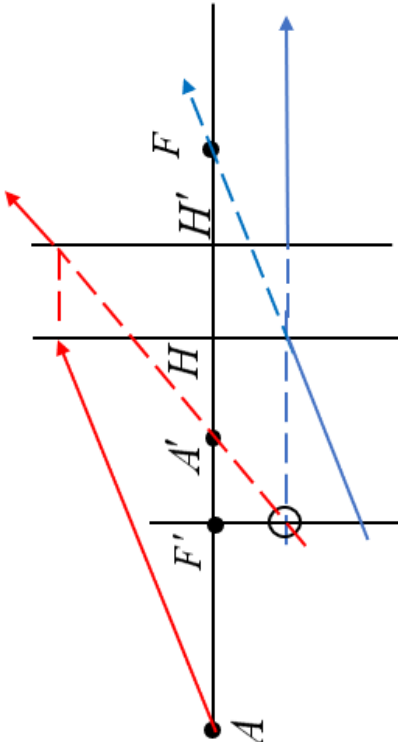
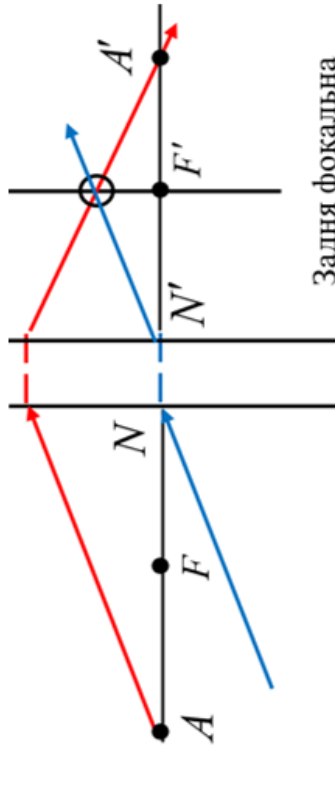
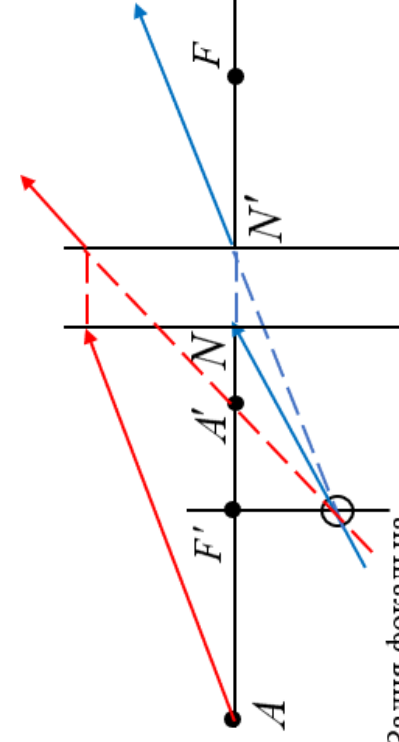
Побудова ходу нульового променя через тонкий оптичний компонент або систему

Оптичний компонент 3 ( $f' > 0$ )	Оптичний компонент 3 ( $f' < 0$ )
<p>1</p>  <p>Задня фокальна площина</p>	<p>1</p>  <p>Задня фокальна площина</p>
<p>2</p>  <p>Задня фокальна площина</p>	<p>2</p>  <p>Задня фокальна площина</p>

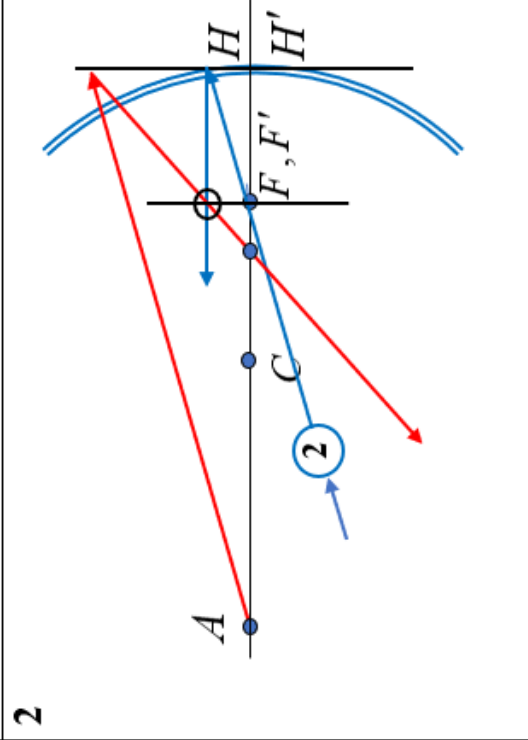
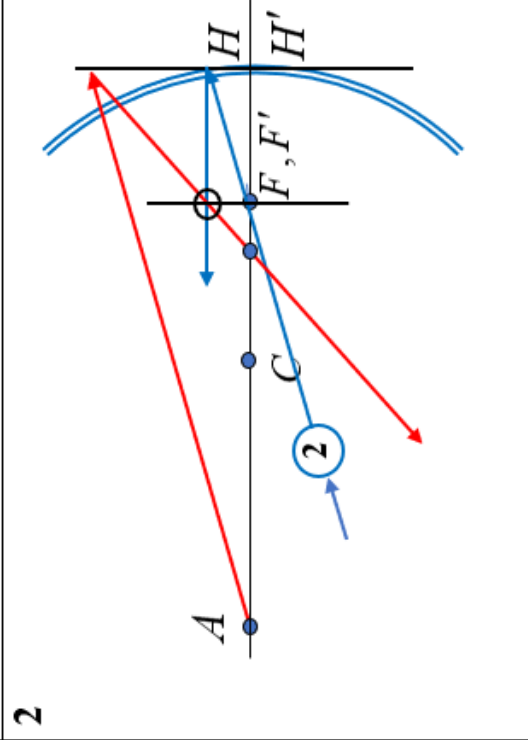
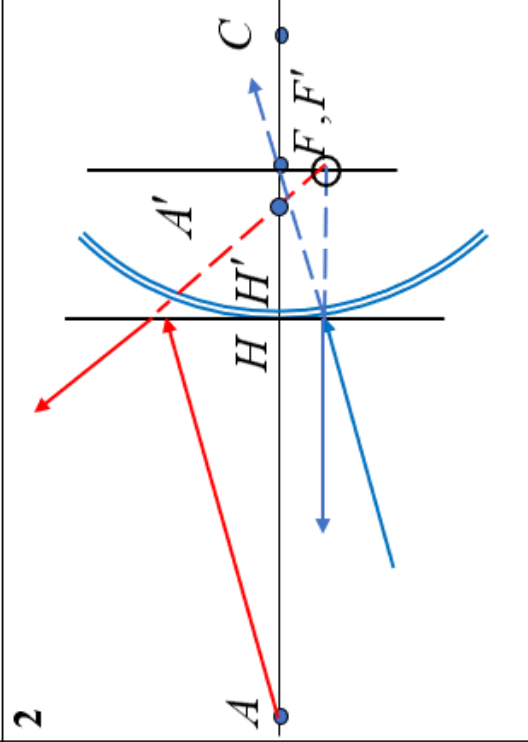
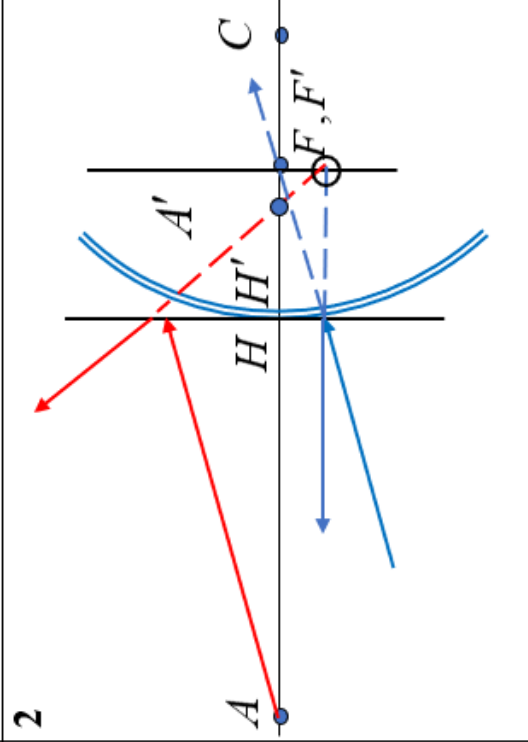
<p>Оптичний компонент 3 (<math>f' &gt; 0</math>)</p>	<p>Оптичний компонент 3 (<math>f' &lt; 0</math>)</p>
<p>3</p>  <p>Передня фокальна площина</p>	<p>3</p>  <p>Передня фокальна площина</p>
<p>4</p>  <p>Передня фокальна площина</p>	<p>4</p>  <p>Передня фокальна площина</p>

Таблиця 7.2

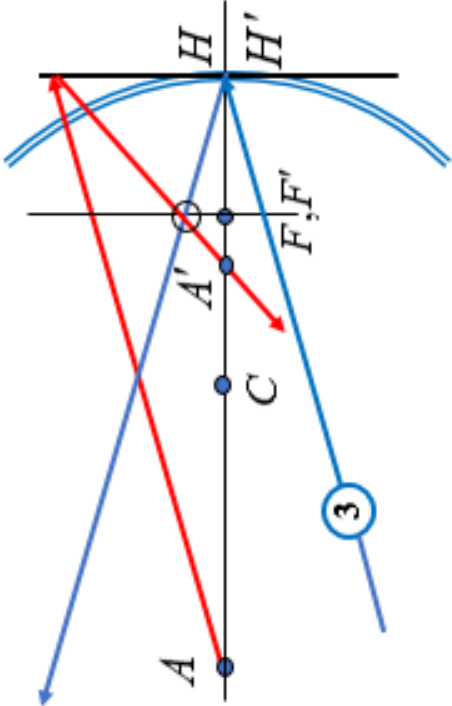
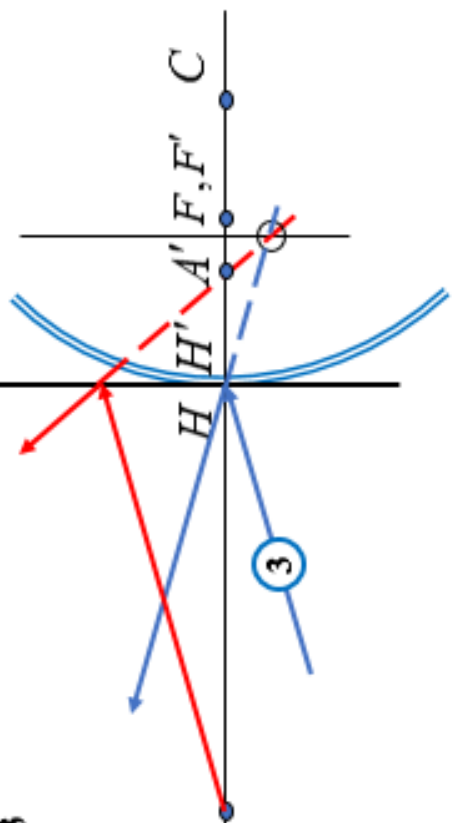
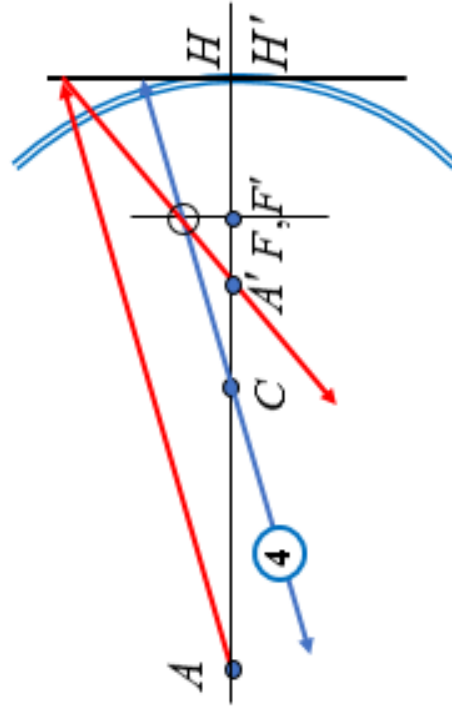
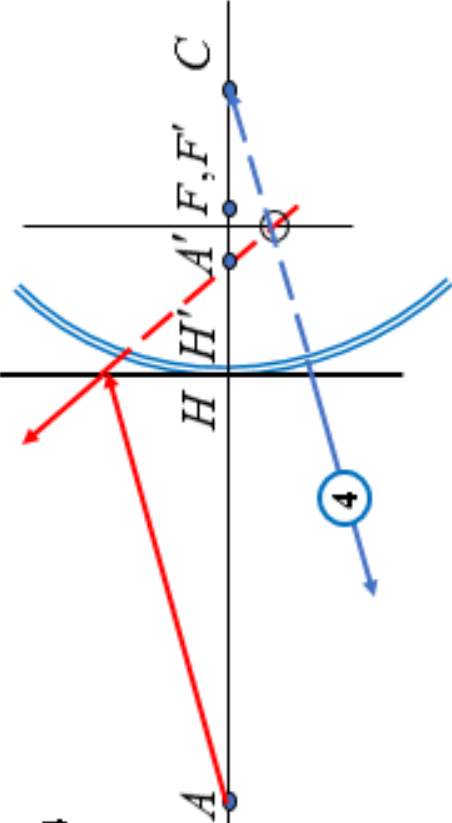
Побудова ходу нульового променя через не тонкий оптичний компонент або систему

Оптичний компонент 3 ( $f' > 0$ )	Оптичний компонент 3 ( $f' < 0$ )
<p><b>1</b></p>  <p>Задня фокальна площина</p>	<p><b>1</b></p>  <p>Задня фокальна площина</p>
<p><b>2</b></p>  <p>Задня фокальна площина</p>	<p><b>2</b></p>  <p>Задня фокальна площина</p>

Побудова ходу променя через дзеркальну поверхню

	Опукле дзеркало
<p><b>1</b></p>  <p><b>2</b></p> 	<p><b>1</b></p>  <p><b>2</b></p> 



Увігнуте дзеркало	Опукле дзеркало
<p><b>3</b></p> 	<p><b>3</b></p> 
<p><b>4</b></p> 	<p><b>4</b></p> 

**Завдання 7.5.** Графічним методом знайти положення і фокусну відстань тонкого об'єктиву, який при величині предмету ( $y=20$  мм), відстані між предметом та його зображенням ( $L=150$  мм) формує зображення предмету величиною ( $y'=-40$  мм).

**Розв'язання.**

Графічний метод розв'язку показано на рис. 7.16. Із точки  $B$  в точку  $B'$  проведено промінь, який перетинає оптичну вісь у вузлових точках тонкого об'єктиву. Оскільки об'єктив знаходиться у повітрі, то вузлові точки суміщаються з головними. Тим самим визначається положення тонкого об'єктиву і визначаються відрізки  $-a=50$  мм і  $a'=100$  мм.

Положення точки заднього фокусу знаходять за допомогою другого нульового променя, який надходить від точки  $B$  у об'єктив паралельно оптичній осі і після проходження об'єктиву потрапляє в точку  $B'$ . Оскільки цей промінь перед об'єктивом йде паралельно оптичній осі, то він перетинає оптичну вісь у точці заднього фокусу  $F'$  об'єктиву. Відстань між точками  $H'$  та  $F'$  є задній фокусній відстанню, яка з рисунку має розмір  $33.3\dots$  мм.

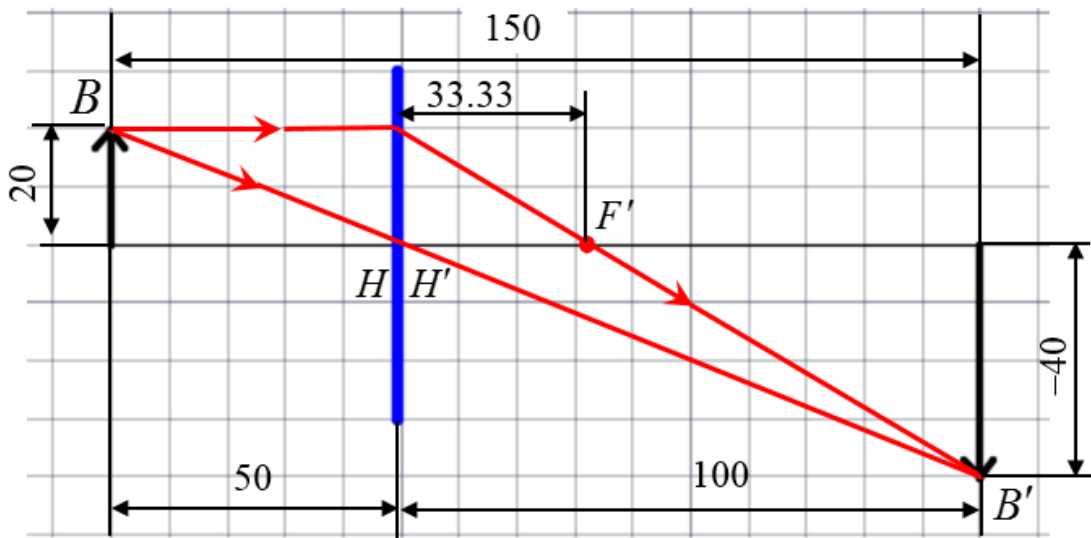


Рис. 7.16. До розв'язку завдання 7.5

Завдання 7.5 є ідентичним до завдання 7.1. У завданні 7.1 для пошуку відрізків  $a$  і  $a'$  потребувалося скласти і розв'язати систему рівнянь. Проте графічним методом для цього потребувалося лише проведення прямого променя із точки  $B$  у точку  $B'$ . У завданні 7.1 фокусна відстань розраховувалася з використанням формули Гауса, у завданні 7.5 було достатньо провести паралельний промінь до

головних площин і після довести його до точки  $B'$ . Ні одного розрахунку при графічному методі не потребувалося, що підтверджує його перевагу, анонсовану на початку підрозд. 7.10.

**Завдання 7.6.** Використовуючи вихідні дані оптичної системи із завдання 7.2 графічним методом знайти кардинальні відрізки і положення кардинальних точок оптичної системи, представлені оптичними компонентами:

$$f_1' = 100 \text{ мм}, f_2' = -200 \text{ мм}, d_1 = 50 \text{ мм}, n_1 = 1, n_2 = 1, n_3 = 1.$$

**Розв'язання.**

На рис. 7.17 показано задану оптичну систему, яка представлена двома оптичними компонентами. Для пошуку задніх кардинальних відрізків та задніх кардинальних точок заданий нульовий промінь (червоний колір) спрямовано паралельно оптичній осі. Після компоненту 1 цей промінь прямує у задній фокус цього компоненту  $F_1'$ . Для пошуку ходу цього променя після заломлення на компоненті 2 використовується допоміжний промінь із рядка 2 табл. 7.1, який паралельний заданому променю у просторі між компонентами 1 і 2. Допоміжний промінь перетинає задню фокальну площину другого компонента. Оскільки обидва промені паралельні між собою на вході у компонент 2, то вони повинні перетинатися у задній фокальній площині другого компонента, точка перетину обведена колом. Цим визначається хід заданого променя після компонента 2.

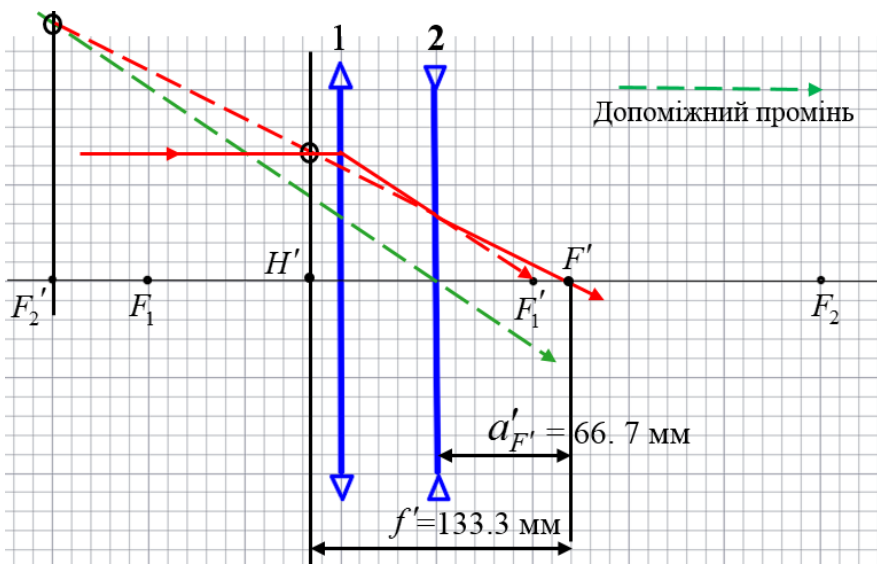


Рис. 7.17. До розв'язку завдання 7.6

В тому місці, де заданий промінь перетинає оптичну вісь, знаходиться задній фокус  $F'$  всієї оптичної системи. Задня головна

точка оптичної системи знаходиться у площині уявного перетину продовження заданого променя і продовження у зворотному напрямку променя, що виходить із системи. Точка перетину також обведена колом. Значення кардинальних відрізків  $f'$  та  $a_{F'}$ , отриманих із побудови у масштабі ходу заданого променя, представлені на рис. 7.17.

Для визначення значень передніх кардинальних відрізків та положення передніх кардинальних точок оптичну систему треба повернути на  $180^\circ$  та знову направити до неї промінь паралельний оптичній осі, рис. 7.18. На виході з компоненту 2 цей промінь уявно пройде через задній фокус цього компоненту – точку  $F_2'$ .

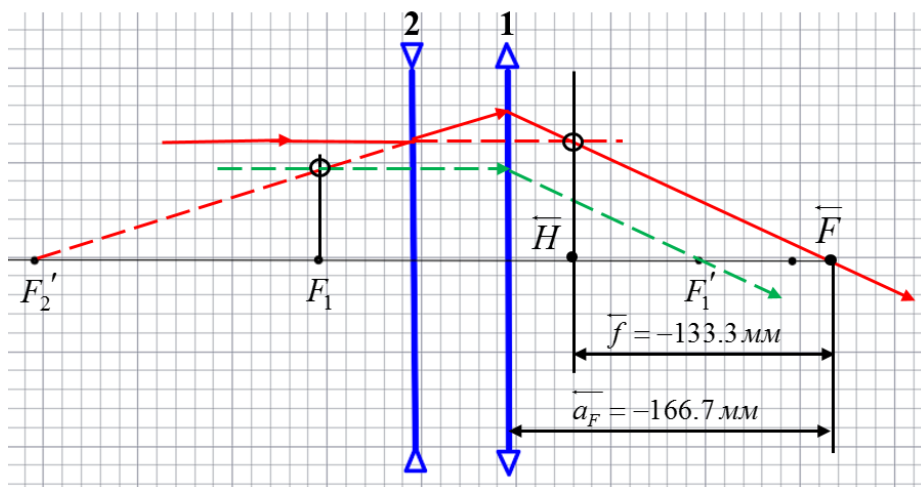


Рис. 7.18. До розв'язку завдання 7.6

Побудова ходу вказаного променя через компонент 1 здійснюється за допомогою допоміжного променя (зелений колір), який в табл. 7.1 знаходиться в рядку 3 зліва. Оскільки обидва промені перетинаються у передній фокальній площині компоненту 1 у точці, яка обведена колом, то вони з компоненту 1 виходять паралельно. В точці перетину заданого променя з оптичною віссю знаходиться точка переднього фокусу  $\bar{F}$  всієї оптичної системи. Передня головна площина знаходиться на перетині продовження заданого променя на вході і на виході з системи (точка перетину обведена колом). Значення передньої фокусної відстані  $\bar{f}$  та переднього фокального відрізка  $\bar{a}_F$  на рис. 7.18 показані з тими знаками, які вони повинні мати після повернення системи у початкове положення, вказане на рис. 7.19.

**Завдання 7.7.** Знайти зображення заданих предметних точок, вказаних буквою  $B$  на рис. 7.19.

**Розв'язання.**

На рис. 7.19, *а* для пошуку зображення точки використано два промені – перший йде паралельно оптичній осі, а тому проходить через точку заднього фокусу  $F'$ , а другий проходить через точку переднього фокусу  $F$ , тому виходить паралельно оптичній осі. На їх перетині знаходиться зображення точки  $B$  – точка  $B'$ .

На рис. 7.19, *б* показано компонент з від'ємною оптичною силою. Для пошуку зображення точки  $B$  використано два промені, перший надходить в компонент паралельно оптичній осі і виходить уявно через точку заднього фокусу  $F'$ , а другий промінь проходить через вузлові точки не змінюючи напрям ходу. Їх уявний перетин вказує положення уявного зображення  $B'$ .

На рис. 7.19, *в* показано увігнуте дзеркало. Для пошуку зображення предметної точки  $B$  використано два промені, які в табл. 7.3 позначені номерами 1 і 4. Їх дійсний перетин вказує положення дійсного зображення точки  $B$ .

На рис. 7.19, *г* пошук зображення предметної точки опуклим дзеркалом здійснюється за допомогою двох променів, які в табл. 7.3 позначені номерами 1 і 3. Уявне зображення предметної точки – точка  $B'$  знаходиться на уявному продовженні цих променів.

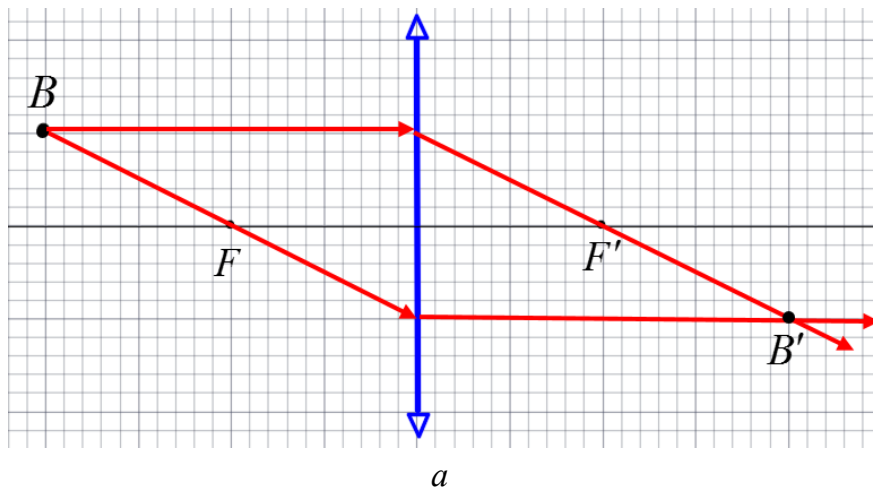
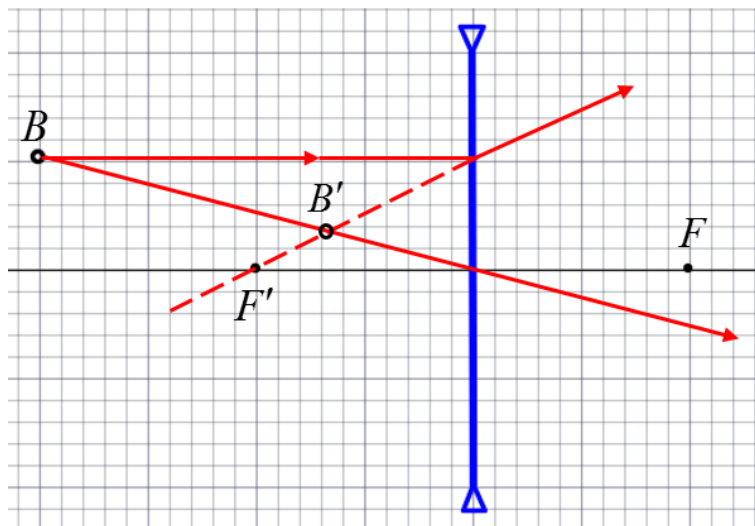
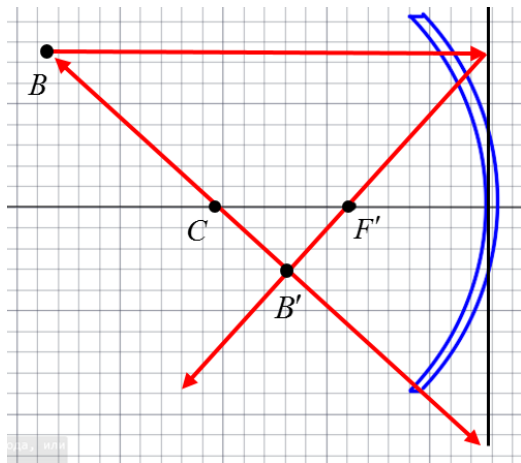


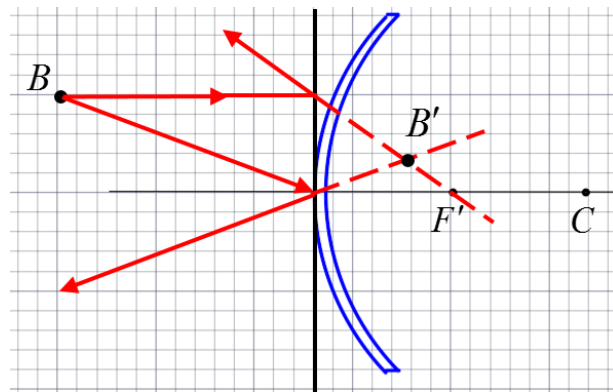
Рис. 7.19. До завдання 7.7 з прикладами пошуку зображення точки графічним методом: *а* – лінзовий компонент з  $f' > 0$ ; *б* – лінзовий компонент з  $f' < 0$ ; *в* – увігнуте дзеркало; *г* – опукле дзеркало



б



в



г

Рис. 7.19. Закінчення (див. також с. 161)

## РОЗДІЛ 8. ОПТИЧНІ МАТЕРІАЛИ

Оптичні деталі, з яких складаються оптичні системи приладів, виготовляються з оптичних матеріалів. **Оптичним** може бути той матеріал, який задовольняє вимогам:

- прозорість на окремих ділянках спектру оптичного діапазону електромагнітних хвиль;
- оптична однорідність;
- механічна стійкість;
- термічна стійкість;
- хімічна стійкість;
- біологічна стійкість;
- радіаційна стійкість.

Прозорість означає мінімальне поглинання оптичного випромінювання, яке проходить товщу оптичного матеріалу.

Оптична однорідність – сталість показника заломлення в будь-якій точці оптичного матеріалу.

Механічна стійкість – здатність оптичного матеріалу зберігати геометричну форму оптичної деталі при статичних та динамічних навантаженнях на неї.

Термічна стійкість – здатність зберігати форму і оптичні властивості при коливаннях температури, хоча показники заломлення і температурне розширення властиве оптичним матеріалам як і будь-яким іншим.

Хімічна стійкість означає нерозчинність у воді, хімічна інертність до слабких лужних та кислотних розчинів.

Біологічна стійкість – відторгнення мікрофлори.

Радіаційна стійкість – відсутність помутніння, тобто втрати прозорості і оптичної однорідності під впливом рентгенівського випромінювання чи потоку  $\alpha, \beta, \gamma$  часток.

Цілком зрозуміло, що матеріал, який задовольняє всім вище переліченим вимогам, важко знайти в природі, тому оптичні матеріали у переважній більшості є штучними, створеними людьми завдяки розвитку науки, техніки та технологій.

В оптичному приладобудуванні використовуються наступні оптичні матеріали:

- оптичне скло безбарвне;
- кварцове скло;
- оптичне скло кольорове;

- оптична кераміка;
- кристали природні та штучні;
- органічне скло;
- ситали, церодури;
- скло з особливими властивостями.

Перелік фізичних та інших параметрів оптичних матеріалів, які мають принципове значення при їх виборі для виготовлення оптичних деталей, регламентований держстандартом ДСТУ (ГОСТ 23136-93 Материалы оптические, параметры) прийнятий Міждержавною Радою по стандартизації, метрології та сертифікації 21 жовтня 1993 р за участю Держстандарту України. Проте найбільш важливими параметрами, які в першу чергу впливають на вибір оптичного матеріалу при проектуванні оптичних систем, є:

- діапазон прозорості;
- показник заломлення  $n_\lambda$ ;

– коефіцієнт дисперсії  $\nu_\lambda = \frac{n_{\lambda_0} - 1}{n_{\lambda_1} - n_{\lambda_2}}$  чи середня дисперсія

$n_{\lambda_1} - n_{\lambda_2}$ , які характеризують залежність показника заломлення від довжини хвилі  $\lambda$ , де  $n_{\lambda_0}$  – показник заломлення за основною довжиною хвилі  $\lambda_0$ ,  $n_{\lambda_1}$  та  $n_{\lambda_2}$  показники заломлення за двома додатковими довжинами хвилі  $\lambda_1$  та  $\lambda_2$ . Додаткові довжини хвиль, як правило, визначають межі діапазону чутливості фотоприймача в оптичному приладі,  $\lambda_0$  – довжина хвилі, на яку припадає максимальна чутливість фотоприймача. Якщо фотоприймачем є сітківка ока людини, то за міжнародними стандартами, які вперше запропонувала німецька фірма Schott, вищевказані довжини хвиль для видимого діапазону:

- $\lambda_0 = 0.58756$  мкм (жовто-зеленого кольору лінія d в спектрі парів гелію He);
- $\lambda_1 = 0.48613$  мкм (синьо-блакитна лінія F в спектрі парів водню H);
- $\lambda_2 = 0.65627$  мкм (помаранчева-червона лінія C в спектрі парів водню H).

За радянським, а тепер українським стандартом:

- $\lambda_0 = 0.546074$  мкм (лінія e в спектрі парів ртуті Hg);
- $\lambda_1 = 0.47999$  мкм (лінія F' в спектрі парів кадмію Cd);
- $\lambda_2 = 0.64385$  мкм (лінія C' в спектрі парів кадмію Cd).



Коефіцієнт дисперсії  $\nu_\lambda$ , розрахований за показниками заломлення для вищевказаних стандартних ліній, має назву **число Аббе**.

## 8.1. Оптичне скло безбарвне

Оптичне скло безбарвне найбільш вживаний оптичний матеріал завдяки своїй прозорості, чистоті, механічній, хімічній стійкості, та розвинутій технології виготовлення.

Оптичне скло – аморфна речовина, отримана шляхом переохолодження розплаву певного хімічного складу, що має в результаті збільшення в'язкості властивості твердого тіла.

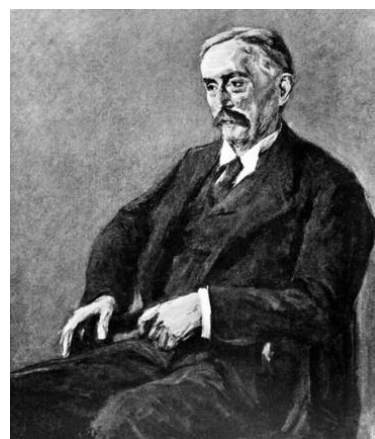
Речовина аморфна на відміну від кристалічних речовин має неупорядковане просторове взаємне розташування молекул, що входять до її складу.

Основними складовими оптичного скла є чистий пісок – кремнезем  $\text{SiO}_2$ , земні запаси якого безмежні, а також сода  $\text{Na}_2\text{CO}_3$ , оксиди  $\text{P}_2\text{O}_5$ ,  $\text{B}_2\text{O}_3$ ,  $\text{CaO}$ ,  $\text{Na}_2\text{O}$ ,  $\text{K}_2\text{O}$ ,  $\text{BaO}$ ,  $\text{PbO}$ ,  $\text{Al}_2\text{O}_3$ ,  $\text{Na}_2\text{O}_3$  та інші.

Для досягнення особливих оптичних властивостей в склад оптичного скла також можуть входити оксиди La, Ti, W, Ta, Ga, Ge, Ce та інших елементів.

Оптичне скло почали виготовляти в заводських умовах в Англії на початку XVIII століття. А в 1884 році Отто Шотт в Німеччині в місті Єна організував повномасштабне оптичне виробництво різних марок оптичного скла, які за рецептурою, а також за показниками заломлення та коефіцієнту дисперсії розділялися на групи кронглас та флінтглас. Побудований завод оптичного скла мав назву «Schott & Genossen Glass Works of Jena», акції якого належали Карлу Цейсу, Ернсту Аббе та Отто Шотту.

В радянському союзі оптичне скло почали виробляти лише у 1920 році на основі розробок Оптичного інституту ім. С.І. Вавілова. В Україні оптичне скло виробляється на Ізюмському приладобудівному заводі.



*Отто Шотт,*  
німецький хімік  
(1851–1935)

Оптичне скло прозоре в діапазоні (0.365–2.6) мкм. Вказаний діапазон повністю перекриває видимий, чим пояснюється широка вживаність цього оптичного матеріалу в візуальних оптичних приладах та в приладах, що працюють в близькому інфрачервоному діапазоні.

Залежно від хімічного складу (марки) оптичного скла його показник заломлення знаходиться в інтервалі 1.45–2, а число Аббе – в інтервалі від 17 до 80.

Групи оптичного скла типу **крон** (від англ. *crown* – корона), або **кронглас** (від нім. *kronglas*), відрізняються великими (більше 50) значеннями числа Аббе. Згідно радянському ГОСТ 3514-19 сорти скла кронглас розділяються на групи:

- ЛК – легкий крон;
- ФК – фосфатний крон;
- ТФК – важкий фосфатний крон;
- К – крон;
- БК – баритовий крон;
- ТК – важкий крон;
- СТК – надважкий крон;
- ОК – особливий крон;
- КФ – крон-флінт.

Групи оптичного скла типу – **флінт** (від англ. *flint* – кремінь), або **флінтглас** (від нім. *Flintglas*) відрізняються малими значеннями числа Аббе (менш ніж 50).

Згідно радянському ГОСТ 3514-94 сорти скла флінтглас розділяються на групи:

- БФ – баритовий флінт;
- ТБФ – важкий баритовий флінт;
- ЛФ – легкий флінт;
- Ф – флінт;
- ТФ – важкий флінт;
- СТФ – надважкий флінт;
- ОФ – особливий флінт.

На рис. 8.1 показана **діаграма Аббе**, яка демонструє належність окремих груп оптичного скла місцю в декартовій системі координат, де вздовж вертикальної осі відкладаються значення показників заломлення скла, а вздовж горизонтальної осі – значення числа Аббе. Координати виділених сегментів цієї діаграми вказують на діапазон значень показника заломлення і числа Аббе окремих груп марок оптичного скла.

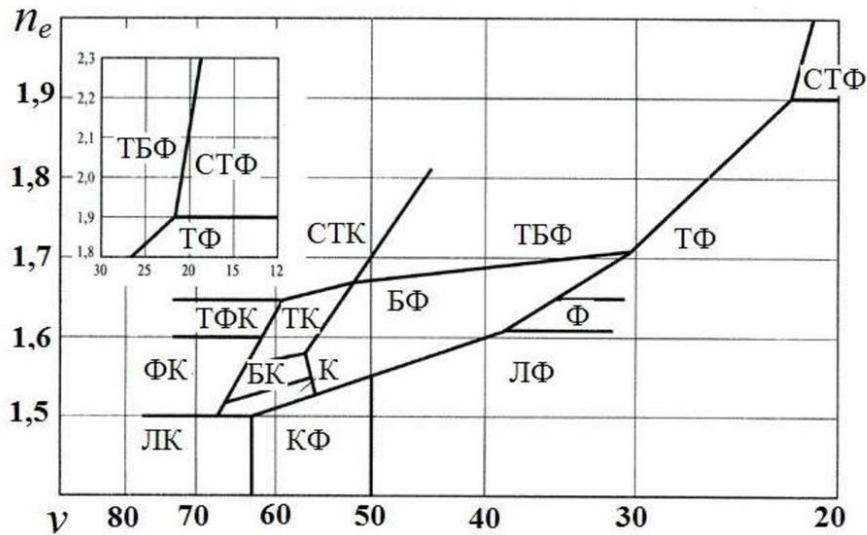


Рис. 8.1. Діаграма Аббе

На рис. 8.2 показана діаграма Аббе оптичного скла виробництва німецької фірми SCHOTT з латинськими позначеннями груп скла.

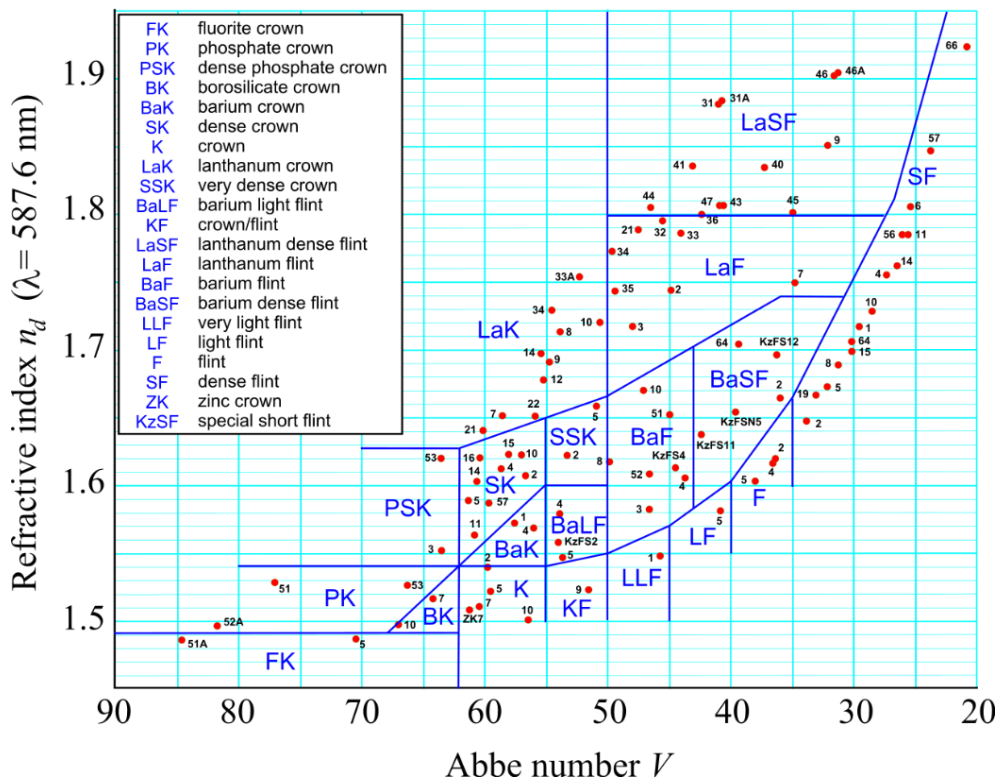


Рис. 8.2. Діаграма Аббе оптичного скла фірми Schott

Оптичне скло, що виробляє в Україні Приладобудівний завод в місті Ізюм, представлено в табл. 8.1 з основними оптичними параметрами і аналогічними марками скла німецького (компанія SCHOTT), японського (компанії HOYA та OHARA) та китайського виробництва (компанія CDGM).

Показаний в табл. 8.1 міжнародно прийнятий код оптичного скла складається з шести цифр. Перші три цифри взяті з показника заломлення для лінії d, які знаходяться за комою. Наступні три цифри – число Аббе без коми між цілою та дрібною частиною цього числа.

Таблиця 8.1

**Параметри оптичного скла українського виробництва**

Марка скла	Код (d)	Показники заломлення				Число Аббе		Середня дисперсія		Аналогічне скло виробництва фірм:				
		n <sub>F</sub>	n <sub>e</sub>	n <sub>c'</sub>	n <sub>d</sub>	v <sub>d</sub>	v <sub>e</sub>	n <sub>F</sub> -n <sub>c</sub>	n <sub>F</sub> -n <sub>c'</sub>	SCHOTT	HOYA	OHARA	CDGM	
		479.99 (nm)	546.07 (nm)	643.8 (nm)	587.56 (nm)									
ЛК3	ЛК3	487700	1,492650	1,489120	1,485650	1,487460	70,04	69,85	0,00696	0,007002	N-FK51	FC5	S-FSL 5	H-QK3
ЛК5	ЛК5	478655	1,483600	1,479900	1,476270	1,478170	65,59	65,44	0,00729	0,007334				
ФК11	ФК11	519691	1,525590	1,521760	1,518020	1,519973	69,15	68,92	0,00752	0,007570				
ФК13	ФК13	579716	1,586670	1,582110	1,577690	1,546872	67,60	67,40	0,00809	0,008143				
ФК14	ФК14	579650	1,586670	1,582110	1,577690	1,579980	65,09	64,83	0,00891	0,008979				
K1	K1	498651	1,503990	1,500090	1,496290	1,498270	65,13	64,96	0,00765	0,007698				
K2	K2	500660	1,506130	1,502280	1,498500	1,500470	66,03	65,84	0,00758	0,007629				
K3	K3	510633	1,516110	1,519900	1,508000	1,510069	63,36	63,14	0,00805	0,008109				H-K5
K8	K8	516640	1,522410	1,518290	1,514290	1,516370	64,07	63,87	0,00806	0,008115	N-BK7	BSC7	S-BSL 7	H-K9L
K14	K14	514606	1,521160	1,516810	1,512600	1,514780	60,63	60,40	0,00849	0,008557				H-K7
K19	K19	518616	1,525090	1,520790	1,516620	1,518775	61,69	61,45	0,00841	0,008475				
K20	K20	526601	1,532960	1,528470	1,524140	1,526384	60,16	59,90	0,00875	0,008822				H-K11
БК4	БК4	530604	1,536880	1,532370	1,528030	1,530280	60,47	60,20	0,00877	0,008843				H-BaK1
БК6	БК6	539596	1,546790	1,542140	1,537660	1,539980	59,67	59,40	0,00905	0,009127	N-BAK2		S-BAL12	H-BaK2
БК10	БК10	568560	1,576550	1,571310	1,566310	1,568890	56,05	55,76	0,01015	0,010245	N-BAK4	BAC4	S-BAL14	H-BaK7
TK2	TK2	572574	1,580000	1,574860	1,569950	1,572490	57,48	57,20	0,00996	0,010050	N-BAK1		S-BAL11	H-BaK8
TK4	TK4	611558	1,619470	1,613810	1,608420	1,611198	55,82	55,53	0,01095	0,011053				
TK8	TK8	614551	1,622520	1,616750	1,611270	1,614104	55,13	54,84	0,01114	0,011247				H-ZK8
TK14	TK14	613605	1,620700	1,615510	1,610500	1,613090	60,58	60,33	0,01012	0,010203	N-KZFS4	E-ADF10	S-NBMS1	H-ZK7
TK16	TK16	612583	1,620600	1,615190	1,610010	1,612690	58,35	58,08	0,01050	0,010592	N-SK4	BACD4	S-BSM 4	H-ZK6
TK20	TK20	622567	1,630370	1,624700	1,619300	1,622100	56,71	56,43	0,01097	0,011071				H-ZK10
TK21	TK21	656511	1,666650	1,659960	1,653670	1,656910	51,12	50,82	0,01285	0,012986				H-ZBaF3
TK23	TK23	589612	1,596410	1,591470	1,586710	1,589190	61,25	61,01	0,00962	0,009695	N-SK5	BACD5	BAL35Y	D-ZK3
СТК3	СТК3	659573	1,668160	1,662240	1,656560	1,659500	57,35	57,09	0,01150	0,011600				
СТК12	СТК12	692550	1,701470	1,695010	1,688790	1,692010	55,01	54,79	0,01258	0,012684	N-LAK9	LAC9		
СТК19	СТК19	744504	1,755270	1,747650	1,740380	1,744130	50,42	50,19	0,01476	0,014895	N-LAF2	LAF2	S-LAM 2	H-LaF3
КФ4	КФ4	518589	1,524780	1,520270	1,515920	1,518180	58,95	58,71	0,00879	0,008861		E-C3	S-NSL 3	H-K10
КФ6	КФ6	500572	1,507170	1,502660	1,498340	1,500580	57,21	56,96	0,00875	0,008825	K10			
БФ1	БФ1	524549	1,532000	1,527060	1,522360	1,524790	54,95	54,69	0,00955	0,009638				
БФ7	БФ7	579538	1,587740	1,582160	1,576870	1,579600	53,87	53,57	0,01076	0,010867	N-BALF4			BaF3
БФ11	БФ11	622531	1,631170	1,625090	1,619340	1,622300	53,14	52,85	0,01171	0,011828	N-SSK2	E-BACD10	S-BSM22	ZBaF1
БФ13	БФ13	639482	1,649680	1,642770	1,636280	1,639614	48,27	47,97	0,01325	0,013398		E-FD7	S-BAM12	ZBaF2
БФ21	БФ21	614400	1,625850	1,617770	1,610320	1,614130	40,03	39,75	0,01534	0,015540				BaF7
БФ27	БФ27	606439	1,617340	1,610100	1,603370	1,606822	43,97	43,68	0,01380	0,013967				
ТБФ3	ТБФ3	755411	1,769870	1,760210	1,751270	1,755851	41,15	40,87	0,01837	0,018601		TAC6	S-YGH51	
ТБФ4	ТБФ4	778380	1,794420	1,783620	1,773700	1,778772	38,08	37,82	0,02045	0,020722				
ТБФ10	ТБФ10	814334	1,833550	1,820570	1,808810	1,814810	33,42	33,17	0,02438	0,024740		M-NBFD82		
ЛФ5	ЛФ5	575413	1,585640	1,578330	1,571540	1,575020	41,31	41,03	0,01392	0,014094			S-TIL27	H-QF3
ЛФ7	ЛФ7	578411	1,589160	1,581760	1,574910	1,578420	41,11	40,83	0,01407	0,014247				
ЛФ9	ЛФ9	580380	1,591820	1,583740	1,576350	1,580130	38,02	37,73	0,01526	0,015471				
ЛФ10	ЛФ10	548458	1,557190	1,550940	1,545100	1,548104	45,87	45,58	0,01195	0,012087	LLF1	E-FEL1	S-TIL 1	QF1
ЛФ11	ЛФ11	560467	1,570010	1,563760	1,557890	1,560910	46,78	46,50	0,01199	0,012123				H-BaK5
Ф1	F1	612369	1,625650	1,616880	1,608830	1,612940	36,95	36,69	0,01659	0,016814		E-F3		F2
Ф2	F2	616366	1,629440	1,620540	1,612370	1,616551	36,61	36,35	0,01684	0,017072	F4			F3
Ф4	F4	624359	1,637670	1,628470	1,620050	1,624350	35,92	35,67	0,01738	0,017621				F5
Ф6	F6	603379	1,615400	1,607020	1,599290	1,603240	37,94	37,68	0,01590	0,016110	F5	E-F5		F1
Ф13	F13	620363	1,633120	1,624080	1,615820	1,620050	36,35	36,09	0,01706	0,017294	N-F2	E-F2	PBM2Y	H-F4
ТФ1	ТФ1	647338	1,662350	1,652190	1,642950	1,647660	33,87	33,62	0,01912	0,019397	SF2	E-FD2	S-TIM22	H-ZF1
ТФ3	ТФ3	717295	1,736160	1,723170	1,711470	1,717410	29,51	29,29	0,02431	0,024691	N-SF1	E-FD1	S-TIH 1	H-ZF3
ТФ4	ТФ4	740275	1,776440	1,761710	1,748560	1,740020	26,98	27,32	0,02743	0,027879		E-FD13	S-TIH 3	H-ZF50
ТФ5	ТФ5	755281	1,760320	1,746230	1,733620	1,755230	28,74	27,94	0,02628	0,026705	N-SF4	E-FD4		ZF6
ТФ8	ТФ8	689311	1,706540	1,694730	1,684060	1,689490	31,13	30,90	0,02215	0,022486				ZF10
ОФ1	ОФ1	529518	1,537210	1,531920	1,526890	1,529490	51,81	51,57	0,01022	0,010315				
ОФ4	ОФ4	650434	1,661970	1,654190	1,646850	1,650633	43,46	43,25	0,01497	0,015127			S-LAL54	
ОФ5	ОФ5	662417	1,674680	1,666400	1,658640	1,662640	41,78	41,56	0,01586	0,016033				
ОФ6	ОФ6	601510	1,610070	1,604010	1,598190	1,601202	51,04	50,84	0,01178	0,011880				

## 8.2. Кварцове скло

Кварцове скло – однокомпонентне силікатне, що виготовляється плавленням природних різновидів кремнезему у вигляді гірського кришталю, жильного кварцу і кварцового піску, а також утворюється при застиганні розплаву синтетичного діоксиду кремнію  $SiO_2$ .

Згідно ДСТУ 15130-86 «Скло кварцове оптичне» виготовляється декілька марок цього скла: КУ-1, КУ-2, КВ, КИ, КУВИ.

Суттєвою і важливою відмінністю кварцового скла від оптичного скла безбарвного є більш широкий спектральний діапазон прозорості і набагато менший коефіцієнт температурного лінійного розширення.

В табл. 8.2 наведені графіки, що демонструють спектральну прозорість кварцового скла різних марок. Вони свідчать про те, що кварцове скло прозоре в ультрафіолетовій області спектру, у видимому діапазоні і у інфрачервоній області спектру аж до  $\lambda = 4\text{мкм}$ .

З графіків видно наявність вузьких зон поглинання, де кварцове скло непрозоре, але у переважній більшості випадків застосування цього скла зони поглинання через їх вузькість практично не впливають на функціонування оптичного приладу.

Марки КУ-1 та КУ-2 застосовують для виготовлення оптичних деталей тих приладів які повинні працювати з ультрафіолетовим випроміненням. Інші марки використовують для виготовлення оптичних деталей, призначених для приладів, що працюють у видимому та у ближньому і середньому діапазоні інфрачервоного (ІЧ) випромінення.

Оптичні характеристики кварцового скла при 20 °С:

$$\text{Показник заломлення } n_e = 1.4601 \pm 4 \cdot 10^{-4}$$

$$n_d = 1.4584 \pm 4 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{Середня дисперсія } n_{F'} - n_{C'} = 0.00679 \pm 4 \cdot 10^{-5}$$

$$n_F - n_C = 0.00677 \pm 4 \cdot 10^{-5}$$

$$\text{Коефіцієнт дисперсії } \nu_d = 67.83$$

Коефіцієнт температурного розширення кварцового скла в інтервалі температур від  $-60\text{ °С}$  до  $+50\text{ °С}$ :

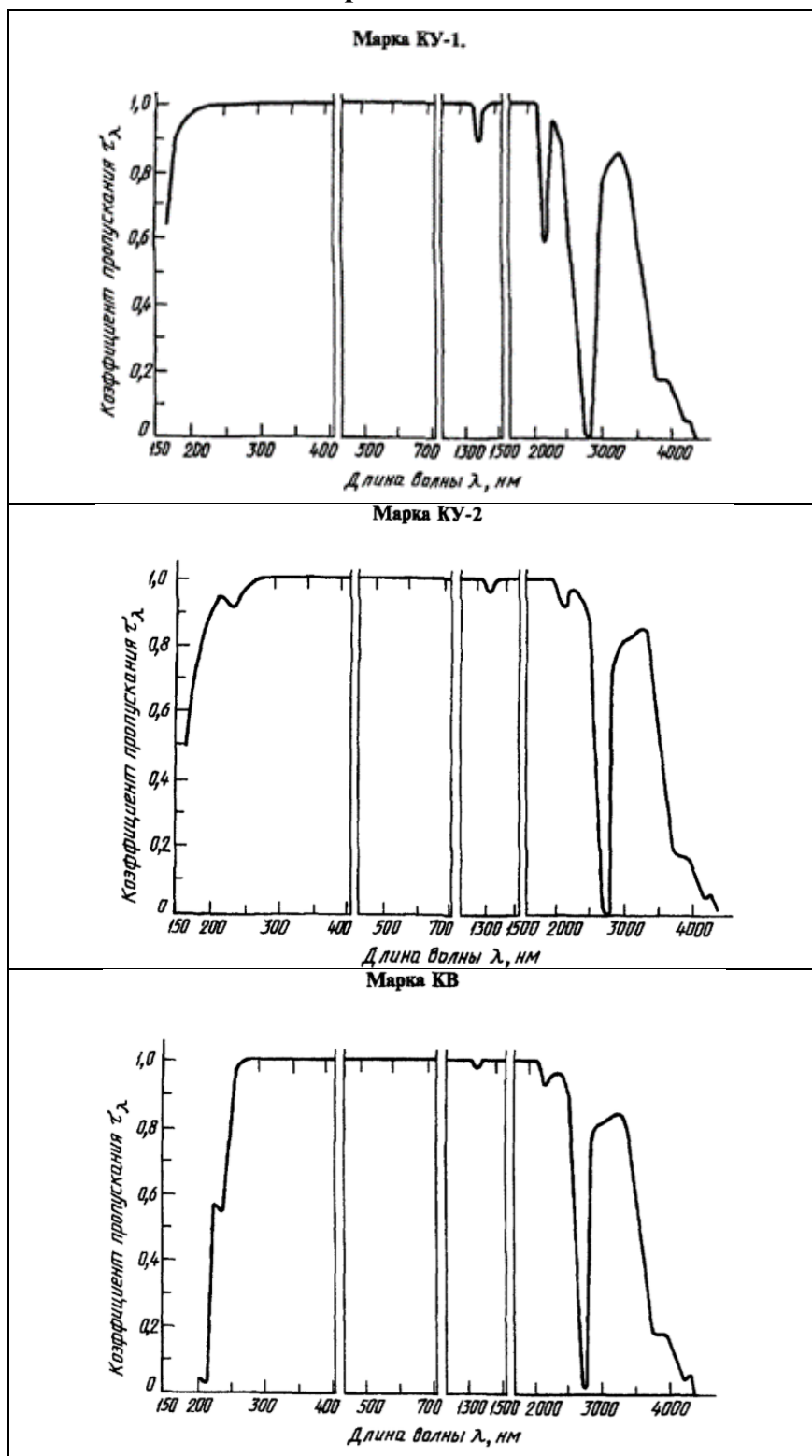
$$\alpha = (2 \div 4) \cdot 10^{-7},$$

що у декілька десятків разів менший ніж у скла оптичного безбарвного. Тому це скло застосовують для виготовлення дзеркал які прак-

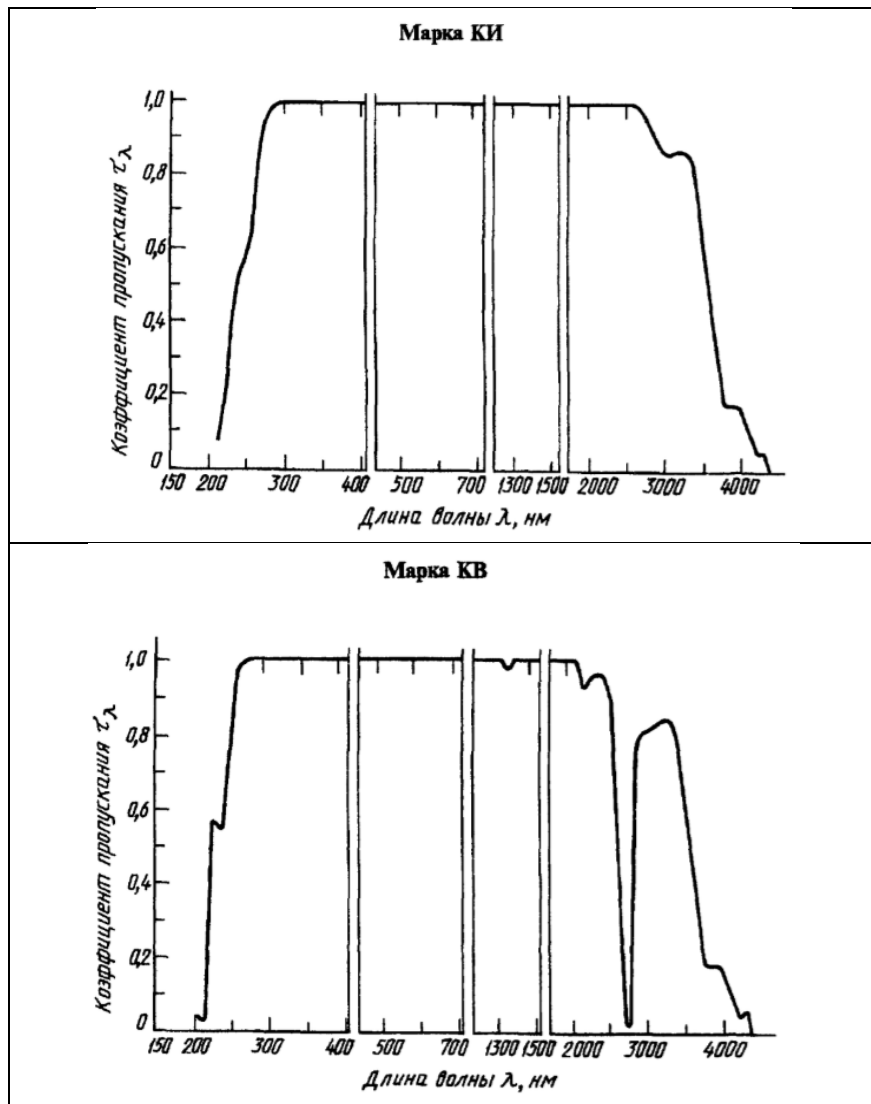
тично не змінюють свою форму і розміри під впливом зміни температури навколишнього середовища.

Таблиця 8.2

Графіки функції відносного коефіцієнту пропускання кварцового скла







### 8.3. Оптичне скло кольорове

Скло оптичне кольорове призначене для виготовлення абсорбційних світлофільтрів, які працюють за принципом поглинання (абсорбції) оптичного випромінювання на окремих ділянках спектру. Саме за рахунок такого поглинання біле випромінювання після проходження через таке скло отримує кольорове забарвлення.

Оптичне скло кольорове – скло силікатне неорганічне з домішками хімічних речовин, які надають склу селективне пропускання електромагнітних хвиль. Спектральні смуги поглинання скла обумовлені електронними переходами в атомах і молекулах хімічних елементів, присутніх в склі. Центри забарвлення і положення смуг поглинання в спектрі обумовлюються як хімічною природою кри-

талів сульфідів, селенідів та сульфоселенідів металів, так і режимами термічної обробки скла.

У центрах окрасу, утворених рідкоземельними та перехідними елементами, смуги поглинання розміщуються по всьому видимому спектру, охоплюючи ультрафіолетову та інфрачервону області спектру.

В склі, що мають в складі розчинені метали (мідь, срібло, золото), центри забарвлення формуються під дією повторної термообробки у вигляді колоїдних часток розмірами 20–30 нм. При цьому скло може отримувати червоний, жовтий, пурпурний колір.

Таким чином спектр поглинання кольорового скла визначається як вибіркоvim поглинанням світла атомами металів, так і розсіюванням світла колоїдними частками.

Згідно радянського ГОСТ 9411-91 «Скло оптичне кольорове» існують групи марок кольорового скла, які позначаються за типом і кольором:

УФС	Ультрафіолетове скло
ФС	Фіолетове скло
СС	Синє скло
СЗС	Синьо-зелене скло
ЗС	Зелене скло
ЖЗС	Жовто-зелене скло
ЖС	Жовте скло
ОС	Помаранчеве скло
КС	Червоне скло
ИКС	Інфрачервоне скло
ПС	Пурпурне скло
НС	Нейтральне скло
ТС	Темне скло
БС	Безбарвне скло

Остання буква позначення – від початкової букви слова скло. Попередні букви – від початкових букв кольору на російській мові.

Детальну інформацію про марки скла, що належать позначеним групам, можна отримати в ГОСТ 9411-91. В цьому документі наведені показники заломлення кожної марки кольорового скла, а також графіки функцій світлопропускання  $\tau(\lambda)$  при заданих товщинах пластин, виготовлених із існуючих марок кольорового скла.

Показники заломлення кольорового скла знаходяться в інтервалі значень від  $n_d = 1.469$  (марка ЖС21) до  $n_d = 1.73$  (марка скла БС8).



## 8.4. Оптична кераміка

Оптична кераміка – це полікристалічні матеріали, одержувані шляхом гарячого пресування під великим тиском при температурі (0.5 ÷ 0.8) плавлення в вакуумі суміші вихідних порошків з відповідних кристалічних матеріалів. Оптична кераміка відома за кордоном під назвою іртран. Оптична кераміка за оптичними характеристикам є аналогами відповідних кристалів, але по термомеханічним властивостями значно їх перевершують.

Середній розмір зерен іртранів як правило (0,5–0,8) мкм, тому для довжин хвиль до  $\lambda = 1\text{мкм}$  ці матеріали мало прозорі.

Завдяки мікроскопічній структурі оптична кераміка, на відміну від монокристалів, механічно ізотропна і міцніша, тому що в ній немає мікротріщин, площин спаяності і бульбашок.

Через те, що монокристали не можна зорієнтувати в одному напрямку, і орієнтація ґраток у них випадкова, призводить до відсутності пласкої спаяності і подвійного променезаломлення.

Головна перевага цих матеріалів над іншими оптичними матеріалами – здатність утримувати термоудари при різкій зміні температури. Тому вони використовуються переважно у військовій техніці, вчасності, як лінзи-обтічники в оптичних системах головок самонаведення ракет.

Оптична кераміка використовується також у світлорозсіювальних екранах, вікнах приладів, що працюють в ІЧ-області спектру, в якості підкладок інтерференційних світлофільтрів.

Таблиця 8.3

Параметри оптичної кераміки

Оптична кераміка	Хімічний склад кристалу	Діапазон прозорості [мкм]	Показник заломлення →	на довжині хвилі [мкм]
Іртран1 КО1	MgF <sub>2</sub>	2 ÷ 7	1.3374	5
Іртран2 КО2	ZnS	1.8 ÷ 14	2.2213	8
Іртран3 КО3	CaF <sub>2</sub>	0.4 ÷ 10	1.4349	0.546
Іртран4 КО4	ZnSe	0.546 ÷ 14	2.4230	7
Іртран5 КО5	MgO	0.5 ÷ 7	1.6811	3.6
Іртран6 ПО6	CdTe	0.9 ÷ 29	2.67	10.6
КО12	MgF <sub>2</sub>	0.7 ÷ 8	1.3455	4.5

Більш детальні дані щодо залежності  $n(\lambda)$  марок оптичної кераміки в можна знайти в джерелах [7].

## 8.5. Кристали

В складі оптичного скла завжди присутні атоми кисню. Через це скло не є прозорим в області ультрафіолетового (УФ) та інфрачервоного (ІЧ) випромінення. Оптичні прилади, які повинні працювати в УФ або в ІЧ діапазонах, потребують відповідних оптичних матеріалів. Такими є природні і штучні кристали. Частіше використовують штучні синтетичні вирощені з розплаву монокристали.

Види кристалів та найбільш важливі їх параметри і характеристики, наведені в табл. 8.4.

Таблиця 8.4

Параметри і характеристики оптичних кристалів

Вид кристалу	Область прозорості [мкм]	Показники заломлення для окремих дожин хвиль						Властивості
		$\lambda$ [мкм]	$n(\lambda)$	$\lambda$ [мкм]	$n(\lambda)$	$\lambda$ [мкм]	$n(\lambda)$	
Фторид літію LiF	0.11–8	0.2	1.45	1.0	1.39	5.0	1.33	Мала дисперсія, мало розчинний
Кальцит CaF <sub>2</sub>	0.12 – 12	0.2	1.47	5.0	1.40	10.6	1.28	Мала дисперсія, мало розчинний
Хлорид натрію NaCl	0.21 – 20	3.0	1.52	10.6	1.49	20.0	1.37	Висока дисперсія сильно розчинний
Бромід калію KBr	0.28 – 37	0.59	1.56	10.6	1.53	30.0	1.44	Висока дисперсія сильно розчинний
Сапфір Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0.17 – 5.5	1.0	1.76	3.0	1.71	5.0	1.63	Дуже твердий, термостійкий
Йодид цезію CsI	0.26 – 60	5.0	1.74	30	1.71	50	1.64	Сильно розчинний
Сульфід цинку ZnS	0.4 – 14	1.0	2.29	5.0	2.25	10.6	2.19	Твердий, небиткий
Арсенід галію GaAs	1.5 – 15	3.0	3.32	10.6	3.28	15	2.7	Твердий, небиткий, теплопровідний
Селенід цинку ZnSe	0.5 – 20	1.0	2.48	10.6	2.40	20	2.3	Показник заломлення термостійкий
Телурид кадмію CdTe	1.0 – 25	5.0	2.69	10.6	2.67	20	2.63	Мала твердість, погана теплопровідність
Кремній Si	1.2 – 15	1.36	3.50	3.0	3.43	10.6	3.42	Різко обмежена полоса пропуск.
Германій Ge	1.8 – 23	3.0	4.05	10.6	4.00	15	4.00	Дуже твердий, термостійкий
Кварц SiO <sub>2</sub>	0.15 – 4	0.19	1.68	0.26	1.6	2.0	1.52	Придатний для УФ

## 8.6. Органічне скло

Поряд з неорганічними оптичними матеріалами в оптичних приладах знаходять використання прозорі пластмаси. До них відносяться:

- поліметилметакрилат (ПММА) або Plexiglas;
- полістирол;
- полікарбонат;
- співполімер стирола з метилметакрилатом;
- співполімер стирола з акрилонітратом;
- поліетиленгліколь бісалилкарбонат;
- Zeonex.

Як видно з табл. 8.5 матеріали поліметилметакрилат, поліетиленгліколь бісалилкарбонат та японський матеріал Zeonex за значеннями коефіцієнту дисперсії аналогічні крону, а полістирол, полікарбонат, співполімер стирола з метилметакрилатом та співполімер стирола з акрилонітратом – аналогічні флінту.

Таблиця 8.5

Оптичні параметри органічного скла

Органічне скло	Показник заломлення			Коефіцієнт дисперсії $V_d$	Світло-пропускання у видимій області $\tau$ [%]
	$n_d$	$n_C$	$n_F$		
Поліметилметакрилат	1.491	1.488	1.496	57.8	82-92 (5 мм)
Полістирол	1.590	1.585	1.604	30.8	85-90 (2 мм)
Полікарбонат	1.586	1.581	1.598	30.3	86 (3 мм)
Співполімер стирола з метилметакрилатом	1.579	1.574	1.592	32.2	90 (3 мм)
Співполімер стирола з акрилонітратом	1.567	1.563	1.578	36.0	88 (3 мм)
Поліетиленгліколь бісалилкарбонат	1.504	1.501	1.510	54.3	89-92 (6 мм)
Zeonex	1.530	-	-	55.0	92

Полікарбонат і полістирол матеріали термостійкі, інші – термопластичні з низькою температурою плавлення. Через малу різницю в марках показників заломлення та коефіцієнтів дисперсії та через малу твердість і високий коефіцієнт теплового розширення органічне скло мало придатне для створення оптичних систем з високою якістю зображення. Тому органічне скло підходить лише для

простих оптичних елементів, до яких не висувають високих вимог. Цей матеріал може бути застосованим в лупах, для лінз простих іграшкових біноклів, мікроскопів, пластин простих світловідбивачів, лінз видошукачів.

Проте термопластичне органічне скло має суттєву перевагу перед неорганічними оптичними матеріалами, яка полягає у можливості виготовляти оптичні елементи шляхом пресування. Методом пресування термопластичного органічного скла можна виготовляти лінзи зі складною формою – лінзи Френеля, лінзи з асферичними поверхнями, тобто такі елементи, які виготовити з неорганічного матеріалу технологічно дуже складно, а іноді неможливо.

## 8.7. Оптичні ситали, церодури

Ситал – матеріал, що відрізняється від інших дуже низьким, майже нульовим і навіть від’ємним коефіцієнтом температурного розширення. Потреба в таких матеріалах виникла при виготовленні дзеркал телескопів з великими – метровими діаметрами, які повинні зберігати точну геометричну форму при великих перепадах температури. Ситали стали незамінним конструкційним матеріалом в лазерних гірометрах – приладах для орієнтації і навігації транспортних засобів.

Ситали – склокристалічні матеріали, отримані завдяки об’ємній кристалізації скла. Вони утворені з однієї або декількох кристалічних фаз, рівномірно розподілених в склоподібній фазі.

Оптичні ситали є полікристалічними матеріалами з дуже дрібними рівномірно розподіленими за обсягом кристалами, які з’єднані прошарками залишкового скла. За своїм складом оптичні ситали містять оксиди: кремнію, алюмінію і літію з добавками двоокису титану.

Шляхом спеціальної термообробки виділяються кристали літійових алюмосилікатів, які мають майже нульовий і навіть від’ємний коефіцієнт температурного розширення.

В табл. 8.6 показані показники заломлення марок оптичного ситалу та їх коефіцієнт температурного лінійного розширення.

Унікальні властивості характерні для ситалу марки СОЗЗМ. Так при температурі  $\cong 80\text{ }^\circ\text{C}$  він має нульове значення  $\alpha$ , а в інтервалі температур від  $80\text{ }^\circ\text{C}$  до  $400\text{ }^\circ\text{C}$  цей матеріал має від’ємне значення  $\alpha = 0.5 \cdot 10^{-7} (\text{ }^\circ\text{C})^{-1}$ , тобто в цьому інтервалі ситал стискається.

## Параметри оптичного ситалу

Марка ситалу	$n_e(n_d)$	$\alpha \cdot 10^7$ в інтервалі температур °С	
		20 – 420	±60
СО313	(1.580)	18	–
СОК33	(1.550)	$0 \pm 1.5$	–
СОК34	(1.550)	$0 \pm 2.5$	–
СО115М	1.539	3.5	$0 \pm 1.5$
СО33М	(1/550)	$0 \pm 1.0$	$0 \pm 1.5$

Коефіцієнт спектрального світлопропускання оптичного ситалу показаний графіками на рис. 8.3.

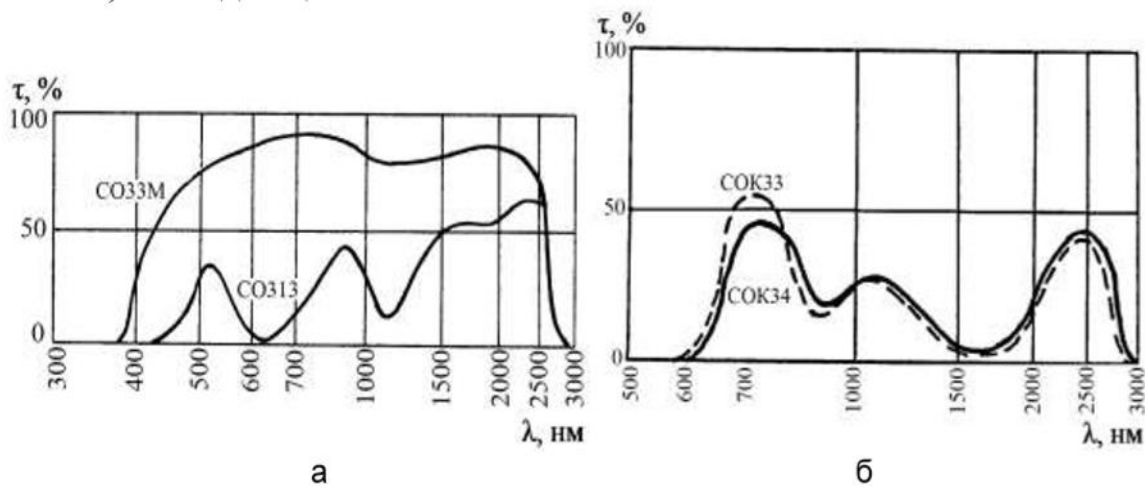


Рис. 8.3. Графіки спектрального пропускання марок оптичного ситалу:

*a* – товщина СО33М – 3 мм, товщина СО313 – 10 мм;

*б* – товщина СОК33 і СОЛ34 – 3 мм

Церодур (Zerodur<sup>®</sup>) – зареєстрований товарний знак компанії Schott AG щодо матеріалу, який є представником літій-алюмосилікатних ситалів. Для прикладу, він використаний при виготовленні дуже великих за розмірами дзеркалах телескопів Кек-І,ІІ. Дзеркала телескопів зібрані з 36 сегментів, кожний з яких має  $\varnothing 1.8$  м. Еквівалентний діаметр дзеркал  $\varnothing 10$  м. Оскільки коефіцієнт температурного лінійного розширення цього матеріалу становить  $\pm 0.07 \cdot 10^{-7}$ , що приблизно у 1000 разів менше ніж у звичайного оптичного скла, то розміри і форма таких дзеркал стають практично незалежними від перепадів температури зовнішнього середовища.

## 8.8. Скло з особливими властивостями

Групу скла з особливими властивостями складають:

- безкисневе (халькогенідне) скло;
- лазерне скло;
- фотохромне скло;
- молочне (світлорозсіювальне) скло;
- радіаційно стійке скло.

### 8.8.1. Безкисневе скло

Звичайне силікатне скло містить в своєму складі атоми кисню, які сприяють поглинанню випромінення середнього і далекого ІЧ-діапазону.

Безкисневі – халькогенідні стекла – група неорганічних скло-подібних матеріалів, які замість кисню містять один або більше халькогенідних елементів S, Se у поєднанні з такими елементами як As, Ge, P, Sb, Bi, Si, Sn, Pb, B, Al, Ga, In, Tl, Ag, лантаніди і Na. Халькогенідні стекла додатково містять галогенні елементи та  $TeX$  – стекла (X – галоген).

Висока прозорість халькогенідних стекол в області від 0.7 до 17 мкм робить їх привабливими для використання в оптичних приладах, що працюють у далекій ІЧ-області спектра.

Кожному безкисневому оптичному склу присвоєна марка, що складається з трьох букв і двох цифр. Перші три букви в позначенні відповідають початковим буквам слів «Инфра-красное стекло», бо скло було розроблене ще у радянські часи, а цифри позначають порядковий номер розробки, чим менше цифра, тим раніше це скло було освоєно виробництвом в промисловості.

Оптичні параметри і характеристики безкисневого скла відповідних марок представлені в наступних таблицях.

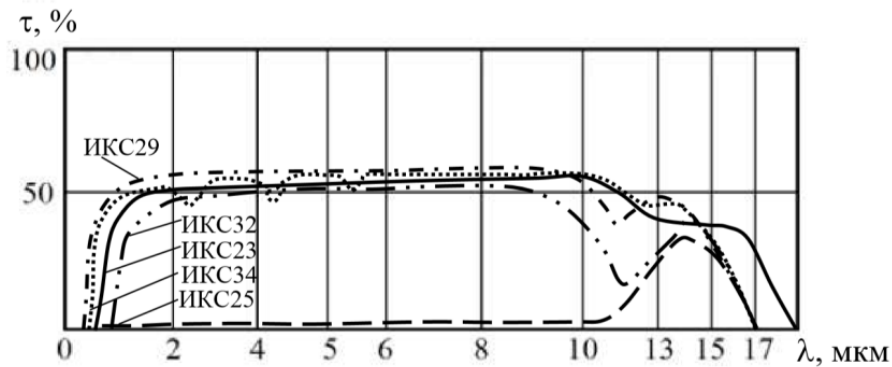
Таблиця 8.7

Середні дисперсії та коефіцієнти дисперсії безкисневого скла

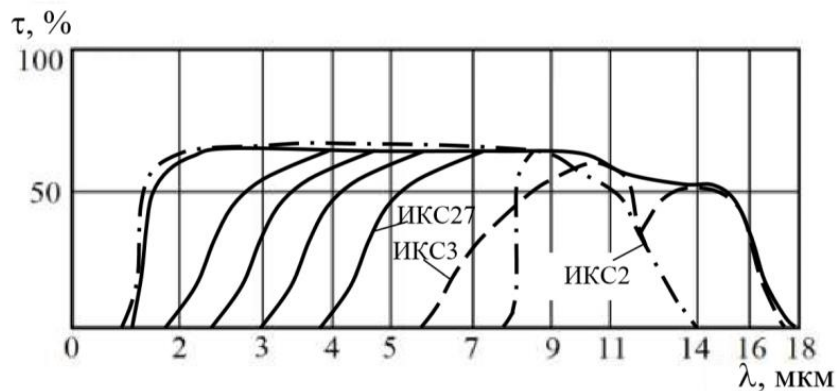
Марка	$n_{2,0}$	$n_{10,0}$	$n_{1,8} - n_{2,2}$	$n_{8,0} - n_{12,0}$	$\frac{n_{2,0} - 1}{n_{1,8} - n_{2,2}}$	$\frac{n_{10,0} - 1}{n_{8,0} - n_{12,0}}$
<b>ИКС23</b>	2,4261		0,0071		201	
<b>ИКС24</b>	2,4098		0,0072		196	
<b>ИКС28</b>	2,7285	2,6875	0,0118	0,0152	146	111
<b>ИКС29</b>	2,6381	2,6006	0,0110	0,0131	149	122
<b>ИКС34</b>	2,6283	2,5941	0,0098	0,0122	166	131
<b>ИКС32</b>	3,0351	2,9731	0,0190	0,0175	107	113
<b>ИКС25</b>	2,8081	2,7675	0,0138	0,0116	131	152

**Показники заломлення безкисневого скла  
в діапазоні 1-14 мкм**

$\lambda$ , мкм	Показники заломлення марки скла								
	ИКС23	ИКС24	ИКС28	ИКС29	ИКС34	ИКС32	ИКС25	ИКС27	ИКС33
1,0	2,4816	2,4640	—	—	—	—	—	—	—
1,8	2,4303	2,4134	2,7394	2,6443	2,6339	3,0447	2,8160	—	—
2,0	2,4261	2,4098	2,7285	2,6381	2,6283	3,0351	2,8081	—	—
2,2	2,4232	2,4062	2,7276	2,6333	2,6241	3,0257	2,8022	—	—
3,0	2,4163	2,3990	2,7120	2,6225	2,6147	3,0072	2,7894	—	—
4,2	2,4108	2,3937	2,7060	2,6168	2,6091	2,9971	2,7840	—	—
5,0	2,4086	2,3911	2,7026	2,6141	2,6067	2,9926	2,7804	2,6880	—
5,8	2,4056	2,3887	2,7003	2,6122	2,6048	2,9892	2,7785	—	—
7,0	2,4009	2,3845	2,6968	2,6090	2,6020	2,9864	2,7752	2,6820	2,6820
8,0	2,3965	2,3806	2,6940	2,6065	2,5995	2,9810	2,7728	—	2,6790
9,0	2,3922	2,3764	2,6908	2,6036	2,5971	2,9767	2,7703	—	2,6760
10,0	—	—	2,6875	2,6006	2,5941	2,9731	2,7675	—	2,6730
11,0	—	—	2,6833	2,5971	2,5909	2,9685	2,7645	—	2,6700
12,0	—	—	2,6788	2,5934	2,5873	2,9635	2,7612	—	2,6650
13,0	—	—	—	2,5892	2,5832	—	2,7579	—	2,6620
14,0	—	—	—	2,5846	2,5788	—	2,7542	—	2,6580



а



б

Рис. 8.4. Графіки коефіцієнту світлопропускання марок безкисневого скла:  
а – товщина зразка 3 мм; б – товщина зразка 10 мм

### 8.8.2. Лазерне скло

Історично першим оптичним матеріалом, застосованим в твердотільних лазерах, був рубін – корунд ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ), в якому невелика частка атомів Al замінена іонами хрому  $\text{Cr}^{+++}$ . На заміну рубіну був створений лазерний матеріал – скло, активоване іонами неодиму  $\text{Nd}^{+++}$ .

Якщо штучно вирощений рубіновий стержень має довжину (15–20) см та діаметр (3–15) мм, то стержень з неодимового скла може досягати дожини (0.5–1.0) м при діаметрі до 50 мм. Таке скло більш прозоре ніж рубін, має менші паразитні втрати. Через ці переваги лазери на склі, активованому іонами неодиму, мають набагато більшу потужність у безперервному режимі випромінення.

### 8.8.3. Фотохромне скло

Фотохромізм – здатність речовини отримувати чи змінювати забарвлення під впливом УФ, видимого або ІЧ- випромінення.

Фотохромні стекла (ФХС), що обернено змінюють пропускання у видимій області спектра в залежності від освітленості і тривалості опромінення УФ або короткохвильового випромінення видимого діапазону, знаходять широке застосування в оптичному приладобудуванні, світлотехніці, медичній офтальмології, в голографії.

Головним чином використовується гетерогенні ФХС, що мають дві фази – матричне натрієво-алюмо-боросилікатне скло і розчинені в ньому світлочутливі монокристали галогенідів срібла або міді, які є основними носіями фотохромних властивостей.

Таблиця 8.9

Відомі ФХС марок: ФХС2, ФХС4, ФХС6 и ФХС7

Марка скла	Призначення	Світлочутлива фаза	Сенсибілізатор світлочутливої фази
ФХС2	Запис і збереження інформації	AgBr(Cl)	$\text{Cu}^+$ , $\text{Cd}^{++}$
ФХС4	Захист оптичних систем від потужного випромінення широкого спектрального складу	AgBr(Cl)	$\text{Cu}^+$ + CuCl(Br)
ФХС6, ФХС7	Захист органів зору людини від впливу сонячного випромінення, клінічні застосування в офтальмології	AgCl(Br) CuCl	$\text{Cu}^+$



Під дією активного випромінювання в світлочутливій фазі ФХС відбуваються конкуруючі процеси: з одного боку, утворення центрів забарвлення (ЦЗ), а з іншого – термічне і оптичне руйнування ЦЗ, результуюча яких визначає швидкість і ступінь потемніння скла. Передбачається, що за ЦЗ, що дають широку смугу додаткового поглинання в області 500–600 нм, відповідальні колоїдні частки срібла  $Ag_n$  (в склі марок ФХС2, ФХС4, ФХС6) і колоїдні частки міді  $Cu_n$  (в склі марок ФХС4, ФХС7).

Після припинення дії зовнішнього випромінювання зберігається тільки процес термічного руйнування ЦЗ, що викликає знебарвлення (релаксацію) скла.

На рис. 8.5 представлено типовий графік зміни світлопропускання ФХС у фазі дії зовнішнього опромінення скла (фаза потемніння ФХС) і у фазі зменшення чи повної відсутності зовнішнього опромінення скла (фаза знебарвлення чи просвітлення ФХС).

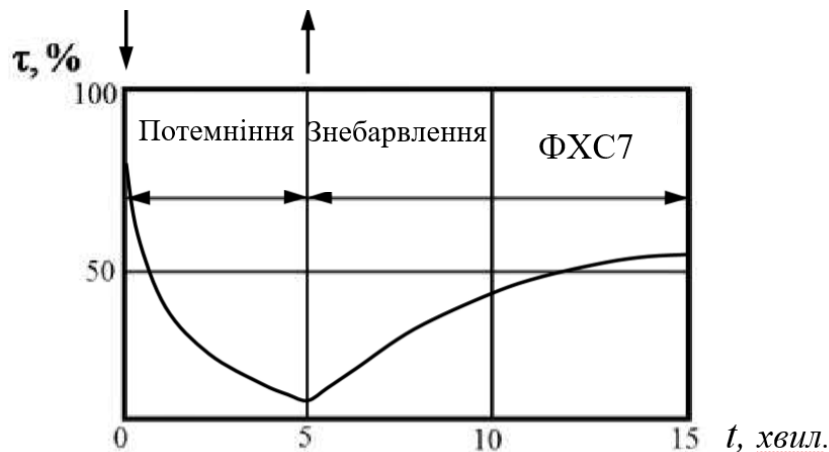


Рис. 8.5. Типова кінетична крива фотохромного скла

Показники  $n_e$  заломлення фотохромного скла:

Скло	$n_e$
ФХС2	1.507
ФХС4	1.500
ФХС6	1.497
ФХС7	1.501

#### 8.8.4. Світлорозсіювальне скло

За своїми властивостями та призначенням світлорозсіювальні стекла діляться на три типи, табл. 8.10. Їх параметри представлені в табл. 8.11, 8.12.

Скло марок МС20, ОНС1, ОНС2, ОНС3 і ОНС4 представляють серію з послідовним зменшенням коефіцієнту відбиття (від 0,97 до 0,14).

Скло марок МС19, МС13, МС23 і МС12 представляють серію з послідовним зменшенням коефіцієнту пропускання (від 0,91 до 0,13).

Скло марок МС16, МС17, МС18 і МС19 представляють серію з послідовно зростаючої каламутністю.

Букви МС означають молочне скло або мутне скло. Букви ОНС означають відбивальне нейтральне скло.

Таблиця 8.10

Тип	Марки скла
I Скло для дифузного відбиття світла	МС20, ОНС1, ОНС2, ОНС3, ОНС4
II Скло для дифузного пропускання світла	МС19Б МС13Б МС23Б МС12
III Скло для зразків каламутності	МС16, МС17, МС18, МС19

Таблиця 8.11

Коефіцієнти відбиття  $\rho$  скла типу I

Марка скла	МС20	ОНС1	ОНС2	ОНС3	ОНС4
$\rho$	0.97	0.74	0.53	0.30	0.15

Таблиця 8.12

Інтегральний коефіцієнт пропускання скла типу II

Марка стекла	Товщина зразка [мм]	Інтегральний коефіцієнт пропускання $\tau$
МС12	2	0.27
	1	0.36
МС13	3	0.59
	2	0.68
	1	0.78
МС23	3	0.53
	2	0.61
	1	0.68
МС19	8	0.79
	6	0.82
	4	0.86
	2	0.91

Деталі з скла типу I використовуються як робочі еталони відбиття і білизни у фотометрах, ніфелометрах та в інших приладах для контролю продукції.

Деталі з скла типу II використовуються в оптичних приладах як дифузні розсіювачі світла.

Деталі з скла типу III використовуються як зразки та робочі еталони каламутності для градування і перевірки правильності роботи вимірювальних приладів (ніфелометрів, компараторів та в інших приладах).

## РОЗДІЛ 9. ОПТИЧНІ ДЕТАЛІ

Оптична система складається з оптичних деталей, які виготовляються з відповідного оптичного матеріалу, мають визначену форму і розташовуються одні відносно інших в такому строго визначеному порядку, який забезпечує оптичній системі можливість виконання основних та допоміжних функцій оптичного приладу. Нижче показані приклади взаємного розташування оптичних елементів в оптичних системах (рис. 9.1).



Традиційними оптичними елементами – деталями оптичних систем є:

### Лінзи



### Призми



Рис. 9.1

## Пластини



## Дзеркала



## Волоконно-оптичні елементи



*Рис. 9.1. Закінчення (див. також с. 184)*

Кожна з оптичних деталей має пов'язані між собою геометричні, конструктивні і функціональні параметри. Знання властивостей оптичних деталей, уміння і навички розрахунків їх параметрів є необхідною умовою для розуміння функціонування оптичних систем оптичних приладів та для науково-обґрунтованого аналізу та синтезу оптичних систем. Тому наступний матеріал присвячується детальному вивченню властивостей оптичних деталей оптичних систем.

## 9.1. Лінзи

**Лінзою** називають оптичну деталь, яка обмежена двома оптичними заломлюваними поверхнями і поверхнею для базування лінзи в оправі, рис. 9.2. Оптичні поверхні у переважній кількості лінз – сферичні, поверхня базування частіш за все циліндрична. З розвитком технологій все більше в оптичних системах використовують лінзи з асферичними поверхнями. Існують лінзи з поверхнею базування у формі паралелепіпеда.

На рис. 9.2 показана лінза з циліндричною поверхнею базування та сферичними оптичними поверхнями. Лінія, що проходить через центри сфер – точки  $C_1$  та  $C_2$  є **оптичною віссю лінзи**. При виготовленні лінзи вісь симетрії циліндричної поверхні і оптичну вісь поєднують. Якщо оптичні поверхні є асферичними, то поєднують їх осі симетрії і вісь циліндричної поверхні. Таки лінзи називають центрованими.

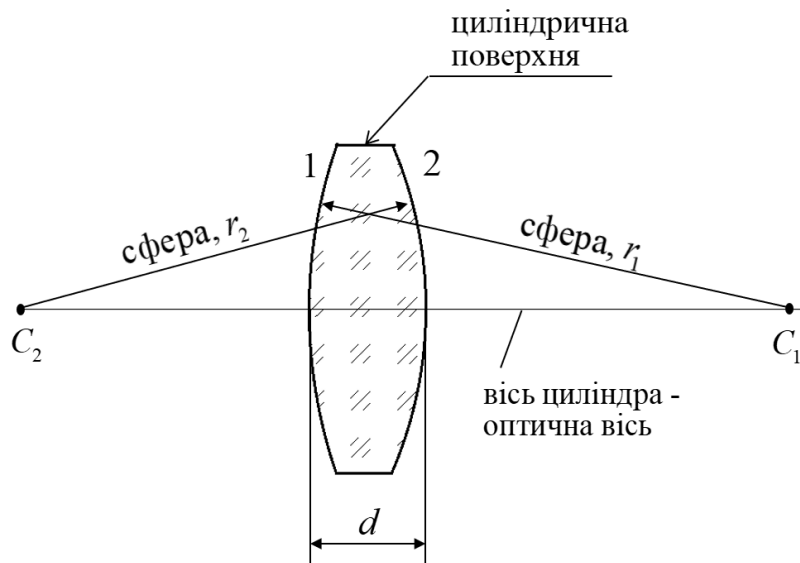



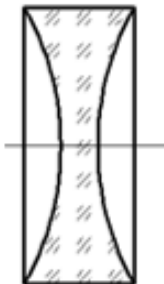




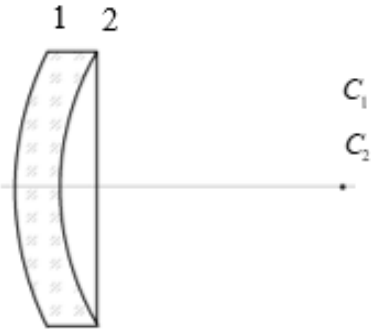
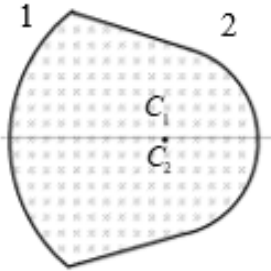
Рис. 9.2. Лінза із сферичними оптичними поверхнями, центрована

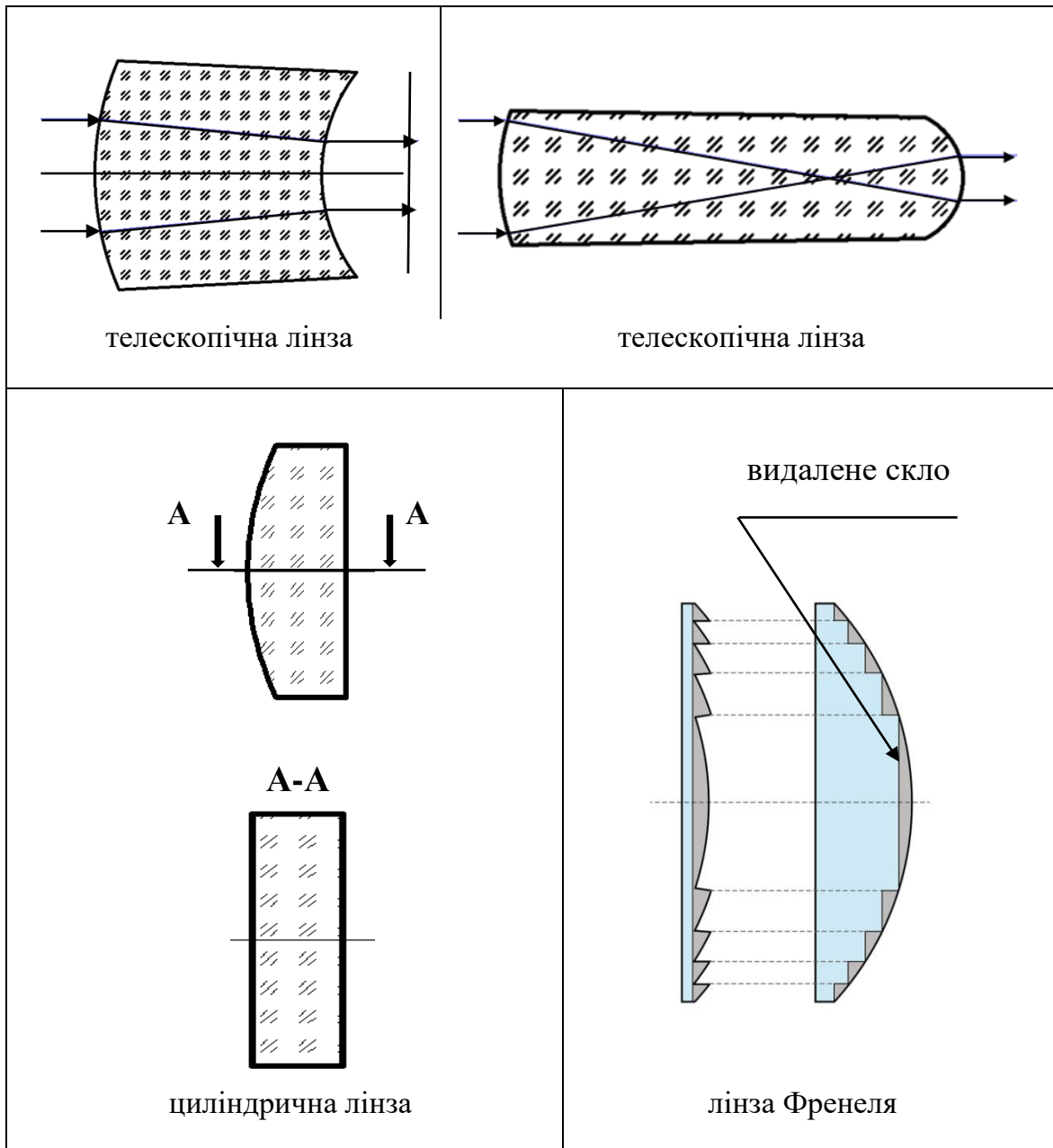
**Конструктивними параметрами лінз** є значення радіусів сфер  $r_1$ ,  $r_2$  та осьова товщина  $d$ , а також показники заломлення і коефіцієнт дисперсії оптичного матеріалу, з якого виготовляється лінза. До цього додаються поперечні розміри лінзи. У випадку, коли оптичні поверхні є асферичними, то додатково наводять функцію твірної асферичної поверхні з даними про коефіцієнт ексцентриситету (конічний коефіцієнт) та про коефіцієнти при членах вищих степеневих порядків. Для опису твірної асферичної поверхні обирають одну з форм, які представлені виразами (5.1)–(5.4).

Залежно від конструктивних параметрів лінзи мають назви, табл. 9.1.

Таблиця 9.1

Типи лінз

 <p>двоопукла лінза</p>	 <p>двогубо увігнута лінза</p>	 <p>опукло-пласка лінза</p>	 <p>увігнуто-пласка лінза</p>
 <p>меніск з додатною оптичною силою</p>		 <p>меніск з від'ємною оптичною силою</p>	
 <p>концентричний меніск</p>	 <p>концентрична двоопукла лінза</p>		



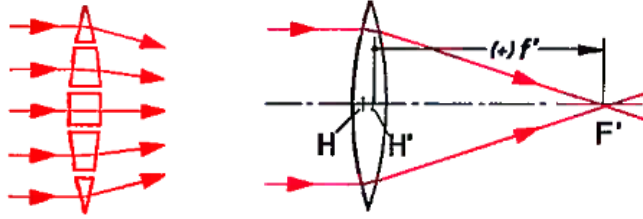
Головними оптичними функціональними параметрами лінзи є її кардинальні відрізки:

- $f', f$  – задня і передня фокусні відстані;
- $\Phi$  – оптична сила;
- $s'_F, s_F$  – задній та передній фокальні відрізки;
- $s'_H, s_H$  – задній та передній відрізки, що вказують положення задньої та передньої точки лінзи.

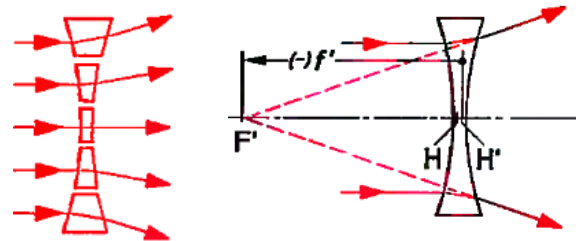
Залежно від знаку задньої фокусної відстані лінзи розділяють на дві групи:



Лінзи з додатною оптичною силою або збиральні лінзи, у яких задній фокус  $F'$  – дійсний і знаходиться справа від задньої головної точки  $H'$ :



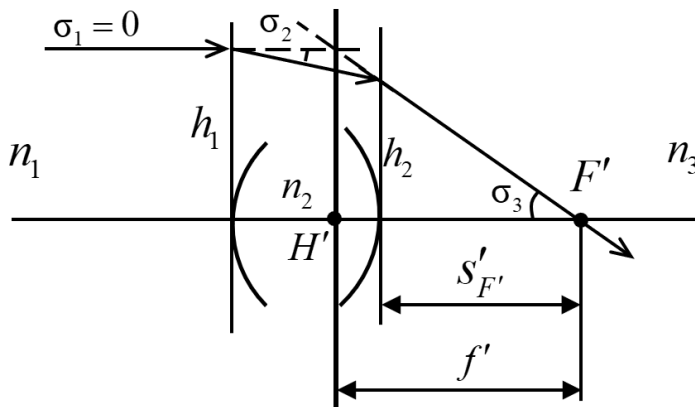
Лінзи з від'ємною оптичною силою або розсіювальні лінзи, у яких задній фокус  $F'$  – уявний і знаходиться зліва від задньої головної точки  $H'$ :



### 9.1.1. Формули розрахунку відрізків лінзи $f', f, s'_{F'}, s_F, s'_{H'}, s_H$

Вказані відрізки характеризують лінзу в параксіальній області, тому розраховуються за допомогою нульових променів.

На рис. 9.3 показана лінза з конструктивними параметрами  $r_1, r_2, d, n$ . В загальному випадку перед лінзою і за лінзою можуть бути різні оптичні середовища. Тому таку лінзу можна представити як оптичну систему з конструктивними параметрами, рис. 9.3.



Конструктивні параметри лінзи

	$n_1$
$r_1$	
$d_1$	$n_2$
$r_2$	
	$n_3$

Рис. 9.3. До виводу формули розрахунку  $f'$  лінзи

Відрізки  $f'$  та  $s'_{F'}$  згідно (6.29), (6.28) та відповідно до рис. 9.3 розраховуються за формулами:

$$f' = \frac{h_1}{\operatorname{tg}\sigma_3}, \quad (9.1)$$

$$s'_{F'} = \frac{h_2}{\operatorname{tg}\sigma_3}. \quad (9.2)$$

Оскільки  $\operatorname{tg}\sigma_3 = \frac{h_1}{f'}$ , то

$$s'_{F'} = \frac{h_2}{\operatorname{tg}\sigma_3} = \frac{h_2}{h_1} f'. \quad (9.3)$$

Нульовий промінь, кути та висоти якого присутні у наведених формулах, повинен надходити у лінзу паралельно оптичній осі на довільній висоті  $h_1$  при  $\operatorname{tg}\sigma_1 = 0$ . Для розрахунків відрізків за формулами (9.1) та (9.2) потрібно знайти висоту  $h_2$  і тангенси кутів  $\operatorname{tg}\sigma_2$ ,  $\operatorname{tg}\sigma_3$ . Для цього використаємо формули (6.20), (6.21) кутів та висот нульового променя. Оскільки  $\operatorname{tg}\sigma_1 = 0$ , то

$$\operatorname{tg}\sigma_2 = \frac{n_1}{n_2} \operatorname{tg}\sigma_1 + \frac{n_2 - n_1}{n_2} \frac{h_1}{r_1} = \frac{n_2 - n_1}{n_2} \frac{h_1}{r_1};$$

$$h_2 = h_1 - d_1 \operatorname{tg}\sigma_2 = h_1 - d_1 \frac{n_2 - n_1}{n_2} \frac{h_1}{r_1} = h_1 \left(1 - d_1 \frac{n_2 - n_1}{n_2 r_1}\right);$$

$$\operatorname{tg}\sigma_3 = \frac{n_2}{n_3} \operatorname{tg}\sigma_2 + \frac{n_3 - n_2}{n_3} \frac{h_2}{r_2} = \frac{n_2}{n_3} \frac{n_2 - n_1}{n_2} \frac{h_1}{r_1} + \frac{n_3 - n_2}{n_3} \frac{h_2}{r_2} = \frac{n_2 - n_1}{n_3} \frac{h_1}{r_1} + \frac{n_3 - n_2}{n_3 r_2} h_1 \left(1 - d_1 \frac{n_2 - n_1}{n_2 r_1}\right)$$

звідки

$$\operatorname{tg}\sigma_3 = \frac{h_1}{n_3} \left[ \frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_3 - n_2}{r_2} - \frac{(n_3 - n_2)(n_2 - n_1)d_1}{n_2 r_1 r_2} \right].$$

Після підстановки останнього виразу у (9.1), маємо:

$$f' = n_3 \left[ \frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_3 - n_2}{r_2} - \frac{(n_3 - n_2)(n_2 - n_1)d_1}{n_2 r_1 r_2} \right]^{-1}. \quad (9.4)$$

Формулу (9.4) в літературі частіш подають у вигляді, придатному для розрахунку оптичної сили лінзи, (7.11):

$$\Phi = \frac{n_3}{f'} = \frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_3 - n_2}{r_2} - \frac{(n_3 - n_2)(n_2 - n_1)d_1}{n_2 r_1 r_2}. \quad (9.5)$$

Формула (9.5) має назву формули лінзи. Якщо лінза знаходиться у повітрі, то  $n_1 = n_3 = 1$ ,  $d_1 = d$  і  $n_2 = n$ . Тоді формула (9.5) перетворюється до вигляду:

$$\Phi = (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{(n-1)^2 d}{nr_1 r_2}, \quad (9.6)$$

або

$$f' = \frac{1}{\Phi} = \frac{1}{n-1} \left[ \frac{nr_1 r_2}{(n-1)d + n(r_2 - r_1)} \right]. \quad (9.7)$$

Задній фокальний відрізок згідно (9.3) і виразу для  $h_2$  має вигляд:

$$s'_{F'} = \frac{h_2}{\operatorname{tg} \sigma_3} = \frac{h_2}{h_1} f' = \left( 1 - d_1 \frac{n_2 - n_1}{n_2 r_1} \right) f'. \quad (9.8)$$

Згідно (6.30) відрізок  $s'_{H'} = s'_{F'} - f'$ . Використовуючи формулу (9.8), отримуємо:

$$s'_{H'} = -d_1 \frac{n_2 - n_1}{n_2 r_1} f'. \quad (9.9)$$

Для лінзи у повітрі:

$$s'_{F'} = \left[ 1 - \frac{(n-1)d}{nr_1} \right] f', \quad (9.10)$$

$$s'_{H'} = -d \frac{n-1}{nr_1} f'. \quad (9.11)$$

Аналогічно можна знайти передні кардинальні відрізки. Для цього потрібно лінзу повернути на  $180^\circ$ , розрахувати хід нульового променя, який надходить в лінзу паралельно оптичній осі, знайти формули відповідних відрізків і придати їм зворотні знаки, що позначатиме поворот лінзи у початкове положення. При цьому формули передніх відрізків для лінзи у повітрі будуть мати наступний вигляд:

$$s_F = -f' \left[ 1 + \frac{d(n-1)}{nr_2} \right], \quad (9.12)$$

$$s_H = -d \frac{n-1}{nr_2} f'. \quad (9.13)$$

Відстань між головними точками лінзи, відрізок  $HH'$  :

$$HH' = d \left[ 1 - \frac{f'(n-1)}{n} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \right]. \quad (9.14)$$

Формули (9.4)–(9.14) дозволяють виявляти властивості окремих типів лінз щодо розташування їх кардинальних точок і площин.

В табл. 9.2 наведені приклади лінз і розташування їх головних точок.

З представленою в табл. 9.2 видно, що головні площини лінзи з додатною оптичною силою зсуваються в сторону поверхні з меншим радіусом. Якщо одна з поверхонь стає плоскою, то одна з головних площин суміщається з осьюовою точкою іншої поверхні.

Те саме спостерігається в лінзах з від'ємною оптичною силою.

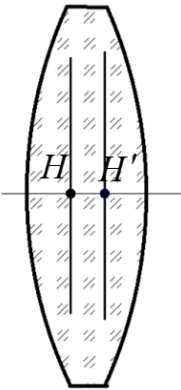
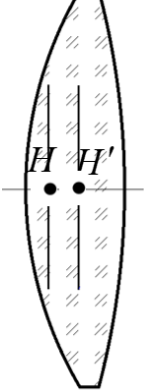
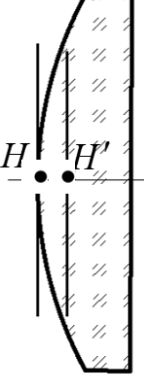
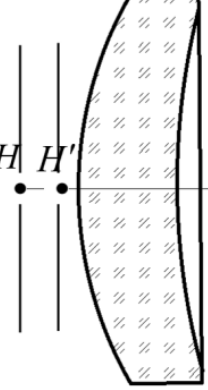
При переході форми лінзи до меніска головні площини зсуваються за межі лінзи тим далі від лінзи, чим менше різниця між радіусами поверхонь. Відстань між головними площинами збільшується і досягає значення осьової товщини лінзи, коли радіуси поверхонь стають рівними.

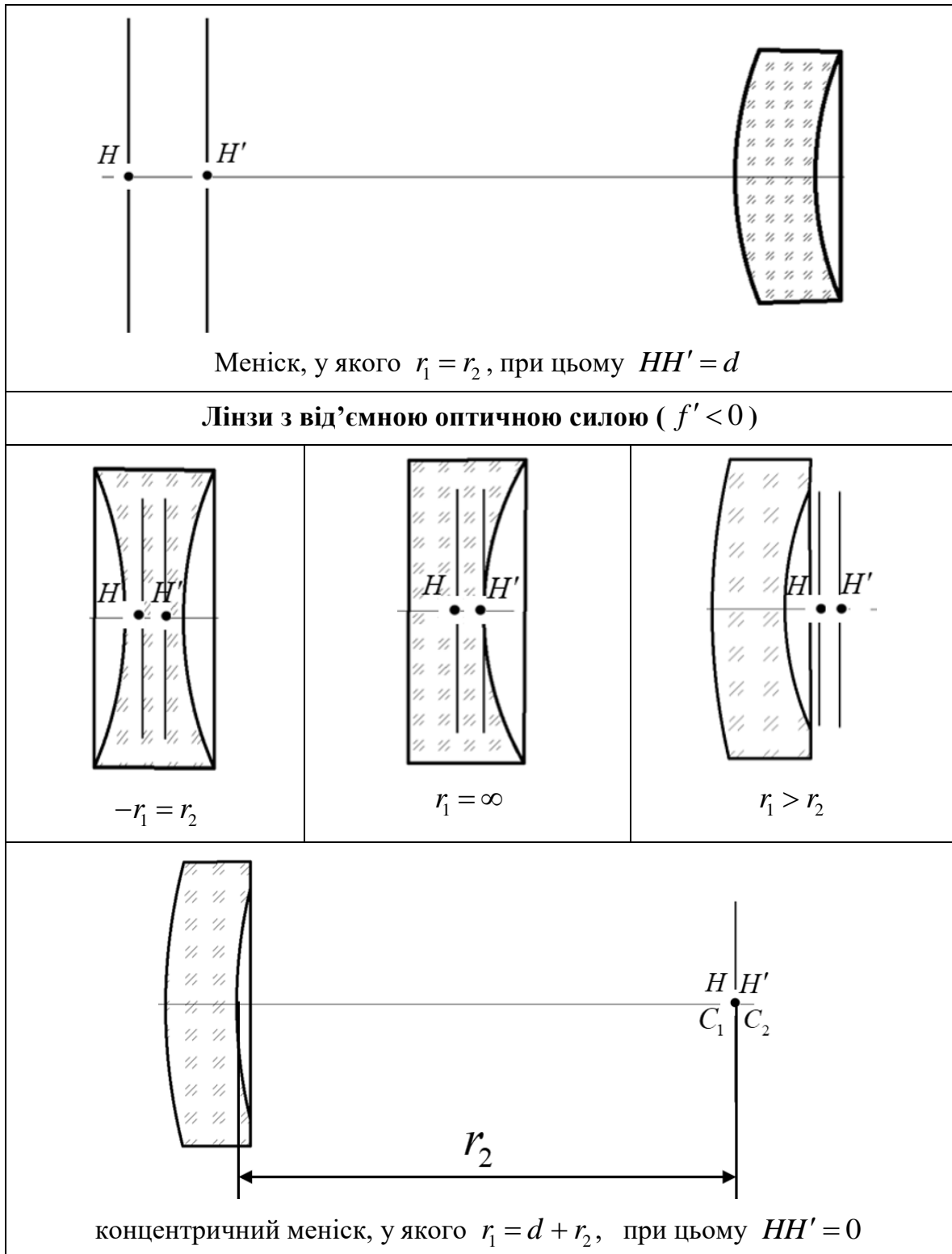
У випадку, коли меніск стає концентричним, головні площини суміщаються в точці єдиного центру сферичних поверхонь.

Ці та інші властивості розташування головних площин можна виявити, використовуючи формули (9.4)–(9.14).

Таблиця 9.2

До аналізу впливу конструктивних параметрів лінзи на розташування її головних точок

Лінзи з додатною оптичною силою ( $f' > 0$ )			
			
$r_1 = -r_2$	$r_1 < -r_2$	$r_2 = \infty$	$r_1 < r_2$



**Завдання 9.1.** Визначить, при яких умовах у лінзи, що знаходиться у повітрі, головні площини будуть розташовані так, що передня головна площина опиниться позаду задньої головної площини, тобто відрізок  $HH'$  стане від'ємним.

**Розв'язання.**

Після підстановки виразу (9.7) у (9.14) отримуємо вираз:

$$HH' = d \left[ 1 - \frac{1}{\frac{(n-1)d}{r_2 - r_1} + n} \right]. \quad (9.15)$$

З виразу (9.15) видно, що відрізок  $HH'$  може бути від'ємним, коли  $\frac{1}{\frac{(n-1)d}{r_2 - r_1} + n} > 1$ . З цієї нерівності витікає умова:

$$d > r_1 - r_2. \quad (9.16)$$

Нехай  $r_1 = 20\text{мм}$ ,  $r_2 = 18\text{мм}$ . Щоб виконувалася умова (9.16) візьмемо осьову товщину лінзи  $d = 3\text{мм}$ . Показник заломлення у виразі (9.16) не присутній, що означає незалежність результату від марки оптичного матеріалу. Візьмемо довільно оптичне скло К8 з показником заломлення  $n_e = 1.51829$ .

Використовуючи формули (9.7), (9.11), (9.13) маємо:

$$f' = -711.73\text{мм}, \quad s_H = 40.49\text{мм}, \quad s'_H = 36.44\text{мм}, \quad HH' = -1.05\text{мм}.$$

На рис. 9.4 показана ця лінза і розташування її головних площин згідно отриманого результату.



Рис. 9.4. Меніск з інверсно розташованими головними площинами

Розв'язанням цієї завдання доводить, що взаємне розташування головних площин лінзи вздовж оптичної осі може бути інверсним.

**Завдання 9.2.** Оптична система складається з двох лінз у повітрі. Перша лінза – меніск з радіусами  $r_1 = r_2 = 10\text{мм}$  та осьовою товщиною  $d = 4\text{мм}$ , виготовлений із оптичного скла ВК7 фірми SCHOTT. Друга лінза – також меніск з конструктивними парамет-

рами  $r_1 = 20\text{мм}$ ,  $r_2 = 18\text{мм}$ ,  $d = 3\text{мм}$ , виготовлена з вітчизняного оптичного скла ТФ4. Між лінзами осьова відстань  $d_{1-2} = 10\text{мм}$ . Знайдіть оптичну силу і задню фокусну відстань системи, використовуючи відому формулу для дволінзової (двокомпонетної) системи  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - d_{I-II} \Phi_1 \Phi_2$ , в якій  $\Phi$  – оптична сила системи,  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  – оптичні сили першої і другої лінзи відповідно,  $d_{I-II}$  – відстань між задньою головною точкою першої лінзи та передньою головною точкою другої лінзи.

**Розв’язання.**

Знайдемо оптичні сили обох лінз, за формулою (9.6):

У першої лінзи показник заломлення оптичного скла ВК7  $n_e = 1.5187$ , тому її оптична сила:

$$\Phi_1 = (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{(n-1)^2 d}{nr_1 r_2} = (1.5187-1) \left( \frac{1}{10} - \frac{1}{10} \right) + \frac{(1.5187-1)^2 4}{1.5187 \cdot 10 \cdot 10} = 7.0863 \cdot 10^{-3} \text{мм}^{-1}.$$

У другої лінзи показник заломлення оптичного скла ТФ4  $n_e = 1.74624$ , тому

$$\Phi_2 = (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{(n-1)^2 d}{nr_1 r_2} = (1.74624-1) \left( \frac{1}{20} - \frac{1}{18} \right) + \frac{(1.74624-1)^2 4}{1.74624 \cdot 20 \cdot 18} = -1.4883 \cdot 10^{-3} \text{мм}^{-1}.$$

Відрізок, що вказує положення задньої головної площини відносно задньої поверхні у першої лінзи згідно формули (9.11):

$$(s'_{H'})_1 = -d \frac{n-1}{nr_1} f'_1 = -4 \frac{1.5187-1}{1.5187 \cdot 10} \cdot 141.11737 = -19.2785 \text{мм}.$$

Відрізок, що вказує положення передньої головної площини відносно передньої поверхні другої лінзи згідно формули (9.13)

$$(s_H)_2 = -d \frac{n-1}{nr_2} f'_2 = -3 \frac{1.74624-1}{1.74624 \cdot 18} \cdot (-671.914) = 47.856 \text{мм}.$$

Відстань  $d_{I-II}$  представлена на рис. 9.5 і розрахована з рівняння:

$$d = (-s'_{H'})_1 + d_{1-2} + (s_H)_2 = 19.279 + 10 + 47.856 = 77.135 \text{мм}.$$

Після підстановки отриманих даних у формулу оптичної сили дволінзової системи маємо:

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_1 + \Phi_2 - d_{I-II} \Phi_1 \Phi_2 = \\ &= 7.0863 \cdot 10^{-3} + (-1.48829 \cdot 10^{-3}) - 77.135 \cdot 7.0863 \cdot 10^{-3} \cdot (-1.48829 \cdot 10^{-3}) = \\ &= 6.41151 \cdot 10^{-3} \text{мм}^{-1}. \end{aligned}$$

Задня фокусна відстань такої системи

$$f' = \frac{1}{\Phi} = \frac{1}{6.41151 \cdot 10^{-3} \text{ мм}^{-1}} = 155.97 \text{ мм}.$$

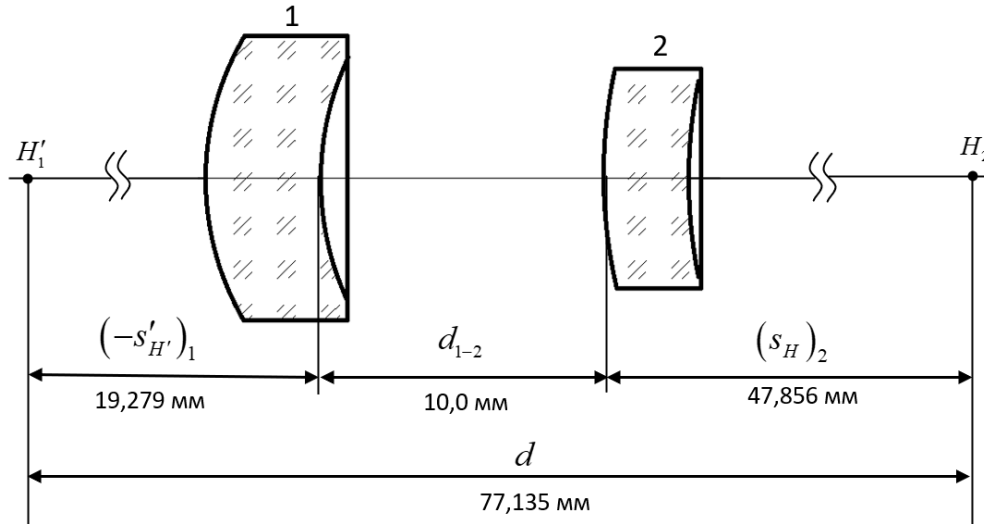


Рис. 9.5. До завдання 9.2

Отриманий результат свідчить про те, що дійсна відстань між відповідними головними площинами обох лінз  $d_{I-II}$  може сильно відрізнятися від осьової відстані  $d_{1-2}$  між самими лінзами. Тому не можна нехтувати пошуком дійсного значення відрізка  $d_{I-II}$ , замінюючи його відстанню між лінзами  $d_{1-2}$ , оскільки це може призвести до дуже великої помилки розрахунку  $\Phi$  і  $f'$  системи лінз, особливо в тих випадках, коли форма лінз меніскова.

## 9.2. Пласко-паралельні пластини

**Пласкопаралельною пластинною** називають деталь виготовлену з оптичного матеріалу, яка має дві пласкі паралельні оптичні поверхні. Поверхня базування пластини слугує для розташування пластини в оправі. Частіш за все ця поверхня циліндрична. Вісь циліндра перпендикулярна до оптичних поверхонь. Для пласкопаралельної пластини властиво те, що будь-яка вісь перпендикулярна до оптичних поверхонь пластини, може вважатися її оптичною віссю. На рис. 9.6 показана пласкопаралельна пластинна.

В оптичних системах пласкопаралельні пластини використовуються як світлофільтри, захисні вікна, сітки та шкали, накривні та вирівнювальні стекла.





Рис. 9.6. Плоскопаралельна пластинка: 1, 2 – оптичні плоскі поверхні

Дзеркальні розгортки відбивальних та обертальних призм також є плоскопаралельними пластинами.

### 9.2.1. Проходження пучка паралельних променів через плоскопаралельну пластину

Плоскопаралельні пластини впливають на хід променів чи пучків променів, що проходять скрізь неї. Якщо пучок паралельних променів падає на пластину перпендикулярно до її оптичних поверхонь, то такий пучок не змінює свого ходу і виходить з пластини так, наче пластини не було, рис. 9.7, а. Якщо пучок паралельних променів падає під кутом  $\varepsilon$  до вхідної поверхні, то на виході з пластини промені зберігають паралельність. Це явище пояснюється тим, що всі промені на вході і на виході пластини заломлюються однаково. А якщо плоскі поверхні пластини є паралельними, то пучок променів на виході з пластини залишається паралельним пучку на вході в пластину. Відбувається лише паралельний зсув пучка на відрізок «е», рис. 9.7, б.

Для знаходження залежності відрізка  $e$  від кута  $\varepsilon$ , а також від конструктивних параметрів пластини :

$d$  – осьової товщини пластини;

$n$  – показника заломлення оптичного матеріалу пластини, звернемося до рис. 9.8.

Згідно закону заломлення кути  $\varepsilon_1$  та  $\varepsilon'_1$  пов'язані рівнянням  $n_1 \sin \varepsilon_1 = n_2 \sin \varepsilon'_1$ . Оскільки пластинка знаходиться у повітрі, то  $\sin \varepsilon_1 = n \cdot \sin \varepsilon'_1$ .

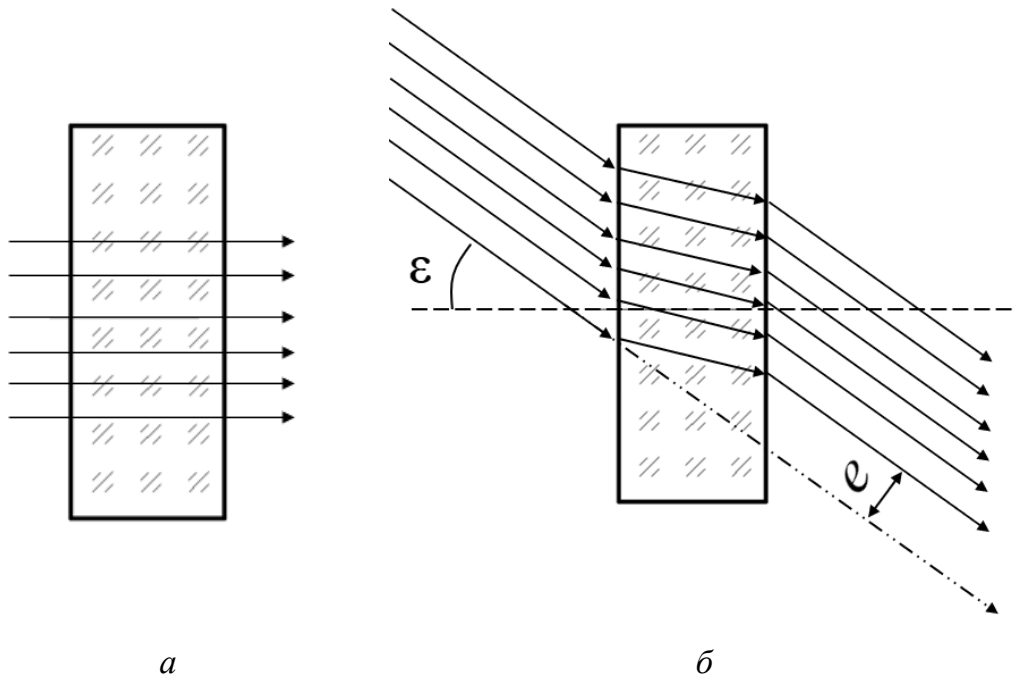


Рис. 9.7. Проходження пучка паралельних променів через плоскопаралельну пластину: а) перпендикулярно до вхідної поверхні, б) під кутом  $\epsilon$  до поверхні

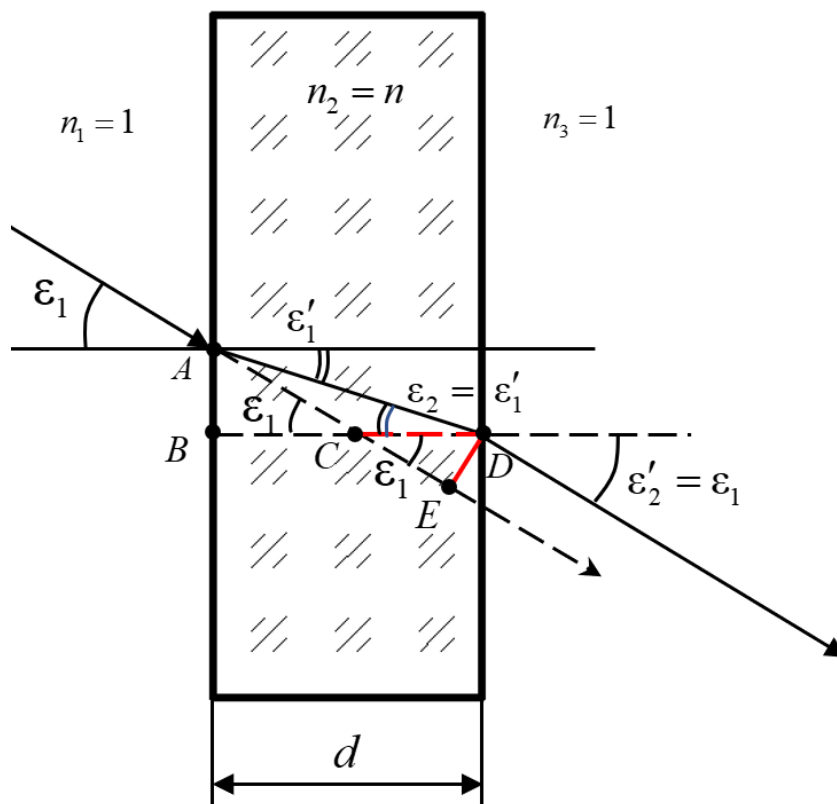


Рис. 9.8. Проходження променя через плоскопаралельну пластину

Те саме стосується кутів  $\varepsilon_2$  і  $\varepsilon'_2$ :

$$n_2 \sin \varepsilon_2 = n_3 \sin \varepsilon'_2, \text{ або } n \cdot \sin \varepsilon_2 = \sin \varepsilon'_2.$$

Оскільки  $\varepsilon_2 = \varepsilon'_1$ , то  $\sin \varepsilon_1 = \sin \varepsilon'_2$ , звідки  $\varepsilon_1 = \varepsilon'_2$ .

Цим доведено, що промінь після проходження через плоскопаралельну пластину зберігає напрямок, який був на вході в пластину.

Відрізок  $ED = e$  вказує величину паралельного зсуву променя на виході з пластини відносно його положення на вході. З трикутника  $CDE$  видно, що відрізок  $ED = CD \cdot \sin \varepsilon_1$ .

Для пошуку відрізка  $CD$  розглянемо трикутники  $ABC$  і  $ABD$ . З трикутника  $ABC$ :

$$\frac{AB}{BC} = \operatorname{tg} \varepsilon_1 \text{ або } AB = BC \operatorname{tg} \varepsilon_1.$$

З трикутника  $ABD$ :

$$\frac{AB}{d} = \operatorname{tg} \varepsilon_2 = \operatorname{tg} \varepsilon'_1 \text{ або } AB = d \operatorname{tg} \varepsilon'_1.$$

З двох рівнянь для відрізка  $AB$  маємо:  $BC \operatorname{tg} \varepsilon_1 = d \operatorname{tg} \varepsilon'_1$ , звідки

$$BC = d \frac{\operatorname{tg} \varepsilon'_1}{\operatorname{tg} \varepsilon_1}.$$

Відрізок  $CD = d - BC = d - d \frac{\operatorname{tg} \varepsilon'_1}{\operatorname{tg} \varepsilon_1} = d \left( 1 - \frac{\operatorname{tg} \varepsilon'_1}{\operatorname{tg} \varepsilon_1} \right)$ . Після підстановки

цього виразу у рівняння відрізка  $ED$  маємо формулу розрахунку відрізка  $e$ :

$$e = d \left( 1 - \frac{\operatorname{tg} \varepsilon'_1}{\operatorname{tg} \varepsilon_1} \right) \sin \varepsilon_1. \quad (9.17)$$

Формулу (9.17) можна перетворити до вигляду:

$$e = d \frac{\sin(\varepsilon_1 - \varepsilon'_1)}{\cos \varepsilon'_1}.$$

В області параксіальних променів допускається заміна:

$$\sin(\varepsilon_1 - \varepsilon'_1) = (\varepsilon_1 - \varepsilon'_1).$$

При малих кутах  $\varepsilon_1$  і  $\varepsilon'_1$  функція  $\cos \varepsilon'_1 \cong 1$ . Тому вираз (9.17) з такими допущеннями отримує вигляд:  $e = d(\varepsilon_1 - \varepsilon'_1)$ .

В області параксіальних променів  $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon'_1} = n$ , тому  $\varepsilon_1 - \varepsilon'_1 =$   
 $= (\varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_1}{n}) = \frac{n-1}{n} \varepsilon_1$ . Після підстановки останнього виразу у формулу  
 для відрізка  $e$  маємо:

$$e = d \frac{n-1}{n} \varepsilon_1. \quad (9.18)$$

Вираз (9.18) свідчить про те, що невеликий в площині рисунку поворот пластини на кут  $\varepsilon_1$ , викликає практично прямо-пропорційний зсув зображення у поперечному напрямку на величину  $e$ . Через це поворотну пластину використовують в якості лінійного компенсатора зсуву зображення у деяких вимірювальних приладах.

**Завдання 9.3.** Яку осьову товщину  $d$  повинна мати плоскопаралельна пластинка, виготовлена з оптичного скла марки К8 з показником заломлення  $n=1.5183$ , яка при повороті на кут  $10^\circ$  зсуває пучок променів у поперечному напрямку на 1 мм?

**Розв'язання.**

З формули (9.18):

$$d = \frac{en}{(n-1)\varepsilon_1} = \frac{1 \cdot 1.5183}{(1.5183-1) \cdot 0.17453} = 16.784 \text{ мм.}$$

**Примітка:** кут  $\varepsilon_1$  переведено в радіани за формулою:

$$\varepsilon_1 [\text{rad}] = \frac{\pi}{180^\circ} 10^\circ = \frac{3.1416}{18} = 0.17453.$$

### 9.2.2. Проходження гомоцентричного пучка променів через плоскопаралельну пластину

На плоскопаралельну пластину падає гомоцентричний пучок променів, як показано на рис. 9.9. Прослідкуємо хід будь-якого одного променя гомоцентричного пучка, що виходить з осьової точки  $A$ .

Після проходження через пластину цей промінь уявно перетинає оптичну вісь в точці  $A'$ . Оскільки точка  $A'$  знаходиться на перетині двох променів (один той, що розглядається, другий – що йде вздовж оптичної осі), то точку  $A'$  можна розглядати як зображення точки  $A$ .

Тоді відрізок  $S_{AA'}$  є відстанню між предметом та його зображенням, що утворене плоскопаралельною пластиною.

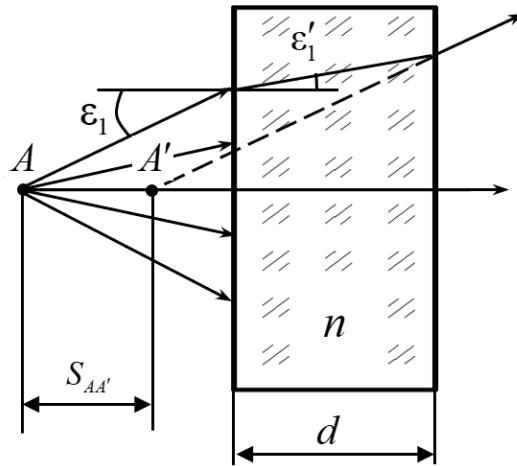


Рис. 9.9. До аналізу проходження гомоцентричного пучка через плоскопаралельну пластину

Відрізок  $S_{AA'}$  дорівнює відрізку  $CD$  на рис. 9.8, тому

$$AA'(\varepsilon_1) = d \left( 1 - \frac{\operatorname{tg} \varepsilon_1'}{\operatorname{tg} \varepsilon_1} \right). \quad (9.19)$$

Вираз (9.19) дозволяє відповісти на питання чи зберігається гомоцентричність пучка променів після їх проходження через плоскопаралельну пластину, тобто чи є відрізок  $AA'$  сталим при різних значеннях кута  $\varepsilon_1$ ?

Вираз (9.19) можна перетворити до вигляду

$$AA'(\varepsilon_1) = d \left( 1 - \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \varepsilon_1}{n^2 \sin^2 \varepsilon_1}} \right). \quad (9.20)$$

Графік функції  $\frac{AA'(\varepsilon_1)}{d}$ , побудований за допомогою виразу (9.20) для оптичного скла К8 з показником заломлення  $n_e = 1.51829$ , представлений на рис. 9.10. Графік свідчить про те, що відрізок  $AA'$  не є сталим і він нелінійно змінюється залежно від кута нахилу променя до оптичної осі. Ясно, що гомоцентричність пучка променів в такому випадку не зберігається, оскільки після проходження променів через плоскопаралельну пластину вони не перетинаються уявно в одній точці  $A'$ .

В області параксіальних променів, тобто при малих значеннях кута  $\varepsilon_1$ , дріб  $\frac{\operatorname{tg} \varepsilon_1'}{\operatorname{tg} \varepsilon_1}$  можна замінити на  $\frac{\sin \varepsilon_1'}{\sin \varepsilon_1} = \frac{1}{n}$  і тоді точну формула

(9.20) можна замінити наближеною:

$$AA' = \frac{n-1}{n}d, \quad (9.21)$$

в якій залежність відрізка  $AA'$  від кута  $\varepsilon_1$  практично відсутня. Із (9.21) витікає, що при показнику заломлення, наприклад,  $n=1.5$  параксіальне зображення (точка  $A'$ ) зсувається відносно предметної точки  $A$  всього на  $0.333d$ .

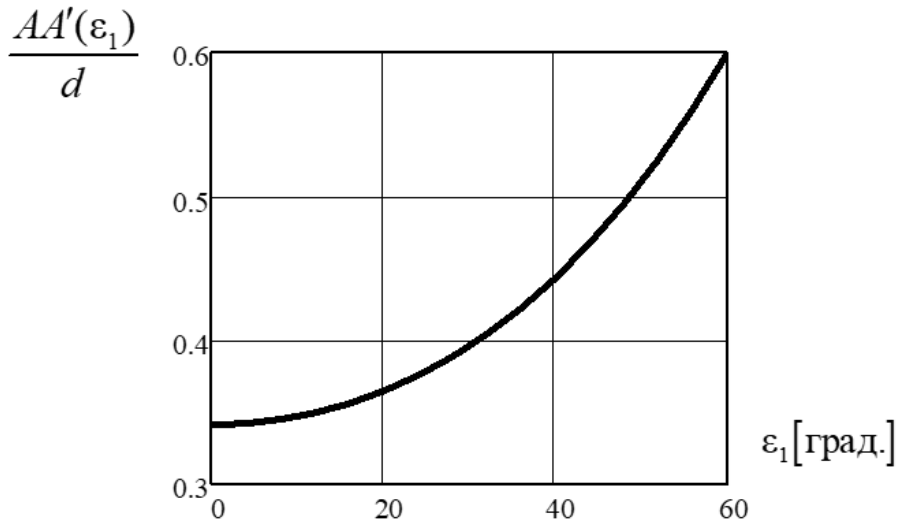


Рис. 9.10. Графік функції зсуву точки  $A'$  відносно точки  $A$  залежно від кута  $\varepsilon_1$

В області параксіальних променів лінійне збільшення зображення розраховується за формулою (6.24):

$$\beta = \frac{n_1 \operatorname{tg} \sigma_1}{n_{p+1} \operatorname{tg} \sigma_{p+1}}.$$

Оскільки для пластини у повітрі  $n_1 = n_3 = 1$ , а кути нахилу променю на вході і на виході з пластини однакові, тобто  $\sigma_1 = \sigma_3$ , то лінійне збільшення параксіального зображення, сформованого пластинною,  $\beta = 1$ . Це означає, що зображення залишається прямим і однаковим за величиною з предметом.

**Завдання 9.4.** На плоскопаралельну пластину падає гомоцентричний пучок.

Точка перетину променів пучка знаходиться за пластинною на відстані 10 мм. Кут сходження променів  $2\varepsilon_1 = 60^\circ$ . Пластина має товщину 20 мм. Показник заломлення оптичного матеріалу пластини  $n = 1.51829$ . В площині сходження параксіальних заломлених параксіальних променів встановлено екран. Через втрату гомоцентричності

пучок променів, що пройшов через пластину, утворюють пляму, яку називають абераційним зображенням точки. Потрібно знайти діаметр цієї абераційної плями.

**Розв'язання.**

На рис. 9.11 показані крайні промені гомоцентричного пучка променів, який уявно сходиться в одну точку  $A$  на відстані 10 мм від вихідної грані пластини. Параксіальні промені цього пучка після проходження через пластину перетинаються на відстані  $AA'(\varepsilon_1 \cong 0)$  від точки  $A$ , яка згідно (9.21)

$$AA'(\varepsilon_1 \cong 0) = \frac{n-1}{n}d = \frac{1.51829-1}{1.51829}20 = 6.8273 \text{ мм.}$$

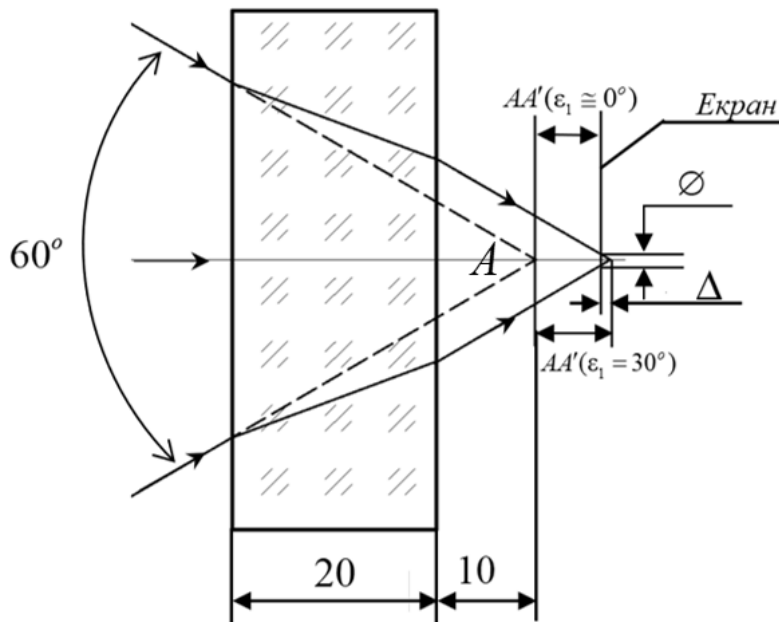


Рис. 9.11. До розв'язку завдання 9.4

Крайні промені пучка, що падають на вхідну грань пластини під кутом  $30^\circ$ .

Виходять з пластини під тим самим кутом, але на відстані  $AA'(\varepsilon_1 = 30^\circ)$  від точки  $A$ . Цю відстань можна визначити за формулою (9.19), попередньо розрахувавши кут  $\varepsilon'_1$ , який згідно закону заломлення  $\varepsilon'_1 = \arcsin\left(\frac{\sin 30^\circ}{1.51829}\right) = (19.2274)^\circ$ . Тоді

$$AA'(\varepsilon_1 = 30^\circ) = d \left(1 - \frac{\text{tg } \varepsilon'_1}{\text{tg } \varepsilon_1}\right) = 20 \left(1 - \frac{\text{tg}(19.2274)}{\text{tg}(30)}\right) = 7.9181 \text{ мм.}$$

Відстань  $\Delta$  між площиною, де збігаються параксіальні промені, і площиною, де збігаються крайні промені пучка, дорівнює різниці відстаней  $AA'(\varepsilon_1 = 30^\circ)$  і  $AA'(\varepsilon_1 \cong 0)$ :

$$\Delta = AA'(\varepsilon_1 = 30^\circ) - AA'(\varepsilon_1 \cong 0) = 7.9181 - 6.8273 = 1.0908(\text{мм}).$$

Оскільки  $\frac{0.5\varnothing}{\Delta} = \text{tg } 30^\circ$  (див. рис. 9.11), то діаметр плями від всіх променів пучка в площині, де збігаються крайні промені пучка, має розмір:

$$\varnothing = 2\Delta \text{tg } 30^\circ = 2 \cdot 1.0908 \cdot 1.0908 = 1.26(\text{мм}).$$

### 9.3. Призми

**Призми** – оптичні деталі з двограними або тригранними кутами, в яких гранями слугують пласкі оптичні поверхні.

Призми за функціональним призначенням розділяються на типи:

- відбивні призми;
- обертальні призми;
- дисперсійні призми;
- поляризаційні призми.

**Відбивальні призми** призначені для зміни положення оптичної осі системи в просторі з метою більш щільної компоновки оптичної системи, зменшення габаритів приладу, а також для суміщення оптичних осей окремих оптичних каналів приладу в одну вісь, або навпаки для розгалуження однієї оптичної осі на декілька її напрямків.

**Обертальні призми** виконують функцію обертання зображення навколо оптичної осі на заданий кут, частіш за все на  $180^\circ$ . Мета обертання зображення – утворення прямого зображення, яке зручне для безпосереднього візуального спостереження.

**Дисперсійні призми** слугують для розкладу в спектр оптичного випромінення з метою кількісного або якісного аналізу спектральної щільності потоку випромінення. Використовуються в спектральних приладах, монохроматорах, резонаторах лазерів.

**Поляризаційні призми** призначені для утворення поляризованого випромінення із неполяризованого, використовуючи ефект подвійного променезаломлення. Існують також інтерференційно-поляризаційні призми, що просторово розділяють потоки випромінення в різні напрямки за ознакою просторової орієнтації вектору електричної напруженості в них.



В теорії оптичних систем, як прикладному розділі геометричної оптики, переважно розглядаються відбивні та обертальні призми, інші призми – дисперсійні та поляризаційні – розглядаються в дисциплінах, що базуються на теорії хвильової оптики.

### 9.3.1. Відбивальні призми

Відбивальні призми розділяються за наступними ознаками:

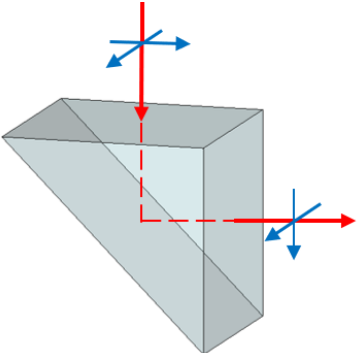
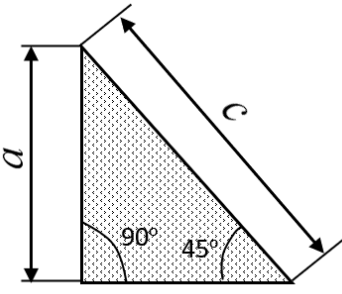
- кількість відбивальних оптичних поверхонь: одна, дві, три;
- геометрична форма у осьовому перетині призми;
- кут між оптичною віссю на вході та на виході з призми;

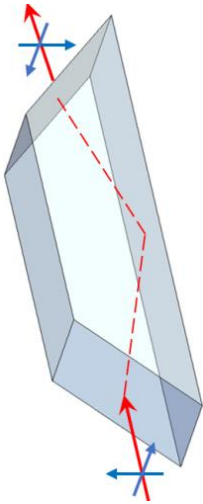
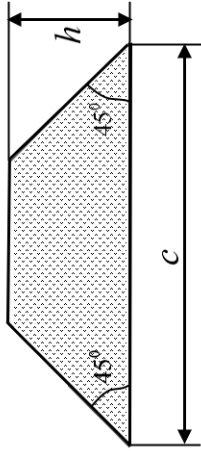
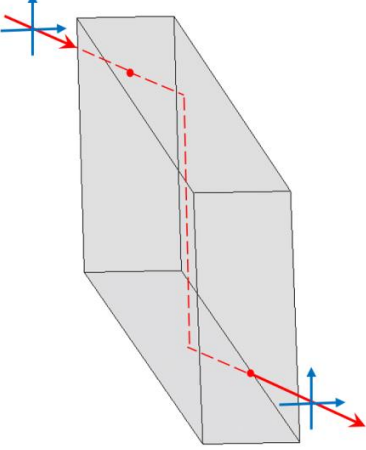
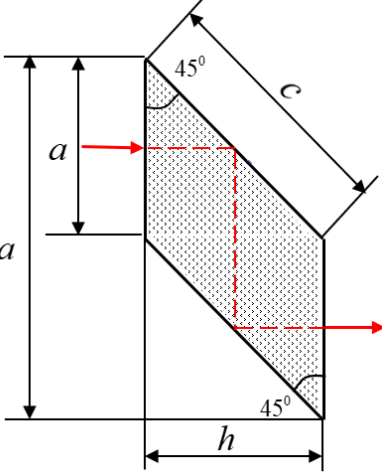
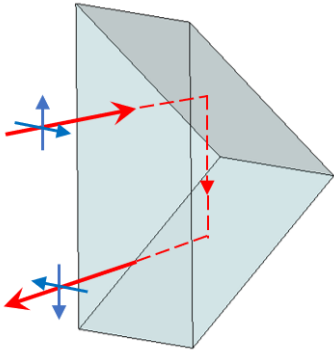
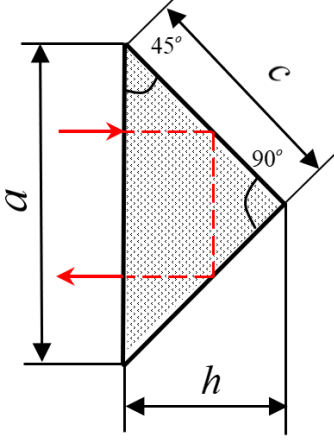
В табл. 9.3 наведені найбільш вживані відбивальні призми у вигляді аксонометричної проекції, перетину призми з їх додатковими даними, що дозволяють їх проектувати і конструювати. Позначення призми пов'язані з вказаними ознаками. Правило позначення призми викладені в п. 9.3.3.

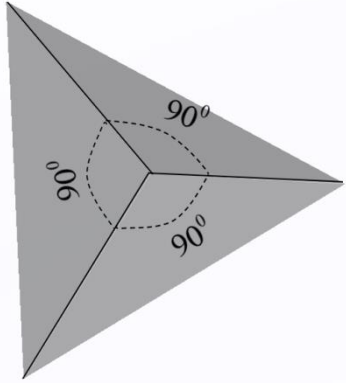
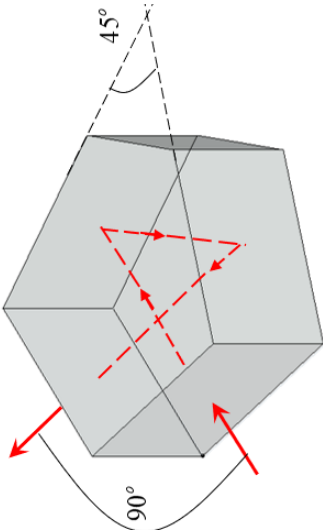
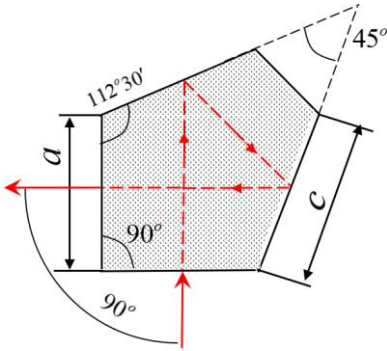
В табл. 9.3 і далі в табл. 9.4 параметр  $l$  означає осьову довжину дзеркальної розгортки призми (див. п. 9.3.5).

Таблиця 9.3

Відбивальні призми

Назва призми Позначення призми	3D зображення призми	Креслення призми, властивості призми	Геометричні параметри призми
1	2	3	4
Прямокутна AP-90°			$a = D$ $c = \sqrt{2}D$ $l = D$

1	2	3	4
<p>Призма Дове AP-0°</p>		 <p>При обертанні призми навколо оптичної осі на кут <math>\omega</math> зображення повертається в тому ж напрямку на кут <math>2\omega</math></p>	$c = D \frac{2\sqrt{2n^2 - 1}}{\sqrt{2n^2 - 1} - 1} =$ <p>4.23D для K8i 4.04D для BK10 <math>h = D</math> <math>l = D \frac{2n}{\sqrt{2n^2 - 1} - 1} =</math> 3.337D для K8i 3.20D для BK10</p>
<p>Ромб призма BC-0°</p>			<p><math>a = D</math> <math>c = \sqrt{2}D</math> <math>h = D</math> <math>l = 2D</math></p>
<p>Прямокутний відбивач BR-180°</p>		 <p>При кутовому повороті призми в площині рисунка між променем на вході і на виході з призми зберігається кут <math>180^\circ</math></p>	<p><math>a = 2D</math> <math>c = \sqrt{2}D</math> <math>h = D</math> <math>l = 2D</math></p>

1	2	3	4
Трипель призма ВР-180		<p>Тіло призми – скляна піраміда з боковими дзеркальними гранями у вигляді прямокутних трикутників. Підстава піраміди є вхідною гранню. Будь якій промінь, що входить у середину призми через прозору вхідну грань, виходить з неї строго у зворотному напрямку, тобто між вказаним вхідним і вихідним променем зберігається кут <math>180^\circ</math>.</p>	
Пента призма БП-90°		 <p>При кутовому повороті призми в площині рисунка між променем, на вході в призму і на виході з неї зберігається кут <math>90^\circ</math>.</p>	$a = D$ $c = 1.082D$ $l = 3.414D$

Прямокутна призма АР-90° з одним відбиванням використовується замість плоского дзеркала, функції якого виконує гіпотенузна грань призми.

Призма Дове теж з одним відбиванням осьового променя слугує для повороту зображення на кут  $180^\circ$ . Характерним для неї є подвійний кут обертання зображення навколо оптичної осі по відношенню до куту обертання самої призми навколо оптичної осі – при повному одному повороті призми навколо оптичної осі зображення робить два повних обертавання навколо осі.

Призма ромб має два відбиття осьового променя, як показано на рисунку в табл. 9.3. Призма зберігає паралельність оптичної осі на вході і на виході з неї. Вихідне зображення зберігається прямим. Перископічний ефект від паралельного зсуву оптичної осі дозволяє в біноклях та біноклях мати різну міжосьову відстань на вході

і на виході оптичної системи. Так міжосьова відстань між двома об'єктивами бінокля, іноді суттєво перевищує міжцентрову відстань очей людини. За допомогою кутового повороту призм навколо оптичної осі кожного з двох об'єктивів біноклю вихідну міжосьову відстань між двома окулярами біноклю можна змінити до значення міжцентрової відстані очей конкретного користувача біноклю, рис. 9.12.

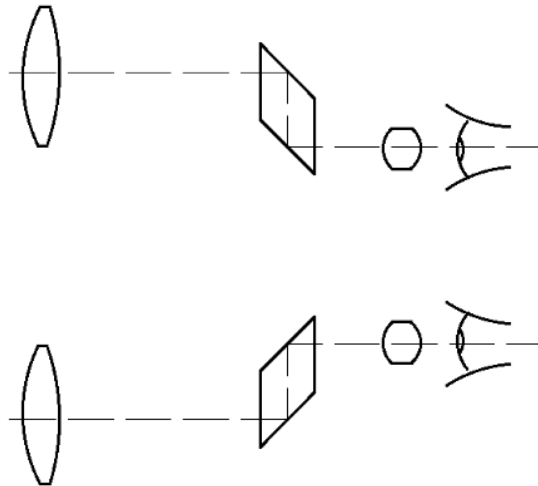


Рис. 9.12

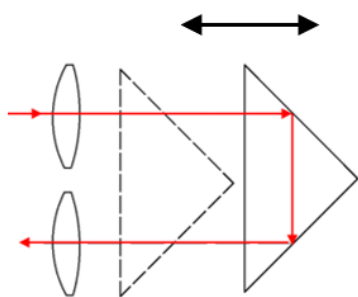


Рис. 9.13

Прямокутна призма БР-180 дозволяє змінювати відстань між двома компонентами оптичної системи, залишаючи їх нерухомими, рис. 9.13. Для цього призму зсувають, як показано на рис. 9.13, вздовж оптичної осі. При зсуві призми на відстань  $d$ , осьова відстань між двома компонентами змінюється на величину  $2d$ . Така комбінація оптичних елементів нагадує музичний інструмент тромбон, через що оптична система на рис. 9.14 у закордонній літературі теж називають тромбон-системою.

Піраміда у вигляді тетраедру з прямокутними гранями – трипель-призма, відбиває у зворотному напрямку будь-який промінь, що заходить в неї через прозору грань-підставу. Вона використовується як і попередня БР-180°. Але трипель-призма зворотно відбиває також і ті промені, які не знаходяться в площині її рисунку. Історичним прикладом використання трипель-призм є експеримент, який був вперше в історії людства здійснений в Радянському Союзі. На Луну був доставлений апарат (лунохід) із відкідною кришкою, на якій було встановлено систему трипель-призм. Із кримської обсер-

ваторії в сторону Луни було спрямоване лазерне випромінення. Відбившись від трипель-призм, лазерне випромінення повернулося на Землю і зареєстроване телескопом обсерваторії, з якого і було відправлено це випромінення. Час розповсюдження світла лазера до Луни і назад до Землі був точно виміряний і використаний для точного встановлення відстані між телескопом і луноходом, тобто між Землею і Луною.

Ще однією важливою відбивальною є пента-призма, тобто призма з п'ятьма гранями, табл. 9.3. Ця призма використовується в тих випадках, коли оптична вісь приладу, повинна бути повернутою на кут  $90^\circ$  незалежно від кутового положення самої відбивальної призми. Аналогічне використання плоского дзеркала робить оптичну систему істотно залежною від кутового положення дзеркала, яке може змінюватися під час експлуатації приладу, або під час його транспортування через дію динамічних чи температурних навантажень. Такий поворот дзеркала у просторі на кут  $\alpha$  призводить до кутової зміни відбитого осевого променя на кут  $2\alpha$ .

Незаперечною перевагою відбивальних призм перед системою відбивальних плоских дзеркал є захищеність відбивальних граней від дії зовнішнього середовища, оскільки ці грані працюють внутрішньо, а тому захищені оптичним матеріалом призм.

### 9.3.2. Обертальні призми і призмкові системи

Обертальні призми найбільше використовуються у візуальних оптичних приладах. В цих приладах вихідне зображення, призначене для спостереження людиною, повинно бути прямим.

Перевернуті зображення в оптичних системах виникають через властивості дії її лінзових чи дзеркальних компонентів. Обертальні призми і призмкові обертальні системи роблять зображення прямими.

**Призмвою системою**, називають ту, що складена з декількох окремих призм, які утворюють складальну одиницю.

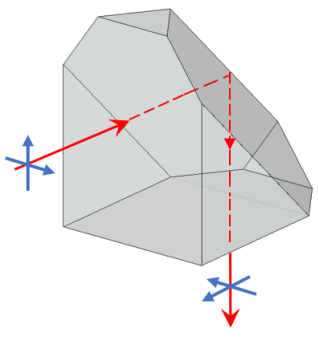
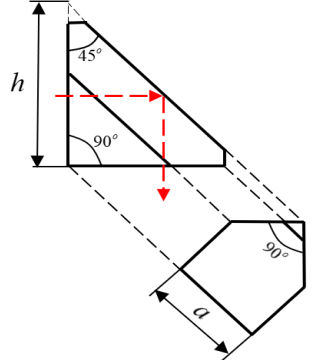
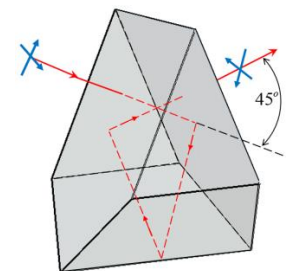
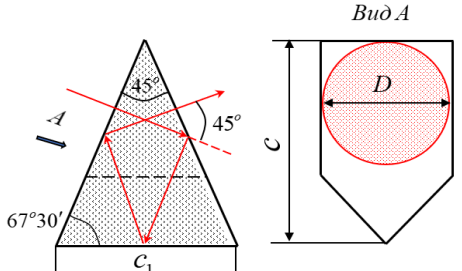
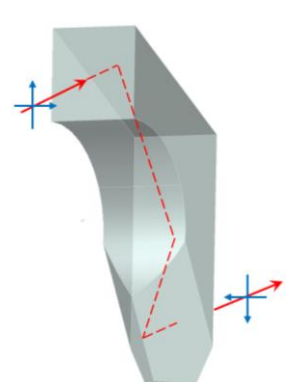
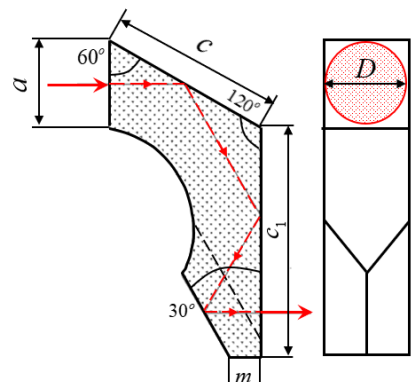
Обертальні призми і призмкові системи розділяються на типи за ознаками взаємного розташування у просторі оптичної осі на вході і на виході з призми, або призмкової системи:

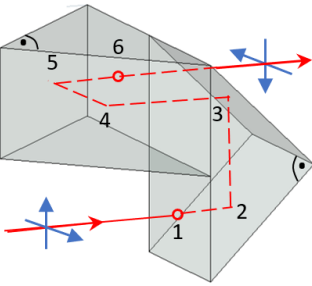
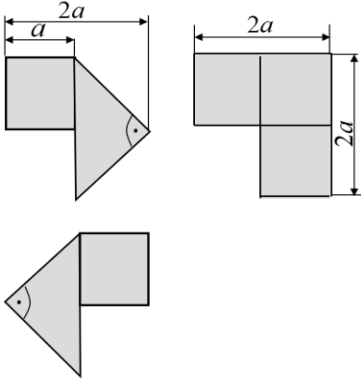
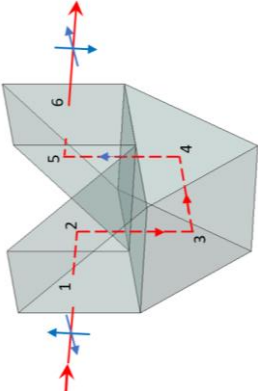
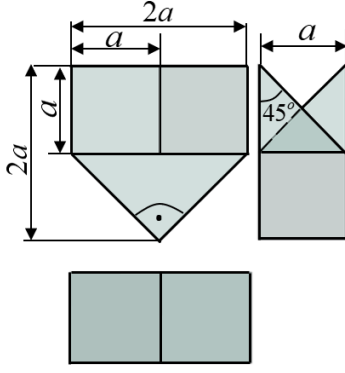
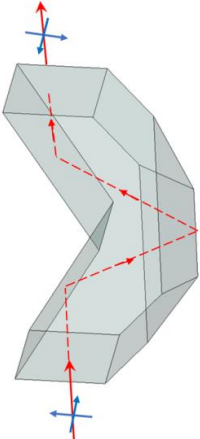
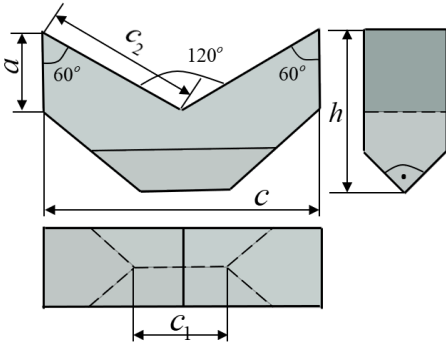
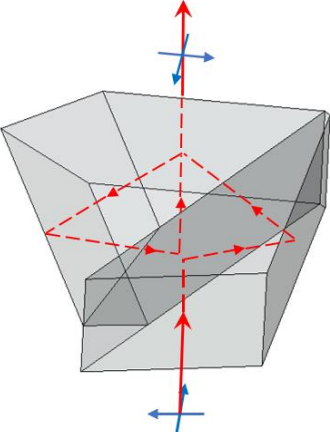
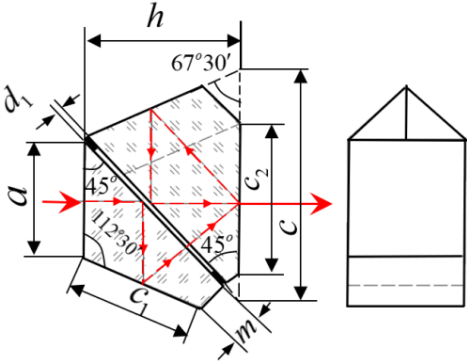
- з кутовим поворотом оптичної осі на виході з призми,
- з паралельним зсувом оптичної осі на виході з призми,
- із суміщенням в одну лінію оптичної осі на вході і на виході з призми.

В табл. 9.4 представлені обертальні призми і призові системи, згруповані за цими ознаками. Більшість таких призм замість пласкої грані мають так званий дах (кришу по російськи) – додаткову призму типу БР-180°. Як за допомогою даху досягається поворот зображення на 180° буде показано нижче в п. 9.5.

Таблиця 9.4

Обертальні призми

Назва призми Позначення призми	3D зображення призми	Креслення призми, властивості призми	Геометричні параметри призми
1	2	3	4
Прямокутна з дахом АкР-90°			$a = D$ $h = (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})D$ $l = h$
Призма Шмідга ВкР-45°			$c = 1.781D$ $c_1 = 1.363D$ $l = 1.04D$
Призма Лемана ВкЛ-0°			$a = D$ $c = 2D$ $c_1 = 2.618D$ $m = 0.357D$ $l = 4.535D$

1	2	3	4
<p>Порро 1-го роду БР-180°+БР-180°</p>			<p><math>a = D</math> <math>l = 4D</math></p>
<p>Порро 2-го роду АР-90°+БР-180°+АР-90°</p>			<p><math>a = D</math> <math>l = 4D</math></p>
<p>Призма Аббе Ак-0°</p>			<p><math>a = D</math> <math>c = 3.464D</math> <math>c_1 = 1.155D</math> <math>c_2 = 2D</math> <math>h = 2D</math> <math>l = 5.2D</math></p>
<p>Призма Пехана Пк-0°</p>			<p><math>a = D</math> <math>c = 1.78D</math> <math>c_1 = 1.08D</math> <math>c_2 = 1.414D</math> <math>h = 1.231D</math> <math>m = 0.39D</math> <math>d_1 = 0.1\text{мм}</math> <math>l = 4.75D</math></p>

Призма АкР-90° не тільки перевертає зображення, але й змінює положення оптичної осі на 90°.

Призма Шмідта ВкР-45° змінює положення оптичної осі на 45°.

Вказані призми забезпечують у візуальних приладах зручне для користувача вихідне просторове положення оптичної осі і зображення, сформованого оптичною системою приладу.

Паралельний зсув оптичної осі на виході з призми забезпечує призма Лемана ВкЛ-0° і призмові системи Порро 1-го роду та 2-го роду.

Призма Порро 1-го роду складена з двох відбивних призм БР-180°, які розташовані під кутом 90° одна до одної і контактують своїми гіпотенузними гранями. Ця призма широко використовується в польових біноклях завдяки своїй компактності і високій технологічності, а на сам перед через те, що дозволяє збільшувати базову відстань між оптичними осями об'єктивів біноклю. До того ж з'являється можливість плавно регулювати міжосьову відстань окулярів біноклю, підлаштовуючи її до очей користувача.

Призма Порро 2-го роду також є призмовою системою, що складена вже з трьох призм – дві прямокутні призми АР-90° і одна призма БР-180°. На гіпотенузній грані останньої розташовані дві призми АР-90°.

Хід осьового променя в обох призмах показано пронумерованими точками, які знаходяться на відбивних гранях призм.

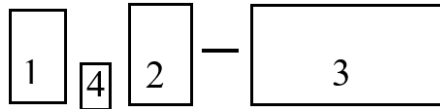
Дуже корисною властивістю призм Порро є те, що вони суттєво скорочують осьовий габарит оптичної системи завдяки поперечному ходу в них осьового променя.

Наступні призми – призма Аббе і призма Пехана складені з двох окремих призм. В призмі Аббе ці призми склеєні, в призмі Пехана між ними залишають повітряний проміжок. Вказані призми забезпечують суміщення в одну лінію осьового променя на вході і на виході з призми. Ця властивість є корисною для складання оптичних візуальних систем монокулярного типу, від яких потребується максимальна компактність і аксіальність конструкції. В призмі Пехана повітряний проміжок між призмами утворюється з метою використання явища повного внутрішнього відбиття променів на гранях, між якими є повітряний проміжок. При падінні осьового променя на таку грань під кутом 45° він відбивається від неї як від дзеркальної поверхні, при падінні променя на ту саму грань нормально він проходить через неї як через прозору оптичну поверхню. Призма Пехана, як і призми Порро, також істотно скорочує осьовий габарит оптичної системи.



### 9.3.3. Правило позначення призм

У вітчизняній літературі, технічній і конструкторській документації з часів існування радянського союзу використовується формат позначення призми, який має вигляд:



В комірці 1 записується літера:

А при наявності однієї відбивальної грані,

Б при наявності двох відбивальних граней,

В при наявності трьох відбивальних граней.

Якщо на грані знаходиться «дах», то в комірці 4 записується буква «к».

В комірці 2 записується літера, яка вказує на геометричну форму фігури, яка утворює призму:

Р – рівнобедрений трикутник,

С – ромб,

П – п'ятикутник,

У – напівп'ятикутник,

Л – призма Лемана.

В комірці 3 записується кут в градусах між осьовим променем на вході і на виході з призми.

В табл. 9.3, 9.4 наведені позначення призм з використанням викладеного правила.

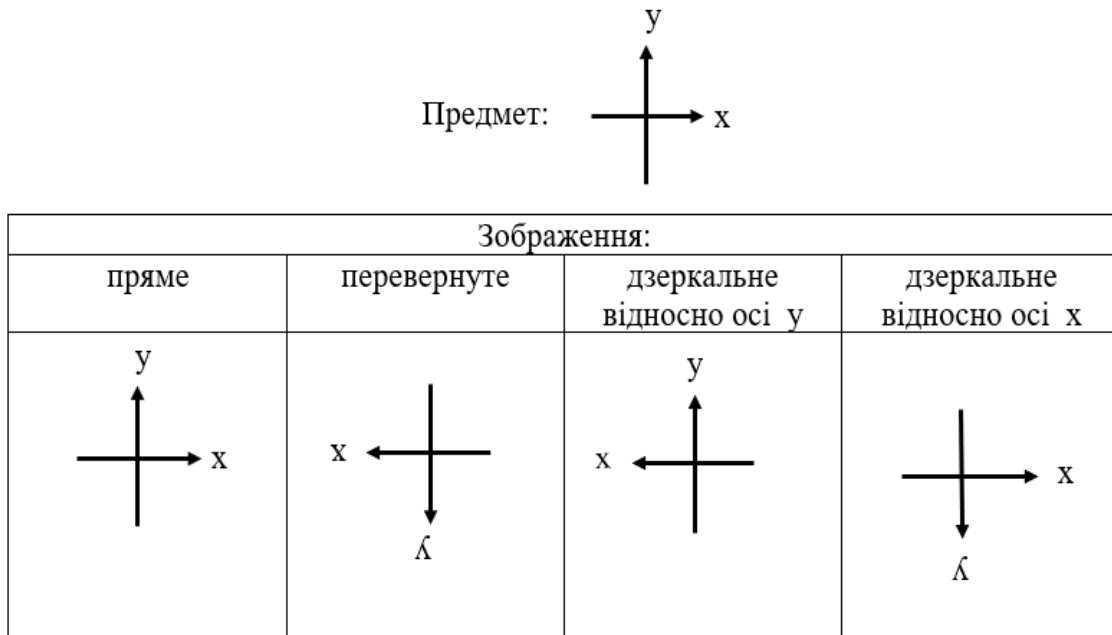
### 9.3.4. Метод аналізу зображення, сформованого призмою чи системою призм

Відбиття пучків променів на гранях призм впливає на вигляд зображення, сформованого призмою чи системою призм.

Нехай предмет має вигляд двох схрещених стрілок. Можливим може бути одне із зображень цих стрілок, показаних на рис. 9.14.

При проектуванні оптичної системи, в якій передбачається використання призм, принципово важливим є проведення попереднього аналізу щодо вигляду зображення сформованого системою. У візуальних приладах зображення повинно бути прямим. Якщо зображення формується в площині матричного фотоприймача зображень, наприклад на ПЗЗ-матриці, то зображення у вказаній площині допускається прямим або перевернутим. Відносно такого зображення

фотоприймач зображень встановлюється прямо, або повернуто навколо оптичної осі на  $180^\circ$ .



*Рис. 9.14.* Зображення, що можуть бути сформованими призмами або системами призм

У випадку формування оптичною системою дзеркального зображення на фотоприймачі для усунення дзеркальності або встановлюють інший спеціальний порядок зчитування вихідних електричних сигналів від пікселів фотоприймача, або коригують оптичну систему, використовуючи інші типи призм чи вносячи додаткові призми.

Для аналізу вихідного зображення, сформованого призмою чи системою призм, використовують абсолютно штучний, але дуже ефективний метод, який полягає у наступному.

1. Перед призмою в площині, перпендикулярній до оптичної осі, встановлюють перехрестя, яке показане на рис. 9.14. Стрілку «у» встановлюють в площині рисунку призми перпендикулярно до оптичної осі, стрілку «х» – перпендикулярно до площини рисунку і до оптичної осі.

2. Пересувають перехрестя вздовж оптичної осі до першого торкання перехрестям відбиваючої поверхні призми – вертикальною (стрілкою «у») чи горизонтальною стрілкою (стрілкою «х»).

3. Перехрестя повертається навколо точки торкання на кут «злому» оптичної осі і пересувається далі вздовж заломленої оптичної осі до торкання іншої відбивної грані.

4. Якщо стрілка «у» або «х» лягає на грань призми, то далі після відбиття на грані і подальшого пересування вздовж оптичної осі вона залишає свою попередню просторову орієнтацію.

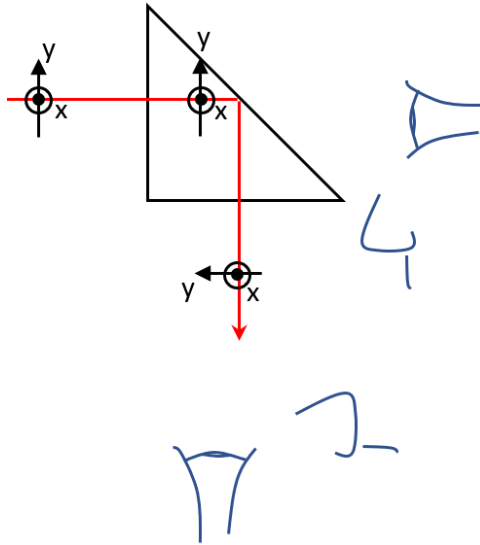


Рис. 9.15. До завдання 9.5

5. Після проходження всієї призми або системи призм перехрестя отримує вигляд, що належить одному з показаних на рис. 9.14. Порівняння вигляду вихідного перехрестя з виглядом вхідного дозволяє встановити тип вихідного зображення і зробити висновок щодо відповідності зображення потрібному вигляду.

Практичне використання методу продемонстровано розв'язком наступних завдань.

**Завдання 9.5.** Визначити вигляд зображення предмету, який спостерігається через призму  $AP-90^\circ$ .

**Розв'язання.**

На рис. 9.15 показано призму і встановлений перед нею на оптичній осі предмет у вигляді перехрестя. Стрілка  $X$  перпендикулярна до площини рисунку. Її вістріє, спрямоване до спостерігача, умовно показано колом з центральною точкою.

Предмет, що бачить людина без призми: стрілка «у» направлена вгору, стрілка «х» направлена вздовж оптичної осі. Перший дотик до відбивної грані відбувається верхнім кінцем стрілки «у» і тому вона, згідно вищевикладеного методу, повертається навколо точки дотику проти часової стрілки, займаючи надалі горизонтальне положення. Стрілка «х» повністю лягає на відбивальну грань, а тому не повертається і зберігає своє попереднє положення. Спостерігач, що тепер розглядає зображення після проходження перехрестя через

призму, бачить стрілку «у» направлену вгору, а стрілку «х» – спрямовану вправо. Таким чином для спостерігача зображення перехрестя є дзеркальним повернутим навколо осі «у».

Висновок: Призма АР-90° утворює дзеркальне зображення.

**Завдання 9.6.** Визначити вигляд зображення предмету, що спостерігається через призму БР-180°.

**Розв'язання.**

Призма БР-180° показана на рис. 9.16.

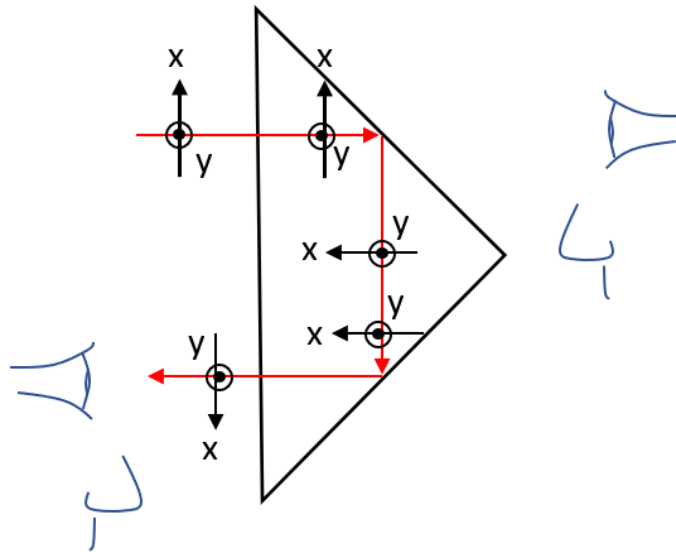


Рис. 9.16. До завдання 9.6

Перехрестя встановлене так, що стрілка «у» перпендикулярна до площини рисунку, а стрілка «х» лежить у площині рисунку.

Без призми спостерігач бачить стрілку «х» направлену вгору, а стрілка «у» – вліво. Пересування перехрестя вздовж оптичної осі призводить до торкання вістря стрілки «х» першої відбивальної грані, тому вона повертається навколо точки торкання, як показано на рисунку.

Подальше пересування перехрестя вздовж оптичної осі призводить до торкання кінця стрілки «х» другої відбивної грані, що призводить до другого її повороту навколо точки другого торкання. В результаті вона перевертається вістрієм до низу. Стрілка «у» лягає повністю на першу а потім і на другу грань, тому її напрямок не змінюється.

Спостерігач бачить перехрестя із стрілкою «х», яка направлена до низу, та стрілкою «у», що спрямована вправо. Ясно, що по відношенню до предмету його зображення після призми спостерігачем сприймається як перевернуте.

**Завдання 9.7.** Визначити вигляд зображення предмету, що спостерігається через призму АкР-90°.

**Розв'язання.**

Призма АкР-90° показана на рис. 9.17. Без призми спостерігач бачить перехрестя із стрілкою «у», направленою вгору, і стрілкою «х», направленою вліво.

При просуванні перехрестя через призму вістріє стрілки «у» торкається ребра даху і повертається навколо точки торкання, займаючи горизонтальне положення. Дах – це призма БР-180°, тому стрілка «х» проходить через дах, як показано на рис. 9.16. Через це вона змінює напрям на 180°, тобто на протилежний, тому на рис. 9.17 відображається її кінець у вигляді хрестовини.

Через призму спостерігач, знаходячись у положенні 1, бачить перехрестя із стрілкою «у», направленою вгору, а стрілку «х» – направлену вліво, тобто по відношенню до предмету він бачить його пряме зображення. Якщо спостерігач займає положення 2, то для нього зображення перехрестя є перевернутим.

**Примітка:** У більшості випадків призми та системи призм знаходяться серед лінзових чи дзеркальних компонентів. Предметом для конкретної призми в такій системі є зображення, сформоване попередньою частиною системи. При цьому немає значення де знаходиться це зображення – перед призмою чи уявно за призмою. Зображення, сформоване і перетворене такою призмою з використанням вищевикладеного методу, є предметом для наступних компонентів системи.

### 9.3.5. Дзеркальна розгортка призм

При аналізі чи синтезі оптичних систем, в яких присутні відбивні чи обертальні призми, незручно їх представляти в натуральному вигляді з урахуванням просторового розташування їх оптичних поверхонь – граней. Таке їх представлення суттєво ускладнює

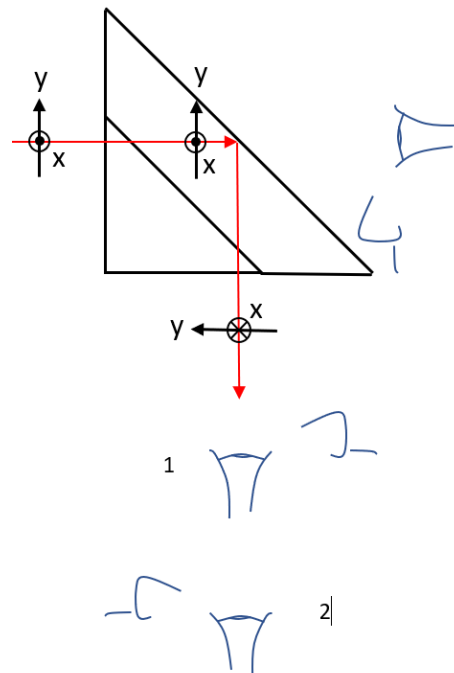


Рис. 9.17. До завдання 9.7

розрахунки ходу променів через потребу багаторазової зміни системи координат, прив'язаних до оптичних поверхонь призм. Заради усунення подібного роду незручності відбивальні та обертальні призми представляють в системах у вигляді їх дзеркальних розгорток. Майже всі такі призми розгортаються у плоско-паралельні пластини з відповідною осью товщиною  $l$ . Тоді такі оптичні системи виглядають як центровані, в яких призми замінені пластинами.

Дзеркальною розгорткою призми називають її рисунок чи креслення, в яких призма почергово і послідовно прорисовується симетрично до кожної відбивної грані. Таких прорисовок стільки, скільки відбивних граней. Якщо призма має «дах», то симетрична прорисовка здійснюється відносно ребра «даху». Нижче на рис. 9.18 наведені приклади дзеркальних розгорток призм.

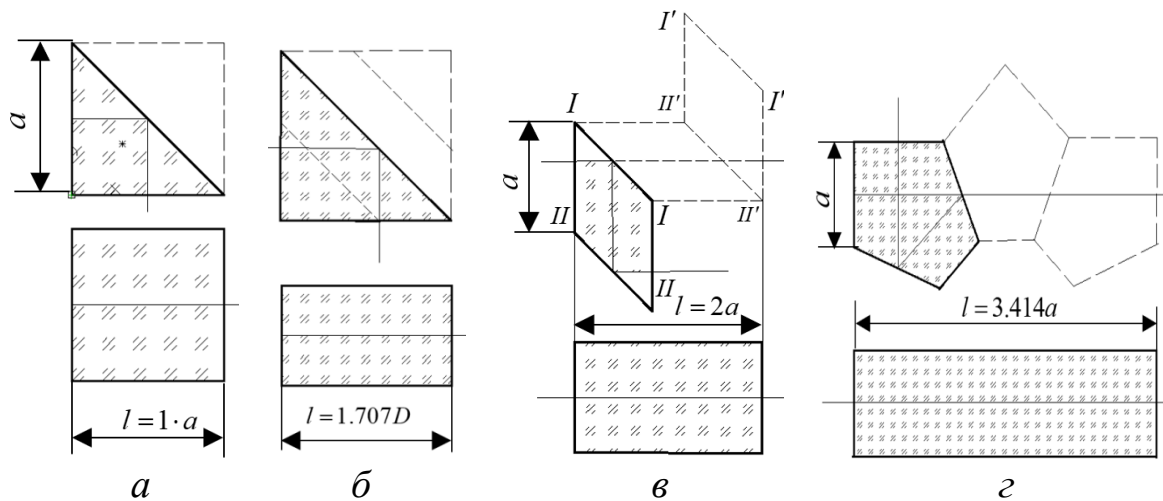


Рис. 9.18. Дзеркальні розгортки призм: а) призма АР-90°; б) призма АкР-90°; в) призма ВС-0°; г) призма БП-90°,  $l$  – осьова довжина розгортки призми

В призмi АкР-90° віссю симетрії слугує ребро «даху»,  $D$  – висота вхідної грані. Призма ВС-0° має дві відбивальні грані, тому фігура призми двічі прорисовується, перший раз навколо грані I-I, другий раз навколо зображення грані II-II.

Призма БП-90° також розгортається відносно першої, а потім відносно зображення другої відбивної грані.

Всі розгортки, як видно, мають вигляд плоско-паралельних пластин довжиною  $l$ , яка пов'язана із світловим діаметром вхідної грані. При аналізі чи проектуванні оптичних систем з призмами їх вставляють в матрицю конструктивних параметрів системи як плоско-паралельні пластини з відповідною осью товщиною  $l$ .

В табл. 9.3 і 9.4 осьова довжина розгортки призми представлена за допомогою числового значення коефіцієнта  $k = \frac{l}{D}$ , де  $D$  – діаметр круглої світлової зони, яка є вписаною у вхідну грань призми. У багатьох призм  $D = a$ ,  $a$  – сторона квадратної вхідної грані призми.

### 9.3.6. Редукування пластин та дзеркальних розгорток призм

При габаритних розрахунках оптичних систем, де є пластини чи призми, виникає потреба визначення їх геометричних розмірів, при яких осьовий пучок не обмежується, а пучок від краю поля зору не він'єтується, або він'єтується допустимо.

Визначення габаритів пластини і габаритів призми методом розрахунку через них ходу променів осьового і крайнього нахиленого пучка не є раціональним. Такий метод потребує попереднього «найманець» встановлення габаритів пластини чи розгортки призми з наступним прорахунком ходу променів. У випадку недопустимого він'єтування пучків габарити пластини змінюють з повторними розрахунками, а це призводить до повторної ітераційної процедури підбору габаритів пластини чи призми. Такий метод був доволі незручним при ручних розрахунках ходу променів.

Задача визначення габаритів пластин чи розгорток призми набагато спрощується при використанні методу їх редукування. Він полягає в тому що реальна пластина із оптичного матеріалу замінюється штучною «повітряною» пластиною із спеціальною осьовою товщиною. Таку пластину називають **редукованою** пластиною. Через таку пластину промені проходять без заломлень і на вихідній грані редукованої пластини вони займають таку саму світлову зону, як і у реальної нередукованої пластини. Це дає можливість визначати потрібні розміри вихідної грані, а значить і самої пластини чи розгортки призми, без зайвих розрахунків.

Формулу для розрахунку осьової товщини редукованої пластини можна отримати за допомогою рис. 9.19. На ньому показана пластина товщиною  $l$ , на яку падають промені, що сходяться в точці  $A$ . Після заломлення і проходження пластини промені збігаються в точці  $A'$ .

На виході з пластини відрізок  $CD$  вказує діаметр пучка променів, які знаходяться між вказаними на рисунку крайніми променями.

Пунктирні лінії, що проведені паралельно оптичній осі через точки  $C$  і  $D$  перетинаються з продовженням променів в точках  $B$  і  $E$ . З утвореного прямокутника  $BCDE$  видно, що він – паралелограм, в якому  $BE = CD$ . Перетин, де знаходиться відрізок  $BE$ , знаходиться на відстані  $l_R$  від вихідної грані. Цей перетин вказує положення вихідної грані уявної повітряної редукованої пластини. Осьова товщина такої пластини, як видно з рис. 9.19,  $l_R = l - BC$ . Відрізок  $BC$  є стороною паралелограма  $BCA'A$ , у якого  $BC = AA'$ .

В п. 9.2.2 показано, що в параксіальній області променів відрізок  $AA'$  згідно формули (9.21)  $AA' = \frac{n-1}{n}d = \frac{n-1}{n}l$ . Тоді

$$l_R = l - BC = l - AA' = l - \frac{n-1}{n}l = \frac{l}{n}.$$

Таким чином осьова товщина редукованої пластини розраховується за формулою:

$$\boxed{l_R = \frac{l}{n}}, \quad (9.22)$$

де  $n$  – показник заломлення оптичного матеріалу пластини чи призми.

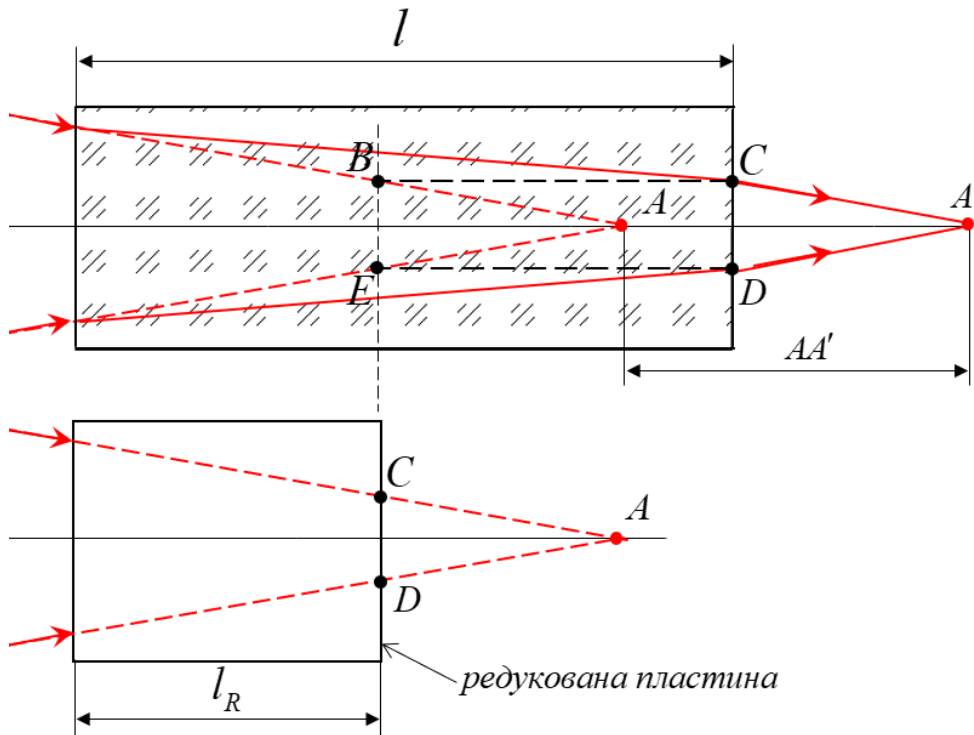


Рис. 9.19. До виводу формули розрахунку осьової товщини редукованої пластини



**Завдання 9.8.** Пластина товщиною 20 мм, виготовлена з оптичного скла К8 ( $n_e = 1.51829$ ) знаходиться в оптичній системі за компонентом, з якого на пластину надходить крайній нахилений до оптичної осі пучок променів. Положення пучка відносно пластини показано на рис. 9.20. Потрібно знайти світловий діаметр пластини, при якому нахилений пучок без він'єтування проходить через пластину.

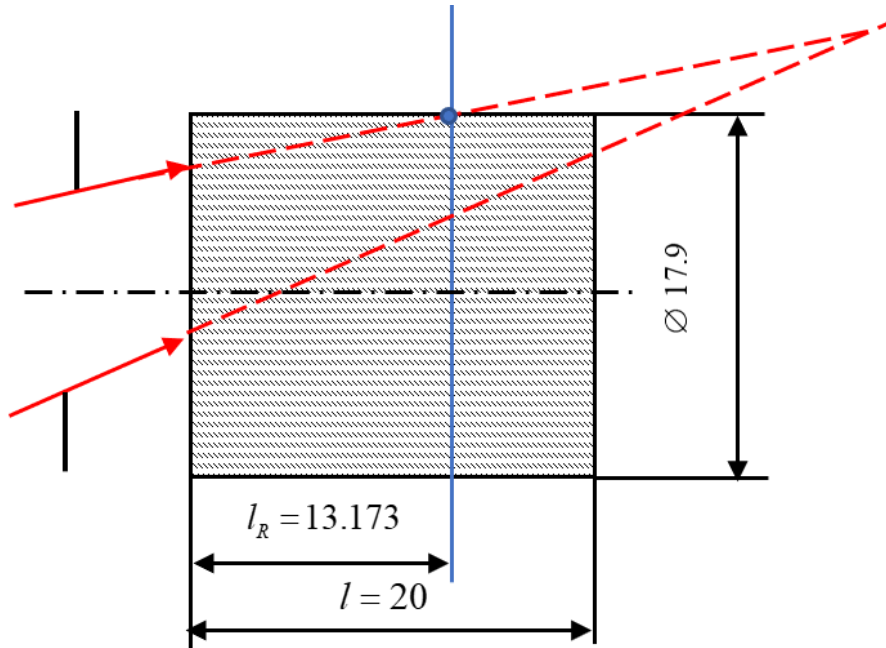


Рис. 9.20. До розв'язку завдання 9.8

**Розв'язання.**

Розраховується осьова товщина редукованої пластини за формулою (9.22):

$$l_R = \frac{l}{n} = \frac{20}{1.51829} = 13.173 \text{ (мм)}.$$

Для пошуку потрібного світлового діаметра пластини можна використати графічний метод:

1. В масштабі на відстані 13.713 мм від вхідної грані призми прорисовується вихідна грань редукованої пластини.
2. На перетині верхнього променя пучка і вихідної грані редукованої пластини (показано точкою) знаходиться край світлового діаметра заданої пластини. Діаметр складає 17.9 мм.

Через пластину з вказаним діаметром пучок променів після заломлень на вхідній та вихідній гранях пройде без він'єтування.

При габаритному розрахунку призми методом редукування її дзеркальної розгортки треба враховувати те, що її поперечний роз-

мір пов'язаний з поздовжнім через коефіцієнт  $k$ , тобто якщо змінюється поперечний розмір грані, то водночас змінюється пропорційно числу  $k$  осьовий розмір розгортки.

### 9.3.7. Габаритний розрахунок призми

Вихідними даними для габаритного розрахунку призми є параметри пучка променів, що надходять в призму, а також додаткові вимоги, що витікають із специфічних умов функціонування оптичної системи приладу.

Попередня частина оптичної системи формує дійсне зображення. Відомі параметри осьового і крайнього периферійного пучка променів. Між останнім компонентом попередньої частини системи і площиною зображення повинна знаходитися відбивальна чи обертальна призма. Тип призми відомий, тобто відомо значення її коефіцієнту  $k$ . Можуть бути додаткові умови, наприклад, потрібно забезпечити задане значення відстані між вихідною гранню призми і площиною зображення, а також недопустимість чи допустимість він'єтування пучка променів, що надходять від краю поля зору.

Хід променів в зоні знаходження призми утворює наступні випадки (рис. 9.21).

У випадку, коли простір, що займають осьовий і периферійний пучки променів, при наближенні до площини зображення розширюється ( $h_1 < h_2$ ), габарити призми визначаються розмірами вихідної грані редукованої призми, яка не повинна він'єтувати, або він'єтувати допустимо крайній периферійний пучок променів. На рис. 9.21, а пунктирною лінією показана вихідна грань редукованої розгортки призми і половина діаметра вихідної грані реальної призми ( $0.5\varnothing_2$ ).

Осьова товщина реальної розгортки призми розраховується за формулою

$$l = k \cdot \varnothing_2, \quad (9.23)$$

де  $k$  – коефіцієнт дзеркальної розгортки призми.

Оскільки у багатьох призм сторона квадратної грані  $a = \varnothing_2$ , то інші розміри призми розраховуються за формулами, наведеними у табл. 9.3, 9.4.

Більш складним є випадок, коли  $h_1 > h_2$ , рис. 9.21, б. Вивід формули розрахунку поперечного, а потім інших габаритних розмі-

рів призми, можна здійснити за допомогою рис. 9.22. На ньому показана редукована розгортка призми і хід променів крайнього периферійного пучка, який визначає її габарити.

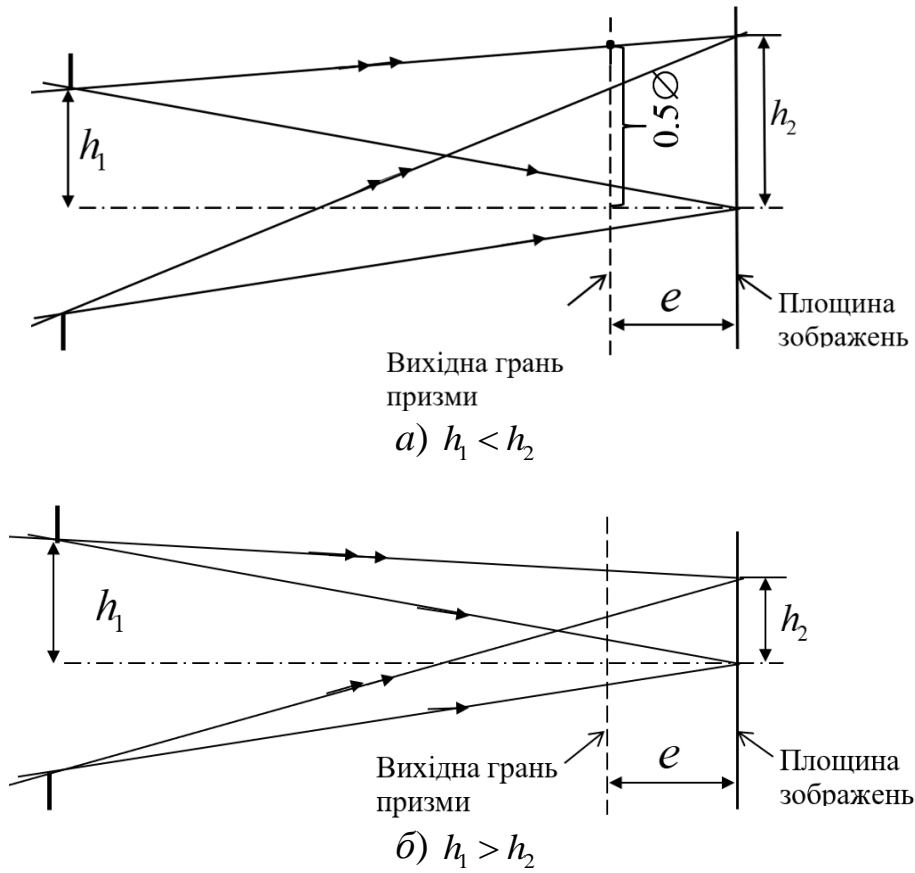


Рис. 9.21. До габаритного розрахунку призми

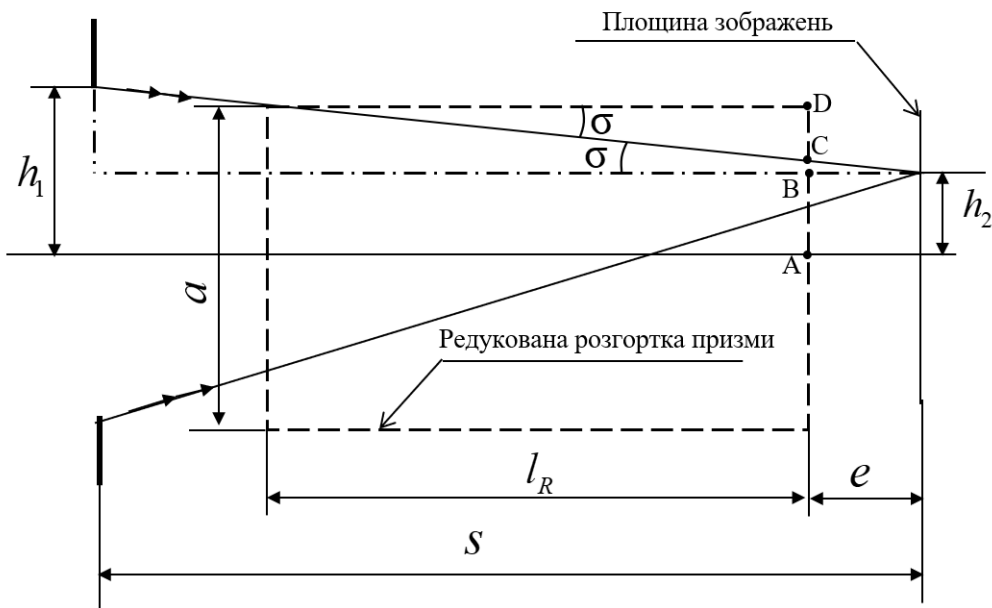


Рис. 9.22. До розрахунку габаритів призми у випадку  $h_1 > h_2$ .

З рис. 9.22 видно, що  $0.5a = AB + BC + CD$ ,

де  $AB = h_2$ ,  $BC = e \operatorname{tg} \sigma$ ,  $CD = l_R \operatorname{tg} \sigma$ ,  $\operatorname{tg} \sigma = \frac{h_1 - h_2}{s}$ ,  $l_R = \frac{l}{n} = \frac{ak}{n}$ , де  $n$  – коефіцієнт заломлення оптичного матеріалу призми. Після підстановки виразів відрізків у попереднє рівняння отримуємо кінцеву формулу розрахунку розміру вхідної грані призми:

$$a = 2n \frac{h_2 s + e(h_1 - h_2)}{ns - 2k(h_1 - h_2)}. \quad (9.24)$$

Знайдене за допомогою формули (9.24) значення сторони  $a$  вхідної грані призми дозволяє розрахувати всі інші розміри призми за формулами, наведеними в табл. 9.3, 9.4.

## 9.4. Дзеркала

В оптичних системах оптичних приладів широко застосовують дзеркальні елементи. Їх головна перевага перед лінзовими полягає у відсутності залежності їх оптичних параметрів від довжини хвилі. Тому дзеркальні компоненти не мають хроматичної аберації, яка істотно погіршує якість зображень в лінзових системах. Через це на протязі декількох століть перевагу надавали саме дзеркальним оптичним системам.

**Оптичним дзеркалом** називають деталь з оптичною поверхнею, яка відбиває промені згідно закону відбиття і має шорсткість не більшу за  $0.1\lambda_{\min}$ , де  $\lambda_{\min}$  – мінімальна довжина хвилі в спектрі випромінення, що використовується в приладі для формування зображень.

В старі часи дзеркала виготовляли з металів, в наші часи для дзеркал використовують оптичне скло, кварцове скло, ситали, церодури і навіть оргскло.

Дзеркала розділяються на окремі групи за ознаками:

- геометрична форма поверхні;
- спосіб отримання дзеркального відбиття променів;
- коефіцієнт відбиття;
- наявність чи відсутність оптичного середовища, що контактує з дзеркальною поверхнею.


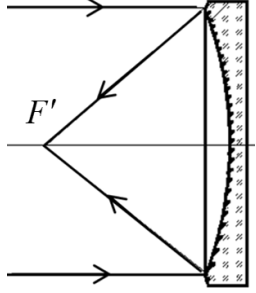
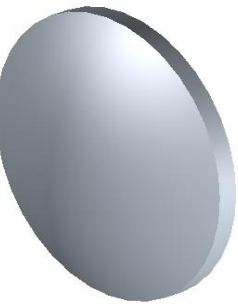
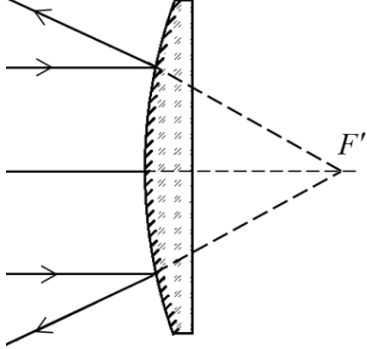
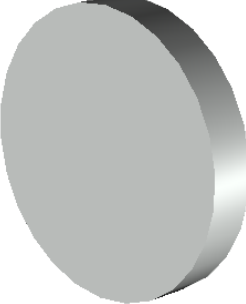
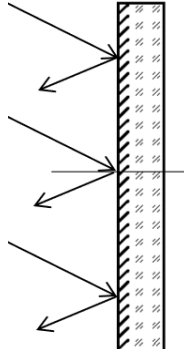
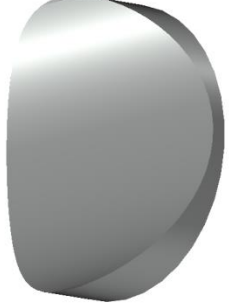
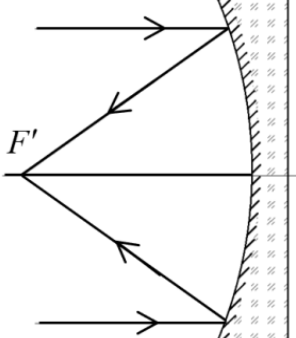
За геометричною формою оптичної поверхні дзеркала розділяються на:

- сферичні увігнуті, табл. 9.5,  $a$ ;

- сферичні опуклі, табл. 9.5, б;
- плоскі дзеркала, табл. 9.5, в;
- циліндричні дзеркала табл. 9.5, г;
- асферичні увігнуті та опуклі дзеркала – параболоїдні, гіперболоїдні, еліпсоїдні, з асферичністю вищих степеневих порядків.

Таблиця 9.5

Оптичні дзеркала

		а
		б
		в
		г

Забезпечення відбиття променів, дзеркалами, що поділяє їх на окремі типи, досягається методами:

- металізації оптичних поверхонь деталей, виготовлених із скла, ситала чи іншого діелектричного матеріалу;
- нанесенням багат шарового діелектричного покриття на оптичну поверхню деталі із діелектричного матеріалу;
- використання явища повного внутрішнього відбиття.

#### 9.4.1. Металізовані оптичні дзеркала

Для металізованих дзеркал в якості покриття в основному застосовують алюміній (Al), срібло (Ag), золото (Au). На рис. 9.23 показані графіки спектральних коефіцієнтів відбиття металевих поверхонь, виготовлених з вказаних металів. З графіків видно, що алюміній у порівнянні з іншими металами відбиває світло в більш широкому спектральному діапазоні, охоплюючи області ультрафіолетового, видимого та інфрачервоного діапазонів.

У видимому діапазоні коефіцієнт відбиття алюмінію досягає (88–92) %. Завдяки цьому, а також низькій собівартості, алюмінієве покриття є найбільш поширеним матеріалом при виготовленні металізованих оптичних дзеркал.

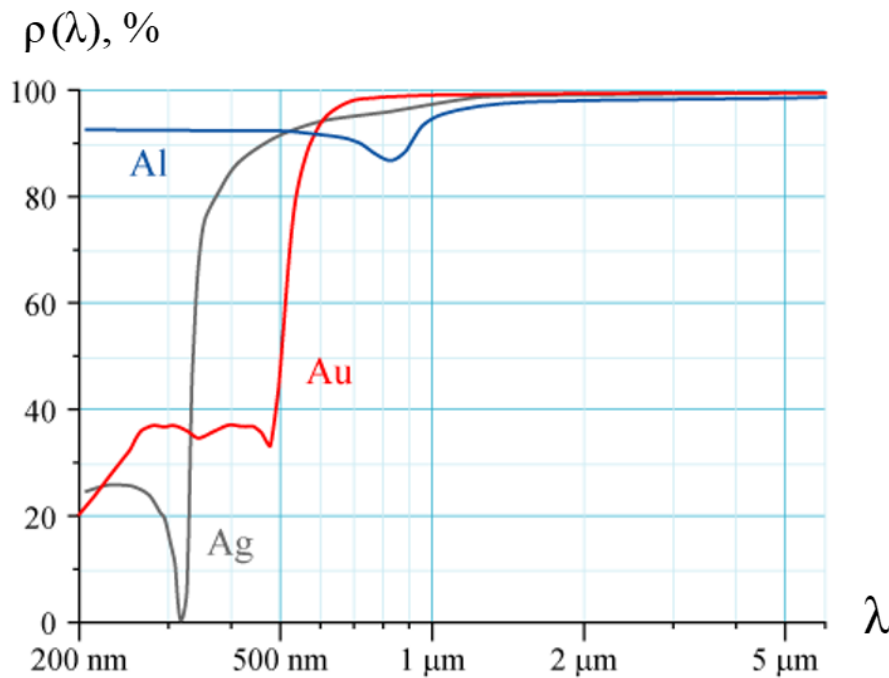


Рис. 9.23. Графіки спектральних коефіцієнтів відбиття Al алюмінія, Ag срібла та Au золота

Алюмінієві дзеркала виготовляють катодним розпиленням і випаровуванням алюмінію у вакуумі, або термічним випаровуванням у вакуумі при тиску  $5 \cdot (10^{-4} - 10^{-5})$  мм.рт.ст. Випаровування алюмінію здійснюється зі джгутів з вольфрамової проволочки або з жароміцного тиглю. Товщина алюмінієвої плівки для отримання дзеркала з максимальною відбивною здатністю повинна становити не менше 0,12 мкм.

Для підвищення хімічної та механічної стійкості алюмінієву плівку зовнішнього дзеркала (яка контактує з повітрям) захищають оптично прозорими шарами  $\text{Al}_2\text{O}_3$ ,  $\text{SiO}_2$ ,  $\text{MgF}_2$ ,  $\text{ZnS}$  та ін.

Срібляні плівки мають більш високий ніж алюміній коефіцієнт відбиття у видимому діапазоні. В інфрачервоному коефіцієнт відбиття срібла досягає значень 95 % – 99 %, проте у синій та в ультрафіолетовому діапазоні спектру срібляне покриття значно поступається алюмінієвому, бо має коефіцієнт відбиття менш ніж 90 %. Зазвичай товщина срібної плівки коливається від 0,15 до 0,3 мкм.

Срібляні дзеркальні поверхні доволі швидко окислюються, через що їх потрібно час від часу оновлювати, що незручно або неможливо через необхідність розборки приладу.

Перші посріблені скляні дзеркала значних розмірів виготовляли нанесенням на скло ртутно-олов'яної амальгами. Згодом цей шкідливий для здоров'я працюючих спосіб був замінений хімічним срібленням, заснованим на здатності деяких з'єднань, що містять альдегідну групу, відновлювати з розчинів солей срібло у вигляді металевої плівки.

Золоті дзеркала найчастіше застосовують в ІЧ-діапазоні. В діапазоні довжин хвиль  $< 600$  нм відбиття від золотої плівки досить низьке.

Золото хімічно інертне, тому навіть без захисного шару воно практично не взаємодіє з атмосферними газами і водою. Це дозволяє використовувати золото як покриття дзеркал в тих інструментах, в яких небажано мати дзеркала з інших металів із захисними діелектричними шарами через інтерференцію в них світлових хвиль.

Шар золота вкрай м'який і легко може бути пошкоджений механічно. Тому в більшості застосувань золото все ж покривають оксидною захисною плівкою.

### 9.4.2. Діелектричні оптичні дзеркала

Металеві дзеркальні покриття не завжди придатні для застосування з наступних причин:

- вони в ряді випадків мають недостатньо високий коефіцієнт відбиття;
- вони не витримують на собі високих концентрацій світлового потоку і «прогорають»;
- вони не можуть забезпечувати селективність відбиття, коли потрібно, щоб оптична поверхня була дзеркальною в одному діапазоні довжин хвиль і прозорою в іншому діапазоні.

В першу чергу ці вимоги стосуються дзеркал резонаторів лазерів, через що металеві дзеркала в них практично не використовуються.

Значно підвищити коефіцієнт відбиття, доводячи його до майже одиниці, можна використовуючи послідовність діелектричних шарів, що чергуються, з високим  $n_1$  і низьким  $n_2$  показниками заломлення, рис. 9.24.

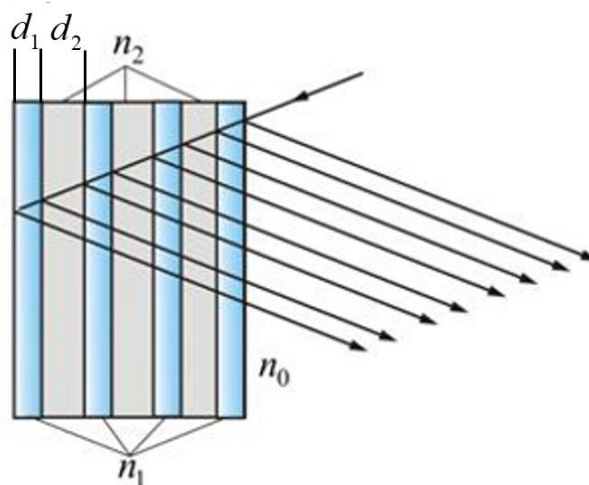


Рис. 9.24. Структура багат шарових діелектричних дзеркальних покриттів

На границі двох середовищ, які мають істотно різні показники заломлення, світлові хвилі відбиваються, як показано на рис. 9.24. Непарні шари мають один показник заломлення, а парні – інший. Чим більшою є різниця між  $n_1$  і  $n_2$ , тим більшим буде коефіцієнт відбиття однієї поверхні.

Якщо оптична товщина всіх шарів однакова і дорівнює  $\lambda/4$ , тобто  $n_1 d_1 = n_2 d_2 = \dots = \lambda/4$ , всі відбиті на границях шарів хвилі знаходяться в одній фазі і в результаті інтерференції підсилюють одна



одну. Такі багатошарові діелектричні покриття мають високу відбивну здатність, але у вузькому спектральному діапазоні з центром на заданій довжині хвилі  $\lambda$ .

Зазвичай наносять від 5 до 15 шарів сульфиду цинку з показником заломлення  $n_1 = 2.3$  і кріоліту з показником заломлення  $n_2 = 1.35$ . Щоб отримати коефіцієнт відбиття  $\rho = 0.9$  в спектральному діапазоні 50 нм достатньо мати сім шарів, а для коефіцієнту відбиття  $\rho = 0.99$  потрібно нанести 11–13 шарів.

Для дзеркал лазерних резонаторів потребують коефіцієнт відбиття  $\rho = 0.999$  і вище, який може мати тільки багатошарове діелектричне дзеркало і який не може забезпечити ні один існуючий метал.

### 9.4.3. Дзеркальні поверхні, що віддзеркалюють через повне внутрішнє відбиття

Такі поверхні в основному використовують в призмах. Прикладом може бути призма АР-90. Якщо вона виготовлена із скла К8 (N-BK7), то при контакті з повітрям будь-який промінь, що падає на гіпотенузну грань під кутом більшим ніж кут повного внутрішнього відбивання (3.29):

$$\varepsilon_{ПВВ} = \arcsin \frac{n_2}{n_1} = \arcsin \frac{1}{1.51829} = (41.193)^\circ,$$

буде відбиватися від цієї грані.

На рис. 9.25 показано призму АР-90, на яку перпендикулярно вхідній грані падає пучок паралельних променів. На гіпотенузну грань призми промені падають під кутом  $45^\circ$ , який перевищує вказаний кут  $41.193^\circ$ . Тому пучок променів буде повністю відбитим, як показано на рис. 9.25.

Коефіцієнт відбиття грані теоретично дорівнює одиниці, проте через дефекти поверхні гіпотенузної грані мала частка світлового потоку може поглинатися і розсіюватися, що зменшує реальний коефіцієнт відбиття. Лише ідеальна без дефектів грань призми відбиває потік повністю.

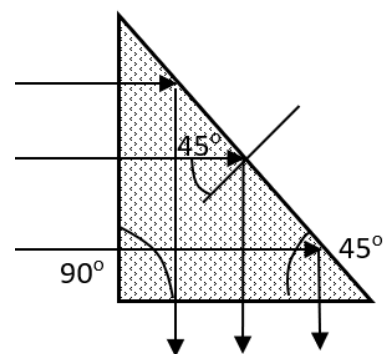


Рис. 9.25. Відбиття променів на ефекті повного внутрішнього відбиття на межі розділу двох діелектриків

### 9.4.5. Світлоподільні дзеркала

В оптичних системах приладів використовують дзеркала, які розділяють світлові потоки на два напрямки, або об'єднують потоки в один. Такі дзеркала називають **світлоподільниками**. Зазвичай такі дзеркала виготовляють у вигляді плоскопаралельної пластини, на одній з поверхонь якої наносять дзеркальний шар, частіше металізований, рис. 9.26, *а*. Дзеркальний шар віддзеркалює 50 % потоку, а іншу частину пропускає. Такі дзеркала шифрують як 50/50. Іноді потрібне інше співвідношення, наприклад, 70/30 або 30/70. Перша цифра означає коефіцієнт відбиття у відсотках.

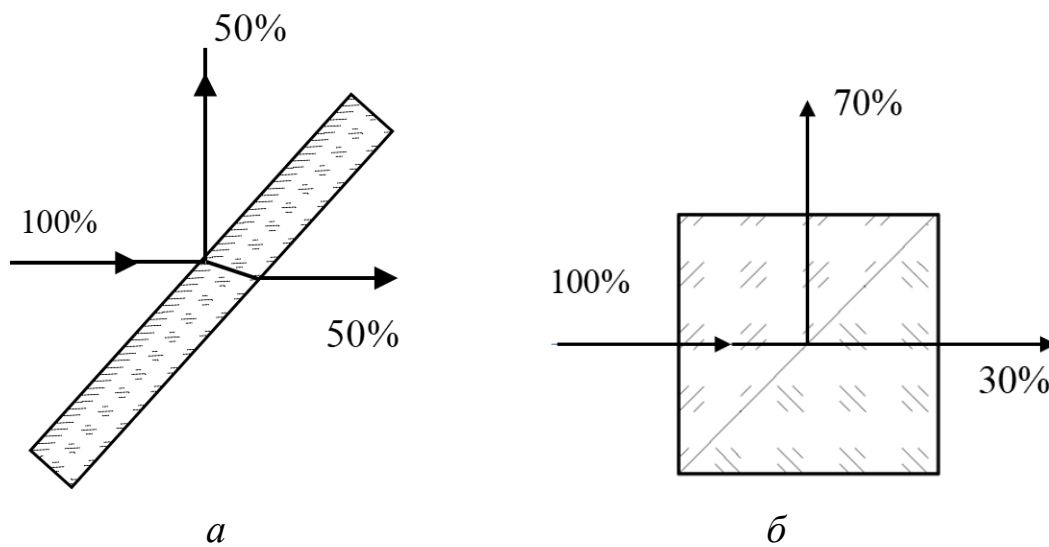


Рис. 9.26. Світлоподільники: *а* – світлоподільне дзеркало; *б* – світлоподільна куб-призма

### 9.4.6. Про кардинальні елементи дзеркал, що мають оптичну силу

Оптичну силу мають дзеркала із сферичною і асферичною формою поверхні. Про кардинальні елементи дзеркал – передній і задній фокуси, головні та вузлові точки, фокусні відстані, фокальні відрізки, фокальні площини, головні площини викладено у п. 6.6 розділу 6.

Кардинальні елементи визначаються тільки для параксіальної області променів, тому кардинальні елементи асферичних поверхонь ті самі, що має сферична поверхня з кривизною асферичної на оптичній осі.

## 9.5. Світловоди та волоконно-оптичні елементи

**Світловоди** – світлопроводи у вигляді оптичних стержнів або волокон із неорганічного або органічного скла. Завдяки явищу повного внутрішнього відбиття променів від бокової поверхні світловоду оптичне випромінення розповсюджується від вхідного до вихідного торця всередині світловода. Світловоди це світлопроводи.

Волоконно-оптичні елементи – джгути світловодів, призначені для передачі світла та зображень.

Найбільш поширеним світловодом є циліндричне волокно із скла або пластмаси з плоскими торцями. Повне внутрішнє відбиття променів відбувається від поверхні світловоду, яка межує з повітрям або іншим діелектриком з меншим показником заломлення.

Тонкі циліндричні світловоди з діаметром перетину від 5 до 200 мкм є гнучкими. При вигині світловоду він не лишається здатності передавати світло.

Якщо світловоди збираються в джгути для передачі зображень, то для запобігання проникнення променів із одного світловоду в сусідній в місцях їх дотикання, кожний світловод має свою оболонку із оптичного матеріалу, наприклад із скла, з меншим коефіцієнтом відбиття.

Відомі конструкції світловодів показані на рис. 9.27.

На рис. 9.27, *а* показано світловод, в якому відбиття променю від оболонки виникає через ефект повного внутрішнього відбиття. Серцевина має сталий показник заломлення  $n_c$ , оболонка теж має сталий показник заломлення  $n_o$ , причому  $n_o < n_c$ . В такому світловоді показник заломлення має ступінчастий профіль, див. графік функції  $n(r)$

На рис. 9.27, *б* показано конічний світловод, в якому показники заломлення серцевини і оболонки теж стали  $n_o < n_c$ . Конічні світловоди, складені в регулярно укладений джгут, мають назву **фокон**.

Рис. 9.27, *в* представляє світловод з градієнтним, тобто з плавно змінюваним розподілом показника заломлення, див. графік функції  $n(r)$ . Такий розподіл показника заломлення утворюють шляхом іонного обміну в стержнях із спеціального скла діаметром приблизно від 0,5 до 2 мм. В результаті вказаного обміну показник заломлення плавно зменшується в радіальному від осі напрямку, тобто до краю волокна. Якщо на осі показник заломлення  $n_c$ , то на радіальній відстані  $r$  від осі волокна показник заломлення дорівнює  $n(r) = n_c(1 - k^2 r^2)$ ,

де  $k$  – сталий коефіцієнт. У такий спосіб утворюється оптична неоднорідність, через яку промені в світловоді отримують криволінійну траєкторію.

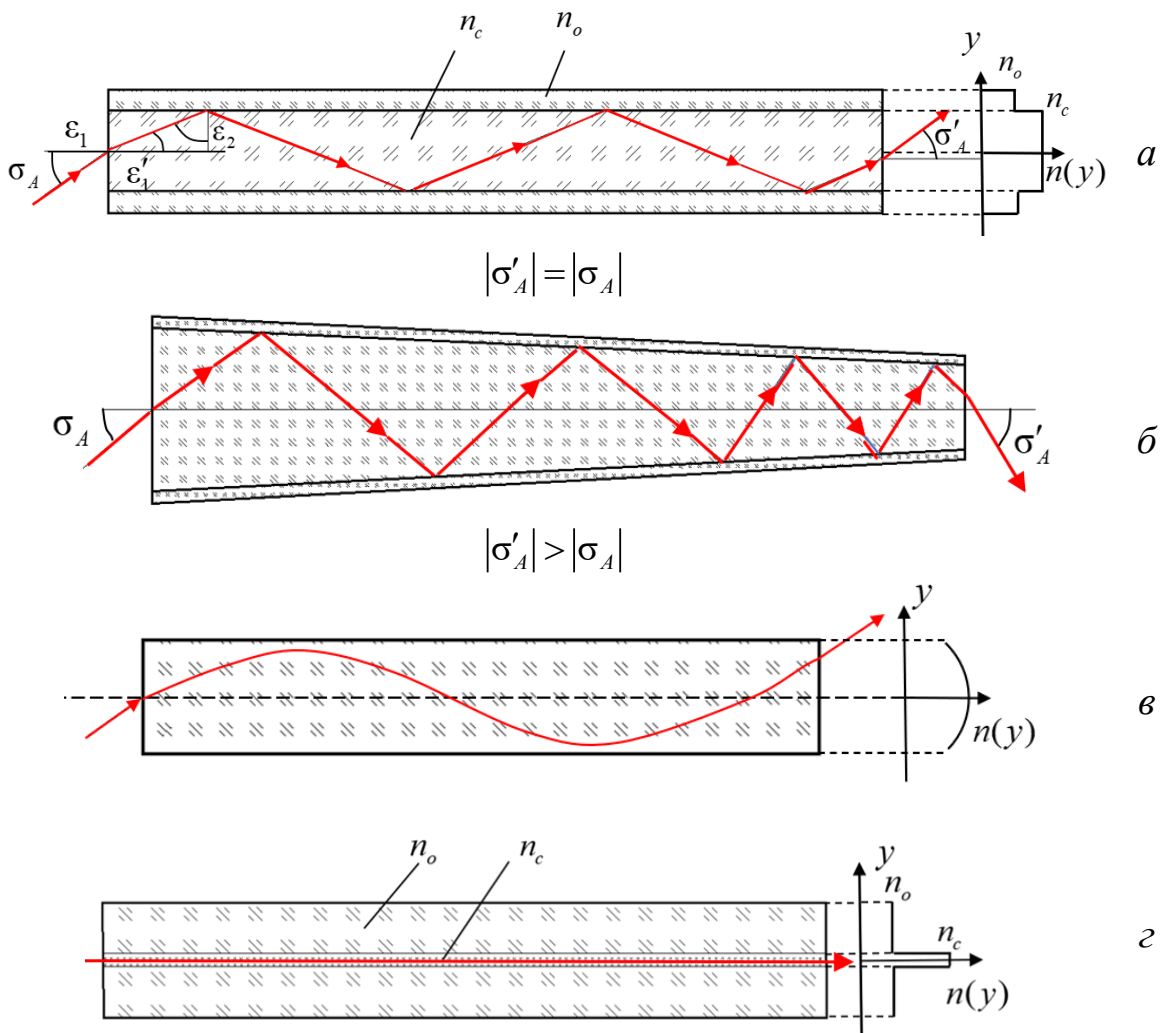


Рис. 9.27. Конструкції світловодів: а – прямий циліндричний світловод з оболонкою,  $n_c$  – показник заломлення серцевини світловода,  $n_o$  – показник заломлення оболонки; б – конічний світловод; в – світловод з градієнтним показником заломлення; г – одномодовий світловод із ступінчастим профілем показника заломлення

Факт наявності криволінійної траєкторії променю пояснює принцип Ферма, викладений в Розділі 3 і продемонстрований в дії на прикладі розв'язання завдання 3.2.

Траєкторія у такому світловоді має вигляд, при якому вона не торкається зовнішньої поверхні, а тому такий світловод не потребує оболонки.

Промені, які виходять з однієї точки, після проходження через градієнтний світловод можуть збиратися знову в точку, тобто само-

фокусуватися. Тому світловод працює як лінза що здатна формувати зображення предметів. Такий світловод має назву **селфок** (англ.: selfoc, **self-focusing** – самофокусування).

На рис. 9.27, з показано ще один тип світловоду, який має нас- тільки малий діаметр серцевини, що у світловоді може розповсю- джуватися лише одна мода (терм) електромагнітного поля. Зазвичай це мода  $TEM_{00}$  і такий світловод називають **одномодовим**.

### Оптичні характеристики світловодів:

- апертурний кут –  $2\sigma_A$ ;
- числова апертура –  $A$ ;
- кількість мод електромагнітного поля, що пропускає світловод;
- спектральний коефіцієнт світлопропускання –  $\tau(\lambda)$ ;
- спектральний діапазон.

**Апертурний кут**  $2\sigma_A$  – подвоєний кут між осьюовою лінією світловода і тим променем, котрий після заходу у світловод падає на зовнішню поверхню під кутом повного внутрішнього відбивання  $\varepsilon_{ПВВ}$ , через що віддзеркалюється від цієї поверхні, рис. 9.27, а.

Згідно рис. 9.27, а кут  $\varepsilon_2 = \varepsilon_{ПВВ} = \arcsin \frac{n_o}{n_c}$ , а кут заломлення  $\varepsilon'_1 = 90^\circ - \varepsilon_2$ .

$$\sin \varepsilon'_1 = \sin(90^\circ - \varepsilon_2) = \cos \varepsilon_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \varepsilon_2} = \sqrt{1 - \left(\frac{n_o}{n_c}\right)^2} = \frac{\sqrt{n_c^2 - n_o^2}}{n_c}.$$

Кут падіння променя на вхідний торець світловода  $\varepsilon_1$  пов'язаний з кутом заломлення  $\varepsilon'_1$ , згідно закону заломлення, співвідношенням:

$$n_1 \sin \varepsilon_1 = n_c \sin \varepsilon'_1,$$

де  $n_1$  – показник заломлення середовища перед вхідним торцем світловода, тоді

$$\sin \varepsilon_1 = \frac{n_c}{n_1} \sin \varepsilon'_1 = \frac{n_c}{n_1} \frac{\sqrt{n_c^2 - n_o^2}}{n_c} = \frac{\sqrt{n_c^2 - n_o^2}}{n_1}. \quad (9.25)$$

Для променя, що розглядається, кут  $\varepsilon_1 = \sigma_A$ , тому апертурний кут світловода

$$\boxed{2\sigma_A = 2 \arcsin \frac{\sqrt{n_c^2 - n_o^2}}{n_1}}. \quad (9.26)$$

Числова апертура світловода:

$$A = n_1 \sin \sigma_A = n_1 \frac{\sqrt{n_c^2 - n_o^2}}{n_1} = \sqrt{n_c^2 - n_o^2}. \quad (9.27)$$

Формули (9.26) і (9.27) описують оптичні параметри прямого світловода. Якщо світловод має радіус вигинання  $R$  і діаметр серцевини  $D$ , рис. 9.28, то вказані параметри розраховуються за формулою (9.28).

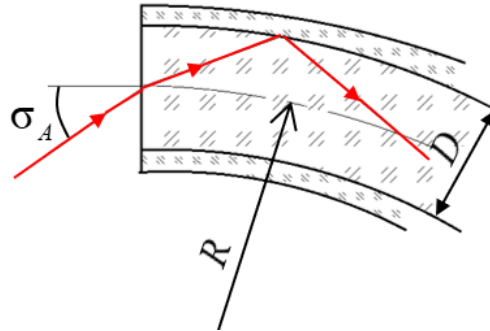


Рис. 9.28. До формули розрахунку числової апертури  $A$  вигнутого циліндричного світловода

$$A = \sqrt{n_c^2 - n_o^2 \left(1 + \frac{D}{2R}\right)^2}. \quad (9.28)$$

З формули (9.28) видно, що доданок  $\frac{D}{2R}$  при мікронних діаметрах серцевини мало впливає на значення числової апертури навіть при міліметрових радіусах вигинання світловоду.

**Кількість мод електромагнітного поля, що пропускає світловод, одномодовий режим.** Одномодові світловоди використовують для передачі інформації, а також в датчиках і у волоконно-оптичних інтерферометрах, наприклад у волоконних гіроскопах. В таких світловодах розповсюджується тільки одна світлова хвиля, фазовий стан якої є однозначним. У світловодах, в яких серцевина має діаметр більший за довжину хвилі, можуть розповсюджуватися багато мод, які мають різну траєкторію променів.

Кількість мод, які можуть розповсюджувати у серцевині світловода, визначає параметр  $V$

$$V = 2\pi \frac{r_k}{\lambda} \sqrt{n_c^2 - n_o^2}, \quad (9.29)$$

де  $r_k$  – радіус перетину серцевини.

Розв'язок хвильового рівняння вказує на те, що одномодовий режим розповсюдження світлової хвилі у серцевині світловода є можливим при  $V = 2.4048$ .

Це значення дозволяє зробити розрахунок радіуса перетину серцевини при заданій довжині хвилі і показниках заломлення серцевини і оболонки

$$r_k = \frac{2.4048 \cdot \lambda}{2\pi \sqrt{n_c^2 - n_o^2}}, \quad (9.30)$$

або розрахувати довжину хвилі, при якій можливим є одномодовий режим в світловоді з відомими значеннями  $n_c$ ,  $n_o$  і  $r_k$ :

$$\lambda = \frac{2\pi r_k \sqrt{n_c^2 - n_o^2}}{2.4048}. \quad (9.31)$$

Довжина хвилі, розрахована за формулою (9.31), є граничною. Світлові хвилі з більшою довжиною також будуть розповсюджуватися в одномодовому режимі через заданий світловод.

**Спектральний коефіцієнт світлопропускання** світла обумовлений поглинанням в матеріалі серцевини і втратами при повному внутрішньому відбиванні через дефекти оболонки та внаслідок затуханням хвиль в оболонці. Обидва типи втрат зростають при збільшенні довжини світловода.

Спектральний коефіцієнт світлопропускання також враховує втрати на вхідному та вихідному торцях світловоду, навіть ідеально відполірованими. Причина – френелівські відбивання на межі розділу двох діелектриків – повітря та скла.

Для зменшення втрат на оболонці її роблять дуже тонкою, від 0.5 до 2 мкм. Повне внутрішнє відбивання не можна замінити металізацією світловода через недостатній коефіцієнт відбивання металів, тому що у світловодах кількість відбитків від поверхні на метр довжини складає від  $10^3$  до  $10^4$ . При такій кількості відбитків світловий потік буде практично повністю поглинатися дзеркальним металевим покриттям.

**Спектральний діапазон** або область пропускання світловода становить (0.4–2.0) мкм. За межами цієї області використовують інфрачервоні волокна та ультрафіолетові волокна, виготовлені з кварцового скла для серцевини та із пластмаси – для оболонки.

**Завдання 9.9.** Циліндричний світловод в повітрі має серцевину з показником заломлення  $n_c = 1.62$ , оболонку з показником заломлен-

ня  $n_o = 1.52$ , та з діаметром перетину серцевини  $D = 70$  мкм. Визначте апертурний кут  $2\sigma_A$ , числову апертуру  $A$ , та зменшення числової апертури при вигинанні світловоду за дугою з радіусом  $R = 10$  мм.

**Розв'язання.**

Згідно формули 9.26 апертурний кут

$$2\sigma_A = 2 \arcsin \sqrt{n_c^2 - n_o^2} = 2 \arcsin \sqrt{1.62^2 - 1.52^2} = 68.16^\circ.$$

Згідно формули (9.27) числова апертура світловода

$$A = \sqrt{n_c^2 - n_o^2} = \sqrt{1.62^2 - 1.52^2} = \sqrt{0.314} = 0.5604.$$

Згідно формули (9.28) числова апертура вигнутого світловода

$$A = \sqrt{n_c^2 - n_o^2 \left(1 + \frac{D}{2R}\right)^2} = \sqrt{1.62^2 - 1.52^2 \left(1 + \frac{0.07}{2 \cdot 10}\right)^2} = 0.54571.$$

Як видно з розрахунків числова апертура у вигнутого світловода зменшилася всього на 2.6 %.

**Завдання 9.10.** Який діаметр серцевини повинна мати серцевина одномодового світловода з параметрами  $n_c = 1.62$ ,  $n_o = 1.52$ , якщо через нього потрібно пропустити електромагнітну хвилю з  $\lambda = 0.55$  мкм.

**Розв'язання.**

Згідно формули (9.30) діаметр серцевини світловода, що пропускає одну моду з довжиною хвилі 0.55 мкм:

$$D = 2r_k = \frac{2 \cdot 2.4048 \cdot \lambda}{2\pi \sqrt{n_c^2 - n_o^2}} = \frac{2 \cdot 2.4048 \cdot 0.55 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 3.1416 \cdot \sqrt{1.62^2 - 1.52^2}} = 0.751 \cdot 10^{-3} (\text{мм}) = 0.751 \text{ мкм}.$$

**Волоконно-оптичні елементи**

До волоконно-оптичних елементів відносять:

- гнучкі та жорсткі джгути, складені з тонких світловодів;
- волоконні шайби;
- фокони.

**Гнучкі джгути** діляться на а) джгути з нерегулярною і б) джгути з регулярною укладкою світловодів.

Регулярна укладка означає, що розташування світловодів на вхідному і вихідному торцях є впорядкованою і однаковою. Джгути з такою укладкою використовують для передачі зображення предмету з вхідного торця на вихідний торець джгута, рис. 9.29, а.



Джгути з невпорядкованою укладкою зображення передавати не можуть, тому їх використовують тільки для передачі світлового потоку, рис. 9.29, б.

Світловоди, з яких складаються волоконно-оптичні елементи, не може мати нульовий діаметр торців, тому вхідні та вихідні торці волоконно-оптичних елементів мають мозаїчну структуру. Через це зображення предмету (букви L) на вихідному торці волоконно-оптичного елемента розмите по краях, як це видно з рис. 9.29, а. Погіршення якості зображення через мозаїчну структуру стримує застосування волоконно-оптичних елементів в тих випадках, коли таке погіршення є недопустимим.

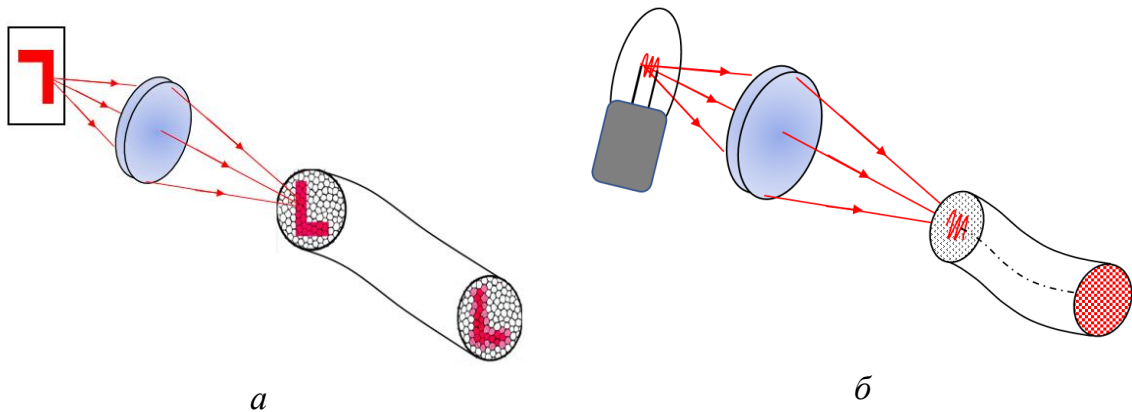


Рис. 9.29. Гнучкі джгути світловодів: а – з регулярною укладкою світловодів; б – з нерегулярною укладкою світловодів

**Волоконні шайби** – жорсткі джгути регулярно укладених світловодів. Осьова довжина цих світловодів набагато менша за діаметр шайби, рис. 9.30, а.

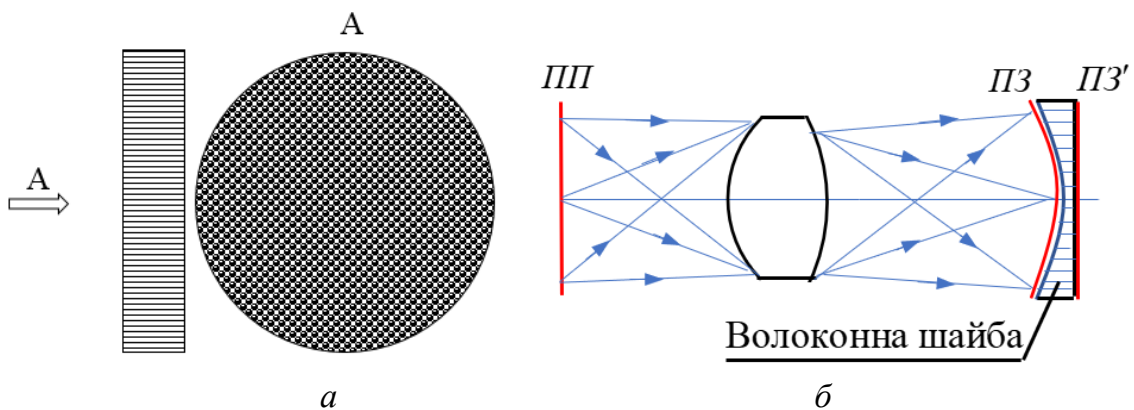


Рис. 9.30. Волоконні шайби: а – вигляд волоконної шайби з плоскими вхідним і вихідним торцями; б – волоконна шайба для виправлення кривизни поверхні зображення, ПП – площина предметів, ПЗ – поверхня зображення предмету, сформованого оптичною системою, ПЗ' – виправлена поверхня зображень

Для жорсткості світловоди пропитують епоксидним чи іншим клеєм, а потім, після затвердіння клею, торці шліфують і полірують.

Розподіл освітленості на вхідному торці через регулярно укладені світловоди передається на вихідний торець. У такий спосіб оптичне зображення з вхідного торця переноситься на вихідний торець. Цим користуються, наприклад, для виправлення аберації кривизна поля, яка властива майже всім оптичним системам. Так на рис. 9.30, б показано, оптичну систему, що формує зображення на кривій поверхні (ПЗ). Якщо таку саму криву форму поверхні надати вхідному торцю волоконній шайбі і спроектувати оптичне зображення на цей торець, то на плоскому вихідному торці буде знаходитися плоске зображення (ПЗ').

**Фокони** – жорсткі жмути регулярно укладених конічних світловодів, рис. 9.27, б, рис. 9.31. Сформоване на вхідному торці фокона зображення передається на вихідний торець із лінійним збільшенням

$$\beta = \frac{\varnothing_2}{\varnothing_1}, \quad (9.32)$$

де  $\varnothing_2$  – діаметр вихідного торця фокона;  $\varnothing_1$  – діаметр вхідного торця, рис. 9.32

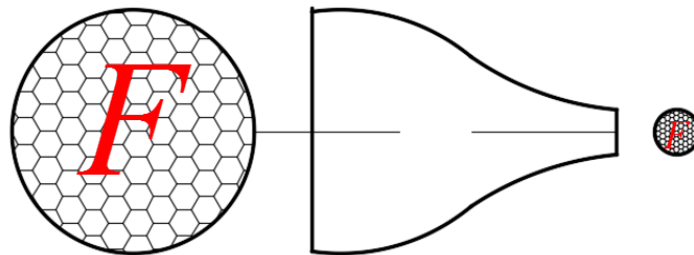


Рис. 9.31. Передача зображення з вхідного торця фокона на вихідний

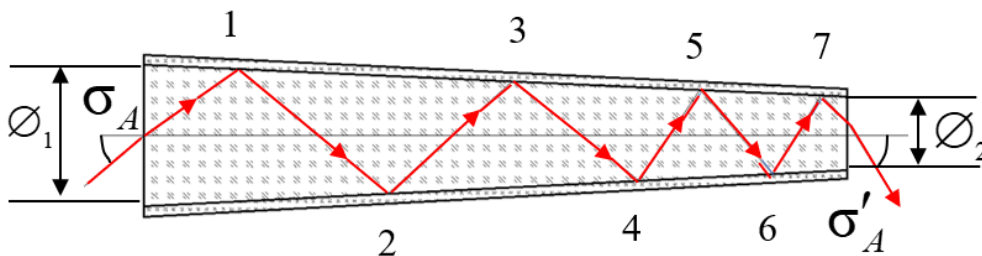


Рис. 9.32. Хід променю в конічному світловоді

На рис. 9.32 показано хід променю, який декілька раз (7 точок) відбивається від оболонки. В кожній черговій точці кут падіння і кут відбиття є меншим, ніж у попередній точці. Через це промінь

виходить з конічного світловода під кутом більшим, ніж на вході у світловод.

Показаний на рис. 9.32 промінь може пройти через весь конічний світловод після декількох відбитків від оболонки і вийти з нього, якщо на вихідному торці виконується умова

$$\sin \sigma'_A \leq \frac{\sqrt{n_c^2 - n_o^2}}{n_1}. \quad (9.33)$$

При нехтуванні втрат потоку у світловоді яскравість перетинів світлових трубок на вхідному і вихідному торці зберігається незмінною, то згідно умови збереження потоку випромінення

$$\omega_1 \frac{\pi \varnothing_1^2}{4} = \omega_2 \frac{\pi \varnothing_2^2}{4}, \quad (9.34)$$

де  $\omega_1$  – тілесний кут, заповнений променями на вхідному торці світловода;  $\omega_2$  – тілесний кут на вихідному торці, а  $\frac{\pi \varnothing_1^2}{4}$  і  $\frac{\pi \varnothing_2^2}{4}$  – площини вхідного і вихідного торців конусного світловода відповідно.

Оскільки тілесний кут  $\omega = 2\pi(1 - \cos\sigma)$ , то рівняння (9.34) перетворюється до вигляду

$$\sin^2 \frac{\sigma_A}{2} \varnothing_1^2 = \sin^2 \frac{\sigma'_A}{2} \varnothing_2^2,$$

або

$$\sin \frac{\sigma_A}{2} \varnothing_1 = \sin \frac{\sigma'_A}{2} \varnothing_2.$$

З урахуванням (9.32)

$$\frac{\sin \frac{\sigma'_A}{2}}{\sin \frac{\sigma_A}{2}} = \frac{\varnothing_1}{\varnothing_2} = \frac{1}{\beta}. \quad (9.35)$$

**Завдання 9.11.** У конусних світловодів, що входять в склад фоконів, серцевина має показник заломлення  $n_c = 1.62$ , а оболонка –  $n_o = 1.47$ . Діаметр вхідного торця  $\varnothing_1 = 10$  мм, вихідного –  $\varnothing_2 = 2$  мм. Знайдіть числову апертуру фокона зі сторони вхідного і вихідного торців.

**Розв'язання.**

1. Числова апертура на вихідному торці згідно (9.33):

$$\sin \sigma'_A = \frac{\sqrt{n_c^2 - n_o^2}}{n_1} = \frac{\sqrt{1.62^2 - 1.47^2}}{1} = 0.6808, \quad \sigma'_A = 42.9068^\circ.$$

2. Лінійне збільшення згідно (9.32)  $\beta = \frac{\varnothing_2}{\varnothing_1} = \frac{2}{10} = 0.2$ .

3. Апертурний кут на вхідному торці фокона згідно (9.35)

$$\sigma_A = 2 \arcsin(\beta \cdot \sin \frac{\sigma'_A}{2}) = 8.39^\circ.$$

4. Числова апертура на вхідному торці фокона  $A = n_1 \sin \sigma_A = 0.146$ .

## РОЗДІЛ 10. ТЕОРІЯ ДІАФРАГМ ОПТИЧНОЇ СИСТЕМИ

### Діафрагми ОС

В оптичних приладах лінзи, дзеркала, призми, плоско-паралельні пластини та інші оптичні елементи, як правило, розміщуються в непрозорих елементах кріплення – в оправках, тубусах, кронштейнах, рейтерах, рис. 10.1, 10.2. Через це виникають поперечні обмеження пучків променів. Проте такі самі обмеження можуть спостерігатися і при відсутності оправ, що охоплюють оптичну деталь, коли в конструкції використовується спеціальне кріплення призми, дзеркал, пластин, рис. 10.3, 10.4. У таких випадках поперечні обмеження пучків променів виникають через обмежені поперечні розміри самих оптичних деталей. В оптичних системах доволі часто використовують непрозорі пластини у вигляді екранів з отвором для проходження променів, рис. 10.5. Іноді на оптичних поверхнях лінз або оптичних пластин розміщують дзеркальні поверхні, які перекривають частину світлового отвору цих лінз. На рис. 10.2 показано таку лінзу з центральним екрануванням променів дзеркалом, що розташоване по центру другої оптичній поверхні.

Будь-яка фізична перешкода функціональному розповсюдженню променів в оптичній системі є **діафрагмою**, утвореною штучно або природно.

Діафрагми оптичної системи грають дуже велику роль в роботі оптичних систем. Від їх розташування в системі та від розмірів їх отворів, через які безперешкодно проходять пучки променів, залежать:

- кількість оптичного випромінення, яке після проходження через систему потрапляє на світлочутливу поверхню одного елемента фотоприймача чи на всю поверхню багатоелементного фотоприймача зображень;

- величина і розподіл опромінення у площині зображення простору предметів;

- геометричні розміри поля зору оптичної системи у просторі предметів чи у просторі зображень;

- якість зображення по полю зору оптичної системи;

- дифракційна межа просторового розділення, яка може реально чи потенційно забезпечувати конкретна оптична система;

- глибина простору предметів, що сприймається оком чи фотоприймачем зображення однаково «різко».

З наведеного видно, що діафрагми впливають майже на всі функціональні параметри і характеристики оптичної системи приладу.

При аналізі функціональних параметрів і характеристик будь-якої заданої оптичної системи, або при проектуванні нової оптичної системи із потрібними значеннями параметрів і характеристик, треба чітко розуміти як впливає на них розташування і розміри отворів конкретних діафрагм.

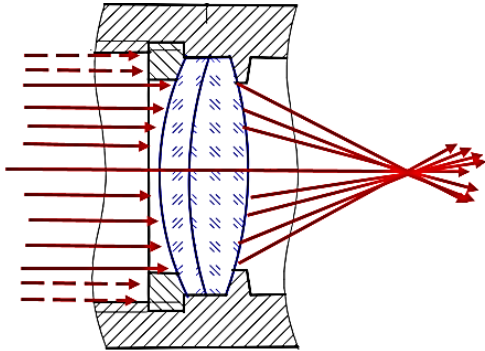


Рис. 10.1. Дволінзова склейка в оправі

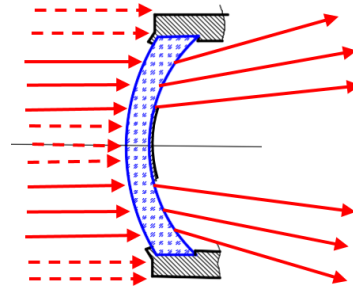


Рис. 10.2. Меніск в оправі з центральним екрануванням дзеркальною поверхнею

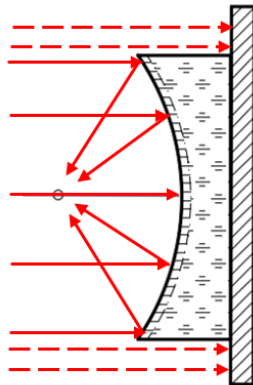


Рис. 10.3. Дзеркало без оправі з кріпленням на металевій пластині

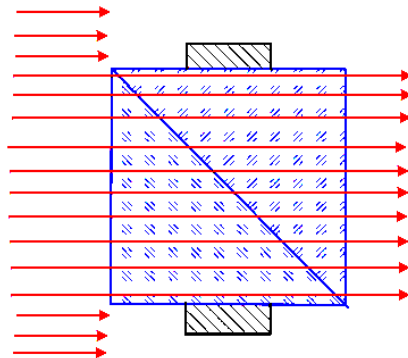


Рис. 10.4. Куб-призма без оправі з кріпленням прижимою пластинною за неробочі поверхні

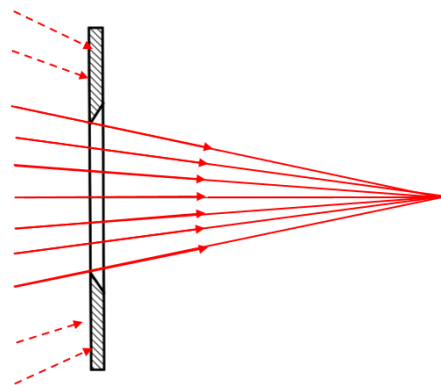


Рис. 10.5. Непрозорий екран з отвором

За своїм функціональним призначенням і за своїм впливом на параметри і характеристики оптичної системи кожна з діафрагм може бути

або апертурною,  
або польовою,  
або віньєтною,

тобто вони розділяються на три типи.

На рис. 10.6 для прикладу показана оптична система зорової труби з лінзовою обертальною системою. Система зорової труби має в своєму складі п'ять лінзових компонентів (поз.1, 2, 3, 5, 7). Кожен з цих компонентів має свою оправу, що виконує функцію діафрагми. На рис.10.6 самі оправы не показані. Проте поперечні розміри лінзових компонентів представлені на схемі нижче відповідними світловими отворами – зонами не закритими оправы.

В системі є також дві тонкі непрозорі пластини, кожна з отвором (поз. 4, 6), центрованим відносно оптичної осі.

Аналіз чи синтез цієї системи, як і будь-якої іншої, потребує уявлення про те, яку функцію виконує в ній кожна діафрагма, або до якого типу відноситься кожна з них.

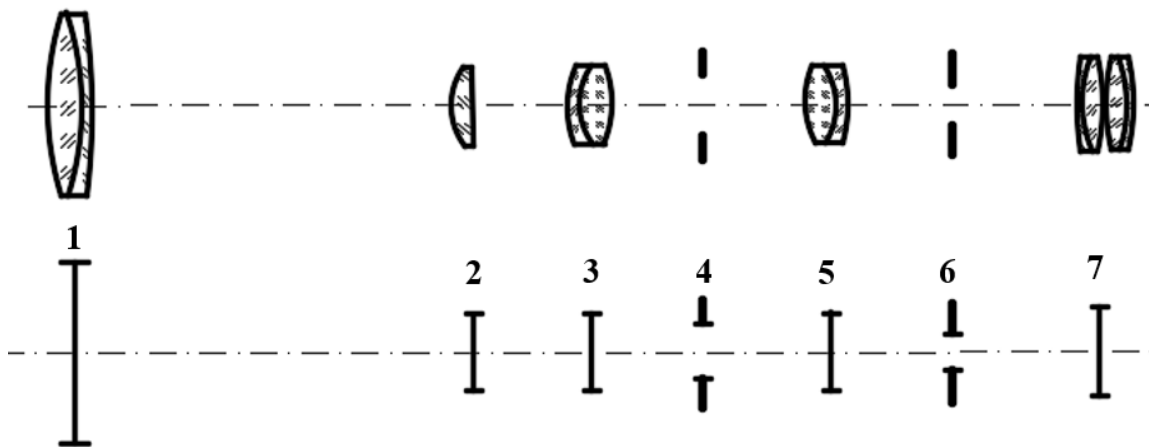


Рис. 10.6. Оптична система зорової труби, нижня схема – компоненти системи, представлені їх головними площинами, які в поперечному напрямку обмежені діафрагмами

Встановити роль чи тип окремої діафрагми в системі можна на основі знань особливих властивостей діафрагм кожного з трьох типів і правил використання цих знань для виявлення приналежності тієї чи іншої діафрагми до відповідного типу.

## 10.1. Апертурна діафрагма та її властивості. Порядок виявлення в системі апертурної діафрагми

**Апертурна** – діафрагма, що обмежує пучок променів, які виходять з осьової точки площини предмету.

### **Ознаки апертурної діафрагми**

Апертурною є та діафрагма оптичної системи, зображення якої у просторі предметів (у просторі зображень) з осьової точки площини предметів (площини зображень) серед всіх зображень діафрагм спостерігається під найменшим кутом.

**Примітка:** Тут і надалі в дужках знаходяться слова для другого прочитання фрази, які замінюють собою попереднє слово.

У тому випадку, коли площина предметів (площина зображень) знаходиться у нескінченності, апертурною є та діафрагма оптичної системи, зображення якої в просторі предметів (просторі зображень) у порівнянні з діаметрами зображень інших діафрагм має найменший діаметр.

Саме ця ознака є принциповою при виявленні апертурної діафрагми в оптичній системі і вона використовується при її пошуку в системі.

Апертурна діафрагма є найважливішою діафрагмою оптичної системи тому, що від її розмірів і положення залежить:

- розподіл функціональних ролей між іншими діафрагмами системи;
- величина потоку випромінення, яке проходить через оптичну систему і формує зображення;
- опромінення площини зображення як в зоні осьової точки, так і в периферійних зонах площини зображень;
- абераційні властивості оптичної систем, якість зображень;
- дифракційна, тобто потенційна просторова роздільна здатність;
- глибина простору, що спостерігається однаково «різко».

Як видно з переліченого, від апертурної діафрагми залежать майже всі важливі характеристики і параметри оптичної системи. Через це серед інших типів діафрагм її встановлюють в системі в першу чергу.

Ще однією важливою властивістю апертурної діафрагми, яка виділяє її серед всіх інших типів діафрагм, є те, що **апертурна діафрагма завжди присутня в оптичних системах. Не існують оптичні системи, як штучні, так і біологічні, в яких немає апертурної діафрагми.**



### 10.1.1. Порядок виявлення апертурної діафрагми в оптичній системі

Для виявлення апертурної діафрагми в оптичній системі потрібно мати наступні вихідні дані:

- конструктивні параметри оптичної системи або кардинальні параметри компонентів та їх взаємне розташування;
- світлові діаметри компонентів або діаметри отворів діафрагм;
- розташування діафрагм в системі;
- положення площини предметів або зображень відносно оптичної системи.

Пошук апертурної діафрагми здійснюється у наступному порядку:

1. Знаходять зображення всіх діафрагм у просторі предметів або у просторі зображень. Для цього від діафрагм спрямовують нульові промені в сторону обраного простору. Якщо відомо положення площини предметів, промені від діафрагм спрямовують справа наліво. При цьому знаходять зображення діафрагм в просторі предметів.

При заданій площині зображень промені від діафрагм спрямовують зліва направо, тобто відшуковують зображення діафрагм у просторі зображень.

Якщо на шляху вказаних променів оптично сильні компоненти ( $\Phi \neq 0$ ) не зустрічаються, то зображення діафрагми співпадає з самою діафрагмою і має той самий поперечний розмір. При наявності оптично сильних компонентів по ходу вказаних променів, зображення діафрагми (утворені цими компонентами) знаходять графічним чи аналітичним методом з використанням формул кутів і висот нульового променя або за допомогою формул Ньютона, Гауса.

#### **Примітки:**

1. *Вибір простору зображень діафрагм на кінцевий результат не впливає.*

2. *При виборі простору зображень доцільно керуватися обсягом зусиль, що потрібні для пошуку зображень всіх діафрагм і обирати той простір, який потребує менших зусиль.*

В якості прикладу на рис. 10.7 показано оптичну систему, в якій присутні три діафрагми і два тонких оптично сильних компонента, вказано положення площини предметів. Оптично сильні компоненти представлені їх кардинальними елементами – головними площинами 1 і 3. Між ними знаходиться екран з отвором 2. Компо-

ненти 1 і 2 поперечно обмежені діафрагмами (оправами). Система знаходиться у повітрі.

Оскільки задано положення площини предметів (ПП), то зображення діафрагм доцільно знаходити у просторі предметів, спрямовуючи промені від них справа наліво.

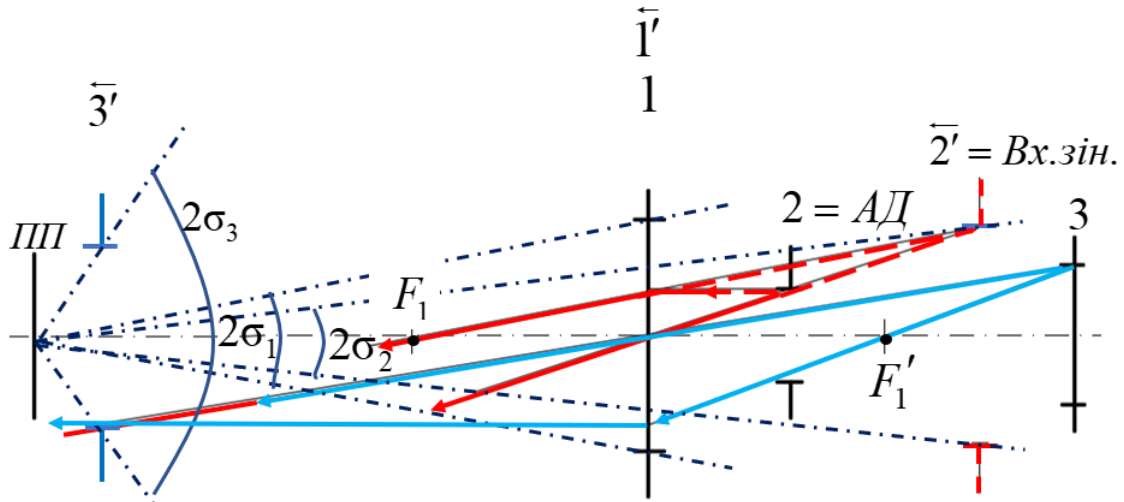


Рис. 10.7. До виявлення апертурної діафрагми в оптичній системі

Пошук зображень діафрагм можна здійснювати графічно або аналітично. При графічному методі від краю кожної діафрагми спрямовують два нульових променів в сторону простору предметів. Ці промені належать до категорії допоміжних відносно сусіднього компонента, див. п. 7.10, табл. 7.1, хід яких завідома відомий. Ці промені проходять або через точки фокусів сусіднього компонента, або через його головні або вузлові точки.

Вказані нульові промені від краю діафрагми 1 на рис. 10.7, спрямовані в сторону простору предметів, не зустрічають на своєму шляху оптично сильних компонентів, які б могли змінити їх траєкторію. Тому зображення діафрагми 1 у просторі предметів (позначено як  $\bar{1}'$ ) є суміщеним з самою діафрагмою і має такі самі розміри, як і діафрагма 1. Аналогічні промені, що йдуть від краю діафрагми 2, після проходження компонента 1 – розходяться, а тому перетинаються уявно і показують де знаходиться уявне зображення краю цієї діафрагми, позначеної як  $\bar{2}'$ . Промені від краю діафрагми 3, після проходження компонента 1 перетинаються дійсно і показують де знаходиться край дійсного зображення цієї діафрагми, позначеної як  $\bar{3}'$ .

2. Після завершення пошуку зображень діафрагм відшуковують те зображення, яке з осьової точки простору предметів спостері-

гається під найменшим кутом. Для цього з осьової точки проводять лінії до країв кожного зображення. На рис. 10.7 ці лінії показані штрих-пунктирними лініями. З того, що показано на рис. 10.7, видно, що найменший кут належить зображенню діафрагми  $\bar{2}'$ . Тому діафрагма 2 – **апертурна діафрагма**, позначена як АД на рис. 10.7, а її зображення  $\bar{2}'$  у просторі предметів має назву **вхідна зіниця** оптичної системи.

**Вхідна зіниця** – зображення в нульових променях апертурної діафрагми в просторі предметів, або сама апертурна діафрагма, якщо вона знаходиться перед оптичною системою в просторі предметів.

Якщо б площина предметів (ПП) знаходилася на нескінченності, то порівнювались би діаметри зображень діафрагм і у такому випадку зображення  $\bar{3}'$  через її менший діаметр слугувало би вхідною зіницею, а сама діафрагма 3 була б апертурною. З цього можна зробити наступний важливий висновок: *функція апертурної діафрагми може переходити від одної діафрагми оптичної системи до іншої діафрагми при зміні розташування площини предметів відносно оптичної системи.*

Кут  $2\sigma_2$ , показаний на рис. 10.7, є **переднім апертурним кутом** із стандартним позначенням  $2\sigma_A$ .

**Апертурний кут**  $2\sigma_A$  в просторі предметів – кут між двома променями, що виходить з осьової точки площини предметів та проходить через краї апертурної діафрагми або через краї вхідної зіниці, що є одне й те ж, оскільки апертурна діафрагма та вхідна зіниця оптично спряжені.

Пошук апертурної діафрагми оптичної системи на рис. 10.7 можна аналогічно здійснювати через простір зображень. Для цього потрібно вказати або знайти положення площини зображень (ПЗ) і здійснити пошук зображень всіх діафрагм у просторі зображень, направляючи нульові промені від країв діафрагм в сторону площини зображень, тобто зліва направо. З порівняння кутів, що утворюють лінії, проведені із осьової точки ПЗ через краї знайдених зображень, знаходять те зображення діафрагми, якому належить найменший кут. Це зображення має назву **вихідна зіниця** оптичної системи.

**Вихідна зіниця** – зображення в нульових променях апертурної діафрагми в просторі зображень, або сама апертурна діафрагма, якщо вона знаходиться за оптичною системою в просторі зображень.

**Вихідний апертурний кут**  $2\sigma'_A$  – кут між двома променями, що виходить з системи через краї вихідної зіниці і сходяться в осьовій точці площини зображень.

Апертурна діафрагма, вхідна зіниця і вихідна зіниця оптичної системи є оптично спряженими, тобто одна з них є зображенням іншої. Тому існує параметр оптичної системи – лінійне збільшення в зіницях:

$$\beta_{zin} = \frac{D'}{D}, \quad (10.1)$$

де  $D$  – діаметр вхідної зіниці,  $D'$  – діаметр вихідної зіниці.

## 10.2. Польова діафрагма та її властивості.

### Порядок виявлення в системі польової діафрагми

**Польова діафрагма** – діафрагма, що знаходиться у площині предметів (зображень), або в оптично спряженій площині з площиною предметів (зображень) та обмежує собою розмір лінійного чи кутового розміру поля зору оптичної системи у просторі предметів (зображень).

**Поле зору** оптичної системи у просторі предметів називають сукупність всіх тих її точок, які випромінюють промені, що проходять через оптичну систему і формують зображення предметів.

Поле зору оптичної системи у просторі предметів (зображень) – є зона, яку перекриває зображення польової діафрагми в площині предметів (зображень).

#### Ознаки польової діафрагми:

1. Польова діафрагма сама, або її зображення в просторі предметів (зображень) є суміщеною з площиною предметів (зображень).

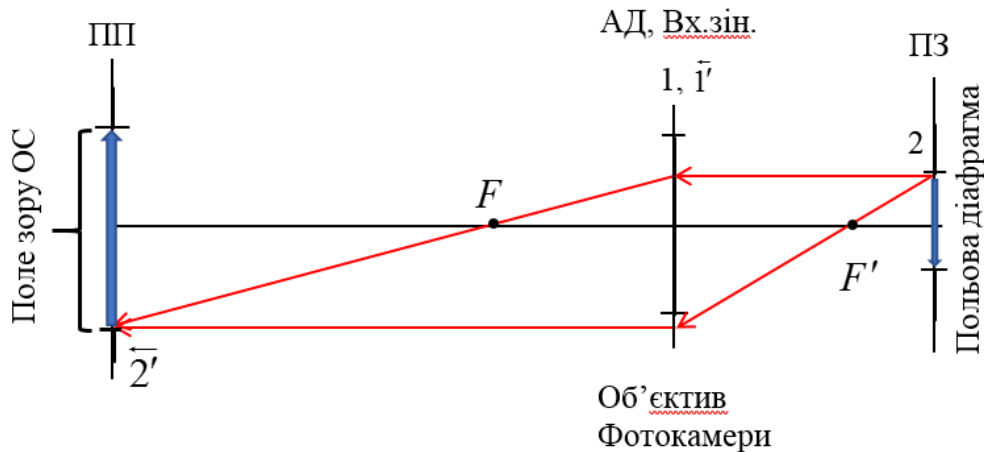
2. Із осьової точки вхідної (вихідної) зіниці зображення польової діафрагми в просторі предметів (зображень) серед всіх зображень діафрагм спостерігається під найменшим кутом.

Обидві ознаки є обов'язковими для приналежності діафрагми до типу польової. Якщо хоча б одна з них не має місця, то така діафрагма не може бути польовою.

Тому польова діафрагма, на відміну від апертурної, не завжди присутня в оптичних системах. Так в оптичній системі на рис.10.7 польової діафрагми не існує, тому що немає зображень діафрагм, суміщених з площиною предметів – відсутня ознака 1.

При наявності в оптичній системі польової діафрагми краї поля зору оптичної системи є «різко» обмеженими.

На рис.10.8 показано приклад спрощеної оптичної системи фотокамери – об'єктиву 1 з рамкою кадрового вікна 2. В цій системі присутня польова діафрагма – рамка кадрового вікна.



### 10.2.1. Порядок виявлення польової діафрагми в оптичній системі

Для виявлення польової діафрагми в оптичній системі використовують її ознаки в наступному порядку:

1. Знаходять апертурну діафрагму і вхідну (вихідну) зіницю оптичної системи.

2. Перевіряють наявність зображень діафрагм у просторі предметів (зображень), які є суміщеними з площиною предметів (зображень). У випадку відсутності таких зображень констатують невиконання першої ознаки польової діафрагми і факт її відсутності в оптичній системі. В протилежному випадку перевіряють виконання другої ознаки польової діафрагми.

3. Із осьової точки вхідної (вихідної) зіниці проводять лінії до країв зображень всіх діафрагм і порівнюють кути між цими лініями. Якщо із порівняння кутів зображенню конкретної діафрагми, яке суміщене з площиною предметів (зображень), належить найменший кут, то це означає, що виконується і друга ознака польової діафрагми, а тому така діафрагма є польовою.

**Зображення польової діафрагми** в площині предметів (зображень) **покриває** собою зону **поля зору** системи в площині предметів (зображень).

Пошук польової діафрагми можна показати на прикладі оптичної системи, рис. 10.8.

1. Пошук апертурної діафрагми. Нульові промені, спрямовані від країв діафрагм в сторону площини предметів, формують зображення  $\bar{1}'$  і  $\bar{2}'$ , рис. 10.8. Зображення  $\bar{2}'$  опинилось у площині предметів.

Із осьової точки площини предметів проводимо лінії до країв зображень діафрагм і встановлюємо, що під найменшим кутом із осьової точки площини предметів спостерігається зображення діафрагми  $\bar{1}'$ , тому воно є вхідною зіницею оптичної системи. Зображення  $\bar{2}'$  не може бути вхідною зіницею, тому що йому належить максимально великий кут  $180^\circ$  між вказаним лініями.

2. Для виявлення другої ознаки польової діафрагми з осьової точки вхідної зіниці потрібно провести лінії до країв зображень інших діафрагм і порівняти кути між цими лініями. Оскільки залишається для розгляду лише одне зображення  $\bar{2}'$ , то йому одразу присвоюється друга ознака.

Висновок – діафрагма 2 має дві ознаки польової діафрагми і тому є польовою. Зображення  $\bar{2}'$  в площині предметів вказує границі поля зору оптичної системи. Діаметр поля зору в площині предметів дорівнює діаметру зображення польової діафрагми  $\bar{2}'$ .

### 10.2.2. Розміри поля зору оптичної системи при наявності польової діафрагми

Поле зору оптичної системи у просторі предметів (зображень) при наявності польової діафрагми має лінійний або кутовий вимір. Лінійний – при кінцевій відстані від оптичної системи до площини предметів (зображень), кутовий – при безкінечній відстані до площини предметів (зображень).

Діаметр поля зору  $\varnothing_{III}$  в площині предметів

$$\varnothing_{III} = \varnothing_{II} \cdot \bar{\beta}_{II}, \quad (10.2)$$

де  $\varnothing_{II}$  – діаметр польової діафрагми;  $\bar{\beta}_{II} = \frac{n_k \sin \sigma_k}{n_1 \sin \sigma_1}$  – лінійне збільшення у оптично спряжених площинах ПД і ПП, рис. 10.9.

На рис. 10.9 показано нульовий промінь, який надходить в систему з осьової точки площини предметів і проходить через осьову точку польової діафрагми, а потім через осьову точку площини зображень;

$n_k$  – показник заломлення середовища, в якому знаходиться польова діафрагма.

Діаметр поля зору в площині зображень визначається аналогічно

$$\varnothing'_{ПЗ} = \varnothing_{ПД} \cdot \vec{\beta}_{ПД}, \quad (10.3)$$

де  $\vec{\beta}_{ПД} = \frac{n_k \sin \sigma_k}{n_{p+1} \sin \sigma_{p+1}}$  – лінійне збільшення у оптично спряжених площинах ПД і ПЗ, рис. 10.9, або за формулою:

$$\varnothing'_{ПЗ} = \varnothing_{ПП} \cdot \beta, \quad (10.4)$$

де  $\beta = \frac{n_1 \sin \sigma_1}{n_{p+1} \sin \sigma_{p+1}}$  – лінійне збільшення у оптично спряжених ПП і ПЗ, рис. 10.9.

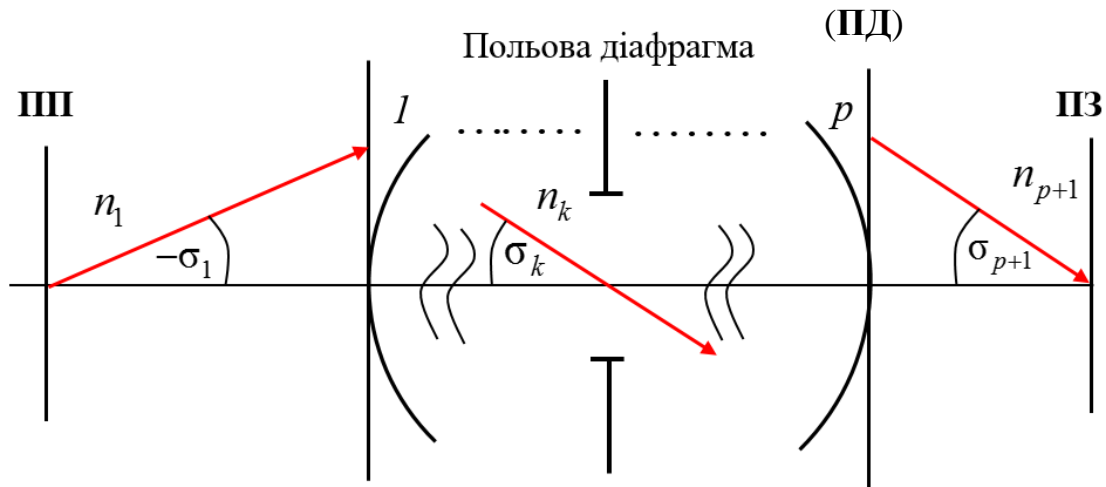


Рис. 10.9. До визначення розмірів поля зору оптичної системи:  
 ПП – площина предметів, ПЗ – площина зображень

Коли площина предметів знаходиться на безкінечності, кутовий діаметр поля зору оптичної системи в просторі предметів  $2\omega$  визначається двома променями, які проходять через осьову точку вхідної зіниці та через краї польової діафрагми, рис. 10.10.

В системах, які формують зображення на нескінченності, кут поля зору  $2\omega'$  у просторі зображень утворюється двома променями, які проходять через краї польової діафрагми і осьову точку вихідної зіниці.

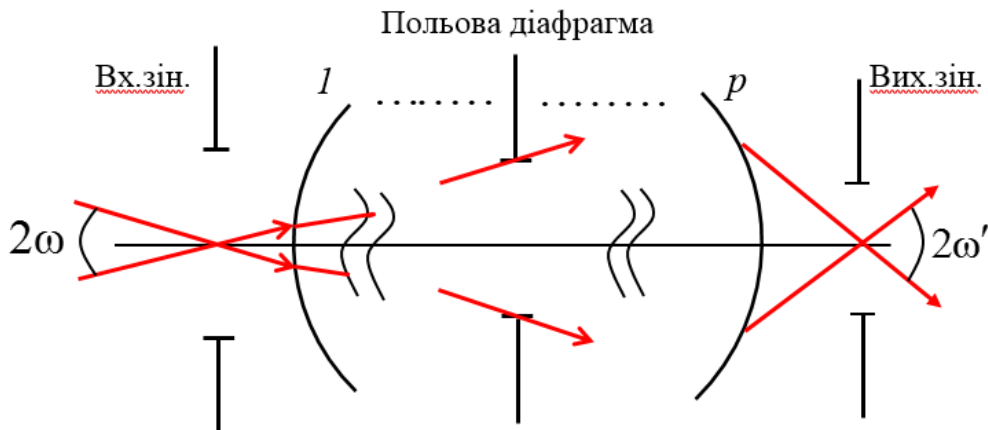


Рис. 10.10. До визначення кутів поля зору у просторі предметів і у просторі зображень

В телескопічних системах, у яких площина предметів і площина зображень знаходяться на нескінченності, кути  $\omega$  і  $\omega'$  пов'язані кутовим збільшенням  $\gamma$ :

$$\operatorname{tg} \omega' = \gamma \cdot \operatorname{tg} \omega. \quad (10.5)$$

### 10.3. Вільєтна діафрагма та її властивості. Порядок виявлення в системі вільєтних діафрагм

**Вільєтна** – будь-яка діафрагма оптичної системи, яка ні апертурна, ні польова. Саме це є її ознакою. Вона не обмежує осьовий пучок променів, але частково або повністю обмежує позаосьові пучки променів, які виходять із позаосьових точок площини предмету.

#### 10.3.1. Порядок виявлення вільєтних діафрагм в оптичній системі

Базується на їх властивості не належати до апертурної і до польової:

1. Знаходять апертурну діафрагму.
2. Знаходять польову діафрагму (якщо вона присутня в системі).
3. Всі інші діафрагми оптичної системи є вільєтними.

Для прикладу повернемося до оптичної системи, що на рис. 10.7. Вона має три діафрагми. Виявлено, що діафрагма 2 є апертурною.

Діафрагми 1 та 3 не відповідають першій ознаці польової діафрагми, а це означає, що вони не можуть бути польовою. Тому за вище наведеним визначенням вони є вільєтними.



Віньєтні діафрагми зрізають частково, або повністю пучки променів, які надходять в систему від позаосьових точок площини предметів. Тому у випадку відсутності в системі польової діафрагми одна з віньєтних діафрагм системи бере на себе функцію обмеження розмірів поля зору.

**Віньєтна діафрагма, що обмежує поле зору системи,** має таке зображення у просторі предметів (зображень), яке з осьової точки вхідної (вихідної) зіниці серед всіх інших зображень віньєтних діафрагм видно під найменшим кутом.

На рис. 10.11 ще раз показана оптична система, яка представлена на рис. 10.7. Із осьової точки вхідної зіниці проведені штрихові лінії до країв зображень  $\bar{1}'$  та  $\bar{3}'$  віньєтних діафрагм 1 і 2. Видно, що з осьової точки вхідної зіниці зображенню  $\bar{3}'$  належить менший кут, тому діафрагма 3 є віньєтною, що обмежує поле зору оптичної системи у просторі предметів, вона позначена як  $ВД_{\Pi}$ .

Зображення  $\bar{3}'$  має назву вхідного вікна оптичної системи.

**Вхідне (вихідне) вікно оптичної системи** є зображення у просторі предметів (зображень) у нульових променях тієї віньєтної діафрагми, що обмежує поле зору оптичної системи.

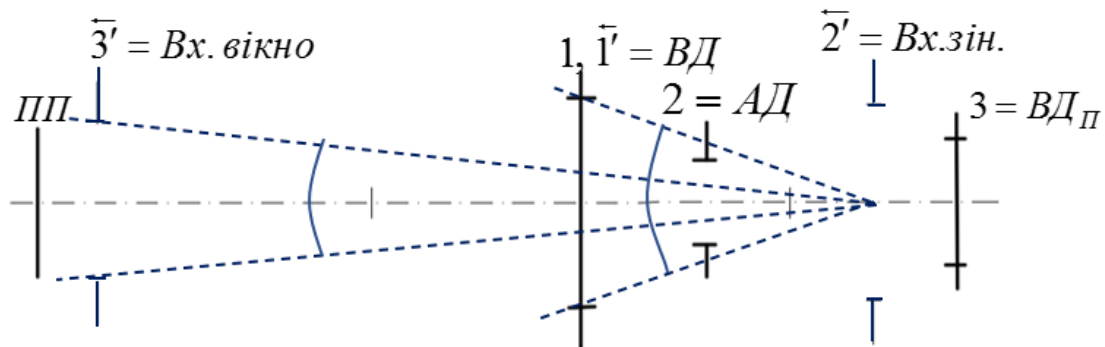


Рис. 10.11. До визначення віньєтної діафрагми, що обмежує поле зору і вхідного вікна оптичної системи

### 10.3.2. Віньєтування нахилених пучків променів. Розміри поля зору при його обмеженні віньєтною діафрагмою

Для аналізу віньєтування (зрізання) променів позаосьових пучків в оптичній системі достатньо мати дані про положення і розміри вхідного вікна системи, положення і розмірів вхідної зіниці, а також положення відносно них площини предметів (див. рис. 10.12). Зображення самої оптичної системи на рисунку не потрібне.

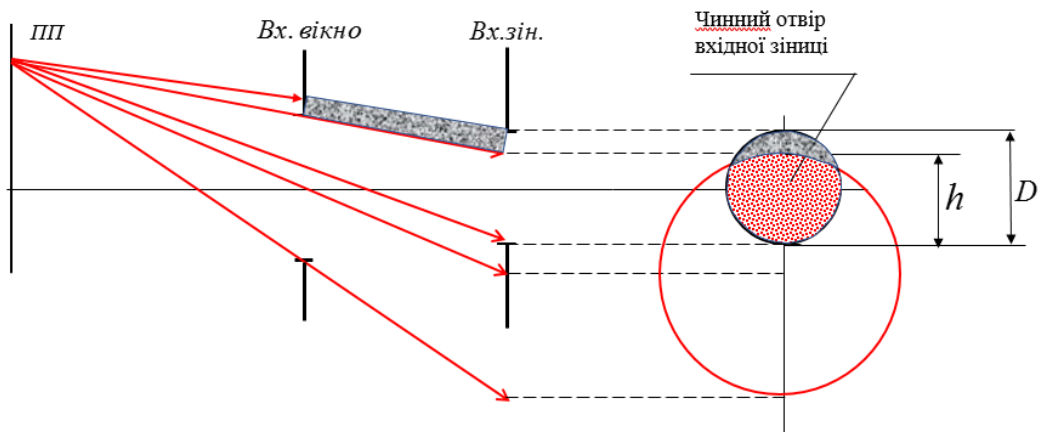


Рис. 10.12. Вільєтування променів позаосьового пучка вільєтною діафрагмою, що обмежує поле зору оптичної системи. Справа показана площина вхідної зіниці, повернута на  $90^\circ$  навколо вертикальної осі

Із позаосьової точки площини предметів виходить пучок променів. Якби в системі не було вільєтної діафрагми і вхідного вікна, то вхідна зіниця могла бути повністю заповненою променями. Але через дію вільєтної діафрагми отвір вхідної зіниці заповнений променями лише частково.

Зона, де промені заповнюють вхідну зіницю, має назву **чинний отвір вхідної зіниці**, рис. 10.12. Всі промені, що надходять у чинний отвір вхідної зіниці, проходять через всю оптичну систему, досягають площини зображень і формують в ній зображення площини предметів.

Степінь заповнення вхідної зіниці променями позаосьового пучка визначають **коефіцієнтом геометричного вільєтування**

$$k_Q = \frac{Q_\omega}{Q}, \quad (10.6)$$

де  $Q_\omega$  – площа чинного отвору вхідної зіниці;  $Q$  – площа вхідної зіниці.

В практиці аналізу і синтезу оптичних систем часто використовують **коефіцієнт лінійного вільєтування**

$$k_\omega = \frac{h}{D}, \quad (10.7)$$

де лінійні параметри  $h$ ,  $D$  показані на рис. 10.12.

Значення  $k_\omega$  мало відрізняється від значення  $k_Q$ , якщо  $k_\omega \geq 0.5$ , проте значення  $k_\omega$  простіше розраховується і задається як вихідний параметр допустимого вільєтування позаосьових пучків променів.

### 10.3.3. Розміри поля зору оптичної системи при його обмеженні віньєтувальною діафрагмою

На рис. 10.13 показано три випадки віньєтування пучків променів віньєтною діафрагмою. На рис. 10.13, *а* показано предметну точку з координатою  $y_{k_\omega=1}$ , від якої промені повністю заповнюють отвір вхідної зіниці, коефіцієнт лінійного віньєтування дорівнює одиниці і віньєтування відсутнє. На рис. 10.13, *б* предметна точка з координатою  $y_{k_\omega=0.5}$  лише наполовину здатна заповнювати своїми променями отвір вхідної зіниці. Від точки з координатою  $y_{k_\omega=0}$ , рис. 10.13, *в* жоден промінь не проходить через вхідну зіницю, спостерігається повне віньєтування променів, через що її зображення відсутнє у площині зображень. Ця точка знаходиться на краю поля зору оптичної системи, обмеженого віньєтною діафрагмою.

Значення  $2y_{k_\omega=1}$ ,  $2y_{k_\omega=0.5}$ ,  $2y_{k_\omega=0}$  є діаметрами зон у площині предметів, з відповідним значеннями коефіцієнту віньєтування на краю цих зон. Таким чином розміри поля зору оптичної системи, обмеженого віньєтною діафрагмою, відповідають конкретним значенням коефіцієнту віньєтування на краю цього поля.

**Поле зору при  $k_\omega = 1$ , рис. 10.13, *а*.**

Згідно рис. 10.13, *а* діаметр поля зору  $2y_{k_\omega=1} = 2(h + h_2)$ , де  $h = 0.5D_{\text{вх.зінк.}}$ ,  $h_2 = (b + c)tg\omega$ ,  $tg\omega = \frac{h_1}{c} = \frac{0.5(D_{\text{вх.вікн.}} - D_{\text{вх.зінк.}})}{c}$ , звідки

$$\boxed{2y_{k_\omega=1} = \frac{b+c}{c}(D_{\text{вх.вікн.}} - D_{\text{вх.зінк.}}) + D_{\text{вх.зінк.}}} \quad (10.8)$$

Якщо предметна площина знаходиться на безкінечності, то кутовий розмір поля зору

$$\boxed{2\omega_{k_\omega=1} = 2\arctg \frac{0.5(D_{\text{вх.вікн.}} - D_{\text{вх.зінк.}})}{c}} \quad (10.9)$$

**Поле зору при  $k_\omega = 0.5$ , рис. 10.13, *б*.**

Згідно рис. 10.13, *б* діаметр поля зору  $2y_{k_\omega=0.5} = 2(b + c)tg\omega$ , де  $tg\omega = \frac{0.5D_{\text{вх.вікн.}}}{c}$ , тому

$$\boxed{2y_{k_\omega=0.5} = \frac{b+c}{c}D_{\text{вх.вікн.}}} \quad (10.10)$$

Якщо предметна площина знаходиться на безкінечності, то кутовий розмір поля зору

$$2\omega_{k_\omega=0.5} = 2\arctg\left(\frac{0.5D_{\text{ex.вікн.}}}{c}\right). \quad (10.11)$$

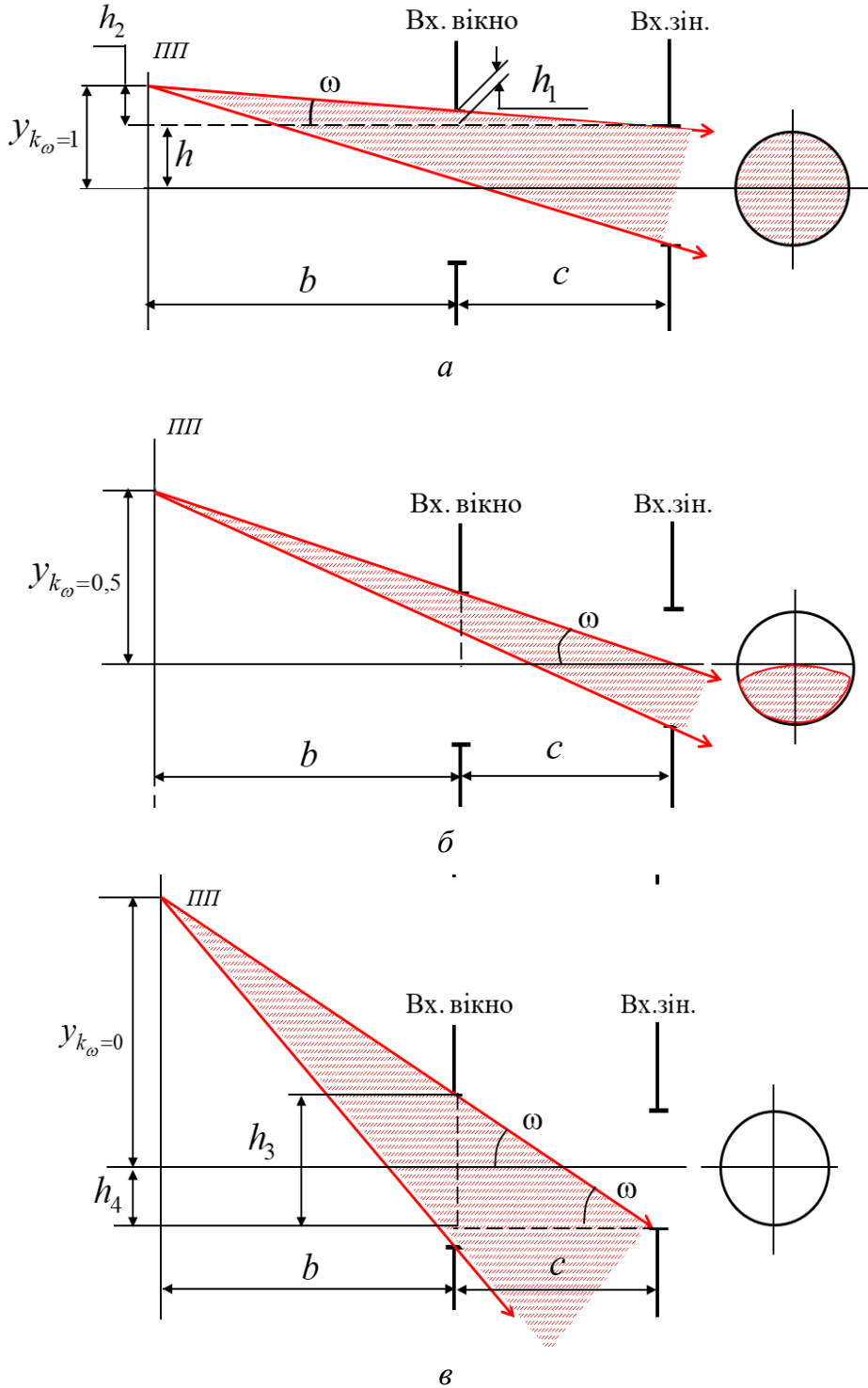


Рис. 10.13. До встановлення розмірів поля зору оптичної системи обмеженого в'єстувальною діафрагмою

Поле зору при  $k_\omega = 0$ , рис. 10.13, в.

З рис. 10.13, в видно, що  $\frac{y_{k_\omega=0} + h_4}{b+c} = \text{tg } \omega$ ,  $h_4 = 0.5D_{\text{ex.zin.}}$ , звідки  $2y_{k_\omega=0} = 2(b+c)\text{tg } \omega - D_{\text{ex.zin.}}$ , де  $\text{tg } \omega = \frac{h_3}{c} = \frac{0.5(D_{\text{ex.vikn.}} + D_{\text{ex.zin.}})}{c}$  і

$$\boxed{2y_{k_\omega=0} = \frac{b+c}{c}(D_{\text{ex.vikn.}} + D_{\text{ex.zin.}}) - D_{\text{ex.zin.}}} \quad (10.12)$$

Якщо предметна площина знаходиться на безкінечності, то кутовий розмір поля зору

$$\boxed{2\omega_{k_\omega=0} = 2\text{arctg} \left[ \frac{0.5(D_{\text{ex.vikn.}} + D_{\text{ex.zin.}})}{c} \right]} \quad (10.13)$$

Із наведених формул (10.8)–(10.13) можна зробити висновок, що при віддаленні предметної точки від оптичної осі в площині предметів до значення  $y = y_{k_\omega=1}$  вхідна зіниця є заповненою повністю, тому в зображенні цієї зони можна очікувати сталу освітленість. При подальшому віддаленні предметної точки від оптичної осі спостерігається поступове зменшення коефіцієнта вильєтування від одиниці до нуля. Ясно, що це повинно супроводжуватися зменшенням освітленості периферійних зон зображення аж до нуля. Звідки висновок – при обмеженні поля зору оптичної системи вильєтних діфрагмою краї поля зору виглядають не «різко», як це спостерігається при наявності польової діфрагми.

**Примітка:** В оптичній системі можуть існувати декілька вильєтних діфрагм, які здатні викликати двостороннє вильєтування поля зору. Про те обмеження поля зору починається однією з них, а інші починають зрізати позаосьові пучки по мірі подальшого віддалення предметної точки від оптичної осі.

## РОЗДІЛ 11. ФОРМУВАННЯ І ПЕРЕДАЧА ОПТИЧНОЮ СИСТЕМОЮ ПОТОКІВ ВИПРОМІНЕННЯ

Оптичне випромінювання – процес розповсюдження у просторі енергії електромагнітних хвиль оптичного діапазону. Про це свідчать явища перетворення світлової енергії:

- в електричну у сонячних панелях та фотоелектричних приймачах, рис. 11.1, *а*;
- в теплову енергію через нагрівання тіл, рис. 11.1, *б*;
- у фотосинтез, завдяки якому існує рослинність, що акумулює в собі енергію сонячного випромінювання, рис. 11.1 *в*;
- у механічну енергію через механічний тиск світла на тверді частки тіла комети, який викликає появу хвоста комети при наближенні її до Сонця, рис. 11.1 *г*.

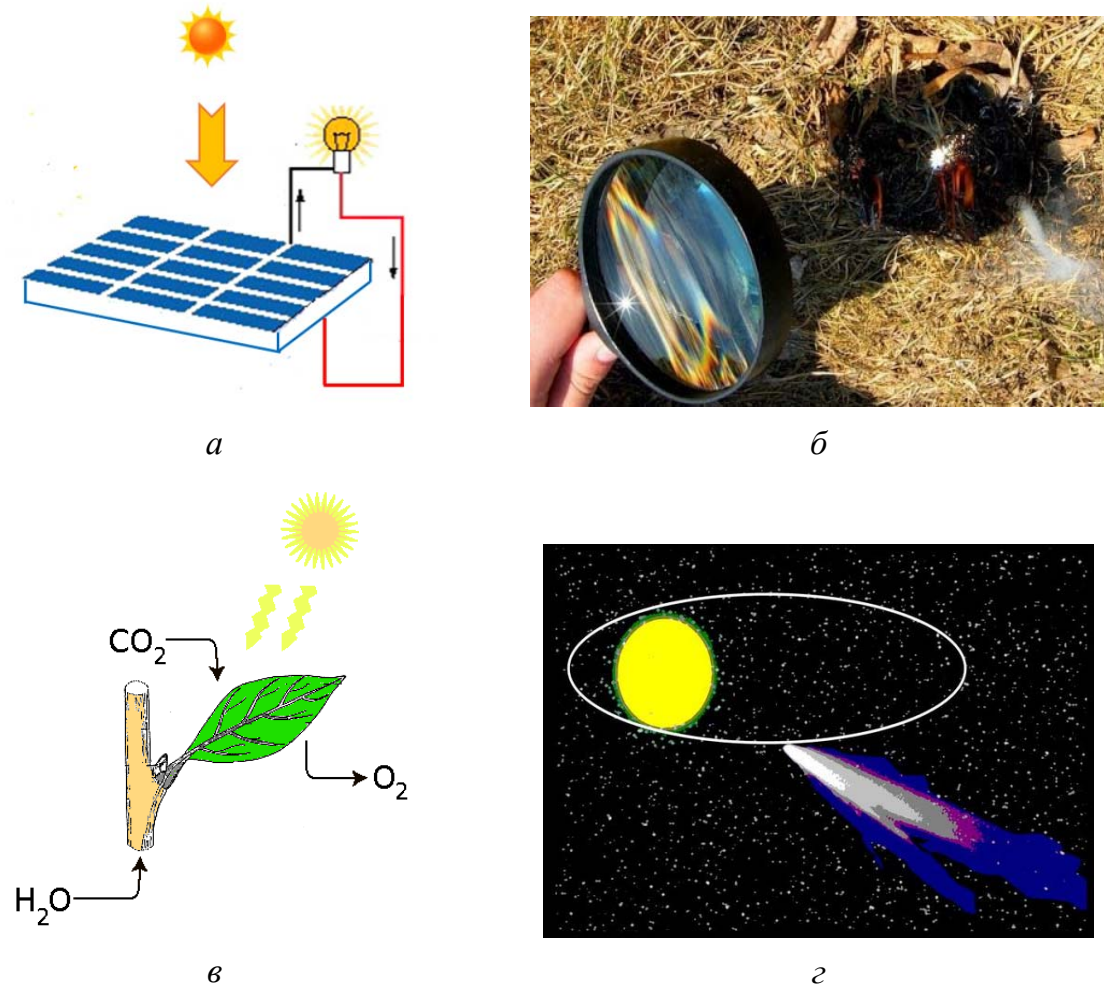


Рис. 11.1. Перетворення енергії оптичного випромінювання у інші форми енергії

Наведені приклади підтверджують – оптичне випромінення здатне здійснювати роботу, яка потребує затрат енергії.

Кінцева мета використання оптичної системи у приладах чи у технологічному устаткуванні – передача і формування потоків оптичного випромінення для перетворення його енергії у інші форми енергії. Це дозволяє в кінцевому результаті отримувати інформацію чи передавати інформацію, або здійснювати технологічні операції. Тому при аналізі та синтезі оптичних систем виконують енергетичні розрахунки, задачею яких, як правило, є кількісна оцінка енергії оптичного випромінення, що проходить через оптичну систему від випромінювачів і передається по призначенню, а також кількісна оцінка просторової щільності розподілу цієї енергії у площині зображень.

Променева оптика базується на понятті абстрактного променя, який не містить в собі енергію світла через відсутність у промені просторового об'єму. Тому для енергетичних розрахунків використовується нова абстракція – світлова трубка, яка на відміну від променя займає у просторі кінцевий об'єм і може містити в собі енергію випромінення. Такий підхід дозволив на базі променевої теорії розглядати оптичну систему як передатчик енергії випромінення у трубках і здійснювати на цій основі енергетичні розрахунки оптичних систем.

Енергетичні розрахунки неможливі без даних про параметри та характеристики випромінювальної здатності джерел оптичного випромінення. Тому у наступному пункті розглядаються ці параметри і характеристики.

## **11.1. Джерела оптичного випромінення, параметри та характеристики їх випромінювальної здатності**

### **11.1.1. Потік оптичного випромінення**

**Потік випромінення** – кількість енергії, яка переноситься електромагнітними хвилями оптичного діапазону через обмежений простір за одиницю часу.

В механіці витрачену чи вивільнену за одну секунду енергію в Джоулях характеризують як потужність з одиницею виміру Ватт:

$$W_T = \frac{Дж}{с}.$$

Фотоелектричні приймачі, що перетворюють оптичне випромінювання в електричні сигнали, дозволили вимірювати потік випромінювання через вимірювання потужності фотоелектричного сигналу, викликаного цим потоком. Тому в оптиці **енергетичний потік випромінювання – середня в часі енергетична потужність, яка оцінюється у всьому оптичному діапазоні** і також вимірюються у Ваттах і позначають  $\Phi_e$ .

Перші спроби кількісно оцінювати потік випромінювання відбувалися до винаходу фотоелектричних приймачів. Єдиним на той час мірилом світла був зоровий орган людини. Використовувалось відчуття ока на кількість потоку видимого оптичного випромінювання – світла, що надходило в око у видимому діапазоні довжин електромагнітних хвиль від 0.4 мкм до 0.77 мкм. Саме тоді з'явилася суб'єктивна одиниця потоку світла з позначенням 1 люмен (Лм). Ця одиниця, з позначенням  $\Phi$ , та інші, які пов'язані з нею і які відносяться лише до видимого діапазону, отримали назву **фотометричних одиниць** на відміну від енергетичних.

Кількісний зв'язок між  $\Phi_e$  і  $\Phi$  буде показано нижче.

#### **Спектральна щільність оптичного випромінювання**

Джерела суттєво відрізняються спектральним складом оптичного випромінювання. Одні джерела випромінюють кольорове світло, інші – біле, є джерела ультрафіолетового випромінювання, є джерела інфрачервоного випромінювання. Цей фактор має суттєве значення при енергетичних розрахунках оптичних систем. Тому ще однією важливою характеристикою джерел випромінювання є **спектральна щільність потоку** оптичного випромінювання, яка характеризує щільність потоку випромінювання у вузькому спектральному діапазоні довжин  $\lambda$  електромагнітних хвиль:

– енергетична:

$$\varphi_e(\lambda) = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi_e(\lambda)}{\Delta\lambda} = \frac{d\Phi_e(\lambda)}{d\lambda}; \quad \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{мкм}} \right] \quad (11.1)$$

– фотометрична:

$$\varphi(\lambda) = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi(\lambda)}{\Delta\lambda} = \frac{d\Phi(\lambda)}{d\lambda}, \quad \left[ \frac{\text{Лм}}{\text{мкм}} \right] \quad (11.2)$$

де  $\lambda$  – довжина електромагнітної хвилі у [мкм].

За виглядом графіка функції  $\varphi_e(\lambda)$  або  $\varphi(\lambda)$  джерела випромінювання розділяють на дві основні групи: джерела із **лінійчатим**



**спектром**, при якому функція спектральної щільності є визначеною на вузькому або на вузьких інтервалах спектру, рис. 11.2, *а* та джерела із **суцільним спектром**, коли функція спектральної щільності визначена безперервно в широкому діапазоні спектру, рис. 11.2, *б*.

Лінійчатий спектр мають випромінення лазерів, розжарених газів, напівпровідникових світлодіодів, суцільний спектр характерний для нагрітих твердих тіл та рідин.

Формули (11.1), (11.2) дозволяють розраховувати потік випромінення джерела у заданому спектральному діапазоні  $\lambda_1 - \lambda_2$  :

$$\Phi_e = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varphi_e(\lambda) d\lambda; \quad (11.3)$$

$$\Phi = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varphi(\lambda) d\lambda. \quad (11.4)$$

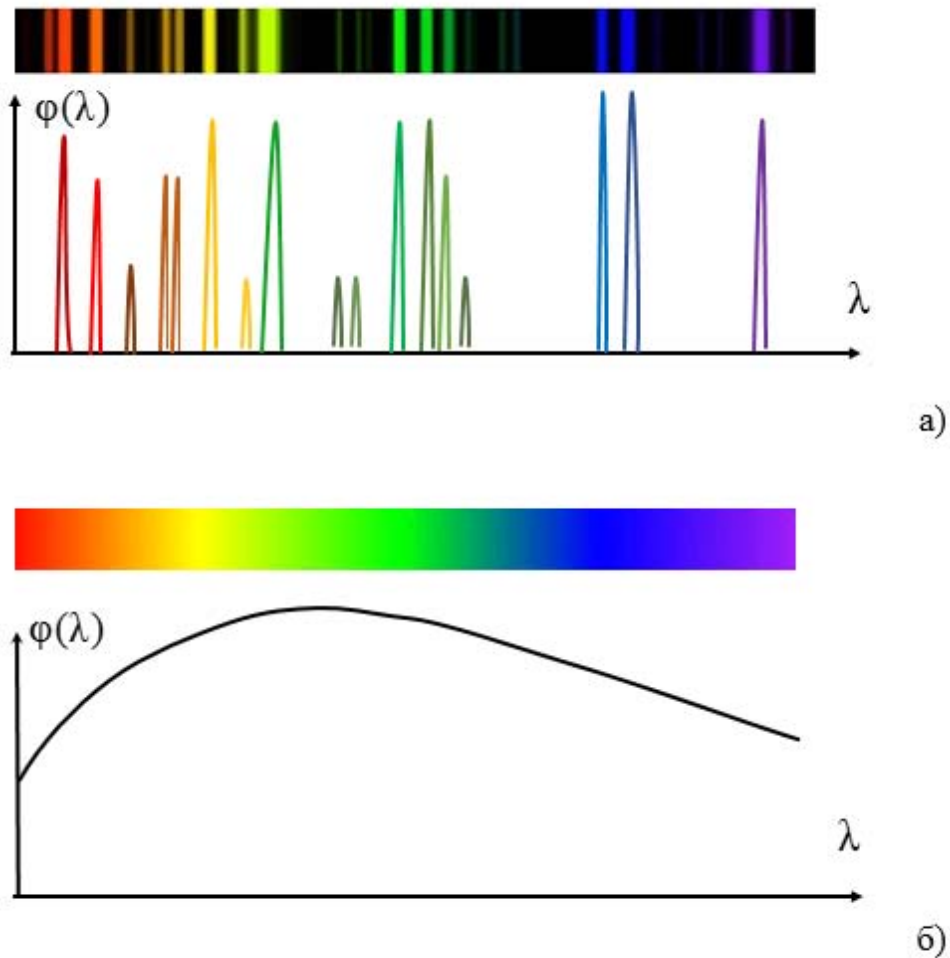


Рис. 11.2. Графіки відносної спектральної щільності оптичного випромінення: *а* – лінійчатий спектр; *б* – суцільний спектр

### Зв'язок між одиницями енергетичного та фотометричного потоку випромінювання

Зв'язок між одиницями енергетичного та фотометричного (світлового) потоку випромінювання обумовлений селективною світлочутливістю фоторецепторів ока людини. Зоровий орган людини сприймає як відсутнє випромінювання за межами діапазону довжин електромагнітних хвиль [0.38–0.77] мкм.

Відносна чутливість ковбочок сітківки на монохроматичне випромінювання видимого діапазону при денному зорі відображена графіком функції  $V(\lambda)$ , рис. 11.3, яка має назву **відносної спектральної світлової ефективності**. Під ефективністю розуміється ефект реакції зорового органу на світло конкретного кольору. Як видно з графіка функції  $V(\lambda)$  має максимум на довжині хвилі 0.555 мкм, тобто в зоні жовто-зеленого кольору монохроматичного світла, що пояснюється адаптацією зору людини до кольору, який є переважним у навколишньому середовищі – кольору рослин, освітлених сонячним випромінюванням.

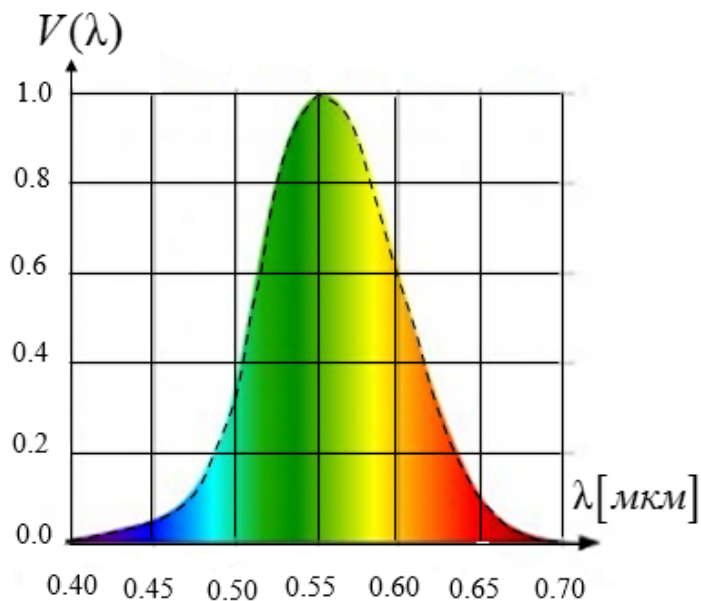


Рис. 11.3. Графік відносної спектральної світлової ефективності денного зору

Таблиця 11.1

## Значення функції відносної спектральної світлової ефективності

$\lambda$ [мкм]	$V(\lambda)$	$\lambda$ [мкм]	$V(\lambda)$	$\lambda$ [мкм]	$V(\lambda)$	$\lambda$ [мкм]	$V(\lambda)$	$\lambda$ [мкм]	$V(\lambda)$
0.38	$4 \cdot 10^{-5}$	0.46	0.060	0.54	0.954	0.62	0.381	0.70	0.004
0.39	$1.2 \cdot 10^{-4}$	0.47	0.091	0.55	0.995	0.63	0.265	0.71	0.002
0.40	$4 \cdot 10^{-4}$	0.48	0.139	0.56	0.995	0.64	0.175	0.72	0.001
0.41	$1.2 \cdot 10^{-3}$	0.49	0.208	0.57	0.952	0.65	0.107	0.73	$5.2 \cdot 10^{-3}$
0.42	0.004	0.50	0.323	0.58	0.870	0.66	0.061	0.74	$2.5 \cdot 10^{-3}$
0.43	0.0116	0.51	0.503	0.59	0.757	0.67	0.032	0.75	$1.2 \cdot 10^{-4}$
0.44	0.023	0.52	0.710	0.60	0.631	0.68	0.017	0.76	$6 \cdot 10^{-5}$
0.45	0.038	0.53	0.862	0.61	0.503	0.69	0.008	0.77	$3 \cdot 10^{-5}$

Значення функції  $V(\lambda)$  визначені експериментально, їх можна достатньо точно апроксимувати виразом

$$V(\lambda) = \exp(0.302t - 268.992t^2 + 853.649t^3 - 6462t^4), \quad (11.5)$$

де  $t = \lambda - 0.555$  у мкм.

Експериментально встановлено, що енергетичний потік випромінювання величиною у 1 Вт на довжині світлової хвилі  $\lambda = 0.555$  мкм еквівалентний за своєю дією на зоровий орган людини світловому потоку на тій самій довжині хвилі величиною у 683 Лм. Тому на вказаній довжині хвилі **коефіцієнт світлової ефективності**

$$K(\lambda = 0.555 \text{ мкм}) \cong 683 \frac{\text{Лм}}{\text{Вт}}.$$

Вказане значення відповідає максимальній світловій спектральній ефективності. На інших довжинах хвиль

$$K(\lambda) = 683 \cdot V(\lambda) \left[ \frac{\text{Лм}}{\text{Вт}} \right]. \quad (11.6)$$

Якщо виникає потреба визначити скільки світлового потоку в люменах знаходиться в одному Ваті випромінювання конкретного випромінювача з відомою енергетичною спектральною щільністю потоку  $\varphi_e(\lambda) \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{мкм}} \right]$ , то це можна зробити за формулою

$$\frac{\Phi[\text{Лм}]}{\Phi_e[\text{Вт}]} = \frac{683 \int_{0.38}^{0.77} V(\lambda) \varphi_e(\lambda) d\lambda}{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varphi_e(\lambda) d\lambda}, \quad (11.7)$$

де  $\lambda_1 - \lambda_2$  спектральний діапазон випромінення випромінювача.

В чисельнику виразу (11.7) знаходиться інтегральний фотометричний (світловий) потік у люменах конкретного випромінювача, а в знаменнику – інтегральний енергетичний потік у Ваттах того самого випромінювача.

У випадку, коли випромінення джерела можна вважати монохроматичним, тобто функція  $\varphi_e(\lambda)$  визначена тільки для одного значення  $\lambda$  (або дуже вузького інтервалу  $\lambda$ , в якому функція  $V(\lambda)$  майже не змінюється), вираз (11.7) перетворюється до вигляду:

$$\frac{\Phi[\text{Лм}]}{\Phi_e[\text{Вт}]} = \frac{683 \int_{0.38}^{0.77} V(\lambda) \varphi_e(\lambda) d\lambda}{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varphi_e(\lambda) d\lambda} = \frac{683 \cdot V(\lambda_g) \cdot \varphi_e(\lambda_g)}{\varphi_e(\lambda_g)} = 683 \cdot V(\lambda_g),$$

або

$$\Phi_g[\text{Лм}] = 683 \cdot V(\lambda_g) \cdot \Phi_{eg}[\text{Вт}], \quad (11.8)$$

де  $\lambda_g$  – довжина хвилі монохроматичного випромінення джерела.

**Завдання 11.1.** Лазерний діод випромінює на довжині хвилі 0.63 мкм енергетичний потік  $3 \cdot 10^{-3}$  Вт. Чому дорівнює фотометричний потік цього лазерного діода?

**Розв'язання.** Лазерний діод має майже монохроматичне випромінення, тому для розрахунку  $\Phi$  достатньо знайти з табл. 11.1 значення  $V(\lambda)$  на довжині хвилі випромінення діоду, або розрахувати це значення за формулою (11.5), і використати його для розрахунку світлового потоку за формулою (11.8).

Згідно табл. 11.1  $V(0.63) = 0.265$ , тому

$$\Phi_g[\text{Лм}] = 683 \cdot V(\lambda_g) \cdot \Phi_{eg}[\text{Вт}] = 683 \left[ \frac{\text{Лм}}{\text{Вт}} \right] \cdot 0.265 \cdot 3 \cdot 10^{-3} [\text{Вт}] = 0.543 \text{ Лм}.$$

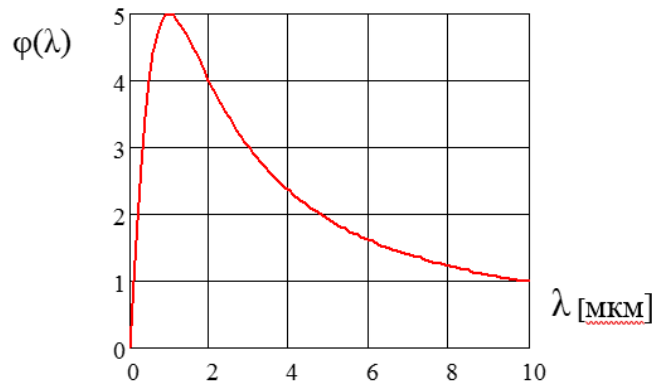
**Завдання 11.2.** Скільки світлового потоку в люменах випромінює лазерний діод на довжині хвилі 0.9 мкм, якщо його енергетичний потік дорівнює 10 мВт?

**Розв'язання.** У лазерного діода випромінення майже монохроматичне, тому для розрахунку  $\Phi_e$  [Лм] можна використовувати формулу (11.8).

На довжині хвилі 0.9 мкм  $V(0.9) = 0$ , тому при підстановці цього значення у формулу (11.8) отримуємо нуль люменів. Це означає що світловий потік у випроміненні вказаного лазерного діода відсутній.

**Завдання 11.3.** Спектральна щільність енергетичного потоку випромінення у випромінювача  $\varphi_e(\lambda) = \frac{10\lambda}{\lambda^2 + 1} \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{мкм}} \right]$  (див. графік).

Розрахувати фотометричний потік в люменах, що який знаходиться у одному Ватті енергетичного потоку випромінювача, в діапазоні  $\lambda \in [0.2 - 10]$  мкм.



**Розв'язання.** Спектр випромінення є суцільним, про що свідчить графік функції  $\varphi_e(\lambda)$ , тому розрахунок потрібно здійснювати за формулою (11.7) з використанням апроксимації (11.5):

$$\frac{\Phi[\text{Лм}]}{\Phi_e[\text{Вт}]} = \frac{683 \int_{0.38}^{0.77} \left[ \exp(0.302t - 268.992t^2 + 853.649t^3 - 6462t^4) \right] \cdot \left[ \frac{10\lambda}{\lambda^2 + 1} \right] d\lambda}{\int_{0.1}^{10} \frac{10\lambda}{\lambda^2 + 1} d\lambda},$$

де  $t = \lambda - 0.555$ .

Згідно розрахунків в Mathcad:

$$683 \int_{0.38}^{0.77} \left[ \exp(0.302t - 268.992t^2 + 853.649t^3 - 6462t^4) \right] \cdot \left[ \frac{10\lambda}{\lambda^2 + 1} \right] d\lambda = 0.432[\text{Лм}];$$

$$\int_{0.1}^{10} \frac{10\lambda}{\lambda^2 + 1} d\lambda = 23.026[\text{Вт}], \text{ тому } \frac{\Phi[\text{Лм}]}{\Phi_e[\text{Вт}]} = \frac{0.432[\text{Лм}]}{23.026[\text{Вт}]} = 0.01876 \left[ \frac{\text{Лм}}{\text{Вт}} \right].$$

## 11.2. Параметри просторового розподілу випромінення від точкових та протяжних джерел

Джерела оптичного випромінення розділяють за ознакою їх кутового чи лінійного розміру на два типи: **точкові джерела** і **протяжні джерела**.

**Точковими є джерела**, лінійна відстань до яких є набагато більшою лінійних розмірів цих джерел. Прикладами точкових джерел слугують зірки, планети, віддалені земні штучні джерела – освітлювальні ліхтарі, фари дуже віддалених транспортних засобів та інше.

**Протяжними є джерела** відстань до яких умовно не більш як у 10 разів перевищує їх лінійний розмір. Приклади протяжних джерел – Сонце, Луна, небо у денний час, освітлені Сонцем чи Луною оточуючи предмети, земна поверхня, випромінюючий екран телевізора, екран монітора комп'ютера, мобільного телефона та інше.

### 11.2.1. Точкові джерела випромінення

Лінійні розміри точкових джерел, як правило, є невідомими, тому випромінювальна здатність точкових джерел, визначається кількістю потоку, що випромінює таке джерело в заданому тілесному

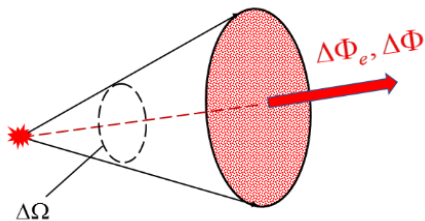


Рис. 11.4.  $\Delta\Omega$  – тілесний кут

куті, рис. 11.4. Такий параметр має назву **сила випромінення** енергетична або фотометрична залежно від спектру випромінення.

**Енергетична  $I_e$  та фотометрична**

**$I$  сила випромінення  $I_e$  – кутова щільність потоку випромінення, її формула:**

$$I_e \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{ср}} \right] = \lim_{\Delta\Omega \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi_e}{\Delta\Omega} = \frac{d\Phi_e}{d\Omega} \quad (11.9)$$

Аналогічно

$$I \left[ \text{Кд} = \frac{\text{Лм}}{\text{ср}} \right] = \lim_{\Delta\Omega \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta\Omega} = \frac{d\Phi}{d\Omega} \quad (11.10)$$

**Стерадіан** – одиниця вимірювання тілесного (просторового) кута, утвореного конусом з вершиною у центрі сфери, який на по верхні цієї сфери вирізає ділянку площиною  $Q = R^2$ , де  $R$  радіус сфери, рис. 11.5. Таким чином, для визначення тілесного кута у стерадіанах потрібно площу  $Q$ , яку вирізає конус тілесного кута з вершиною в центрі сфери, поділити на  $R^2$ :

$$\Omega[\text{ср}] = \frac{Q}{R^2}. \quad (11.11)$$

Повний тілесний кут, який заповнює весь простір навколо центру сфери, можна визначити через площу сфери  $Q_{\text{сф}} = 4\pi R^2$ , при цьому

$$\Omega_{\text{повн.}} = \frac{Q_{\text{сф}}}{R^2} = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi[\text{ср}].$$

Якщо на поверхні сфери конус вирізає коло, а плоский кут конуса  $2\alpha$ , рис. 11.6, то відповідний тілесний кут  $\Omega$  може бути розрахований за формулою:

$$\Omega[\text{ср}] = 2\pi[1 - \cos(\alpha)]. \quad (11.12)$$

На XX Генеральній конференції з мір і ваг (1995 рік, резолюція 8) **радіан і стерадіан визначено як безрозмірні похідні одиниці**, назви і позначення яких можуть (там, де це зручно), але **не обов'язково**, використовуватися у інших похідних одиницях СІ.

Одиницею фотометричної сили світла  $I$  є кандела.

**Кандела** (Кд, Кd), (лат. свічка) – сила світла точкового джерела у заданому напрямку, яке випромінює монохроматичне випромінювання з частотою  $540 \cdot 10^{12}$  Гц, енергетична сила якого в цьому напрямку складає  $\frac{1}{683} \frac{\text{Вт}}{\text{ср}}$ . Вказана частота відповідає довжині хвилі 0.555016 мкм у повітрі, на яку припадає максимум денної чутливості зорового органу людини.

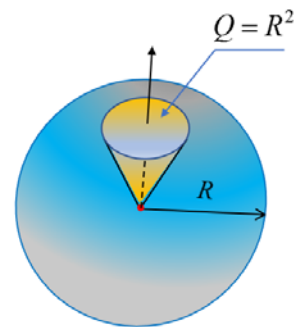


Рис. 11.5. Стерадіан

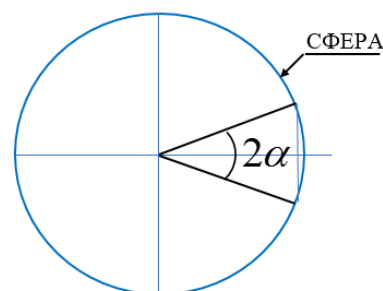


Рис. 11.6

Кандела є однією з семи основних одиниць Міжнародної системи одиниць (СИ), прийнята у 1979 році на XVI Генеральній конференції мір та ваг.

Оскільки кандела є основною фотометричною одиницею, то фотометрична одиниця потоку випромінення люмен є похідною від кандели:

**Люмен** – одиниця світлового потоку, яке випромінює точкове джерело силою світла 1 кандела у тілесному куті 1 стерадіан:  
 $1 \text{ Лм} = 1 \text{ Кд} \times 1 \text{ ср}.$

### 11.2.2. Протяжні джерела випромінення

Здатність протяжних джерел випромінювати електромагнітні хвилі оптичного діапазону характеризують двома параметрами:

- енергетична або фотометрична світність;
- енергетична або фотометрична яскравість.

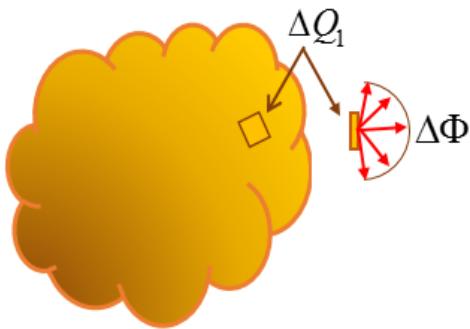


Рис. 11.7. Світність протяжного джерела

**Світність** – поверхнева щільність потоку випромінення, рис. 11.7.

Формула енергетичної світності:

$$M_e \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right] = \lim_{\Delta Q_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi_e}{\Delta Q_1} = \frac{d\Phi_e}{dQ_1}, \quad (11.13)$$

Формула фотометричної світності:

$$M \left[ \frac{\text{Лм}}{\text{м}^2} \right] = \lim_{\Delta Q_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta Q_1} = \frac{d\Phi}{dQ_1}. \quad (11.14)$$

Світність вказує на кількість потоку випромінення з одиниці площини у півсфері.

Проте два джерела з однаковою світністю можуть по різному випромінювати потік у півсфері, тобто мати різні індикатриси випромінення, рис. 11.8.

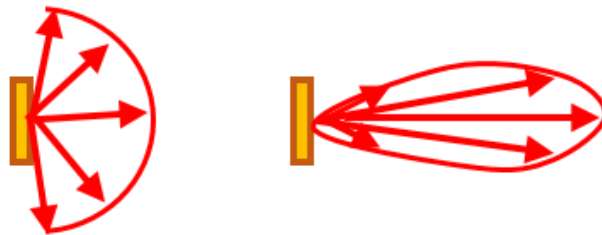


Рис. 11.8. Індикатриси елементарних площадок, що мають однакову світність, але різний кутовий розподіл потоку у півсфері



Звідси з'являється потреба у параметрі, який враховує також і кутовий розподіл потоку випромінювання у півсфері. Таким параметром є **яскравість** – енергетична або фотометрична.

**Яскравість** – поверхнево-кутова щільність потоку випромінювання.

Формула енергетичної яскравості:

$$L_e \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{ср}} \right] = \lim_{\substack{\Delta Q_1 \rightarrow 0 \\ \Delta \Omega \rightarrow 0}} \frac{\Delta^2 \Phi_e}{\Delta Q_1 \Delta \Omega \cos \varepsilon} = \frac{d^2 \Phi_e}{dQ_1 d\Omega \cos \varepsilon}, \quad (11.15)$$

формула фотометричної яскравості:

$$L \left[ \frac{\text{Лм}}{\text{м}^2 \text{ср}} \right] = \lim_{\substack{\Delta Q_1 \rightarrow 0 \\ \Delta \Omega \rightarrow 0}} \frac{\Delta^2 \Phi}{\Delta Q_1 \Delta \Omega \cos \varepsilon} = \frac{d^2 \Phi}{dQ_1 d\Omega \cos \varepsilon}, \quad (11.16)$$

де  $d^2 \Phi_e$ ,  $d^2 \Phi$  – двічі елементарний потік випромінювання через окреме диференціювання за площиною і за тілесним кутом;  $dQ_1$  – елементарна площадка на поверхні випромінювача;  $d\Omega$  – елементарний тілесний кут, в якому розповсюджується  $d^2 \Phi_e$ ;  $\varepsilon$  – кут відносно нормалі до елементарної площадки поверхні  $dQ_1$  (рис. 11.9). Індекс 1 означає, що площадка випромінює потік.

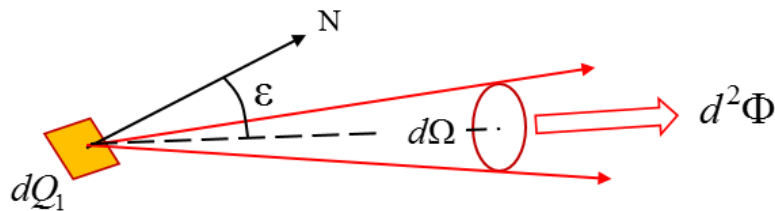


Рис. 11.9. До формул яскравості протяжного джерела

У формулах (11.15), (11.16) присутні похідні  $\frac{d\Phi_e}{d\Omega} = I_e$ ,  $\frac{d\Phi}{d\Omega} = I$ ,

тому формули для яскравості можуть мати інший вигляд:

$$L_e = \frac{dI_e}{dQ_1 \cos \varepsilon}; \quad (11.17)$$

$$L = \frac{dI}{dQ_1 \cos \varepsilon}, \quad (11.18)$$

який вказує на те, що **яскравість є поверхневою щільністю сили світла у напрямку до нормалі к поверхні випромінювача під кутом  $\varepsilon$** . Це є друге визначення параметрів яскравості  $L_e$  та  $L$ .

Одиниці яскравості фотометричної:  $\frac{1\text{Кд}}{1\text{м}^2} = 1\text{ніт}$  (ніт стандартом СИ не передбачений, але часто використовується в літературі);  
 $1\text{ стільб} = 1\frac{\text{Кд}}{\text{см}^2} = 10^4\text{ніт}$  енергетичної:  $1\frac{\text{Вт}}{\text{ср}\cdot\text{м}^2} = 1\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ , тому що ср (стерадіан) одиниця безрозмірна.

### 11.3. Світлотехнічні розрахунки з використанням параметрів $I, M, L$

Джерела випромінення опромінують предмети навколишнього середовища і отвори вхідних зіниць оптичних систем. В зв'язку з цим виникає потреба в оцінці поверхневої щільності опромінення або кількості потоку випромінення, яке сконцентроване на зазначеній площадці, або входить у вхідну зіницю. Розрахунки, пов'язані з оцінкою опроміненості або освітленості від точкових і протяжних джерел, називають світлотехнічними.

**Опроміненість** – поверхнева щільність енергетичного потоку від зовнішніх джерел випромінення.

**Освітленість** – поверхнева щільність потоку світла від зовнішніх джерел світла.

Формула опроміненості

$$E_e \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right] = \lim_{\Delta Q_2 \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi_e}{\Delta Q_2} = \frac{d\Phi_e}{dQ_2}. \quad (11.19)$$

Формула освітленості

$$E \left[ \frac{\text{Лм}}{\text{м}^2} \right] = \lim_{\Delta Q_2 \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta Q_2} = \frac{d\Phi}{dQ_2}, \quad (11.20)$$

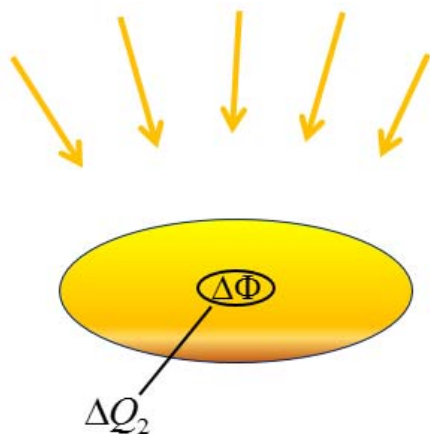


Рис. 11.10. До визначення освітленості поверхні від зовнішніх джерел

де  $d\Phi_e$ ,  $d\Phi$  – елементарний потік випромінення або світла, що опромінює елементарну площадку  $dQ_2$  поверхні, рис. 11.10. Індекс 2 означає, що площадка опромінена (освітлена).

В Міжнародній системі одиниць (СИ)  $\frac{\text{Лм}}{\text{м}^2} = 1$  Люкс (лк) від лат. *lux* – «світло».

**1 Люкс** – освітленість світловим потоком 1 лм, рівномірно розподіленим по поверхні площею 1 м<sup>2</sup>.

### 11.3.1. Опроміненість, освітленість поверхні ВІД ТОЧКОВОГО ДЖЕРЕЛА СВІТЛА

На рис. 11.11 показано точкове джерело, сила світла якого  $I$ . На відстані  $l$  від нього розташована елементарна площа  $dQ_2$ , в якій потрібно визначити освітленість  $E$ . Площадка розташована так, що нормаль до неї  $N$  і лінія, що поєднує площадку і точкове джерело, знаходяться під кутом  $\varepsilon$ . Промені, які виходять із джерела і повністю заповнюють площадку  $dQ_2$ , утворюють елементарний тілесний кут  $d\Omega$ , рис. 11.11. Кут  $d\Omega$  можна знайти, використовуючи сферу з центром в точковому джерелі, яка перетинає площадку  $dQ_2$ . Промені, що заповнюють площадку  $dQ_2$  вирізають на сфері площадку  $[dQ_2]_{\text{сп}}$ , яка є проекцією  $dQ_2$  на сферу і яка розраховується за формулою  $[dQ_2]_{\text{сп}} = dQ_2 \cdot \cos \varepsilon$ .

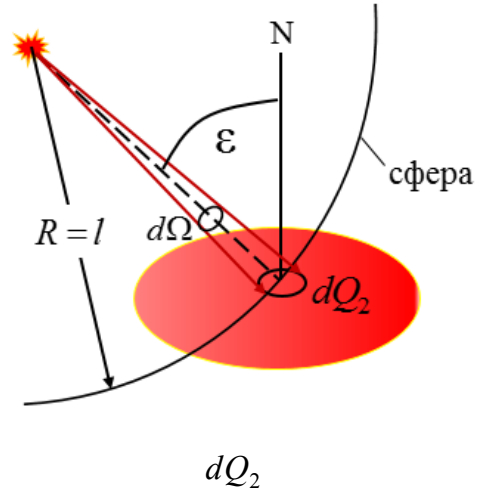


Рис. 11.11. До визначення освітленості площадки

Згідно визначення тілесного кута елементарний тілесний кут

$$d\Omega = \frac{[dQ_2]_{\text{сп}}}{R^2} = \frac{dQ_2 \cdot \cos \varepsilon}{l^2}, \quad (11.21)$$

де  $R=l$  радіус сфери.

В елементарному тілесному куті знаходиться елементарний світловий потік

$$d\Phi = I d\Omega = I \frac{dQ_2 \cdot \cos \varepsilon}{l^2}.$$

З цього рівняння витікає формула розрахунку освітленості площадки  $dQ_2$ :

$$E = \frac{d\Phi}{dQ_2} = \frac{I}{l^2} \cos \varepsilon. \quad (11.22)$$



*Йоган Кеплер*  
німецький математик,  
астроном, оптик  
1571–1630

Рівняння (11.22) називають **першим із законів фотометрії – законом зворотних квадратів**, який був у 1604 році сформульований Йоганом Кеплером. Із виразу (11.22) видно, що:

1) максимальної освітленості площадки  $dQ_2$  можна досягти, коли вона буде перпендикулярна до лінії, що поєднує джерело і саму площадку, тобто коли  $\varepsilon = 0$ ;

2) освітленість зворотна квадрату відстані між джерелом і площадкою, через що вираз (11.22) отримав назву закону зворотних квадратів. Для прикладу, збільшення відстані  $l$  у два рази зменшує освітленість  $E$  у чотири рази.

Формула (11.22) дозволяє здійснювати світлотехнічні розрахунки, приклади яких наведені у Завданнях 11.3–11.5.

**Завдання 11.3.** Знайдіть потрібну відстань між точковим світильником із силою світла 100 Кд і поверхнею, що розташована перпендикулярно ( $\varepsilon = 0^\circ$ ) до напрямку на світильник, при якій освітленість на поверхні становить 50 лк.

**Розв’язання.** При  $\varepsilon = 0$  згідно (11.21)  $E = \frac{I}{l^2}$ , звідки

$$l = \sqrt{\frac{I}{E}} = \sqrt{\frac{100 \frac{\text{Лм}}{\text{ср}}}{50 \frac{\text{Лм}}{\text{м}^2}}} = 1.414 \text{ м.}$$

**Завдання 11.4.** На поверхні фоточутливого елемента (ФЧЕ) фотоприймача освітленість становить 10 лк. Який світловий потік падає на ФЧЕ, якщо він має форму квадрату зі стороною  $a = 5$  мкм?

**Розв’язання.** При рівномірній освітленості ФЧЕ потік світла, що падає на нього згідно (11.20)

$$\Phi = E \times Q, \quad (11.23)$$

де  $Q$  – площа ФЧЕ,  $Q = a^2 = (5 \cdot 10^{-6} \text{ м})^2 = 25 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$ . При цьому світловий потік

$$\Phi = E \cdot Q = 10 \frac{\text{лм}}{\text{м}^2} \cdot 25 \cdot 10^{-12} \text{м}^2 = 2.5 \cdot 10^{-10} \text{лм}.$$

**Завдання 11.5.** На відстані 1м від вхідної зіниці оптичної системи на оптичній осі знаходиться точкове джерело із силою світла  $I = 10 \text{Кд}$ . Діаметр вхідної зіниці 100 мм. Який світловий потік надходить у вхідну зіницю?

**Розв'язання.** Якщо сила світла у всіх напрямках є сталою, то світловий потік, що надходить у вхідну зіницю, можна розрахувати згідно (11.10) за формулою:

$$\Phi = I \times \Omega, \quad (11.24)$$

де  $\Omega$  – тілесний кут, утворений променями, що заповнюють отвір вхідної зіниці

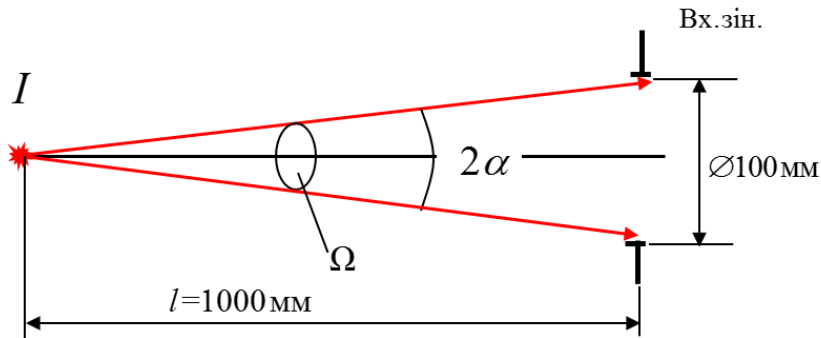


Рис. 11.12

Згідно (11.12)  $\Omega[\text{ср}] = 2\pi[1 - \cos(\alpha)]$ , де

$$\alpha = \arctg \frac{0.5\varnothing}{l} = \arctg \frac{0.5 \cdot 100}{1000} = (2.862)^\circ;$$

$$\Omega[\text{ср}] = 2\pi[1 - \cos(2.862)] = 0.00784[\text{ср}];$$

$$\Phi = I \times \Omega = 10 \left[ \frac{\text{лм}}{\text{ср}} \right] \times 0.00784[\text{ср}] = 0.0784[\text{лм}].$$

Це завдання можна розв'язати в інший спосіб, а саме: 1) знайти освітленість в осевій точці площини вхідної зіниці, 2) прийняти допущення, що отвір вхідної зіниці практично рівномірно освітлюється від джерела через велику відстань до нього (через малу зміну функції  $\cos \epsilon$  у виразі (11.22)), 3) використати формулу (11.23) для розрахунку світлового потоку, що надходить у вхідну зіницю.

$$1) E_o = \frac{I}{l^2} = \frac{10 \text{ Кд}}{(1 \text{ м})^2} = 10 \text{ лк};$$

$$2) E \cong E_o = 10 \text{ лк};$$

3) згідно (11.22) при рівномірній освітленості отвору вхідної зіниці формулу (11.22) можна представити у вигляді:  $\Phi = E \times Q_{\text{ex.zin.}}$ , звідки

$$\Phi = E \times \pi \frac{\varnothing^2}{4} = 10 \left[ \frac{\text{лм}}{\text{м}^2} \right] \times \pi \frac{(0.1 \text{ м})^2}{4} = 0.0785 \text{ лм}.$$

Видно, що отримане за формулою (11.22) значення  $\Phi$  дуже мало відрізняється від значення, розрахованого за точною формулою (11.24).

### 11.3.2. Опроміненість, освітленість поверхні від протяжного джерела світла

На рис. 11.13 Показано протяжне джерело, поверхня якого має яскравість  $L = \frac{\Delta^2 \Phi}{\Delta Q_1 \Delta \Omega_1 \cos \varepsilon_1}$ . Це джерело освітлює поверхню, на якій знаходиться елементарна ділянка  $\Delta Q_2$ . Потрібно визначити освітленість  $\Delta Q_2$  від всієї поверхні протяжного випромінювача.

Двічі елементарний потік  $\Delta^2 \Phi$ , що випромінюється елементарною площадкою  $\Delta Q_1$  у елементарному тілесному куті  $\Delta \Omega_1$ , і падає на елементарну площадку  $\Delta Q_2$ , утворює на ній елементарну освітленість  $\Delta E_{\Delta Q_1} = \frac{\Delta^2 \Phi}{\Delta Q_2}$ .

З формули яскравості двічі елементарний потік  $\Delta^2 \Phi = L \cdot \Delta Q_1 \cdot \Delta \Omega_1 \cos \varepsilon_1$ .

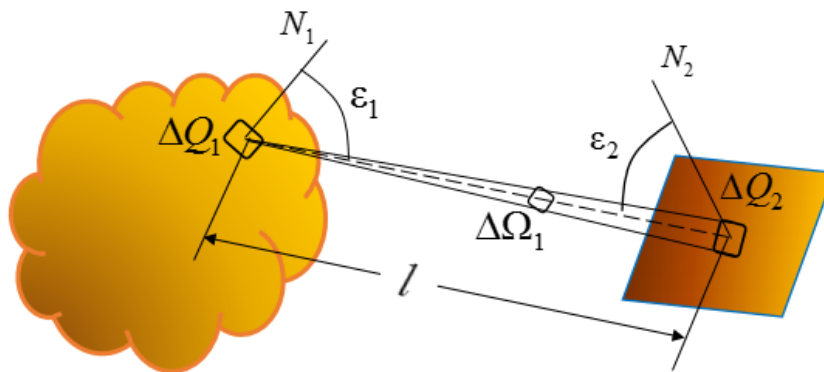


Рис. 11.13. До визначення опроміненості (освітленості) поверхні від протяжного джерела випромінювання

Згідно (11.21) елементарний тілесний кут  $\Delta\Omega_1 = \frac{\Delta Q_2 \cdot \cos \varepsilon_2}{l^2}$ , а тому  $\Delta^2\Phi = L \cdot \Delta Q_1 \frac{\Delta Q_2 \cdot \cos \varepsilon_2}{l^2} \cos \varepsilon_1$ , через що

$$\Delta E_{\Delta Q_1} = \frac{\Delta^2\Phi}{\Delta Q_2} = L \cdot \Delta Q_1 \frac{\cos \varepsilon_2 \cos \varepsilon_1}{l^2}. \quad (11.25)$$

Для розрахунку повної освітленості площадки  $\Delta Q_2$  від протяжного випромінювача потрібно всю його поверхню розбити на елементарні площадки  $(\Delta Q_1)_i$ , від кожної такої площадки розрахувати значення  $(\Delta E_{\Delta Q_1})_i$  за формулою (11.25), а потім підсумувати всі ці значення:

$$E_{\Delta Q_2} = \sum_i (\Delta E_{\Delta Q_1})_i.$$

В інтегральній формі освітленість площадки  $\Delta Q_2$  від всієї поверхні протяжного джерела буде мати вираз:

$$E_{\Delta Q_2} = \int_{Q_1} L \frac{\cos \varepsilon_1 \cdot \cos \varepsilon_2}{l^2} dQ_1. \quad (11.26)$$

### **Ламбертів випромінювач**

Розрахунки освітленості (опроміненості) за формулою (11.26) як найменше потребують врахування того, що яскравість  $L$  може залежати від координат  $\Delta Q_1$  на поверхні джерела. Окрім того значення яскравості  $L$  може також суттєво залежати від кутового розташування площадки  $\Delta Q_2$  відносно площадки  $\Delta Q_1$ , тобто від кута  $\varepsilon_1$ . Все це суттєво ускладнює розрахунки за формулою (11.26). В переважній кількості випадків такі розрахунки є неможливими у аналітичному вигляді.

Для спрощення підінтегрального виразу у (11.26) функцію яскравості бажано мати сталою по всій поверхні протяжного джерела і у всіх напрямках. При цьому значення  $L$  стає константою і його можна виносити за знак інтегралу (інтегралів) та мати формулу:

$$E_{\Delta Q_2} = L \int_{Q_1} \frac{\cos \varepsilon_1 \cdot \cos \varepsilon_2}{l^2} dQ_1. \quad (11.27)$$

Таке спрощення суттєво зменшує складність розрахунків значення  $E_{\Delta Q_2}$ .





*Йоган Генріх Ламберт*  
німецький математик,  
фізик, філософ  
1728–1777

Явище ідеального рівномірного у всіх напрямках розсіювання світла від поверхні, що призводить до однакової у всіх напрямках яскравості такої поверхні, називають законом Ламберта.

Переважає більшість випромінювачів у обмеженому тілесному куті  $\Omega_1$  і в обмеженій ділянці поверхні випромінювача відповідає умові сталості значення яскравості. Протяжне джерело випромінювання, яскравість якого по всій поверхні і у всіх напрямках є сталою величиною, має назву **ламбертів випромінювач**.

Формула (11.27), яка є коректною для ламбертових випромінювачів, широко застосовується в енергетичних розрахунках.

### **Опроміненість (освітленість) від круглого ламбертова випромінювача**

Велика кількість протяжних випромінювачів з круглою формою (формою диска) мають практично сталу кутову і поверхневу яскравість. Це дозволяє їх вважати ламбертовими. Прикладом природного випромінювача такого типу є Сонце. До штучних випромінювачів відносять світлодіоди з круглою сферичною імерсійною лінзою, прожектори. Навіть круглу вихідну зіницю більшості оптичних систем в межах заднього апертурного кута також можна вважати круглим ламбертовим випромінювачем.

На рис. 11.14 показано круглий ламбертов випромінювач з яскравістю  $L$ .

На відстані  $S$  вздовж осі знаходиться площадка  $\Delta Q_2$ , перпендикулярна до осі. Потрібно розрахувати освітленість площадки  $\Delta Q_2$  від всієї поверхні круглого випромінювача.

Елементарна освітленість  $\Delta Q_2$  від окремої ділянки  $\Delta Q_1$  випромінювача визначається за формулою (11.27). Використовуючи полярну систему координат, елементарну площадку  $\Delta Q_1$  можна представити в цій формулі диференціально як  $dQ_1 = \rho dr d\varphi$ . При цьому

$$E_{\Delta Q_2} = L \int_{Q_1} \frac{\cos \varepsilon_1 \cdot \cos \varepsilon_2}{l^2} \rho dr d\varphi.$$



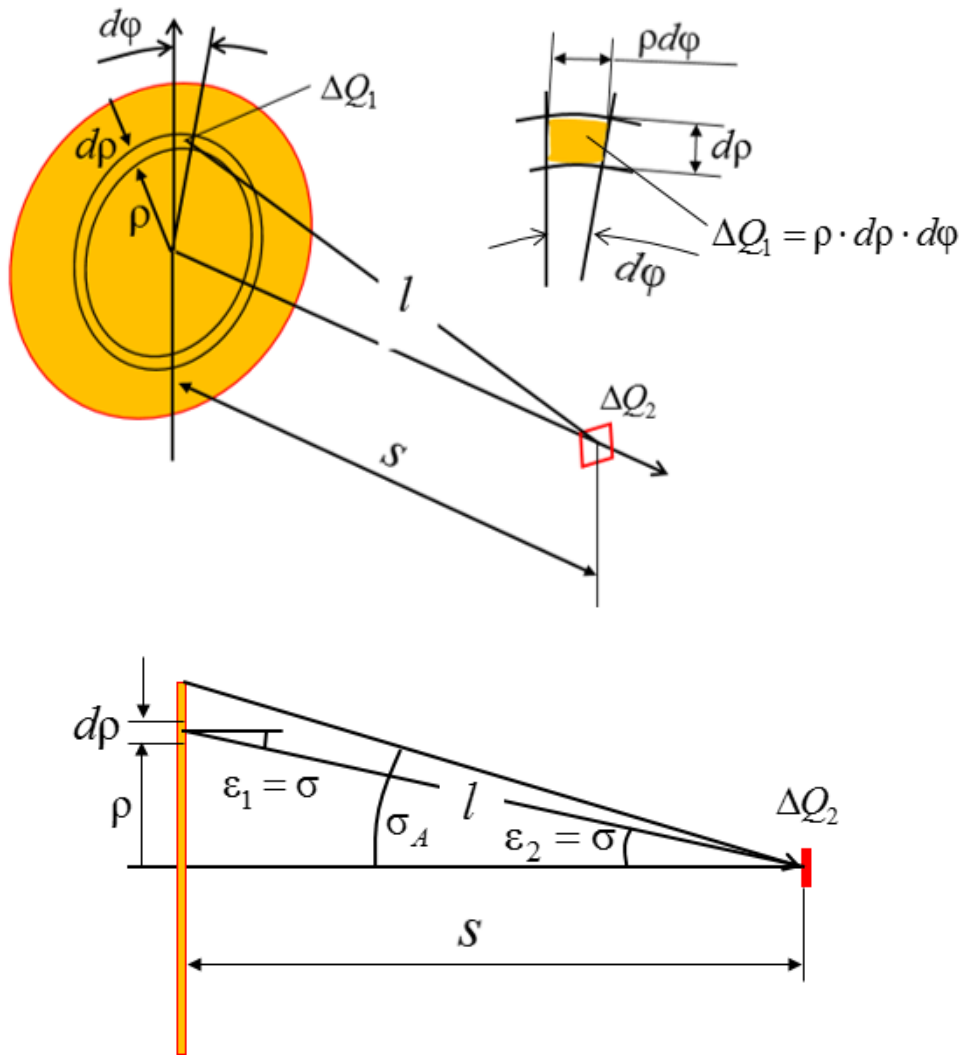


Рис. 11.14. До формули розрахунку освітленості площадки  $\Delta Q_2$  від круглого ламбертового випромінювача

Оскільки  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \sigma$ , то  $\cos \varepsilon_1 \cdot \cos \varepsilon_2 = \cos^2 \sigma$ .

Згідно рис. 11.14  $\rho = s \cdot \operatorname{tg} \sigma$ , звідки  $d\rho = s \frac{d\sigma}{\cos^2 \sigma}$ .

З рис. 11.14  $s = l \cdot \cos \sigma$ , тому  $\rho d\rho = s^2 \frac{\operatorname{tg} \sigma}{\cos^2 \sigma} d\sigma =$

$$= l^2 \cos^2 \sigma \frac{\operatorname{tg} \sigma}{\cos^2 \sigma} d\sigma = l^2 \operatorname{tg} \sigma d\sigma$$

При вказаних замінах вираз  $E_{\Delta Q_2}$  перетворюється до вигляду,

$$E_{\Delta Q_2} = L \int_{\Omega_1} \frac{\cos^2 \sigma}{l^2} l^2 \operatorname{tg} \sigma d\sigma d\varphi,$$

який дозволяє здійснювати інтегрування по всій поверхні  $Q_1$  випромінювача через кути  $\varphi$  і  $\sigma$ , до того ж кут  $\varphi$  повинен змінюватися від 0 до  $2\pi$ , а кут  $\sigma$  – від 0 до  $\sigma_A$

$$E_{\Delta Q_2} = L \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{\sigma_A} \sin \sigma \cdot \cos \sigma d\sigma \right] d\varphi = L 2\pi \int_0^{\sigma_A} \sin \sigma \cdot \cos \sigma d\sigma = L\pi \int_0^{\sigma_A} \sin(2\sigma) d\sigma = \pi L \sin^2 \sigma_A.$$

Кінцевий вираз:

$$E_{\Delta Q_2} = E_0 = \pi L \sin^2 \sigma_A. \quad (11.28)$$

Індекс «0» означає значення  $E$  в осьовій точці освітленої площини.

**Завдання 11.6.** Яскравість Сонця в zenіті  $L = 1.65 \cdot 10^9 \frac{\text{Кд}}{\text{м}^2}$ .

Яку освітленість на поверхні Землі утворює Сонце, якщо кутовий діаметр його диска  $2\sigma_A = 0^\circ 31' 59'' = 0.0093$  радіан.

**Розв'язання.** Освітленість на поверхні Землі можна розрахувати за допомогою формули (11.28). Враховуючи мале значення кутового діаметру Сонця, значення  $\sin \sigma_A \cong \frac{0.0093}{2} = 0.004654$ . При цьому освітленість

$$E_0 = \pi \cdot 1.65 \cdot 10^9 \left[ \frac{\text{лм}}{\text{ср} \cdot \text{м}^2} \right] \cdot 0.004654^2 [\text{ср}] = 1.12 \cdot 10^5 \left[ \frac{\text{лм}}{\text{м}^2} \right] = 1.12 \cdot 10^5 \text{ лк}.$$

### Яскравість вторинних джерел

Протяжні джерела випромінення розділяються на дві групи – первинні і вторинні. Первинні – ті, які випромінюють власне випромінення, вторинні – відбивають випромінення первинних джерел. Прикладом первинного джерела є Сонце, вторинні джерела – всі ті, що розсіюють і відбивають сонячне світло, завдяки чому ми бачимо предмети, які оточують нас.

Предметами для оптичних систем є як первинні, так і вторинні джерела. Проте для енергетичних розрахунків з вторинними джерелами потрібно мати дані про їх яскравість. Тому важливим є питання про те, яку яскравість мають вторинні випромінювачі, якщо відома їх опроміненість чи освітленість. На рис. 11.15 показано елементарну ділянку поверхні  $\Delta Q$ , яка освітлена з освітленістю  $E = \frac{d\Phi}{dQ}$ .

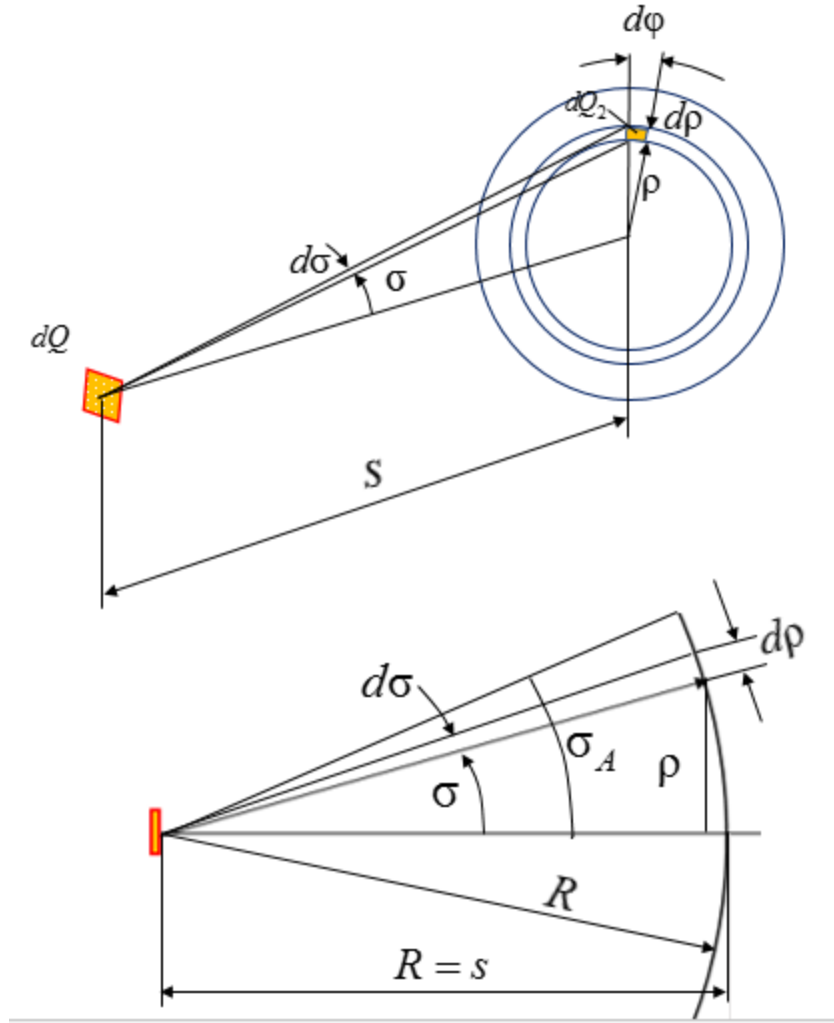


Рис. 11.15. До розрахунку яскравості вторинного випромінювача – освітленої площадки  $dQ$

Ділянка  $dQ$  завдяки відбиттю розсіює світло у навколишній простір. При коефіцієнті відбиття  $\rho_e$ , від неї випромінюється назад елементарний потік  $\rho_e d\Phi = \rho_e E dQ$ .

Якщо розсіювання є дифузним, то площадка  $dQ$  отримує властивість ламбертового випромінювача зі сталою яскравістю  $L$ . Для встановлення зв'язку між освітленістю  $E$ , світністю  $M$  і яскравістю  $L$  площадки  $dQ$  потрібно знайти вираз для потоку випромінення від вказаної площадки у заданий тілесний кут  $\Omega$  при умові, що яскравість площадки відома.

Згідно формулам яскравості (11.15) або (11.16) двічі елементарний потік випромінення

$$d^2\Phi = L d\Omega dQ \cos \varepsilon.$$

Згідно рис. 11.15 кут  $\varepsilon = \sigma$ . Елементарний тілесний кут  $d\Omega$  може бути утворений кільцевою зоною на сфері з центром в ділянці  $dQ$ . Площина кільцевої зони  $dQ_2 = 2\pi\rho \cdot d\rho$ . З рис. 11.15 видно, що радіус кільця  $\rho = R \sin \sigma$ , товщина цього кільця  $d\rho = R d\sigma$ , тому  $dQ_2 = 2\pi R^2 \sin \sigma d\sigma$ , а елементарний тілесний кут  $d\Omega = \frac{dQ_2}{R^2} = \frac{2\pi R^2 \sin \sigma d\sigma}{R^2} = 2\pi \sin \sigma d\sigma$ . З наведеними замінами

$$d^2\Phi = dQ \pi L 2 \sin \sigma \cos \sigma d\sigma = dQ \pi L \sin 2\sigma d\sigma,$$

а в межах кута  $\sigma$  від 0 до  $\sigma_A$ :

$$d\Phi = dQ \pi L \int_0^{\sigma_A} \sin 2\sigma d\sigma = dQ \pi L \sin^2 \sigma_A. \quad (11.29)$$

У півсферу (при  $\sigma_A = 90^\circ$ ) з площадки  $dQ$  випромінюється елементарний потік  $d\Phi = dQ \pi L$ , а тому її світність

$$\boxed{M = \frac{d\Phi}{dQ} = \pi L.} \quad (11.30)$$

Оскільки площадка  $dQ$  відбиває потік з втратою, яка характеризується коефіцієнтом відбиття  $\rho_\varepsilon$ , через що відбитий елементарний потік зменшується, і  $d\Phi_{\text{відб.}} = \rho_\varepsilon d\Phi = \rho_\varepsilon E dQ$ , то після підстановки цього виразу у (11.30) отримуємо:

$$M = \frac{d\Phi_{\text{відб.}}}{dQ} = \frac{\rho_\varepsilon E dQ}{dQ} = \pi L,$$

звідки яскравість площадки  $dQ$  становить

$$\boxed{L = \frac{\rho_\varepsilon}{\pi} E.} \quad (11.31)$$

**Завдання 11.7.** Аркуш білої бумаги освітлюється точковим джерелом із силою світла  $I=100$  Кд. Потрібно визначити яскравість ділянки аркуша, який дифузно розсіює світло із коефіцієнтом відбиття  $\rho_\varepsilon = 0.6$ , джерело знаходиться на відстані 1 м від ділянки, світло падає на ділянку під кутом  $30^\circ$ .

**Розв'язання.** Для розрахунку яскравості освітленої ділянки аркуша папи потрібно: 1) розрахувати її освітленість, 2) за даними про освітленість розрахувати яскравість.

1. Освітленість ділянки від точкового джерела розраховується за формулою (11.22)

$$E = \frac{I}{l^2} \cos \varepsilon = \frac{100 \text{ Кд}}{(1 \text{ м})^2} \cos 30^\circ = 86.6 \text{ лк} .$$

2. Яскравість ділянки аркуша розраховується за формулою (11.31):

$$L = \frac{\rho_v}{\pi} E = \frac{0.6}{3.1416} 86.6 \left[ \frac{\text{лм}}{\text{м}^2} \right] = 16.54 \frac{\text{лм}}{\text{м}^2 \text{ср}} .$$

#### 11.4. Світлова трубка, проходження світлових трубок через оптичну систему

Перенесення потоків випромінювання у просторі та через оптичну систему в геометричній променевій оптиці можна представити за допомогою світлових трубок.

**Світлова трубка** – частина простору між двома елементарними площадками, заповнена променями, які виходять із всіх точок однієї площадки і проходять через всі точки другої, рис. 11.16.

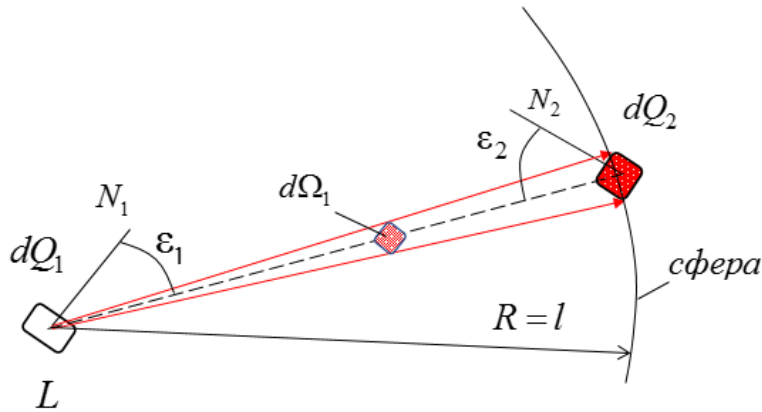


Рис. 11.16. До визначення двічі елементарного потоку  $d^2\Phi$  у світловій трубці

На рис. 11.16 заради кращого сприйняття картинки показано лише одну точку, з якої потік заповнює площадку  $dQ_2$ , але такими точками (які не показані) заповнена вся площадка  $dQ_1$ .

Оскільки обидві площадки  $dQ_1$  і  $dQ_2$  елементарні, то потік випромінювання, якій заповнює світлову трубку, утворену вказаними

площадками, є двічі елементарний і визначається із установлювальних формул яскравості (11.16) або (11.15):

$$d^2\Phi = L \frac{dQ_1 dQ_2}{l^2} \cos \varepsilon_1 \cos \varepsilon_2$$

$$L \frac{dQ_1 dQ_2}{l^2} \cos \varepsilon_1 \cos \varepsilon_2 = L' \frac{dQ_2 dQ_1}{l^2} \cos \varepsilon_2 \cos \varepsilon_1,$$

де  $L$  – яскравість площадки  $dQ_1$ .

Елементарний тілесний кут  $d\Omega_1 = \frac{[dQ_2]_{np}}{R^2} = \frac{dQ_2 \cos \varepsilon_2}{l^2}$ ,  $[dQ_2]_{np}$  – проекція площадки  $dQ_2$  на сферу, радіус сфери  $R$  дорівнює відстані  $l$  між елементарними площадками. Звідси отримуємо формулу, яка має назву формули Ламберта:

$$\boxed{d^2\Phi = L \frac{dQ_1 dQ_2}{l^2} \cos \varepsilon_1 \cos \varepsilon_2.} \quad (11.32)$$

Вираз (11.32) дозволяє не тільки мати дані про величину потоку випромінення у світловій трубці, а і стверджувати, що у будь-якому перетині світлової трубки яскравість зберігається незмінною по всій довжині трубки, але при умові, що промені не виходять за межі трубки, а у об'ємі трубки поглинання або втрат випромінення не відбувається.

Щоб довести таке ствердження уявімо, що площадка  $dQ_2$  відбиває назад все випромінення, яке на неї надходить від площадки  $dQ_1$ , при цьому яскравість площадки  $dQ_2$  становить  $L'$ . Тоді до площадки  $dQ_1$  повертається потік випромінення

$$d^2\Phi' = L' \frac{dQ_2 dQ_1}{l^2} \cos \varepsilon_2 \cos \varepsilon_1.$$

При умові відсутності втрат потоку випромінення в трубці на проміжку між  $dQ_2$  і  $dQ_1$  потік зберігається і тому вірним є рівняння  $d\Phi' = d\Phi$ , або

$$L \frac{dQ_1 dQ_2}{l^2} \cos \varepsilon_1 \cos \varepsilon_2 = L' \frac{dQ_2 dQ_1}{l^2} \cos \varepsilon_2 \cos \varepsilon_1,$$

звідки

$$\boxed{L' = L,} \quad (11.33)$$

тобто яскравість у будь-якому перетині трубки зберігається незмінною незалежно від розташування в трубці площадки  $dQ_2$ , що і потрібно було довести.

### 11.4.1. Проходження світлової трубки через оптичну поверхню

На рис. 11.17 показано світлову трубку, утворену променями, що проходять із заломленням через оптичну поверхню з номером  $k$ , яка розділяє два оптичних середовища з показниками заломлення  $n_k$  і  $n_{k+1}$ . Елементарні площадки  $dQ_1$  і  $dQ'_1$  оптично спряжені, тобто  $dQ'_1$  є зображенням  $dQ_1$  із лінійним збільшенням

$$\beta_k = \frac{n_k s'_k}{n_{k+1} s_k}. \quad (11.34)$$

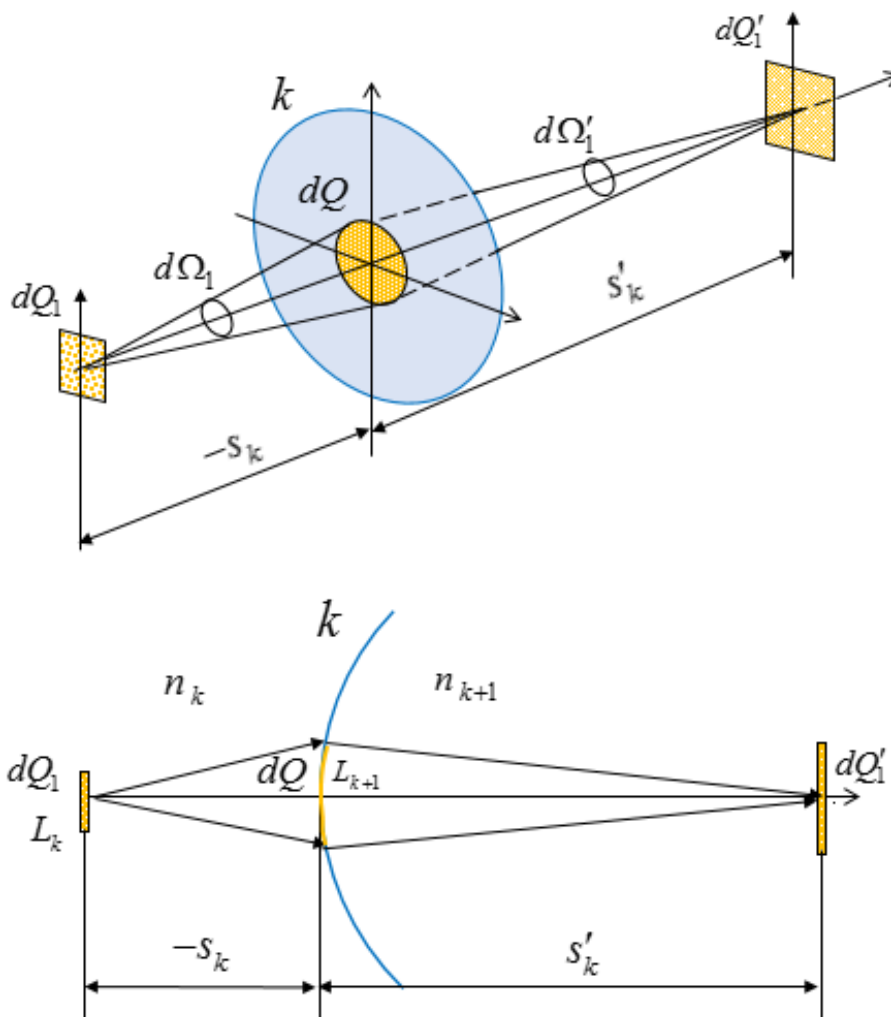


Рис. 11.17. Проходження світлової трубки через оптичну поверхню

Світлова трубка до оптичної поверхні утворена елементарними площадками  $dQ_1$  і  $dQ$ . Після заломлення на поверхні продовження світлової трубки утворюється елементарними площадками  $dQ$  і  $dQ_1'$ .

Якщо яскравість площадки  $dQ_1$   $L_k$ , а площадки  $dQ_1$  і  $dQ$  перпендикулярні до оптичної осі, через що  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ , то згідно виразу (11.32) у світловій трубці до оптичної поверхні доходить двічі елементарний потік

$$d^2\Phi = L \frac{dQ_1 dQ}{s_k^2}. \quad (11.35)$$

Після заломлення променів на оптичній поверхні у продовженні світлової трубки розповсюджується двічі елементарний потік

$$d^2\Phi' = \tau_k d^2\Phi, \quad (11.36)$$

де  $\tau_k$  – коефіцієнт пропускання потоку поверхнею, який відображає втрати потоку випромінення, наприклад, через френелівське дзеркальне відбиття від оптичної поверхні.

В світловій трубці після оптичної поверхні світловий потік згідно виразу (11.32) з урахуванням перпендикулярного до оптичної осі положення площадок  $dQ$  і  $dQ_1'$  становить:

$$d^2\Phi' = L' \frac{dQ dQ_1'}{(s'_k)^2}. \quad (11.37)$$

Підстановка (11.35) і (11.37) у (11.36) призводить до рівняння

$$L' \frac{dQ dQ_1'}{(s'_k)^2} = \tau_k L \frac{dQ_1 dQ}{s_k^2}, \text{ з якого } L' = \tau_k L \frac{(s'_k)^2}{s_k^2} \frac{dQ_1}{dQ_1'}.$$

В останньому виразі  $\frac{dQ_1}{dQ_1'} = \frac{1}{\beta_k^2}$ . Згідно (11.34)  $\frac{s'_k{}^2}{s^2} = \frac{n_{k+1}^2}{n_k^2} \beta_k^2$ , тому після підстановки цих замін у (11.37) отримуємо:

$$\boxed{L' = \tau_k \frac{n_{k+1}^2}{n_k^2} L}. \quad (11.38)$$

Якщо оптична система складається із  $p$  оптичних поверхонь, то застосовуючи формулу (11.38) до кожної з них можна знайти



яскравість у перетинах світлових трубок на виході з оптичної системи:

$$L' = \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \dots \cdot \tau_p \cdot \frac{n_2^2}{n_1^2} \cdot \frac{n_3^2}{n_2^2} \cdot \dots \cdot \frac{n_{p+1}^2}{n_p^2} L, \text{ звідки}$$

$$\boxed{L' = \tau_{oc} \frac{n_{p+1}^2}{n_1^2} L}, \quad (11.39)$$

де  $\tau_{oc}$  – коефіцієнт світлопропускання оптичної системи, який враховує всі втрати потоку випромінювання при проходженні світлових трубок через оптичну систему.

Вираз (11.38) вказує на те, що при  $n_1 = n_{p+1}$  яскравість у перетинах світлових трубок на виході з системи

$$L' = \tau_k L,$$

що означає неодмінне послаблення яскравості, оскільки завжди  $\tau_{oc} < 1$ .

Вирази (11.38) і (11.39) також свідчать про те, що можливим є стрибкоподібне зростання яскравості при проходженні світлової трубки через оптичну поверхню або систему поверхонь, але цей стрибок не може бути більшим за величину  $\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right)^2$  або  $\left(\frac{n_{p+1}}{n_1}\right)^2$ .

Вираз (11.38) має важливе практичне значення, оскільки дозволяє розраховувати освітленість площини зображень, сформованих оптичною системою і визначати величину потоку випромінювання, який формує зображення.

#### 11.4.2. Опроміненість осьової точки площини зображення

Оптична система переносе потоки випромінювання у світлових трубках, що розповсюджуються в оптичних системах подібно до променів і у повній відповідності з законами геометричної оптики. Промені можна розглядати як світлові трубки вироджені до нульового об'єму.

На рис. 11.18 показана оптична система у якій площина предметів (ПП) – протяжний ламбертів випромінювач із яскравістю  $L$ . Пучок світлових трубок проходить через оптичну систему і збира-

ється у площині зображень (ПЗ), утворюючи в осевій точці опромінення  $E_0$ .

Вихідна зіниця оптичної системи є протяжним випромінювачем з яскравістю  $L'$ , яку згідно (11.39) мають перетини світлових трубок за оптичною системою. Якщо вихідна зіниця має круглу форму, як показано на рис.11.18, то для розрахунку  $E_0$  можна використати формулу опроміненості ділянки від круглого протяжного випромінювача

$$E_0 = \pi L' \sin^2 \sigma'_A,$$

або з урахуванням (11.39):

$$E_0 = \pi \tau_{oc} \frac{n_{p+1}^2}{n_1^2} L \sin^2 \sigma'_A. \quad (11.40)$$

У випадку, коли  $n_{p+1} = n_1$  (найбільш поширений випадок)

$$E_0 = \pi \tau_{oc} L \sin^2 \sigma'_A. \quad (11.41)$$

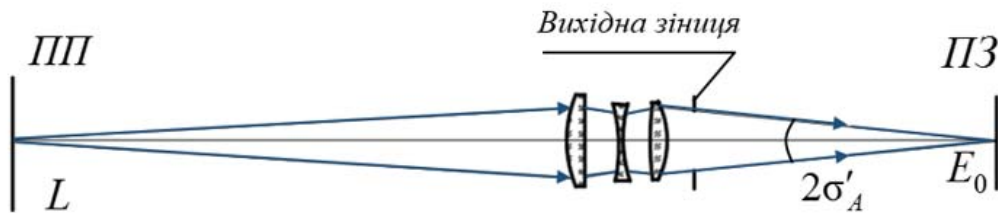
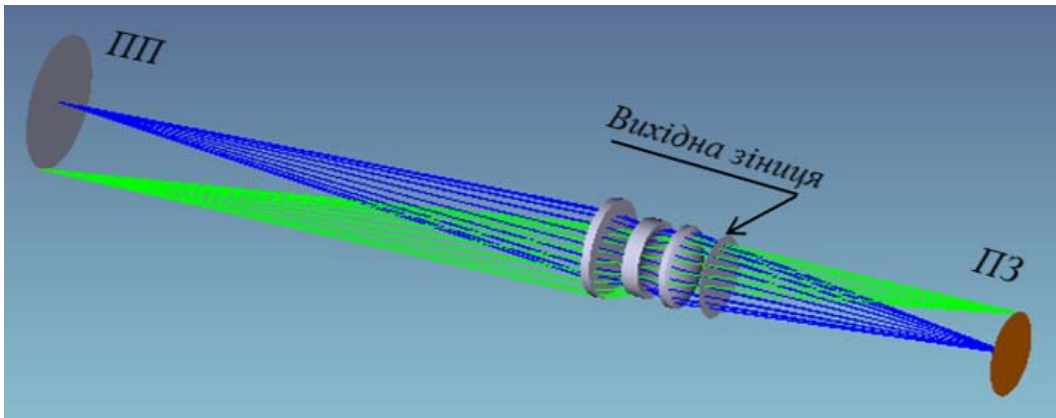


Рис. 11.18. До визначення опроміненості  $E_0$  на осі у площині зображень (ПЗ)

### 11.4.3. Опроміненість позаосьової зони площини зображення

На рис. 11.19 показана оптична система, що розглядалася в попередньому пункті 11.4.1.

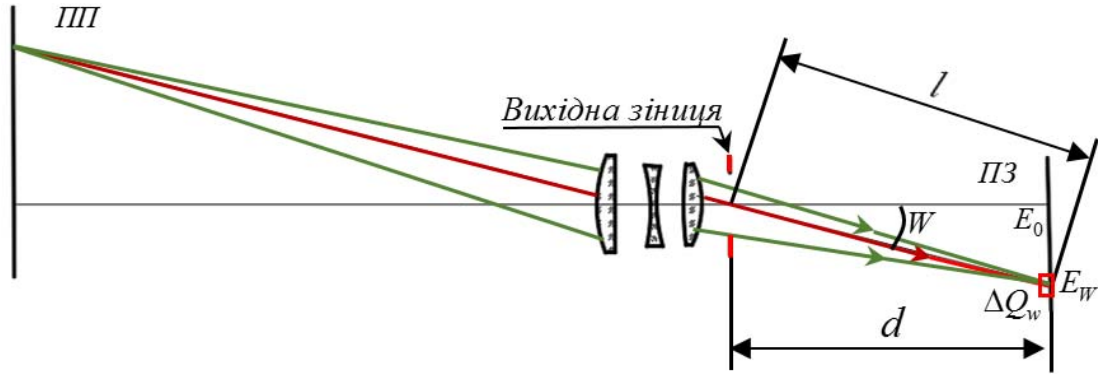


Рис. 11.19. До розрахунку опроміненості позаосьових зон площини зображень

Площина предметів (ПП) є протяжним ламбертовим випромінювачем і має однакову у всіх точках яскравість  $L$ . При відносно невеликих значеннях заднього апертурного кута  $2\sigma'_A$  опроміненість осьової точки  $E_0$  у площині зображень (ПЗ) може бути представлена формулою

$$E_0 = \pi L' \sin^2 \sigma'_A \cong L' (\pi \text{tg}^2 \sigma'_A) = L' \left( \frac{\pi (0.5D')^2}{d^2} \right) = L' \frac{Q'}{d^2}, \quad (11.42)$$

де  $L' = \tau_{oc} \frac{n_{p+1}^2}{n_1^2} L$ ,  $D'$  – діаметр вихідної зіниці,  $Q'$  – площа вихідної зіниці.

Якщо отвір вихідної зіниці та елементарна периферійна площадка у площині зображень  $\Delta Q'$  перпендикулярні до оптичної осі і вони утворюють світлову трубку, то в ній знаходиться елементарний потік  $\Delta\Phi'$ , величина якого згідно (11.32) розраховується за формулою:

$$\Delta\Phi' = L' \frac{Q' \Delta Q'}{l^2} \cos W \cdot \cos W,$$

де  $W$  – кут нахилу до оптичної осі головного променя пучка променів, що формує зображення периферійної позаосьової точки площини предметів.

**Примітка:** Головним називають промінь нахиленого пучка, який проходить через осьову точку вхідної, апертурної діафрагми і вихідної зіниці.

Тоді опроміненість позаосьової точки

$$E_W = \lim_{\Delta Q' \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi'}{\Delta Q'} = L' \frac{Q'}{l^2} \cos W \cdot \cos W .$$

З рис. 11.19 видно, що  $l = \frac{d}{\cos W}$ . Після підстановки виразу  $l$  у попередню формулу з урахуванням (11.42), маємо:

$$E_W = L' \frac{Q'}{d^2} \cos^4 W = E_o \cos^4 W . \quad (11.43)$$

Формула (11.43) є коректною до тих пір, поки при поточному значенні кута  $W$  коефіцієнт він'єтування  $k_Q = 1$ , тобто площа вхідної, а значить і вихідної зіниці є повністю опроміненою нахиленим пучком. При обмеженні отвору і площі вхідної зіниці дією він'єтувальних діафрагм, коли  $k_Q < 1$ , діючий отвір вихідної зіниці має меншу площу  $Q'_W = Q' k_Q$  і тому

$$E_W = L' \frac{Q' k_Q}{d^2} \cos^4 W = E_o k_Q \cos^4 W . \quad (11.44)$$

Формули (11.43) і (11.44) вказують на те, що опроміненість периферійних зони зменшується доволі швидко із зростанням кута  $W$ . Так вже при  $W = 30^\circ$   $(\cos 30^\circ)^4 = 0.5625$ , тобто освітленість  $E_W$  стає меншою за осьову  $E_o$  майже вповнину.

### 11.5. Закон синусів Аббе. Робочі формули розрахунку $E_o$

На рис. 11.20 показано оптичну систему з оптично спряженими площинами – ПП і ПЗ. В площині предметів на оптичній осі знаходиться елементарна випромінювальна ламбертова площадка  $\Delta Q_1$  з яскравістю  $L$ . Згідно виразу (11.29) у вхідну зіницю оптичної системи потрапляє елементарний потік випромінення:

$$\Delta \Phi = \Delta Q \pi L \sin^2 \sigma_A . \quad (11.45)$$

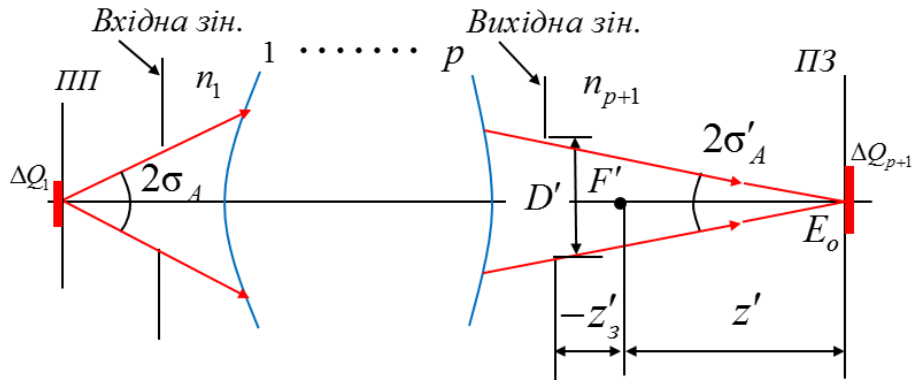


Рис. 11.20. До виводу формул розрахунку  $E_o$

На елементарну площадку  $\Delta Q_{p+1}$ , з урахуванням (11.40), падає елементарний потік

$$\Delta\Phi' = E_o \Delta Q_{p+1} = \left( \pi \tau_{oc} \frac{n_{p+1}^2}{n_1^2} L \sin^2 \sigma'_A \right) \Delta Q_{p+1}. \quad (11.46)$$

Уявімо, що промені при проходженні через оптичну систему не виходять за межі своїх світлових трубок. Через часткову втрату енергії на виході системи буде спостерігатися елементарний потік  $\tau_{oc} \Delta\Phi$ , який падає на площадку  $\Delta Q_{p+1}$ . Згідно закону збереження енергії повинен виконуватися баланс:  $\tau_{oc} \Delta\Phi = \Delta\Phi'$ , або з урахуванням (11.45) та (11.46):

$$\tau_{oc} \Delta Q_1 \pi L \sin^2 \sigma_A = \left( \pi \tau_{oc} \frac{n_{p+1}^2}{n_1^2} L \sin^2 \sigma'_A \right) \Delta Q_{p+1}.$$

Оскільки  $\frac{\Delta Q_{p+1}}{\Delta Q_1} = \beta^2$ , де  $\beta$  – лінійне збільшення в оптично спряжених площинах ПП і ПЗ, то останнє рівняння перетворюється до вигляду:

$$\boxed{\frac{n_1^2 \sin^2 \sigma_A}{n_{p+1}^2 \sin^2 \sigma'_A} = \beta^2}. \quad (11.47)$$

Вираз (11.47) має назву **закону синусів Аббе**.

Цей закон має важливе значення не тільки в теорії переносу енергії випромінювання через оптичну систему, але і в теорії абераций оптичних систем.



*Ернст Аббе*  
німецький фізик-оптик  
1840–1905

Рівняння (11.47) дозволяє отримати формули розрахунку опромінення осьової точки площини зображень за даними про передній  $\sigma_A$  апертурний кут оптичної системи. Так згідно (11.47)

$$\sin^2 \sigma'_A = \frac{n_1^2 \sin^2 \sigma_A}{n_{p+1}^2 \beta^2}.$$

Після підстановки виразу  $\sin^2 \sigma'_A$  у формулу (11.40) отримуємо:

$$E_o = \pi \tau_{oc} L \frac{\sin^2 \sigma_A}{\beta^2}. \quad (11.48)$$

При значеннях заднього апертурного кута  $2\sigma'_A$ , що допускають заміну  $\sin \sigma'_A$  на  $tg \sigma'_A$ ,  $\sin^2 \sigma'_A$  можна представити через інші геометричні параметри оптичної системи. Так з рис. 11.20

$$\sin \sigma'_A \approx tg \sigma'_A = \frac{0.5D'}{-z'_3 + z'}.$$

Відрізки  $z'$ ,  $z'_3$  можна представити у іншому вигляді, використовуючи для цього формули (7.4) розрахунку лінійного збільшення  $\beta$  в оптично спряжених площинах:

$$z' = -f'\beta, \quad z'_3 = -f'\beta_3,$$

де  $\beta$  – лінійне збільшення в оптично спряжених площинах ПП і ПЗ, рис. 11.20;  $\beta_3$  – лінійне збільшення в оптично-спражених площинах вхідної і вихідної зіниці:

$$|\beta_3| = \frac{D'}{D},$$

де  $D'$  – діаметр вихідної зіниці,  $D$  – діаметр вхідної зіниці.

Тоді  $tg \sigma'_A = \frac{0.5D'}{f'\beta_3 - f'\beta} = \frac{1}{2} \frac{D\beta_3}{f'(\beta_3 - \beta)}$ . Заміна  $\sin \sigma'_A$  у (11.40) на

$tg \sigma'_A$  змінює вигляд формули розрахунку  $E_o$ :

$$E_o = \frac{\pi}{4} \tau_{oc} \frac{n_{p+1}^2}{n_1^2} \left( \frac{D}{f'} \right)^2 \frac{\beta_3^2}{(\beta_3 - \beta)^2} L. \quad (11.49)$$

При застосуванні формули (11.49) до так званих **тонких оптичних систем**, у яких відстань між вхідною і вихідною зіницею мала у порівнянні з фокусними відстанями, через що лінійне збільшення  $\beta_3$  можна прирівняти до одиниці, тоді:

$$E_0 = \frac{\pi}{4} \tau_{oc} \frac{n_{p+1}^2}{n_1^2} \left( \frac{D}{f'} \right)^2 \frac{1}{(1-\beta)^2} L. \quad (11.50)$$

Коли площина предметів (ПП) знаходиться на безкінечності, в наслідок чого  $\beta=0$ , формула (11.49) перетворюється до вигляду:

$$E_0 = \frac{\pi}{4} \tau_{oc} \frac{n_{p+1}^2}{n_1^2} \left( \frac{D}{f'} \right)^2 L. \quad (11.51)$$

Формули (11.41), (11.49), (11.50), (11.51) широко використовуються в енергетичних розрахунках оптичних систем. В цих формулах присутні параметри, які мають свою назву:

$\frac{D}{f'}$  – **відносний отвір** оптичної системи;

$\frac{f'}{D}$  – **діафрагмове число**;

$\left( \frac{D}{f'} \right)^2$  – **геометрична світлосила**;

$\frac{E_o}{L}$  – **фізична світлосила**.

З формул (11.48)–(11.51) видно, що  $E_o$  пропорційне геометричній або фізичній світлосилі системи, а для збільшення опроміненості чи освітленості площини зображень потрібно збільшувати відносний отвір оптичної системи і намагатися збільшувати значення коефіцієнту  $\tau_{oc}$ .

## 11.6. Коефіцієнт пропускання $\tau_{oc}$ оптичної системи

Коефіцієнт пропускання оптичної системи

$$\tau_{oc} = \frac{\Phi'}{\Phi}, \quad (11.52)$$

де  $\Phi'$  – потік на виході з оптичної системи,  $\Phi$  – потік на вході в оптичну систему.

При проходженні випромінювання через оптичну систему мають місце втрати через:

- відбиття частини потоку на заломлюючих і відбивальних поверхнях;
- поглинання потоку в оптичних середовищах;
- розсіювання потоку в оптичних середовищах.

Втрати на відбиття оцінюються коефіцієнтом відбиття  $\rho$ :

$$\rho = \frac{\Phi_{\rho}}{\Phi}.$$

Втрати на поглинання оцінюються коефіцієнтом поглинання  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{\Phi_{\alpha}}{\Phi}.$$

Втрати на розсіювання оцінюються коефіцієнтом поглинання  $\sigma$ :

$$\sigma = \frac{\Phi_{\sigma}}{\Phi}.$$

Вказані частки потоку дозволяють скласти баланс потоку випромінювання:

$$\Phi' + \Phi_{\rho} + \Phi_{\alpha} + \Phi_{\sigma} = \Phi.$$

Поділивши обидві частини попереднього рівняння на  $\Phi$  отримаємо рівняння

$$\tau_{oc} + \rho + \alpha + \sigma = 1$$

з якого

$$\tau_{oc} = 1 - \rho - \alpha - \sigma. \quad (11.53)$$

Потрібно відмітити, що вказані у формулі (11.53) коефіцієнти залежать від довжини хвилі  $\lambda$ , тобто є спектрально залежними. Це означає, що при розрахунку  $\tau_{oc}$  при необхідності потрібно обов'язково враховувати вказаний фактор.

### **Втрати потоку при відбитті**

Згідно формули Френеля коефіцієнт відбиття електромагнітної хвилі від поверхні розділу двох оптичних середовищ [1]:

$$\rho = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin^2(\varepsilon' - \varepsilon)}{\sin^2(\varepsilon' + \varepsilon)} + \frac{\operatorname{tg}^2(\varepsilon' - \varepsilon)}{\operatorname{tg}^2(\varepsilon' + \varepsilon)} \right],$$

де  $\varepsilon$  – кут падіння,  $\varepsilon'$  – кут заломлення.

Якщо кут падіння  $\varepsilon \leq 40^\circ$ , то попередня формула може бути спрощена до вигляду

$$\rho = \left( \frac{n' - n}{n' + n} \right)^2, \quad (11.54)$$



де  $n$  і  $n'$  показники заломлення оптичних середовищ до і після оптичної поверхні відповідно.

Найбільших значень  $\rho$  досягає на поверхнях, що межують з повітрям. Так на оптичній поверхні із скла марок крон ( $n \approx 1.52$ ), що межує з повітрям, значення  $\rho \approx 0.04$  (4%), а на поверхні із скла марок флінт ( $n \approx 1.7$ )  $\rho \approx 0.07$  (7%).

На межі склеєних оптичних поверхонь коефіцієнт відбиття є набагато меншим у порівнянні з наведеними прикладами. Так на межі скла з  $n = 1.5$  і скла з  $n = 1.7$   $\rho \approx 0.004$  (0.4%). Тому в розрахунках коефіцієнту відбиття такими втратами нехтують.

Оптичні поверхні, що межують з повітрям, як правило покривають спеціальними діелектричними плівками, на яких, завдяки інтерференції і взаємного гасіння відбитих хвиль від поверхонь цих плівок досягається суттєве зменшення коефіцієнту відбиття. Такі поверхні називають просвітленими. На просвітлених поверхнях коефіцієнт відбиття становить від 1 % до 0.35 %.

Втрати потоку на відбиттях від дзеркальних оптичних поверхнях залежать від матеріалу дзеркального покриття. Так срібряні поверхні з тилу оптичної деталі мають коефіцієнт відбиття  $\rho \approx 0.85$ . Оптична поверхня, алюмінована зовні, має коефіцієнт відбиття  $\rho \approx 0.87$ , якщо ця поверхня оксидована (для більшої механічної і хімічної стійкості), то у неї коефіцієнт відбиття  $\rho \approx 0.8 - 0.84$ .

### **Втрати потоку від поглинання**

Оптичні середовища поглинають випромінювання, яке проходить через них. Частина потоку, яка пройшла через середовище з втратою на поглинання, оцінюється згідно закону Бугера-Ламберта формулою

$$\tau_{\alpha} = (1 - \alpha_i)^{l_i},$$

де  $\tau_{\alpha}$  – коефіцієнт пропускання оптичного матеріалу з номером  $i$  в оптичній системі,  $\alpha_i$  – коефіцієнт поглинання,  $l_i$  – товща поглинального оптичного матеріалу.

### **Загальна робоча формула розрахунку коефіцієнту пропускання оптичної системи**

Нижче наведена робоча формула розрахунку коефіцієнта пропускання оптичної системи, де враховані втрати при заломленні,

відбитті і поглинанні потоку випромінення у світлових трубках, що проходять шлях від першої до останньої оптичної поверхні системи:

$$\tau_{oc} = \prod_{N_{кр}} (1 - \rho_{кр}) \times \prod_{N_{фл}} (1 - \rho_{фл}) \times \prod_{N_{пр}} (1 - \rho_{фл}) \times \prod_{N_{дз}} \rho_{дз} \times \prod_{N_i} (1 - \alpha_i)^{l_i}, \quad (11.55)$$

де  $N_{кр}$  – номери оптичних поверхонь деталей з скла кронових марок, що межують з повітрям;  $N_{фл}$  – номери оптичних поверхонь деталей з скла флінтових марок, що межують з повітрям;  $N_{пр}$  – номери просвітлених оптичних поверхонь;  $N_{дз}$  – номери дзеркальних поверхонь;  $N_i$  – номери оптичних середовищ крім повітря, що поглинають випромінення.

Втрата потоків випромінення в атмосфері на трасі від віддаленого об'єкту до оптичної системи є окремою задачею, яка у даному підручнику не розглядається.

При проектуванні оптичних систем, особливо на ранніх його стадіях, використовують спрощену формулу, яка дає хоча й приблизну, але достатню за точністю оцінку пропускання оптичної системи:

$$\tau_{oc} = 0.96^{N_1} \cdot 0.93^{N_2} \cdot 0.99^{N_3} \cdot \rho_{дз}^{N_4} \cdot 0.99^{\Sigma l}, \quad (11.56)$$

де  $N_1$  – кількість оптичних поверхонь деталей із скла кронових марок, що межують з повітрям;  $N_2$  – кількість оптичних поверхонь деталей із скла флінтових марок, що межують з повітрям;  $N_3$  – кількість просвітлених оптичних поверхонь;  $N_4$  – кількість дзеркальних поверхонь з коефіцієнтом відбиття  $\rho_{дз}$ ;  $\Sigma l$  – сумарна в [см] осьова товщина оптичних деталей системи, через які проходить випромінення.

**Завдання 11.8.** На рис. 11.1, б показано підпал сухої трави за допомогою лупи – збиральної лінзи, яка на сухій траві формує дійсне зображення Сонця. Визначити у скільки разів освітленість зображення сонячного диску, сформованого лінзою, більша освітленості від Сонця у прямих сонячних променях. Кутовий розмір диску Сонця  $2\sigma_A = 0^\circ 31' 59'' = 0.0093$  радіан, відносний отвір лінзи  $\frac{D}{f'} = 1:5$ , коефіцієнт пропускання лінзи  $\tau_{oc} = 0.92$ .

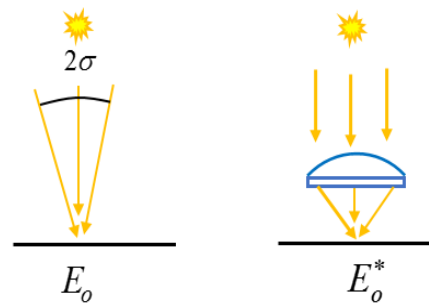


Рис. 11.21. До вправи 11.8

**Розв'язання.** Сонце – протяжний ламбертів випромінювач, який має форму сфери, але спостерігається на Землі як диск, тому для розрахунку освітленості у прямих

сонячних променях допустимо використовувати формулу (11.28):

$$E_0 = \pi L \sin^2 \sigma_A.$$

Освітленість  $E_o^*$  у зображенні Сонця, сформованого лінзою, визначається формулою (11.51). Оскільки лінза знаходиться у повітрі і показники заломлення перед лінзою і за лінзою однакові

( $n_1 = n_{p+1} = 1$ ), то формула (11.51) має вигляд  $E_o^* = \frac{\pi}{4} \tau_{oc} \left( \frac{D}{f'} \right)^2 L$ . При

цьому співвідношення, що вказує у скільки разів освітленість у зображенні Сонця більша за освітленість у прямих сонячних променях:

$$\frac{E_o^*}{E_0} = \frac{\frac{\pi}{4} \tau_{oc} \left( \frac{D}{f'} \right)^2 L}{\pi L \sin^2 \sigma_A} = \frac{\tau_{oc} \left( \frac{D}{f'} \right)^2}{4 \sin^2 \sigma_A} = \frac{0.92 \cdot 0.2^2}{4 \cdot 0.0046^2} = 434.8.$$

Отримане число вказує на те, що в зображенні Сонця освітленість така, яка могла бути без лінзи при наявності на небосхилі додаткових 434 одиниць вказаного світила. Цим пояснюється загоряння сухої трави в зоні фокусування лінзою сонячних променів.

**Завдання 11.9.** Білий лист матової бумаги з коефіцієнтом відбиття  $\rho_0 = 0.7$  освітлюється точковим джерелом з відстані 1 м під кутом  $\varepsilon = 30^\circ$ . На відстані від листа 0.5 м знаходиться об'єктив з фокусною відстанню 10 мм, відносним отвором  $\frac{D}{f'} = 1:2$  і коефіцієн-

том пропускання  $\tau_{oc} = 0.8$ . Яку силу світла повинно мати точкове джерело, щоб у площині зображення листа бумаги освітленість була не менше 1 лк?

**Розв'язання.** Освітлена бумага є протяжним вторинним випромінювачем з яскравістю  $L_0 = \frac{\rho_0}{\pi} E$ , див. формулу (11.31) і рисунок.

Освітленість бумаги згідно формули (11.22)  $E = \frac{I}{l^2} \cos \varepsilon$ , тому

$$\text{яскравість бумаги } L_0 = \frac{\rho_0}{\pi} E = \frac{\rho_0}{\pi} \frac{I}{l^2} \cos \varepsilon.$$

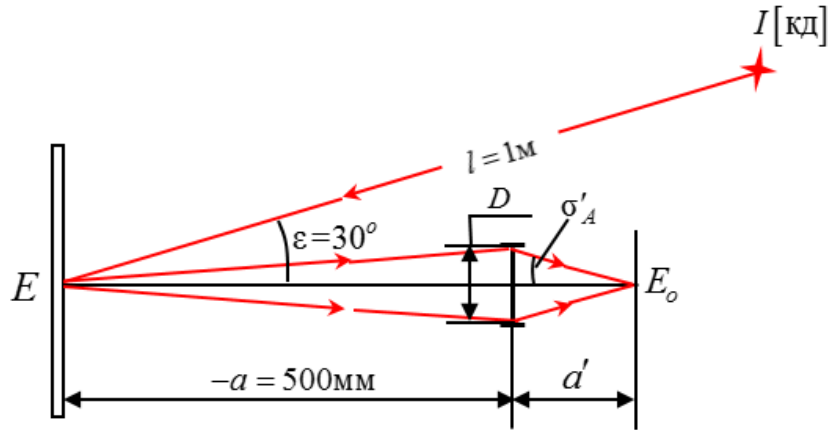


Рис. 11.22. До завдання 11.9

Освітленість осьової точки  $E_0$  в зображенні листа бумаги, сформованого об'єктивом, згідно (11.41)  $E_0 = \pi \tau_{oc} L_{\rho} \sin^2 \sigma'_A$ , або

$$E_0 = \pi \tau_{oc} \frac{\rho_{\bar{o}}}{\pi} \frac{I}{l^2} \cos \varepsilon \cdot \sin^2 \sigma'_A = \tau_{oc} \rho_{\bar{o}} \frac{I}{l^2} \cos \varepsilon \cdot \sin^2 \sigma'_A. \text{ З цього рівняння}$$

$$I = \frac{E_0 \cdot l^2}{\tau_{oc} \rho_{\bar{o}} \cos \varepsilon \cdot \sin^2 \sigma'_A}$$

З рисунка видно, що  $\operatorname{tg} \sigma'_A = \frac{0.5D}{a'}$ , звідки  $\sigma'_A = \operatorname{arctg} \frac{0.5D}{a'}$ .

Оскільки  $\frac{D}{f'} = 1:2$ , то  $D = \frac{1}{2} f' = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5(\text{мм})$ . Відрізок  $a'$

можна знайти з формули Гауса (7.9):  $\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f'}$ ,

$$a' = \frac{a \cdot f'}{a + f'} = \frac{-500 \cdot 10}{-500 + 10} = 10.204(\text{мм}).$$

$$\text{Тоді } \sigma'_A = \operatorname{arctg} \frac{0.5D}{a'} = \operatorname{arctg} \frac{0.5 \cdot 5}{10.204} = \operatorname{arctg} 0.245 = (13.77)^\circ.$$

Після підстановки значення  $\sigma'_A$  у формулу для сили світла, отримаємо:

$$I = \frac{E_0 \cdot l^2}{\tau_{oc} \rho_{\bar{o}} \cos \varepsilon \cdot \sin^2 \sigma'_A} = \frac{1 \left[ \frac{\text{лм}}{\text{м}^2} \right] \cdot [1\text{м}]^2}{0.8 \cdot 0.7 \cdot \cos(30^\circ) \cdot \sin^2(13.77)^\circ} = 36.41 \text{ Кд}.$$

Таким чином сила світла точкового джерела, згідно умови завдання 11.9, повинна бути не менш ніж 36.41 кандел.

## РОЗДІЛ 12. ТЕОРІЯ ОПТИЧНИХ СИСТЕМ ОПТИЧНИХ ТА ОПТИКО-ЕЛЕКТРОННИХ ПРИЛАДІВ

Оптичні системи є основою функціонування оптичних та оптико-електронних приладів. Що таке оптичні системи?

**Оптична система** – сукупність оптичних елементів, розташованих в просторі в тому порядку, який дозволяє оптичному або оптико-електронному приладу здійснювати його основні та допоміжні функції.

Що таке основні і допоміжні функції?

**Основні функції** це ті, за ради яких існує прилад. Як їх визначати? Знайдіть відповідь на питання, що ми втрачаємо при вилученні з використання конкретного приладу? Наприклад, немає біноклів. Зрозуміло, що при цьому людина втрачає можливість спостерігати збільшені зображення віддалених об'єктів. З цього витікає, що основна функція біноклів полягає у забезпеченні зоровому органу людини видимого збільшення віддалених об'єктів, тобто ілюзії наближення до них.

**Допоміжні функції** оптичного приладу є ті, що сприяють виконанню основних функцій. Наприклад, око користувача біноклю є короткозорим або далекозорим. При цьому оптична система біноклю повинна мати допоміжну функцію, а саме, нейтралізувати дію вказаного недоліку ока.

Якщо основну, або основні функції приладу виконує оптична система, то такий прилад називають оптичним.

З появою і використанням в оптичних приладах фотоелектричних приймачів і електронних комп'ютерних систем для сприйняття, обробки і збереження візуальної інформації, виникла велика група так званих оптико-електронних приладів. Але і в них основні функції виконують оптичні системи.

Аналіз дії оптичних чи оптико-електронних приладів, а також синтез оптичних систем для таких приладів, неможливі без чіткого розуміння принципів функціонування оптичних систем. Тому основною метою цього та наступних розділів буде вивчення теорії класичних оптичних систем, з яких утворюють складні оптичні системи сучасних оптичних та оптико-електронних приладів.

## **Класифікація оптичних систем**

Класифікація систем відбувається за ознаками, згідно яких вони можуть розділятися на окремі групи. Що стосується оптичних систем, то ознаками для їх розділення на окремі групи є:

- призначення для виконання спеціальних функцій;
- робочий спектральний діапазон;
- умови використання,
- інше.

Так за ознакою призначення оптичні системи розділяють на

- візуальні,
- фотографічні,
- проекційні,
- спектральні,
- геодезичні,
- далекомірні,
- прицільні,
- пристрої самонаведення,
- тепловізійні,
- системи орієнтації та навігації і т. д.

За робочим спектральним діапазоном оптичні системи розділяються на ті, що працюють у:

- видимому діапазоні,
- ультрафіолетовому,
- близькому інфрачервоному,
- далекому інфрачервоному.

За умов використання приладів:

- заводські,
- польові,
- лабораторні,
- медичні,
- військові,
- космічні і т. д.

Але практика аналізу та синтезу оптичних систем показала, що найбільш доцільною і зручною ознакою класифікації є положення відносно оптичної системи площини предметів та площини зображень.

Ця ознака класифікації оптичних систем стала основною через те, що функціональні параметри та характеристики оптичних систем, методи і методики їх проектування суттєво залежать саме від положення відносно оптичної системи предметної площини та площини зображень.

В переважній кількості практичних випадків предметна площина фактично знаходиться на відстані, що набагато перевищує довжину фокусної відстані оптичної системи. Так при відстані, яка в 10 разів більша фокусної відстані, предметна площина вже може вважатися безкінечно віддаленою. Але більшість і наземних, і астрономічних об'єктів є віддаленими від системи набагато більшу відстань.

Між тим є об'єкти, що розташовуються на малій відстані від оптичної системи. Наприклад, у мікроскопа предметна площина знаходиться в передній фокальній площині його оптичної системи, яка іноді віддалена від першої оптичної поверхні об'єктиву на долі міліметра.

Що стосується необхідного положення площини зображень, сформованого оптичною системою, то тут принципову роль грає тип аналізатора цих зображень. Так у візуальних оптичних приладах аналізатором зображення слугує око людини. Для нормального людського ока найбільш комфортним є спостереження зображень, сформованих оптичною системою приладу на безкінечності. Те саме стосується приладів, на виході яких використовуються фотографічні камери або веб-камери, сфокусовані на безкінечність.

Інша ситуація виникає, коли реєстрація зображення здійснюється фотоплівкою або матричним фотоелектричним приймачем, які розташовуються в приладі в межах оптичної системи, тобто поруч з оптичною системою.

У зв'язку з вищевикладеним площини предметів та площини їх зображень розділяють на два типи:

- безкінечно віддалені від оптичної системи;
- віддалені на кінцеву відстань від оптичної системи.

Умовно позначають цифрою нуль безкінечно віддалені площини предметів чи їх зображень, а предмет або зображення, віддалені на кінцеву відстань, позначають цифрою одиниця. З цього виникає чотири групи оптичних систем, які позначаються двозначними числами: 00, 10, 11, 01.

Перша цифра означає розташування площини предметів відносно оптичної системи, друга цифра – розташування площини зображення, сформованого оптичною системою, відносно цієї системи. Кожна з таких груп отримала назву, пов'язану з назвою класичного оптичного приладу, де вона вперше була використана.

У табл. 12.1 наведені чотири типи оптичних систем та вказані типові прилади, де вони використовуються. В цій таблиці стандартні позначення відрізків вказують:  $s_1$  – положення площини предметів відносно першої оптичної поверхні системи;  $s'_p$  – положення площини зображення відносно останньої оптичної поверхні системи.

Таблиця 12.1

Класифікація оптичних систем

Шифр системи	$s_1$ $s'_p$	Назва оптичної системи	Оптичні прилади, де використовуються оптична система
00	$s_1 = \infty$ $s'_p = \infty$	Телескопічні	Телескопи, зорові труби, біноклі, монокуляри, розширювачі лазерних пучків, геодезичні прилади, далекоміри
10	$s_1 \neq \infty$ $s'_p = \infty$	Мікроскопи	Лупи, мікроскопи, коліматори
11	$s_1 \neq \infty$ $s'_p \neq \infty$	Проекційні	Діапроектори, епіпроектори, кодоскопи, кінопроектори, комп'ютерні проектори, конденсори
01	$s_1 = \infty$ $s'_p \neq \infty$	Об'єктиви	Фотооб'єктиви, кінооб'єктиви, телеоб'єктиви, Об'єктиви тепловізорів і приладів нічного бачення, астрономічні об'єктиви, трансфокатори, панкратичні об'єктиви

З окремих оптичних систем, наведених в табл. 12.1, можна скласти багатофункціональну складну оптичну систему приладу. І навпаки, будь-яку складну оптичну систему можна розкласти на окремі оптичні підсистеми, представлені в табл.12.1. Цим підтверджується як теоретична, так і практична доцільність наведеної вище класифікації оптичних систем.

Значна кількість оптичних приладів призначені для роботи з оком людини, через що мають назву візуальних. Але і сучасні оптико-електронні прилади в багатьох випадках мають візуальні канали. Тому оптичні системи візуальних приладів та візуальних каналів



мають бути пристосованими до роботи з оком людини. В таких системах враховують властивості анатомічної структура ока, його антропометричні параметри, параметри оптичної системи ока, її вади, а саме головне – функції зорового органу з їх параметрами та характеристиками.

Тому ознайомлення з теорією оптичних систем оптичних приладів починають з вивчення структури, функцій і параметрів ока людини.

## 12.1. Анатомічна будова ока

На рис. 12.1 показано перетин ока людини. Воно має форму еліпсоїда, наближеного до сфери. Діаметр сфери очного яблука залежить від віку та габаритів людини. У дорослої людини він в середньому має приблизно 25 мм. Форма очного яблука трохи відрізняється у людей, які належать до різних рас. У представників європеоїдної раси вона більш сферична, у негроїдів – більш витягнута, еліпсоїдна. Форма очного яблука підтримується скловидним тілом – прозорою, щільною, желеподібною речовиною.



Рис. 12.1. Анатомічна будова ока людини

Очне яблуко містить три оболонки. **Склера** {хе "Склера"} представляє собою зовнішню непрозору оболонку із фіброзною структурою і молочно-білим кольором товщиною близько 1 мм. Завдяки своїй міцності склера охороняє внутрішні частини ока від пошкоджень та деформації. В передній, більш опуклій частині склери розміщена **рогівка** {хе "Рогівка"} – прозоре тіло, яке нагадує лінзу-меніск, через яку світло надходить усередину ока.

Середня оболонка – **судинна оболонка** або **хороїд** {хе "Хороїд"} названа так тому, що містить судини, які живлять очне яблуко. Вона контактує з циліарним тілом і непрозорою перегородкою – **райдужкою** {хе "Радужка"}. Циліарне тіло разом з в'їчастим тілом утримують **кришталік** {хе "Кришталік"} – еластичну внутрішню лінзу ока. Еластичність кришталіка потрібна для зміни форми його поверхонь, що забезпечується роботою м'яз циліарного тіла. Завдяки зміні своєї форми кришталік разом з рогівкою забезпечує автофокусування зображення зовнішніх предметів на сітківці.

В райдужці є отвір – **зіниця** {хе "Зіниця"}, діаметр якої змінюється в залежності від освітленості сітківки. Цим досягається той рівень освітленості сітківки, який потрібний для нормальної роботи зорового органу та захисту сітківки від зайвого світлового потоку.

Між рогівкою і кришталіком знаходиться передня камера з рідиною, яку називають **водянистою вологою** {хе "Волога водяниста"}.

Задня камера, що знаходиться за кришталіком, заповнена **скловидним тілом** – щільною желеподібною речовиною {хе "Тіло скловидне"}. Воно є прозорим та достатньо оптично-однорідним. Завдяки своїм механічним властивостям скловидне тіло підтримує форму очного яблука.

Внутрішня оболонка очного яблука вкрита **сітківкою** {хе "Сітківка"} – мозаїчною системою світлочутливих рецепторів, які є розгалуженням зорового нерву. Її призначення – формування електричних сигналів, що через **зоровий нерв** передаються в мозок і несуть в собі інформацію про розподіл освітленості і кольору в зображенні на поверхні сітківки.

## 12.2. Функціональне призначення ока

Око людини призначене:

– утворювати на сітківці якісне зображення об'єктів, що знаходяться в межах поля зору ока – **фізична рефракція** (офтальмологічний термін);

– фокусувати на сітківці зображення предметів, що знаходяться на різній відстані від ока (від декілька десятків міліметрів до безкінечності) – **акомодація**;

– перетворювати оптичне зображення на сітківці у кодовані електричні імпульси, що передають в мозок інформацію про розподіл рівня освітленості і кольору в зображенні предметів на поверхні сітківки – **кольоросприйняття**;

– регулювання безпечного для сітківки рівня її освітленості – **адаптація**.

Фізичну рефракцію, акомодацію та адаптацію виконує оптична система ока під керуванням мозку.

## 12.3. Оптична система ока, що забезпечує оку фізичну рефракцію

Оптична система ока дволінзова. Перша лінза – рогівка, друга – кришталік. Передня поверхня рогівки контактує з повітрям, задня – з водянистою вологою. Передня поверхня кришталіка контактує з водянистою вологою, задня – зі скловидним тілом, рис. 12.2.

Відомо, що оптична сила заломлюваної поверхні пропорційна різниці показників заломлення середовищ, які вона розділяє. Рогівка контактує з повітрям і перепад показників заломлення на її передній поверхні складає 0.377. Аналогічний перепад показників заломлення між навколишнім середовищем кришталіка і самого кришталіка становить 0.063. Цим пояснюється те, що рогівка має істотно більшу оптичну силу ніж кришталік. Так оптична сила оптичної системи ока становить приблизно 60 дптр. З них біля 43 дптр ( $\approx 72\%$ ) належить рогівці, а решта 17 дптр ( $\approx 28\%$ ) – кришталіку.

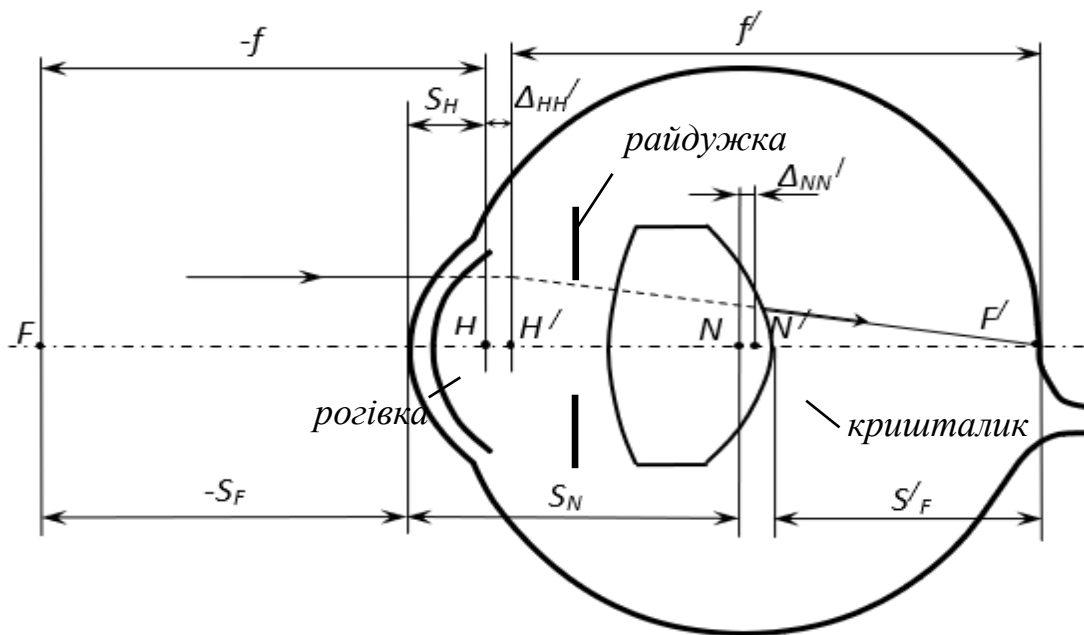


Рис. 12.2. Кардинальні елементи оптичної системи ока:

$F$  – передній фокус;  $F'$  – задній фокус;  $H$  – передня головна точка;  
 $H'$  – задня головна точка;  $N$  – передня вузлова точка;  $N'$  – задня вузлова точка;  
 $f$  – передня фокусна відстань;  $f'$  – задня фокусна відстань;  
 $S_F$  – передній фокальний відрізок;  $S'_F$  – задній фокальний відрізок

Положення показаних на рис. 12.1 кардинальних точок, а також значення кардинальних відрізків оптичної системи ока, залежать від його геометричних параметрів. Нижче наведені усереднені значення і діапазони геометричних та оптичних параметрів оптичної системи ока дорослої людини:

- радіус передньої поверхні рогівки – 7,8 мм (діапазон 7,0...8,65 мм);
- радіус задньої поверхні рогівки – 6,8 мм (діапазон 6,5...7,0 мм);
- осьова товщина рогівки – 0,4 мм (діапазон 0,35...0,5 мм);
- оптична сила рогівки – 42,4 дптр (діапазон 37,7...48,0 дптр);
- осьова товщина передньої камери – 3,7 мм (діапазон 2,8...4,6 мм);
- радіус передньої поверхні кришталіка – 10,2 мм (діапазон 8,8...11,9 мм);
- радіус задньої поверхні кришталіка – 6,0 мм (діапазон 5,8...6,2 мм);
- осьова товщина кришталіка – 4,0 мм (діапазон 3,6...5,0 мм);
- оптична сила кришталіка – 20,4 дптр (діапазон 15,0...27,0 дптр);
- осьова товщина ока – 24,0 мм (діапазон 20,0...29,5 мм);

- оптична сила ока 59,6 дптр (діапазон 54,0...65,0 дптр);
- діаметр рогівки – (10...14 мм);
- діаметр зіниці (1.5...8 мм) залежно від яскравості навколишнього середовища

Результати досліджень фізичних, оптичних та геометричних параметрів ока дозволили створити математичні моделі його оптичної системи. На цей час відомо декілька математичних моделей ока, від моделей Гульстранда і до сучасних моделей [8].

Найбільш точною і адекватною є так звана Аризонська модель, геометричні і оптичні параметри якої представлені в табл. 12.2. На відміну від інших, ця модель дозволяє враховувати зміни в геометричних параметрах оптичної системи ока, пов'язані з роботою механізму акомодатії.

Таблиця 12.2

Аризонська модель середньостатистичного ока людини

Параметри	Поверхня			
	Передня рогівки	Задня рогівки	Передня кришталика	Задня кришталика
Радіус кривизни $r_i^1$ [мм]	7,8	6,5	$r_3$	$r_4$
Конічний коефіцієнт $k^2$	-0,25	-0,25	$k_3$	$k_4$
Тип поверхні	витагнутий еліпсоїд	витагнутий еліпсоїд	гіперболоїд	параболоїд
Осьові відстані між поверхнями $d^3$ [мм]	0,55	$d_2$	$d_3$	16,6
Показник заломлення $n^4$	рогівки	водянистої вологи	кришталика	скловидного тіла
	1,37710	1,33740	$n_3$	1,33600
Число Аббе ( $\nu$ )	57,1	61,3	51,9	61,1

$$^1 r_3 = 12,0 - 0,4A; \quad r_4 = -5,224557 + 0,2A.$$

$$^2 k_3 = -7,518749 + 1,28572A; \quad k_4 = -1,353971 - 0,431762A.$$

$$^3 d_2 = 2,97 - 0,04A; \quad d_3 = 3,767 + 0,04A.$$

$$^4 n_3 = 1,42 + 0,00256A - 0,00022A^2,$$

де  $A$  – значення акомодатії ока, дптр.

Число Аббе розраховується за формулою:

$$v = \frac{1 - n_d}{n_F - n_C},$$

індекси  $d$ ,  $F$ ,  $C$  означають, що показник заломлення визначено для стандартних довжин хвилі 0,5876 мкм, 0,4861 мкм та 0,6563 мкм відповідно.

При акомодатії ока на безкінечність ( $A = 0$  дптр) параксіальні параметри оптичної системи за аризонською моделлю, представлені на рис. 12.2, мають значення:

$$f' = 22.029 \text{ мм}; f = -16.4887 \text{ мм};$$

$$s'_{F'} = 16.67 \text{ мм}; s_F = -14.8426 \text{ мм};$$

$$s'_{H'} = -5.3293 \text{ мм}; s_H = 1.6461 \text{ мм};$$

$$\Delta_{HH'} = 0.55 + d_2 + d_3 - s_H + s'_{H'} = 0.3116 \text{ мм};$$

$$s_N = f' + f = 5.5403 \text{ мм};$$

$$\Delta_{NN'} = \Delta_{HH'} = 0.3116 \text{ мм}.$$

## 12.4. Діафрагми оптичної системи ока

Як і будь-яка оптична система, оптична система ока має апертуру і польову діафрагму.

Функцію апертурної діафрагми виконує непрозора райдужка в центрі якої знаходиться круглий отвір – зіниця, рис. 12.3. Відомо, що від діаметру апертурної діафрагми залежить рівень освітленості зображення, що формується на сітківці див. формули (11.49)–(11.51). Тому для регулювання цієї освітленості отвір зіниці має змінний діаметр в діапазоні від 1.5 мм (в зимній сонячний день при наявності яскравого білого снігу) до 8.0 мм (в темряві). Регулювання діаметру зіниці відбувається під керівництвом ділянки мозку, яка входить до складу зорового органу людини.

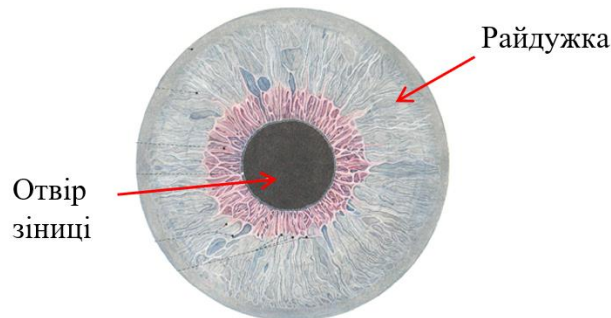


Рис. 12.3. Райдужка – апертурна діафрагма оптичної системи ока

Поле зору ока людини обмежується розмірами сітківки, яка устилає очне дно. За межами сітківки зображення не сприймається. Сітківка перекриває велику зону очного дна, тому поле зору ока доволі велике. У вертикальному перетині поле зору ока  $2\omega_v \approx 125^\circ$ . У горизонтальному перетині  $2\omega_h \approx 150^\circ$ . На рис. 12.4 показано вертикальний перетин ока і кут поля зору  $2\omega$ .

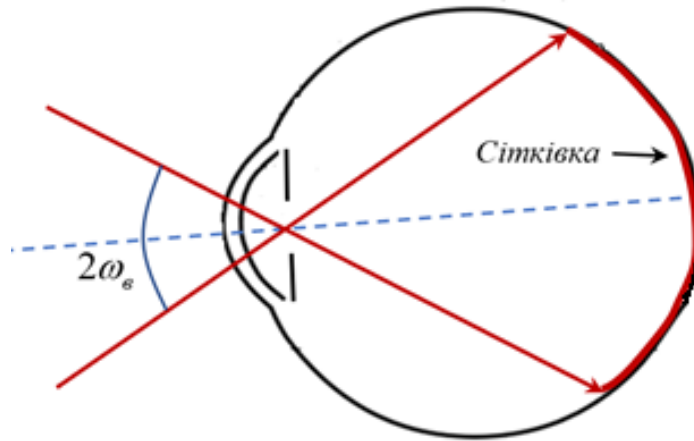


Рис. 12.4. До визначення поля зору ока людини у вертикальному перетині

Геометрична форма меж поля зору ока визначається формою меж сітківки. На рис. 12.5 чорною лінією показано нормальні межі поля зору лівого ока, визначену з використанням білого тест-об'єкту. Невеличка сіра зона вказує межі найбільшої гостроти зору, обумовленої наявністю найбільш чутливою **макулярної** зони сітківки, роздільна просторова здатність якої є найвищою у порівнянні з іншими зонами сітківки.

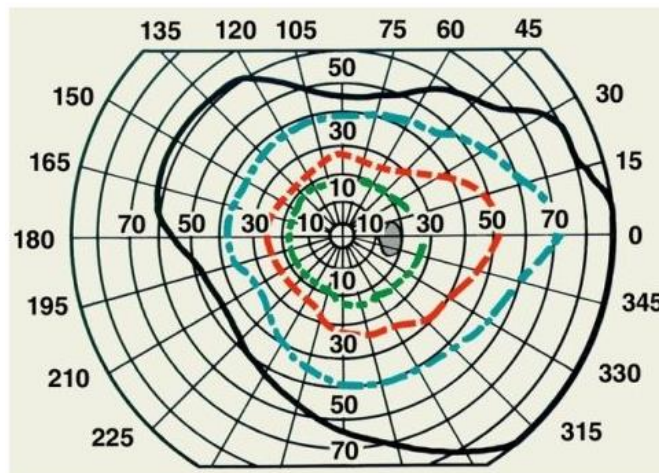


Рис. 12.5. Межі поля зору лівого ока людини позначені чорною лінією

Як видно з наведеного на рис. 12.4, 12.5 межі поля зору одного ока не є симетричними відносно візуальної осі, показаної на рис. 12.4 пунктирною лінією. Симетричність меж загального поля зору вирівнюється за рахунок складання поля зору обох очей людини.

## 12.5. Сітківка як фотоприймач зображень

«Стягнута рибацька сітка, закинута на дно очного келиха, яка ловить сонячні промені». Так уявляв собі сітківку ока мудрий грек Герофіл ще в древні часи. Це поетичне порівняння виявилось на диво точним. Зараз впевнено можна стверджувати, що сітківка – саме «сітка» що здатна «ловити» навіть окремі кванти світла.

На рис. 12.6 показане очне дно. На зображенні явно виділяються три характерні об'єкти – судинна система, жовта пляма і сліпа пляма.

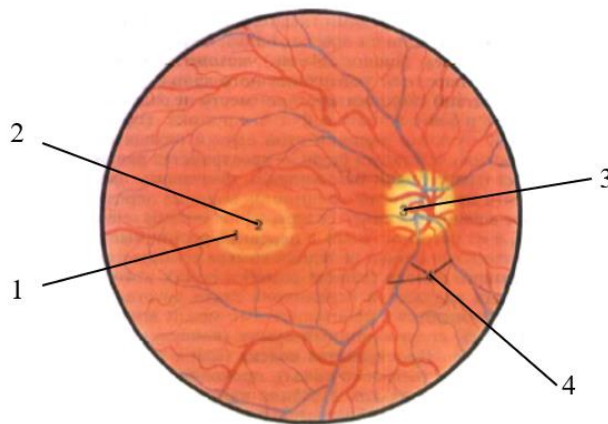


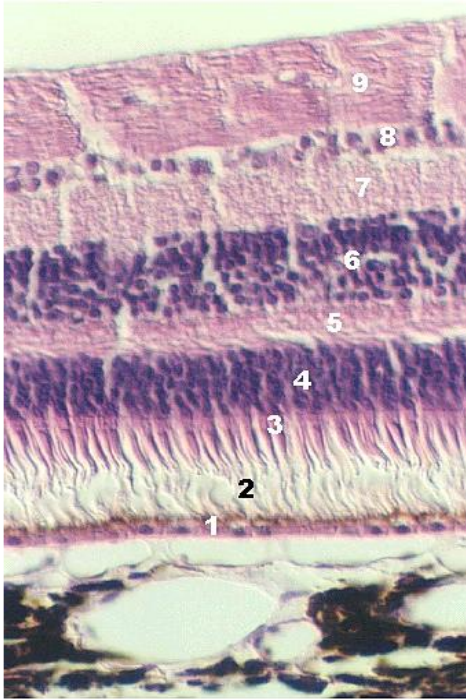
Рис. 12.6. Вигляд очного дна:

1 – жовта пляма (макула), 2 – центральна ямка жовтої плями,  
3 – сліпа пляма (диск зорового нерву), 4 – кровоносні судини

Судинна система спостерігається крізь тонку прозору плівку сітківки, тому колір очного дна має колір крові, що знаходиться в судинах та капілярах, наповнених кров'ю для живлення сітківки.

**Сітківка** – це багатоелементний фотоприймач зображень, який за спрощеною структурою представляється як розгалуження зорового нерву з додатковими функціями попередньої просторової та часової обробки зображень. Фоточутливими елементами цього фотоприймача є фоторецептори – **ковбочки** (6...7 мільйонів) та **палички** (100...120 мільйонів), рис. 12.7.





Гістологічний зріз сітківки

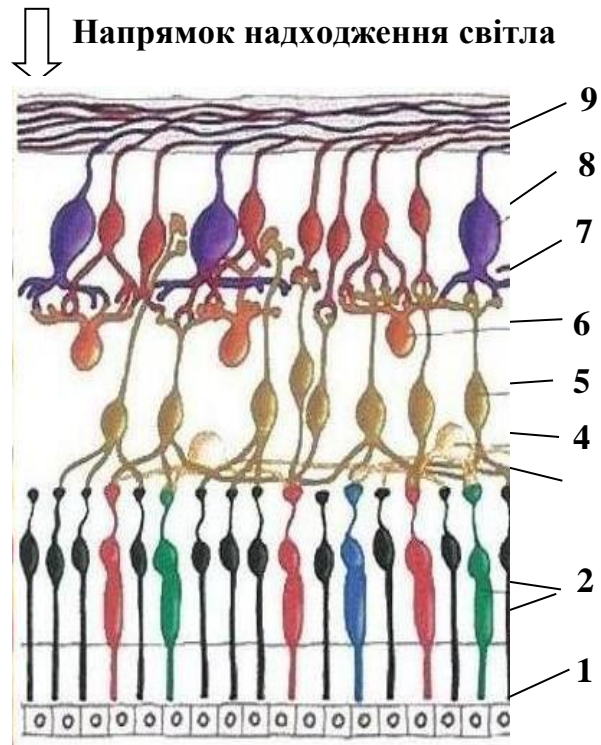


Схема будови сітківки

- Рис. 12.7.* Будова сітківки: 1 – пігментний епітелій;  
 2 – палички та ковбочки; 3 – зовнішній переплетений шар;  
 4 – горизонтальні клітини; 5 – біполярні клітини;  
 6 – амакринні клітини; 7 – внутрішній переплетений шар;  
 8 – гангліозні клітини; 9 – нервові волокна (аксони)

Сітківка займає зону діаметром біля 22 мм і тому майже повністю (біля 72 % внутрішньої поверхні очного яблука) устилає фоторецепторами очне дно. Вихід зорового нерву при офтальмоскопії виглядає як світлий диск внаслідок більшого ніж у інших зонах сітківки коефіцієнта відбиття світла. В зоні виходу зорового нерву сітківка не має фоточутливих рецепторів, тому зображення об'єктів, які попадають в це місце, людина не бачить (через що це місце назвали сліпою плямою). Сліпа пляма має розмір приблизно 1,8...2 мм в діаметрі. Вона розташована в горизонтальній площині на відстані біля 4 мм від заднього полюса очного яблука в напрямку до носа, трохи нижче полюса.

Центральна зона сітківки, яку називають **жовтою плямою** {ХЕ "Пляма: жовта"}, **макулою** {ХЕ "Макула"}, або **макулярною зоною**, виглядає як найбільш темна зона очного дна. Розмір жовтої плями точно не визначений, але прийнято вважати, що в горизонтальній площині він складає від 1,5 до 3 мм.

Жовта пляма, як і сліпа пляма, розташована не в зоні полюса очного яблука. Її центр зміщений в горизонтальній площині в протилежному від сліпої плями напрямку на відстань біля 1 мм від осі симетрії оптичної системи ока. **Візуальна вісь** проходить через центр жовтої плями, через що візуальна вісь ока і оптична вісь не є суміщеними, між ними існує кут  $5^{\circ}$ - $7^{\circ}$ .

Сітківка має різну товщину. В зоні сліпої плями вона є найбільш товстою (0,4... 0,5 мм). Найменшу товщину вона має в центральній зоні жовтої плями (0,07...0,1) мм, де утворюється так звана **центральна ямка** {ХЕ "Ямка центральна"}, **фовеа** {ХЕ "Фовеа"}

**Ковбочки** {ХЕ "Ковбочки"} мають довжину 0,035 мм та діаметр від 2 мкм (в центральній зоні жовтої плями) до 6 мкм в периферійній зоні сітківки. Поріг чутливості ковбочок  $\approx 30$  квантів світла, порогова енергія  $1,2 \cdot 10^{-17}$  Дж.

Ковбочки є фоторецепторами денного «кольорового» зору. Найбільшою прихильністю користується трьохкомпонентна теорія Г. Гельмгольца, згідно якої сприйняття оком кольору забезпечується трьома типами ковбочок з різною кольоровою чутливістю. Кожна ковбочка має в різній концентрації три типи пігменту – світлочутливої ковбочкової речовини (**йодопсину**). Перший тип пігменту (синьо-блакитний) поглинає світло в діапазоні довжин хвиль 435...450 нм, другий тип (зелений) – в діапазоні 525...540 нм, третій тип (червоний) – в діапазоні 565...570 нм. В залежності від пропорцій між концентраціями цих пігментів умовно виділяють три типи ковбочок – ковбочки, чутливі до блакитного, зеленого і червоного світла відповідно, тому на рис. 12.17 ковбочки представлено трьома різними кольорами. Такий розподіл спектральної чутливості ковбочок забезпечує зоровій системі можливість відрізнити об'єкти спостережень за їх кольором, що суттєво підвищує інформаційну потужність зорового органу людини.

**Палички** {ХЕ "Палички"} є рецепторами нічного, «чорно-білого» зору. Їх довжина 0,06 мм, діаметр приблизно 2 мкм. Вони мають порогову чутливість біля 12 квантів світла при довжині хвилі 419 нм або порогову енергію  $4,8 \cdot 10^{-18}$  Дж. Отже, вони є набагато більш чутливими до світлового потоку.

Палички містять пігмент **родопсин** {ХЕ "Родопсін"} – зоровий пурпур – різновид вітаміну А, який поглинає в широкому діапазоні з максимумом в синьо-зеленій зоні спектру (510 нм). Цим зоровий орган забезпечує людині можливість спостерігати об'єкти з малою

яскравістю в умовах вечірніх сутінок або вночі. Проте, внаслідок слабкої спектральної чутливості паличок об'єкти спостереження вночі сприймаються людиною як сірі або чорно-білі.

Щільність розташування ковбочок і паличок по сітківці не є однаковою. Найбільша щільність спостерігається в зоні жовтої плями. При наближенні до периферії сітківки щільність зменшується. На рис. 12.8 показано умовний розподіл зон навколо жовтої плями за ознакою щільності і наявності паличок і ковбочок.

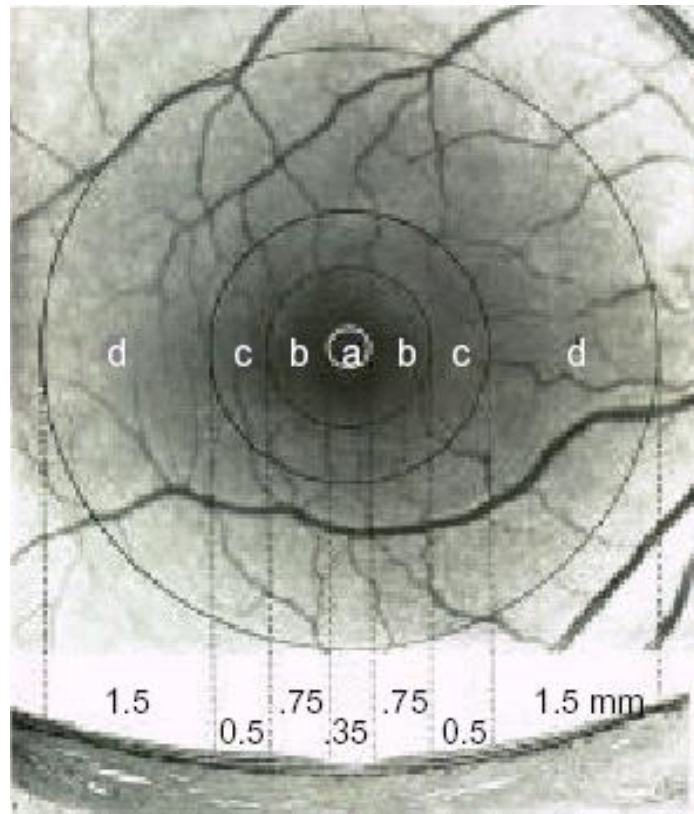
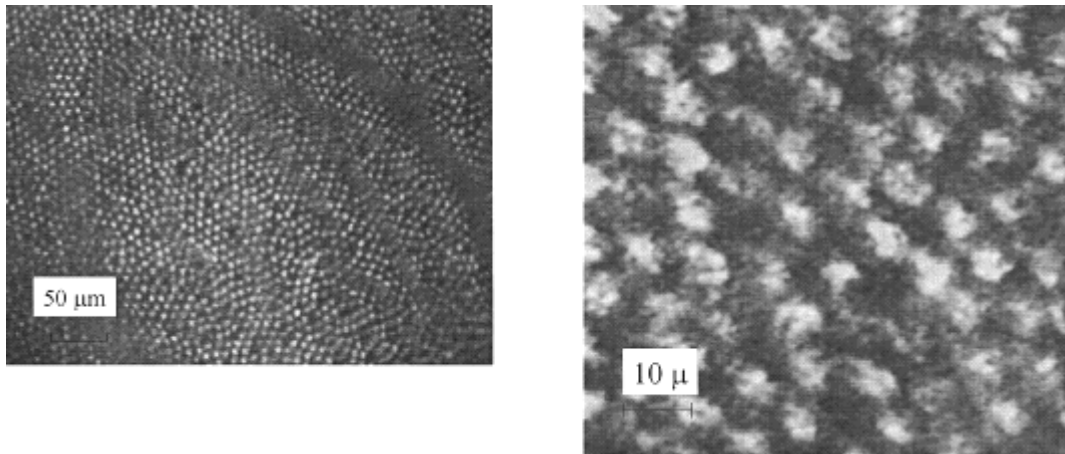


Рис. 12.8. Анатомічний вигляд макулярної області (зони жовтої плями):  
*a* – foveola, *b* – fovea, *c* – parafoveal, *d* – perifoveal

В центрі фовеа – **фовеолі** {ХЕ "Фовеола"} – знаходяться лише ковбочки. Їх діаметр в цьому місці є найменшим, вони дуже щільно гексагонально укладені (рис. 12.9). В зоні фовеа щільність ковбочок становить 147...238 тисяч на 1 мм<sup>2</sup>. Ця зона сітківки має найбільшу просторову роздільну здатність, в зв'язку з чим вона призначена для спостереження найбільш важливих фрагментів простору об'єктів, на яких людина фіксує свій погляд.

Далі від центра щільність ковбочок зменшується до 95 тисяч на 1 мм<sup>2</sup>, а в парафовеа – до 10 тисяч на 1 мм<sup>2</sup>.



*Рис. 12.9.* Збільшене зображення сітківки ока людини в зоні фовеоли

Щільність паличок найвища в парафовеолі – 150...160 тисяч на  $1\text{мм}^2$ . Далі від центру їх щільність також зменшується і на периферії сітківки становить лише 60 тисяч на  $1\text{мм}^2$ . Середня щільність паличок на сітківці 80...100 тисяч на  $1\text{мм}^2$ .

Існує невідповідність між кількістю окремих фоторецепторів (7 мільйонів ковбочок та 120 мільйонів паличок) та 1,2 мільйона волокон зорового нерву. Ця невідповідність проявляється в тому, що кількість «фотоприймачів» більше ніж в 10 разів перевищує кількість «провідників», які з'єднують сітківку з відповідними центрами мозку. Це робить зрозумілою одну з функцій шарів сітківки, показаних на рис. 12.7. Вона полягає в здійсненні такої комутації між окремими фоторецепторами і ділянками зорового центру мозку, яка з одного боку не перевантажує мозок «дрібною», другорядною інформацією, а з іншого – не допускає втрати важливої складової зорової інформації про середовище, що спостерігає око. Тому кожна ковбочка із фовеальної зони має свій персональний канал проходження нервових імпульсів до мозку. Проте, по мірі віддалення від фовеоли, такі канали утворюються вже для груп фоторецепторів. Цьому слугують горизонтальні, біполярні, амакринні та гангліозні клітини, а також зовнішні та внутрішні переплетені шари (рис. 12.7).

## 12.6. Просторово-роздільна здатність ока

Просторово роздільна здатність зорового органу – здатність сприймати дві точки або дві лінії простору предметів як роздільні.

Зображення точкових джерел світла залежить від явища дифракції світлових хвиль на краях зіниці і від дії оптичних аберацій.

При відсутності аберацій розподіл освітленості в зображенні точки на сітківці має вигляд, показаний на рис. 12.10.

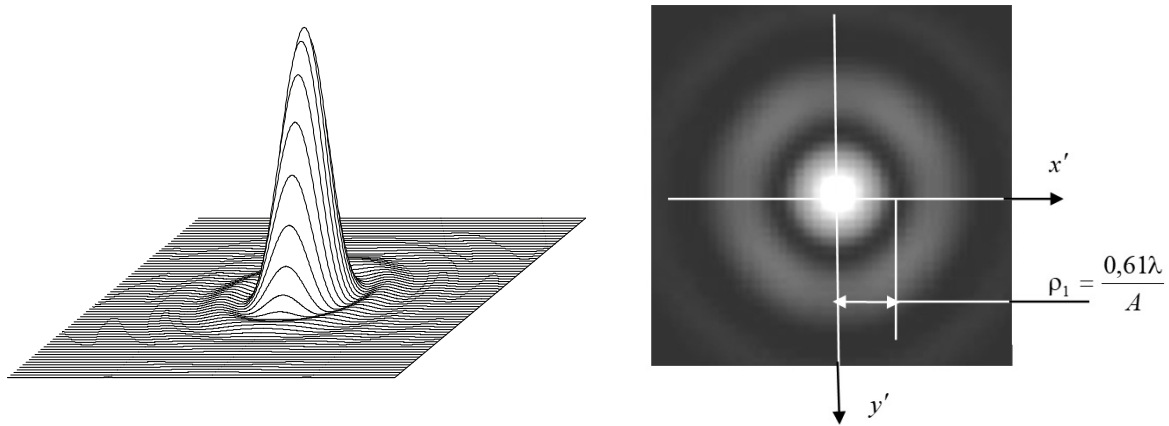


Рис. 12.10. Розподіл освітленості в зображенні точки на сітківці:

$A = \frac{D}{2f'}$ ,  $D$  – діаметр зіниці ока,  $f'$  – задня фокусна відстань оптичної системи ока,  
 $\lambda$  – довжина світлової хвилі,  $\rho_1$  – радіус центральної плями (кола Ері)

Для пояснення умови, при виконанні якої зображення на сітківці двох точкових джерел сприймається зоровим органом як роздільні, на рис. 12.11 показано фрагмент фовеоли з трьома сусідніми ковбочками. Зображення двох точкових джерел буде сприйматися як роздільні, якщо вони розташовані над ковбочками так, як показано на рис. 12.11. Перше зображення знаходиться над першою ковбочкою, друге – над третьою ковбочкою. Середня ковбочка повинна бути там, де сумарна освітленість в зображенні двох точок є мінімальною,  $E_{\min}$ .

В зоні фовеоли спостерігається найбільш щільне розташування ковбочок, діаметр яких складає приблизно 2 мкм. Тому міжосьова відстань між першою і третьою ковбочками складає  $\approx 4$  мкм, а кутова відстань  $\varepsilon$  між точковими джерелами в просторі предметів при цьому визначається за формулою

$$\varepsilon = \frac{4 \text{ мкм}}{f'} = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{22.029} = 1.815 \cdot 10^{-4} \text{ радіан,}$$

де  $f'$  – задня фокусна відстань оптичної системи середньо-статистичного ока людини за аризонською моделлю.

Оскільки одна кутова хвилина  $1' = 2.9 \cdot 10^{-4}$  рад, то з попереднього розрахунку  $\varepsilon = 38'$ .

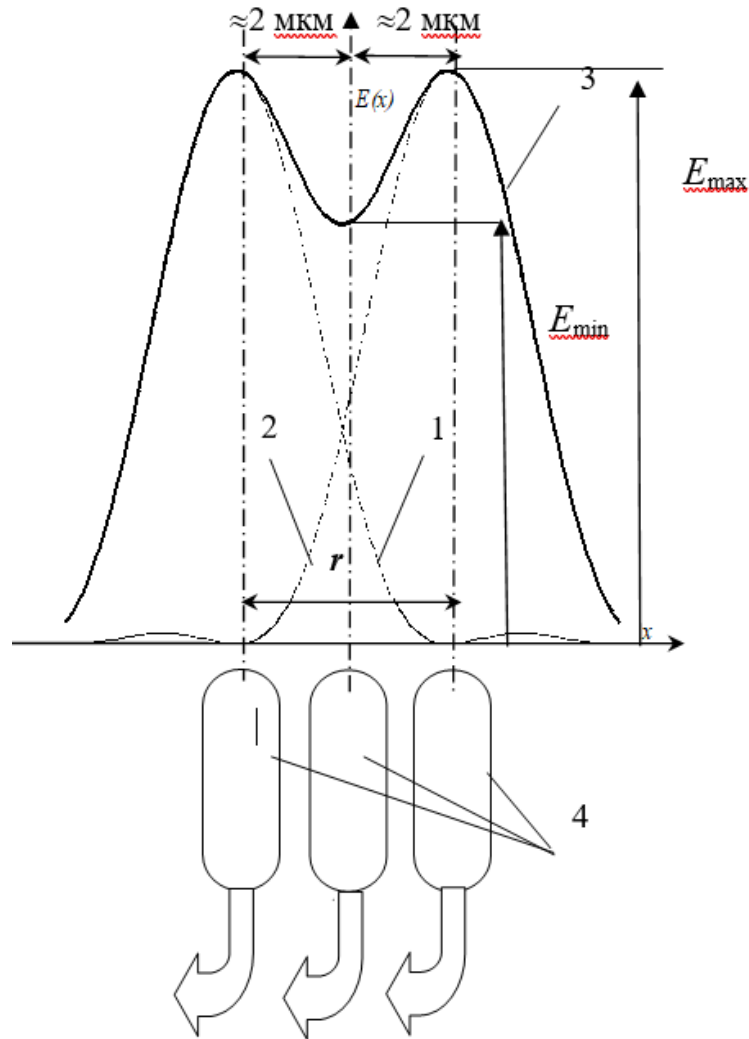


Рис. 12.11. До визначення просторово-роздільної здатності ока людини 1, 2 – розподіл освітленості в дифракційному зображенні двох точкових джерел світла; 3 – сумарний розподіл освітленості в дифракційному зображенні двох точок на сітківці; 4 – ковбочки в зоні фовеоли

Діаметр зіниці ока, при якому радіус кола Ері дорівнює 4 мкм, можна розрахувати за допомогою формули, що наведена на рис. 12.10:

$$D = \frac{0.61\lambda \cdot 2f'}{r} = \frac{0.61 \cdot 0.55 \cdot 10^{-3} \cdot 22.029}{4 \cdot 10^{-3}} = 1.85(\text{мм}).$$

В розрахунку використана довжина хвилі, на яку ковбочки є найбільш чутливими, це  $\lambda = 0.55 \cdot 10^{-3} \text{ мм}$ .

Із збільшенням діаметру зіниці до 2-4-х мм зростають аберації оптичної системи ока. Тому нормальною кутовою роздільною здатністю ока людини в межах діаметру зіниці 2-3 мм вважають

$$\boxed{\varepsilon = 1' = 60''}.$$



При цьому **гострота зору** за визначенням

$$\theta = \frac{1'}{\varepsilon_p},$$

де  $\varepsilon_p$  – реальна кутова просторова роздільна здатність ока людини. Якщо людина має значення  $\varepsilon_p = 1'$ , то згідно формулі гострота зору людини  $\theta = \frac{1'}{\varepsilon_p} = \frac{1'}{1'} = 1$ .

Наведені в п.п. 12.1–12.6 дані про устрій, функціональні параметри і характеристики ока є базовими і необхідними для здійснення аналізу та синтезу оптичних систем візуальних оптичних приладів.

## 12.7. Недоліки оптичної системи ока

Однією з найважливіших функцій ока є **акомодація** – здатність ока автоматично фокусувати на сітківці зображення предметів, що розташовані від ока на різних відстанях – від 100 мм до безкінечності.

Механізм акомодатії полягає у зміні форми кришталика. Так при фіксуванні погляду на предметі, що знаходиться недалеко від ока (декілька сотен міліметрів), м'язи циліарного тіла напружуються, вийчає тіло провисає, кришталик роздувається, отримуючи при цьому більш коротку фокусну відстань. Внаслідок зсуву заднього фокусу  $F'$  до кришталика зображення предмету фокусується чітко на сітківці ока, рис. 12.12, а).

В тому випадку, коли предмет, на якому фіксується погляд, знаходиться далеко від ока, наприклад більше ніж 5 м, чи на безкінечності, то м'язи циліарного тіла розслаблюються, вийчає тіло розтягує капсулу, де знаходиться кришталик, кришталик становиться більш тонким і довгофокусним. Задній фокус  $F'$  пересувається до сітківки і зображення віддаленого предмету чітко фокусується на сітківці ока, рис. 12.12, б).

Око, яке здатне фокусувати зображення предметів на сітківці, називають **еметропічним**. Проте дуже часто око втрачає здатність до нормальної акомодатії, через спазм циліарного тіла, або через вроджене патологічне порушення пропорцій між природними геометричними і оптичними параметрами ока. При цьому око не може

чітко фокусувати зображення віддалених предметів на сітківці ока. Виникає **короткозорість (міопія)**, або **далекозорість (гіперметропія)**. Очі з такою патологією називають **аметропічними**.

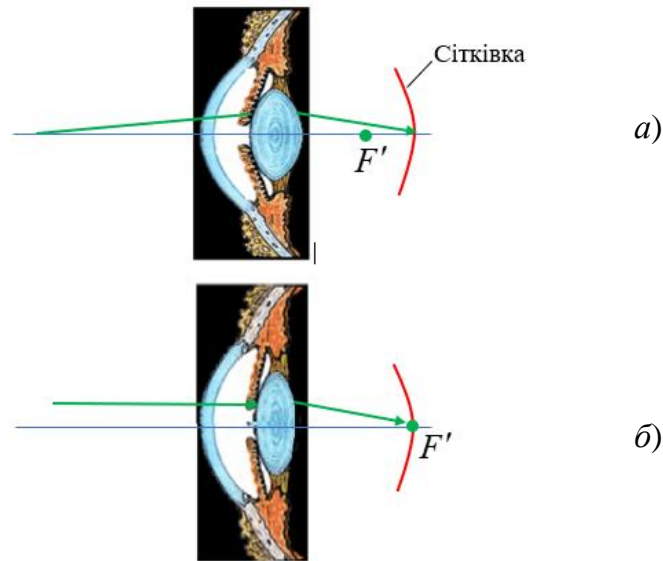


Рис. 12.12. До механізму акомодациі ока:  
 $a$  – предмет на короткій відстані;  $б$  – предмет на безкінечності

**Короткозоре око** – в ньому має місце надлишкова оптична сила кришталика, яка не може бути відрегульованою відповідною зміною форми його передньої поверхні. В наслідок цього око може фокусувати на сітківці зображення тільки того предмету, який розташований перед оком на кінцевій невеликій від нього відстані. Мірою короткозорості (міопії) є відстань  $a_R$  між оком і найбільш віддаленою від ока предметною точкою  $A_R$ , яка ще може бути сфокусованою на сітківці, рис. 12.13,  $a$ ). Цю точку називають **найвіддаленішою точкою ясного зору**.

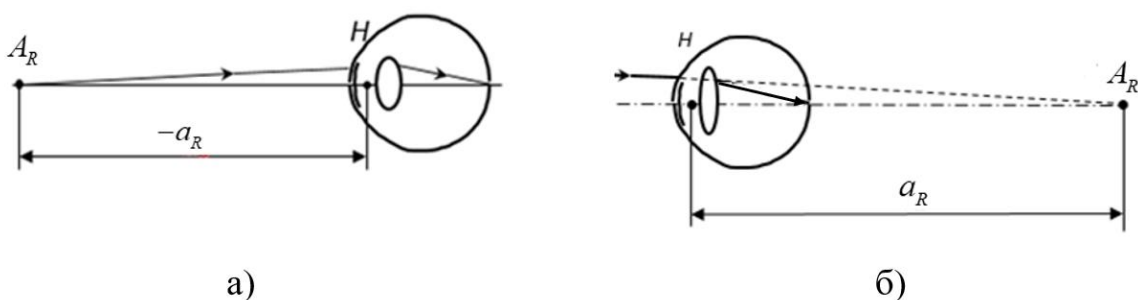


Рис. 12.13. Аметропічні очі:  $a$  – міопічне;  $б$  – гіперметропічне;  
 $A_R$  – найвіддаленіша точка ясного зору;  $a_R$  – міра аметропії

**Далекозоре око** має недостатню оптичну силу через втрату еластичності кришталика внаслідок старіння організму людини, або



внаслідок перенесених хвороб. В такому оці зображення безкінечно віддалених предметів формується за сітківкою, і тим далі від сітківки, чим ближче до ока знаходиться предмет, рис. 12.13, б).

В офтальмології і оптичному приладобудуванні міра аметропії ока людини визначається в діоптріях за формулою:

$$A_R[\text{дптр}] = \frac{1000}{a_R[\text{мм}]}.$$

Для виправлення аметропії перед оком встановлюється лінза очкова чи контактна. Її роль – створення зображення безкінечно віддаленої предметної точки в найвіддаленішій точці ясного зору. Іншими словами задній фокус такої лінзи повинен бути суміщеним з точкою  $A_R$ .

З рис. 12.13 неважко зрозуміти, що для міопічного ока потрібна лінза з від'ємною задньою фокусною відстанню, тобто розсіювальна лінза. Для гіперметропічного ока задній фокус лінзи повинен знаходитися в точці  $A_R$  за сітківкою, а тому лінза повинна бути з додатною оптичною силою.

Оптична сила очкової чи контактної лінзи при цьому дорівнює величині аметропії ока:

$$\Phi[\text{дптр}] = \frac{1000}{a_R[\text{мм}]}.$$

При проектуванні оптичних систем візуальних приладів завжди враховується наявність можливої аметропії ока у користувача приладу. Діапазон аметропії ока, яку компенсують, зазвичай становить  $\pm 3 \dots 5$  дптр.

## РОЗДІЛ 13. ТЕЛЕСКОПІЧНІ СИСТЕМИ

**Телескопічною** або **афокальною** називають оптичну систему, складену з двох або більшої кількості оптично сильних компонентів, сумарна оптична сила якої дорівнює нулю. Це означає, що фокусна відстань такої системи безкінечна, тому вона має додаткову назву афокальної, тобто такої, яка не має точок фокусів, бо вони знаходяться на безкінечності.

Телескопічні системи складають основу багатьох оптичних приладів, призначених для спостережень безкінечно віддалених предметів. Вони також часто використовуються в складних оптичних системах як окремі підсистеми.

Поява саме телескопічних систем пов'язана з тим, що очі людей у нормальному стані є еметропічними. Тому вказані системи мають забезпечувати умову найбільш комфортного спостереження зображень, яка досягається при формуванні телескопічними системами зображень на безкінечності. У випадку заміни ока веб-камерою, телескопічна система також повинна формувати зображення для веб-камери на безкінечності з урахуванням того факту що об'єкти веб-камер формують найбільш якісне зображення безкінечно віддалених предметів.

З'ясуємо, при якій умові оптична система стає телескопічною. На рис. 13.1 показана оптична система, складена з двох компонентів, оптичні сили яких  $\Phi_1$  та  $\Phi_2$  задані. Компоненти знаходяться у повітрі. Згідно (7.37) оптична сила двокомпонентної системи розраховується за формулою:

$$\Phi = \frac{1}{h_1} \sum_{i=1}^{i=p} h_i \Phi_i = \frac{1}{h_1} (h_1 \Phi_1 + h_2 \Phi_2) = \Phi_1 + \frac{h_2}{h_1} \Phi_2, \quad (13.1)$$

в якій висоти нульового променя  $h_1$  та  $h_2$  показані на рис. 13.1

Висота  $h_1$  нульового променя на першому компоненту має вільне значення, а висота  $h_2$  на другому компоненті згідно (7.20) та (7.19)

$$h_2 = h_1 - d_1 \operatorname{tg} \sigma_2 = h_1 - d_1 (\operatorname{tg} \sigma_1 + h_1 \Phi_1) = h_1 - d_1 h_1 \Phi_1 = h_1 (1 - d_1 \Phi_1). \quad (13.2)$$

Із останнього виразу:

$$\frac{h_2}{h_1} = (1 - d_1 \Phi_1). \quad (13.3)$$

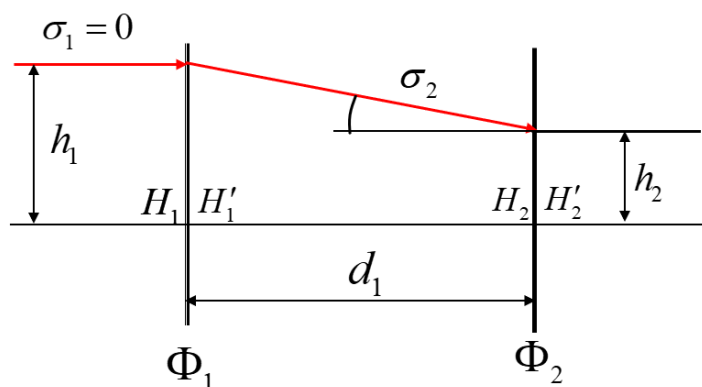


Рис. 13.1. До формули оптичної сили двокомпонентної системи

Після підстановки (13.3) у (13.1) отримуємо формулу оптичної сили двокомпонентної системи:

$$\Phi = \Phi_1 + (1 - d_1 \Phi_1) \Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_2 - d_1 \Phi_1 \Phi_2. \quad (13.4)$$

Двокомпонентна система стає телескопічною при умові:

$$\Phi_1 + \Phi_2 - d_1 \Phi_1 \Phi_2 = 0,$$

звідки

$$d_1 = \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{\Phi_1 \Phi_2} = \frac{1}{\Phi_1} + \frac{1}{\Phi_2}. \quad (13.5)$$

Оскільки оптична сила компонентів у повітрі:  $\Phi_1 = \frac{1}{f'_1}$ ,  $\Phi_2 = \frac{1}{f'_2}$ ,

то рівняння (13.5) трансформується до вигляду:

$$\boxed{f'_1 + f'_2 = d_1}. \quad (13.6)$$

Вираз (13.6) є умовою створення телескопічної системи з двох компонентів. Цей вираз дозволяє виявити особливість взаємного розташування компонентів, при якому система стає телескопічною.

Розглянемо два випадки:

*Перший випадок* – перший і другий компоненти мають додатну оптичну силу, або додатні значення фокусних відстаней  $f'_1$  та  $f'_2$ .

З рис. 13.2 видно, оптична система стає телескопічною при умові, що дійсний задній фокус першого компоненту є суміщеним з дійсним переднім фокусом другого компонента. Така телескопічна система є основою **зорової труби Кеплера**.

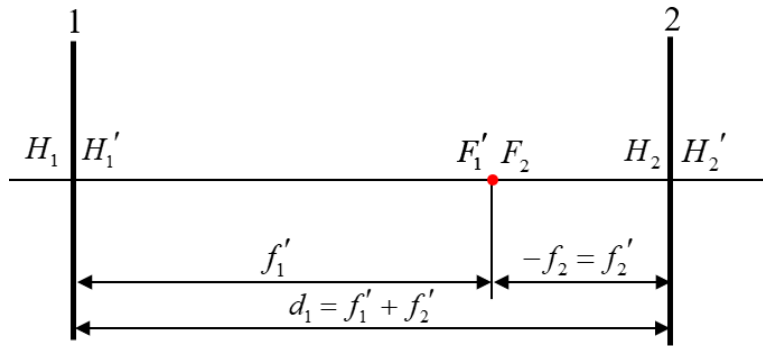


Рис. 13.2. Телескопічна система, де обидва компоненти мають додатну оптичну силу

*Другий випадок:* компоненти мають протилежні за знаком оптичні сили, або протилежні за знаком задні фокусні відстані:  $f_1' > 0$ ,  $f_2' < 0$ .

З рис. 13.3 видно, що умова (13.6), як і в попередньому випадку, призводить до суміщення дійсного заднього фокусу першого компоненту і уявного переднього фокусу другого компоненту. Така телескопічна система лягла в основу **зорової труби і телескопу Галілея**.

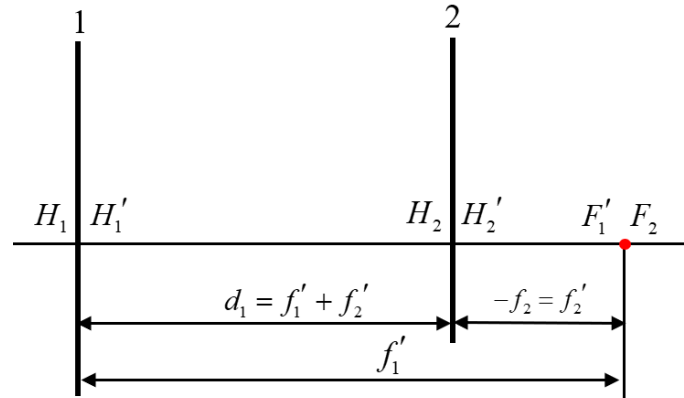


Рис. 13.3. Телескопічна система, де компоненти мають протилежні за знаком оптичні сили

### 13.1. Хід пучків променів в телескопічних системах Кеплера і Галілея

Пучки променів, що надходять в телескопічну систему із безкінечності, складаються з паралельних променів. Для демонстрації проходження таких пучків доцільно показати хід двох пучків, перший прямує в телескопічну систему паралельно оптичній осі, дру-

гий – під деяким кутом до оптичної осі. В подальшому перший пучок буде називатися осьовим, а другий – позаосьовим.

Розглянемо хід осьового пучка через системи Кеплера і Галілея. Після першого компонента промені сходяться, рис. 13.4, *а*, *б*, в точці його заднього фокусу  $F_1'$ . Ця точка водночас є переднім фокусом  $F_2$  другого компонента. Тому із другого компонента промені виходять паралельно оптичній осі.

Різниця ходу променів осьового пучка в системах Кеплера і Галілея полягає лише в тому, що передній фокус  $F_2$  другого компонента системи Кеплера є дійсним, а в системі Галілея передній фокус  $F_2$  – уявний. З рис. 13.4 видно, що телескопічна система не має ні переднього, ні заднього фокусів через те, що промені не перетинаються ні на вході в систему, ні на виході з неї.

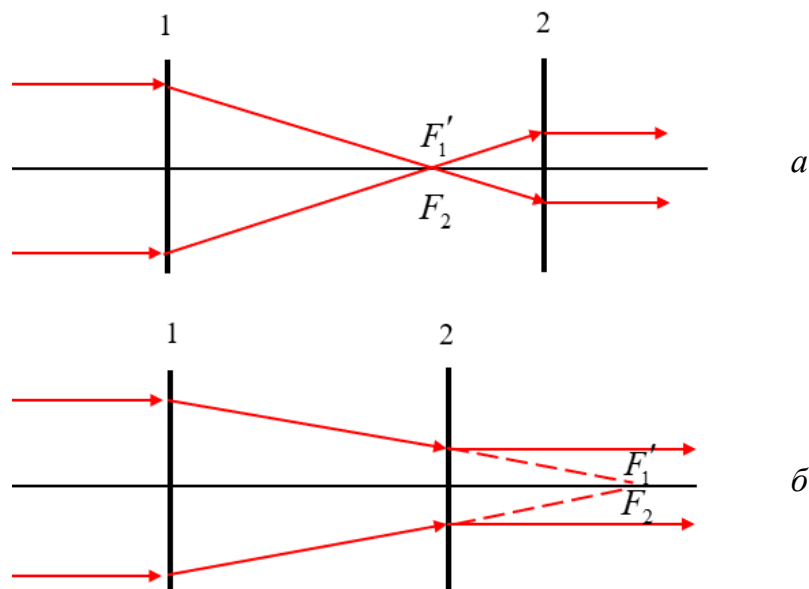


Рис. 13.4. Хід променів осьового пучка в:  
*а* – телескопічній системі Кеплера; *б* – телескопічній системі Галілея

На рис. 13.5 показаний хід променів через телескопічну систему позаосьового пучка, нахиленого до оптичної осі на кут  $\omega$ .

Для спрощення побудови ходу променів обрано такі промені, хід яких через перший компонент заздалегідь відомий. Промінь 1 проходить через передній фокус першого компонента, тому після нього він прямує паралельно оптичній осі. Промінь 2 проходить через головні-вузлові точки першого компонента, через що після компонента його хід не міняє свого напрямку.

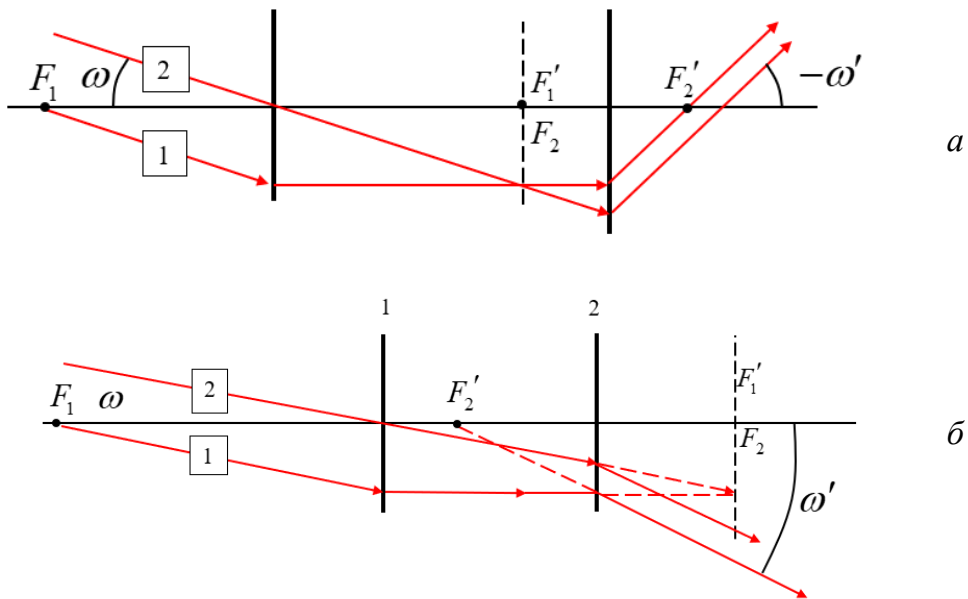


Рис. 13.5. Хід променів позаосьового пучка в:  
*a* – телескопічній системі Кеплера; *б* – телескопічній системі Галілея

Промінь 1, який надходить в другий компонент паралельно оптичній осі після другого компонента вийде з нього через точку його заднього фокусу  $F_2'$ .

Оскільки після першого компонента промені 1 і 2 перетинаються в задній фокальній площині цього компонента, а вона одночасно є передньою фокальною площиною другого компонента, то за другим компонентом промені повинні бути паралельними один до одного. Цим і визначається хід другого променя за вторим компонентом.

Хід променів позаосьового пучка в телескопічних системах Кеплера і Галілея дозволяє виявити наступне:

- пучки на вході і на виході системи Кеплера мають протилежні знаки кутів  $\omega$  і  $\omega'$ , а це означає, що система Кеплера утворює перевернуте зображення;

- в системі Галілея кути  $\omega$  і  $\omega'$  мають однаковий знак, тому ця система дає пряме зображення предметів;

- якщо  $|f_1'| > |f_2'|$ , то кут нахилу пучка  $|\omega'| > |\omega|$ , а це означає, що кутовий розмір зображення буде більшим ніж кутовий розмір предмету, тобто кутове збільшення телескопічної системи за абсолютною величиною буде більшим за одиницю. Ця обставина і призвела до появи зорових труб і перших телескопів, які надавали оку

можливість бачити віддалені предмети у збільшеному вигляді, як би наближаючись до них.

## 13.2. Історія виникнення зорових труб Галілея і Кеплера

В 1931 році в Нідерландах був знайдений протокол Генеральних штатів, який свідчив про те, що окулярний майстер Ганс Ліпергей 2 жовтня 1608 року подав прохання на видачу йому патенту строком на 30 років на винахід зорової труби. Патентна комісія Нідерландів запропонувала Ліпергею виготовити зорову трубу для обох очей, що він швидко здійснив.

Проте патент Ліпергею так і не був виданий через суттєвий спротив декількох претендентів на цей самий винахід. До числа претендентів належав і Захарій Янсен, відомий винахідник складного мікроскопу.

Судовий розгляд заяви на видачу цього патенту безрезультатно тягнувся аж до 1655 року, коли Ліпергея вже не було серед живих.

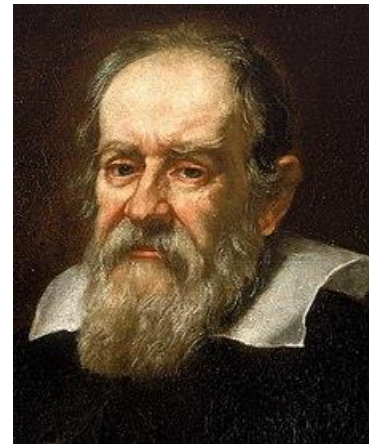
У 1609 році відомості про голландські зорові труби надійшли до відомого італійського вченого Галілея. Він в тому ж році сам виготовив зорову трубу. В ній першим компонентом була збиральна, а другим – розсіювальна лінза.

Перша зорова труба Галілея мала всього трикратне кутове збільшення. Незабаром він виготовив труби із восьми-кратним та з тридцяти-кратним кутовим збільшенням.

Користуючись цими трубами Галілей зробив ряд дуже важливих для науки відкриттів. Вперше в історії він спостерігав:

- фази планети Венери і рух Венери по диску Сонця;
- плями на Сонці;
- три супутника планети Юпітера, які безперервно змінювали своє положення, тобто оберталися навколо Юпітера;
- особливу форму планети Сатурн.

Церква бачила в цих відкриттях підрив церковних канонів і авторитету релігії. Особливий супротив з боку церкви викликали



*Галілео Галілей*  
італійський  
астроном, філософ,  
математик,  
фізик, винахідник  
1564–1642

відкриття плям на Сонці, та гіпотеза про геліоцентричну систему сонячної системи, в якій, за аналогією про устрій системи супутників планети Юпітера, ставилося під сумнів вчення церкви про Землю, як про центр світобудови. За свої відкриття Галілей ледь не поплатився життям, в результаті церковники примусили його відректися від своїх прогресивних наукових поглядів.



*Христофор Шейнер*  
німецький фізик,  
астроном, математик  
1575–1650

Зорову трубу, побудовану з використанням двох збиральних лінз, вперше запропонував відомий німецький астроном Іоганн Кеплер у своєму дослідженні «Діоптрика», опублікованому в 1611 році. Ця труба, на відміну від голландської, давала перевернуте зображення. Кеплер не виготовляв особисто зорові труби за своєю системою. Такі труби були виготовлені і вперше використані для досліджень астрономом Христофором Шейнером у 1614 році.

Винахід зорових труб став важливим кроком в розвитку науки про всесвіт, в практиці морської навігації, в розвитку оптичних приладів військового призначення. В цих галузях значна роль належить системі Кеплера. Система Галілея виявилася оптимальною для створення театральних біноклів, які на протязі вже чотирьох віків, а також і в наш час, користуються широким попитом у глядачів театральних вистав.

### 13.3. Функціональні параметри телескопічних систем

Функціональними параметрами оптичних систем називають ті, які кількісно характеризують здатність системи виконувати основні і допоміжні функції, а також відповідати ергономічним та іншим вимогам, передбаченим умовами використання приладу.

До основних функціональних параметрів телескопічних систем відносяться:

- кутове ( $\gamma$ ) та видиме ( $\Gamma$ ) збільшення;
- кут поля зору в просторі предметів ( $\omega$ ) та в просторі зображень ( $\omega'$ );
- діаметр ( $D$ ) вхідної зіниці та вихідної зіниці ( $D'$ );



- розташування вихідної зіниці відносно останньої оптичної поверхні системи ( $t'$ );
- просторова дифракційна ( $\psi_\delta$ ) та візуальна ( $\psi_\epsilon$ ) роздільні здатності телескопічної системи;
- корисне збільшення телескопічної системи ( $\Gamma_{кор}$ ).

Перелічені параметри використовуються також при проектуванні телескопічних систем в якості вихідних даних.

### 13.3.1. Кутове ( $\gamma$ ) та видиме ( $\Gamma$ ) збільшення телескопічної системи

Згідно визначення кутового збільшення (7.37) у телескопічній системі кутове збільшення:

$$\gamma = \frac{\operatorname{tg} \omega'}{\operatorname{tg} \omega}, \quad (13.7)$$

де кути нахилу пучка  $\omega$  та  $\omega'$  на вході і на виході з системи позначені на рис. 13.6.

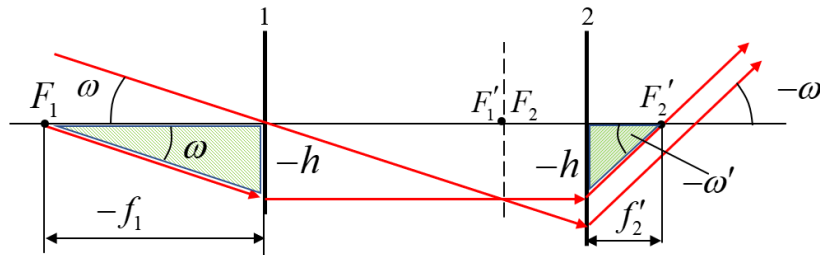


Рис. 13.6. До визначення кутового збільшення телескопічної системи

При виводі формули розрахунку параметра  $\gamma$  не має значення яка з систем розглядається – Кеплера чи Галілея. Тому на рис. 13.6 показана тільки система Кеплера.

Із лівого заштрихованого трикутника маємо  $\operatorname{tg} \omega = \frac{-h}{-f_1} = -\frac{h}{f_1}$ ,

із правого  $\operatorname{tg}(-\omega') = \frac{-h}{f'_2}$ , або  $\operatorname{tg}(\omega') = \frac{h}{f'_2}$ . Після підстановки виразів

у (13.7) отримуємо  $\gamma = \frac{\operatorname{tg} \omega'}{\operatorname{tg} \omega} = \frac{\frac{h}{f'_2}}{-\frac{h}{f_1}}$ , або

$$\gamma = -\frac{f_1'}{f_2'}. \quad (13.8)$$

Формула (13.8) ще раз свідчить про те, що в системі Кеплера, де  $f_1' > 0$  і  $f_2' > 0$ , кутове збільшення має від'ємний знак ( $\gamma < 0$ ), а тому це зображення є перевернутим. В системі Галілея  $f_1'$  і  $f_2'$  мають протилежні знаки, при яких  $\gamma > 0$ , в наслідок чого зображення є прямим.

Із формули (13.8) також витікає, що для отримання  $|\gamma| > 1$  потрібно виконання умови  $|f_1'| > |f_2'|$ .

У земних зорових труб предмети не завжди знаходяться на безкінечності, тому в таких випадках використовують параметр, який називають видимим збільшенням.

На рис. 13.7 показано два випадки спостереження предмету (ялинки). На верхньому рисунку предмет спостерігається неозброєним оком. На нижньому рисунку око спостерігає зображення предмету, через зорову трубу.

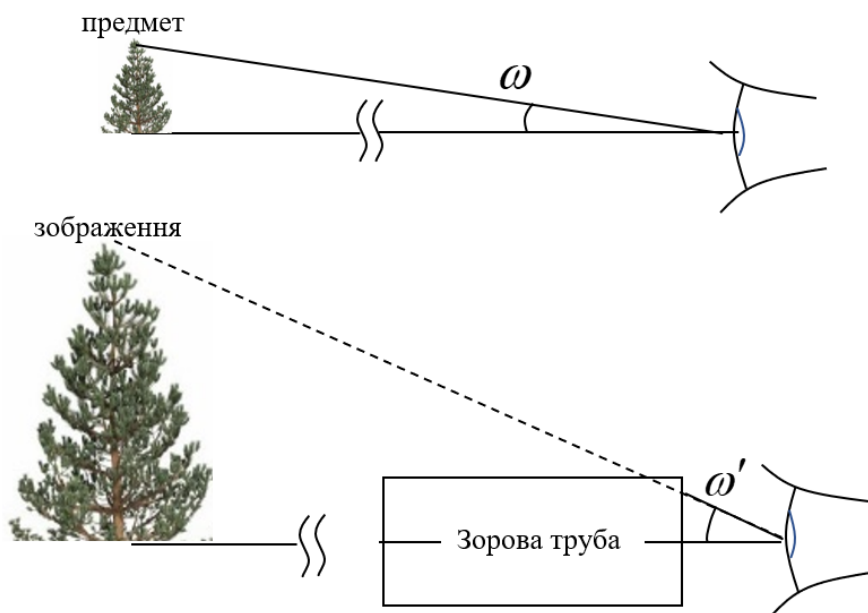


Рис. 13.7. До визначення видимого збільшення телескопічної системи зорової труби

**Видиме збільшення** телескопічної системи зорової труби:

$$\Gamma = \frac{\text{tg} \omega'}{\text{tg} \omega}, \quad (13.9)$$

в якому  $\omega$  кут, під яким предмет спостерігається неозброєним оком, а  $\omega'$  – кут, під яким око бачить предмет через зорову трубу.

Якщо предмет віддаляється від зорової труби, то значення видимого збільшення  $\Gamma$  наближається до значення  $\gamma$ . На практиці значення  $\gamma$  і  $\Gamma$  часто вважають однаковими, тобто різницею між ними нехтують.

### 13.3.2. Кут поля зору в просторі предметів ( $2\omega$ ) та в просторі зображень ( $2\omega'$ )

Поле зору в оптичних системах обмежується або польовою діафрагмою, або він'єтною діафрагмою, яка перешкоджає проходженню променів нахилених до осі пучків (див. розд. 10).

У телескопічних систем Кеплера та Галілея є принципова відмінність, що стосується обмеження поля зору. Так в системі Кеплера існує дійсне проміжне зображення площини предметів, де можна фізично розмістити польову діафрагму, тому в системі Кеплера поле зору обмежується саме польовою діафрагмою.

В системі Галілея внаслідок відсутності дійсного проміжного зображення площини предметів польової діафрагми принципово бути не може, тому її поле зору обмежується він'єтною діафрагмою. В зв'язку з цим обмеження поля зору в системах Кеплера і Галілея розглядаються окремо.

#### Поле зору системи Кеплера

На рис.13.8 в тонких компонентах показана телескопічна система Кеплера зі всіма її діафрагмами.

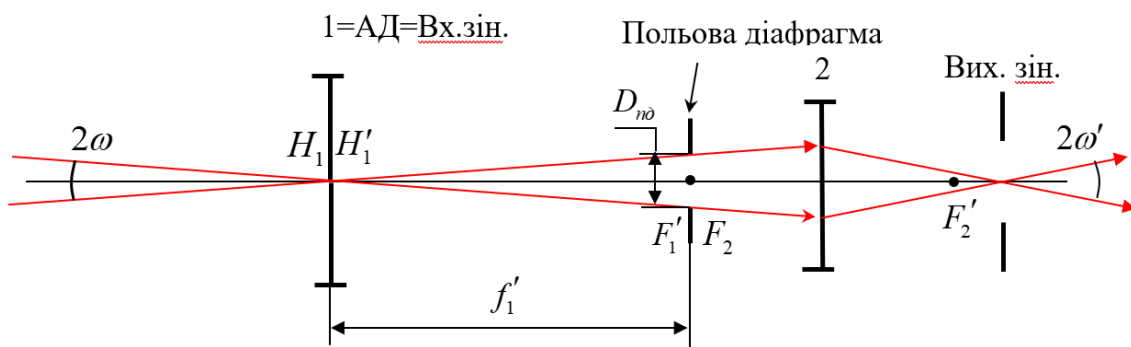


Рис. 13.8. До визначення розмірів поля зору телескопічної системи Кеплера

В системі Кеплера, як правило, оправа першого компонента (об'єктива) є апертурною діафрагмою (АД). Водночас вона є вхідною зіницею (Вх. зін.). Зображення діафрагми, яка знаходиться в фокальній площині першого компонента, в зворотному напрямку знаходиться на безкінечності, а значить суміщається з площиною предметів телескопічної системи. Це відповідає першій ознаки польової діафрагми. Якщо із осьової точки вхідної зіниці вона спостерігається під меншим кутом, у порівнянні із зображенням в просторі предметів діафрагми 2, то згідно другої ознаки польової діафрагми вона є польовою.

Зображення польової діафрагми в просторі предметів за визначенням є полем зору системи в просторі предметів. Поле зору телескопічної системи знаходиться на безкінечності, тому воно може мати лише кутовий розмір  $2\omega$ , рис. 13.8. З цього рисунку неважко отримати наближену формулу розрахунку розміру поля зору у просторі предметів:

$$2\omega[\text{rad}] = \frac{D_{\text{нд}}}{f_1'}, \quad (13.10)$$

Більш точна формула для  $2\omega$  в градусах, якщо функція  $\text{arctg}$  відтворюється в радіанах:

$$2\omega[\text{grad}] = \frac{180}{\pi} \text{arctg}\left(\frac{D_{\text{нд}}}{f_1'}\right). \quad (13.11)$$

Точна формула для  $2\omega$  в радіанах, якщо функція  $\text{arctg}$  відтворюється в радіанах, має вигляд:

$$2\omega[\text{rad}] = 2\text{arctg}\left(\frac{D_{\text{нд}}}{2f_1'}\right). \quad (13.12)$$

Якщо  $\text{arctg}$  відтворюється в радіанах, то в градусах поле зору

$$2\omega[\text{grad}] = \frac{360}{\pi} \text{arctg}\left(\frac{D_{\text{нд}}}{2f_1'}\right). \quad (13.13)$$

Кут поля зору в просторі зображень  $2\omega'$  може бути розрахованим з використанням визначення кутового збільшення телескопічної системи (13.7), згідно якого при відтворенні функції  $\text{arctg}$  в радіанах:

$$2\omega'[\text{rad}] = 2\text{arctg}(\gamma \cdot \text{tg } \omega), \quad (13.14)$$

або

$$2\omega'[\text{град}] = \frac{360}{\pi} \text{arctg}(\gamma \cdot \text{tg } \omega). \quad (13.15)$$

Наближена формула розрахунку кута поля зору в просторі зображень має вигляд:

$$2\omega'[\text{рад}] = \gamma 2\omega[\text{рад}], \quad (13.16)$$

або

$$2\omega'[\text{град}] = \gamma 2\omega[\text{град}]. \quad (13.17)$$

### Поле зору системи Галілея

Для визначення поля зору системи Галілея, в якій немає місця для польової діафрагми, необхідно знайти діафрагму, яка реально обмежує поле зору.

На рис. 13.9 в тонких компонентах показана схема зорової труби за системою Галілея. Як видно з рисунку, в системі діє дві діафрагми – оправа першого та оправа другого компонента. Крім цих діафрагм в системі діє ще одна діафрагма – зіниця ока користувача зорової труби.

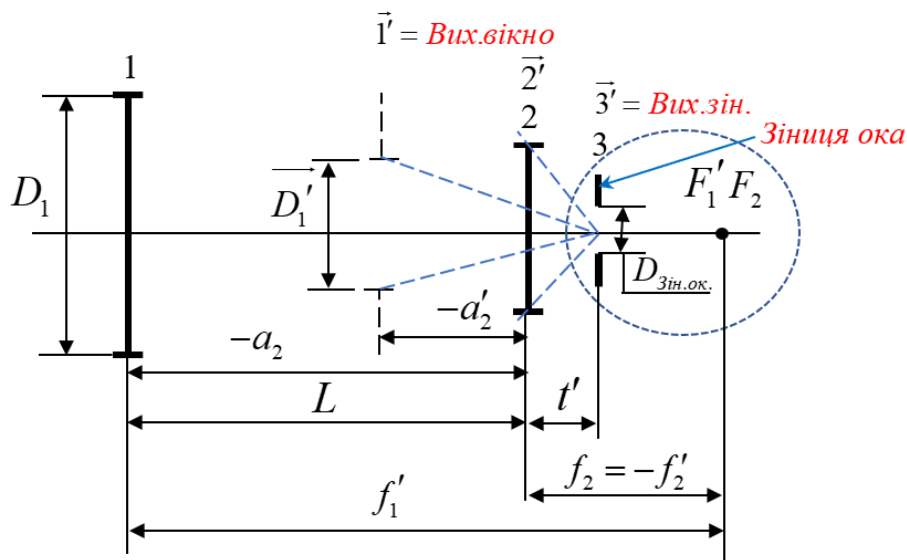


Рис. 13.9. До визначення ролей діафрагм в телескопічній системі Галілея

Щоб виявити діафрагму, яка обмежує поле зору, потрібно використати правило пошуку, викладене в розд. 10.

З вигляду оптичної системи на рис. 13.9, процедуру виявлення розподілу ролей між діафрагмами 1, 2, 3 простіше здійснювати в просторі зображень.

Зіниця ока – діафрагма 3, має діаметр не більше декількох міліметрів, тому вона апріорі є апертурною. Її зображення в просторі зображень – вихідна зіниця системи, що аналізується.

Зображення діафрагми 2 (оправи другого компонента системи Галілея) в просторі зображень є самою діафрагмою 2, оскільки промені, спрямовані від неї в сторону простору зображень (вправо), не зустрічають на своєму шляху оптичних елементів.

Промені, спрямовані від діафрагми 1 (оправи першого компонента системи Галілея) в сторону простору зображень (вправо) проходять через оптично сильний компонент 2, який утворює зображення цієї діафрагми в просторі зображень. Знайдемо положення і розмір зображення діафрагми 1 в просторі зображень. Для цього скористуємося формулою Гауса для компонента 2, вважаючи, що діафрагма 1 є для компонента 2 предметом, який розташований на відстані  $a_2$ , рис. 13.9. Тоді зображення діафрагми 1, яке знаходиться від компонента 2 на відстані  $a'_2$ , можна знайти за формулою Гауса

$$\frac{1}{a'_2} - \frac{1}{a_2} = \frac{1}{f'_2}, \text{ з якої}$$

$$a'_2 = \frac{a_2 \cdot f'_2}{a_2 + f'_2}. \quad (13.18)$$

Оскільки відрізок  $a_2 = -L = -(f'_1 + f'_2)$ , то підстановка цього виразу в (13.18) дає кінцевий результат

$$a'_2 = \frac{-(f'_1 + f'_2) \cdot f'_2}{-(f'_1 + f'_2) + f'_2} = \frac{-(f'_1 + f'_2) \cdot f'_2}{-f'_1} = -\frac{L}{\gamma}. \quad (13.19)$$

Лінійне збільшення зображення діафрагми 1, сформоване компонентом 2, згідно (7.15):

$$\beta = \frac{a'_2}{a_2} = \frac{-\frac{L}{\gamma}}{-L} = \frac{1}{\gamma}, \quad (13.20)$$

де  $\gamma$  – кутове збільшення телескопічної системи Галілея,  $\gamma = -\frac{f'_1}{f'_2}$ .

Формула (13.20) дозволяє знайти діаметр зображення  $\vec{l}'$  діафрагми 1:

$$\overrightarrow{D}'_1 = D_1 \frac{1}{\gamma}. \quad (13.21)$$

Той факт, що ні одне із зображень діафрагм не є суміщеним з площиною зображень, яка в телескопічній системі знаходиться на безкінечності, свідчить про те, що в системі Галілея польова діафрагма відсутня і бути її не може.

Оскільки діафрагма 3 є апертурною, то діафрагми 1 і 2 виконують роль він'єтних (див. розд. 10). Те із зображень діафрагм 1 і 2, що із осьової точки вихідної зіниці спостерігається під меншим кутом, є вихідним вікном оптичної системи, а сама діафрагма, зображення якої є вихідним вікном, обмежує поле зору оптичної системи.

На рис. 13.9 показано, що зображення діафрагми  $\vec{1}'$  має менший кут, ніж зображення  $\vec{2}'$ , через те що останнє знаходиться ближче до вихідної зіниці. Тому зображення  $\vec{1}'$  є вихідним вікном оптичної системи, а діафрагма 1 – є він'єтною, що обмежує поле зору телескопічної системи Галілея.

Оскільки аналіз діафрагм здійснювався в просторі зображень, то кут поля зору телескопічної системи теж знаходимо в просторі зображень. Для цього достатньо мати розміри і взаємне розташування вихідної зіниці та вихідного вікна, отримані з рис. 13.9, а також значення коефіцієнту він'єтування, для якого визначається розмір поля зору.

Половина кута поля зору при повній відсутності він'єтування крайнього пучка можна знайти за допомогою лінії, що проходить через верхні краї вихідного вікна і вихідної зіниці і заштрихованого трикутника на рис. 13.10.

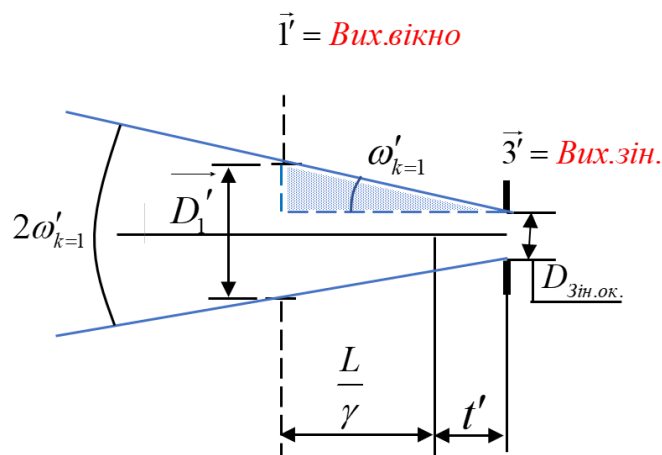


Рис. 13.10. До визначення  $2\omega'_{k=1}$  – кута поля зору в просторі зображень при відсутності він'єтування ( $k = 1$ )

З відношення катетів заштрихованого трикутника:

$$\operatorname{tg} \omega'_{k=1} = \frac{0.5(\overline{D}'_1 - D_{\text{зін.ок.}})}{t' + \frac{L}{\gamma}} = \frac{0.5\left(\frac{D_1}{\gamma} - D_{\text{зін.ок.}}\right)}{t' + \frac{L}{\gamma}} = \frac{D_1 - \gamma D_{\text{зін.ок.}}}{2(\gamma t' + L)}, \quad (13.22)$$

з якого при відтворенні  $\operatorname{arctg}$  в радіанах

$$2\omega'_{k=1} [\text{рад}] = 2\operatorname{arctg} \frac{D_1 - \gamma D_{\text{зін.ок.}}}{2(\gamma t' + L)}. \quad (13.23)$$

Кут поля зору в просторі предметів в радіанах при  $k=1$  можна знайти використавши формулу кутового збільшення (13.7) та (13.22), звідки

$$2\omega_{k=1} [\text{рад}] = 2\operatorname{arctg} \frac{D_1 - \gamma D_{\text{зін.ок.}}}{2\gamma(\gamma t' + L)}. \quad (13.24)$$

Половина кута поля зору при повному він'єтуванні ( $k=0$ ) крайнього по полю пучка можна знайти за допомогою лінії, що проходить через верхній край вихідного вікна і нижній край вихідної зіниці і заштрихованого трикутника на рис. 13.11.

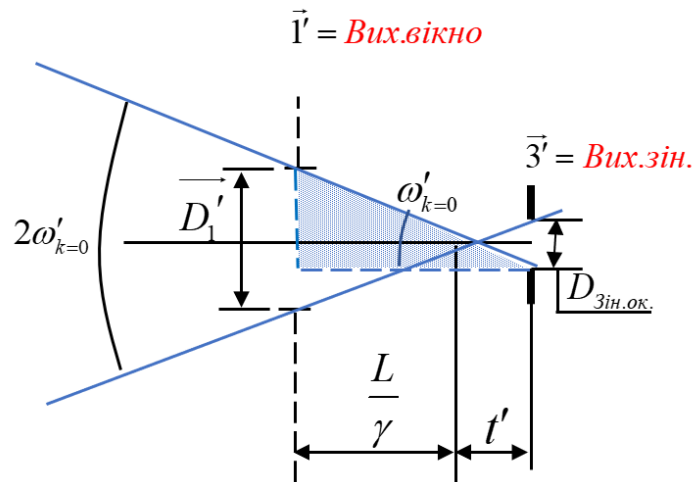


Рис. 13.11. До визначення  $2\omega'_{k=0}$  – кута поля зору в просторі зображень при повному він'єтуванні  $k=0$  крайнього по полю пучка

З відношення катетів заштрихованого трикутника:

$$\operatorname{tg} \omega'_{k=0} = \frac{0.5(\overline{D}'_1 + D_{\text{зін.ок.}})}{t' + \frac{L}{\gamma}} = \frac{0.5\left(\frac{D_1}{\gamma} + D_{\text{зін.ок.}}\right)}{t' + \frac{L}{\gamma}} = \frac{D_1 + \gamma D_{\text{зін.ок.}}}{2(\gamma t' + L)}, \quad (13.25)$$



з якого, при відтворенні функції  $arctg$  в радіанах

$$2\omega'_{k=0} [pad] = 2arctg \frac{D_1 + \gamma D_{зін.ок.}}{2(\gamma t' + L)}, \quad (13.26)$$

або

$$2\omega'_{k=0} [grad] = \frac{360}{\pi} arctg \frac{D_1 + \gamma D_{зін.ок.}}{2(\gamma t' + L)}. \quad (13.27)$$

Кут поля зору в просторі предметів при  $k=0$  можна знайти, використавши формулу кутового збільшення (13.7) та (13.26), звідки

$$2\omega_{k=0} [pad] = 2arctg \frac{D_1 + \gamma D_{зін.ок.}}{2\gamma(\gamma t' + L)}, \quad (13.28)$$

або

$$2\omega_{k=0} [grad] = \frac{360}{\pi} arctg \frac{D_1 + \gamma D_{зін.ок.}}{2\gamma(\gamma t' + L)}.$$

**Завдання 13.1.** Зорова труба за системою Галілея повинна мати кутове збільшення  $\gamma=3$  та діаметр об'єктиву (першого компонента)  $D_1=30$  мм при відносному отворі об'єктиву  $\frac{D_1}{f'_1}=1:3$ . Зіниця

ока користувача зорової труби має діаметр  $D_{зін}=4$  мм і вона віддалена від другого тонкого компонента зорової труби (окуляра) на відстань  $t'=10$  мм.

Знайдіть значення кута поля зору в просторі предметів при умові повного він'єтування крайнього по полю пучка променів ( $k=0$ ).

**Розв'язання.**

1. Знаходимо фокусні відстані першого та другого компонентів системи Галілея, потрібні для розрахунку осьової довжини системи  $L=f'_1+f'_2$ .

Оскільки дано, що  $\frac{D_1}{f'_1}=1:3$ , то задня фокусна відстань першого

компонента  $f'_1=3D_1=3 \cdot 30=90$  мм.

Задня фокусна відстань другого компонента розраховується з використанням формули (13.8) кутового збільшення телескопічної

системи  $f'_2=-\frac{f'_1}{\gamma}=-\frac{90}{3}=-30$  мм. Звідси  $L=f'_1+f'_2=90-30=60$  мм.

Кут поля зору у просторі предметів в градусах при  $k=0$  розраховується з використанням формули (13.28), в якій функція  $arctg$  відтворюється у радіанах:

$$2\omega_{k=0} [\text{град}] = \frac{360}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{D_1 + \gamma D_{\text{зін.ок.}}}{2\gamma(\gamma t' + L)} = \frac{360}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{30 + 3 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot (3 \cdot 10 + 60)} \approx 8.9^\circ = 8^\circ 53'.$$

### 13.3.3. Положення і діаметри вхідної та вихідної зіниць телескопічних систем

Розміри вхідної зіниці телескопічної системи визначають кількість світлового потоку, який потрапляє в око і формує освітленість сітківки, чим обумовлюється світлосила телескопічної системи і так звана суб'єктивна яскравість предметів, що спостерігаються оком. Від діаметра вхідної зіниці телескопічної системи залежить дифракційна роздільна здатність телескопічної системи. Діаметр вихідної зіниці повинен бути узгодженим з діаметром зіниці ока. Тому розмір зіниць є важливим параметром телескопічних систем.

Розподіл ролей між діафрагмами телескопічних система Кеплера і Галілея суттєво відрізняється. В зв'язку з цим зіниці цих систем будемо розглядати окремо.

#### Положення зіниць в системи Кеплера

В системі Кеплера апертурною діафрагмою практично завжди є оправа компонента 1 – оправа об'єктива, рис. 13.12. Оскільки перед об'єктивом оптичні компоненти відсутні, то зображення в просторі предметів оправи об'єктиву, рис.13.12, є вхідною зіницею, суміщеною з самою діафрагмою 1.

Як відомо, вихідною зіницею є зображення апертурної діафрагми в просторі зображень. Для пошуку вихідної зіниці від апертурної діафрагми направляють промені в сторону простору зображень і знаходять зображення апертурної діафрагми, як результат проходження вказаних променів через всі компоненти системи, що трапляються по ходу цих променів. В системі Кеплера, рис. 13.12, таким є компонент 2 (окуляр телескопічної системи). Цей компонент при відсутності інших формує зображення вихідної зіниці.

Знайти положення вихідної зіниці можна із застосуванням для цього формули Ньютона.

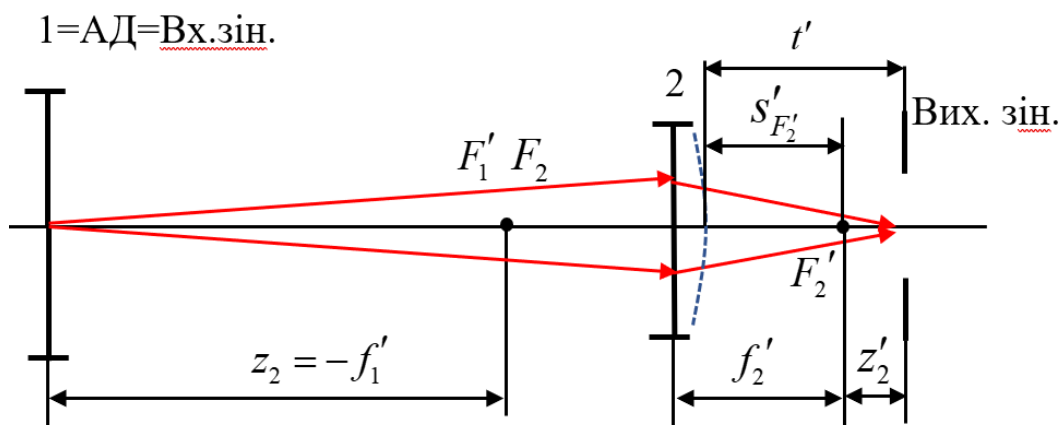


Рис. 13.12. До визначення положення вихідної зіниці в системі Кеплера

Діафрагма 1 знаходиться від переднього фокусу  $F_2$  на відстані  $z_2 = -f_1'$ . Зображення діафрагми 1 відносно заднього фокусу  $F_2'$  компонента 2 знаходиться на відстані

$$z_2' = -\frac{(f_2')^2}{z_2} = \frac{(f_2')^2}{f_1'} = f_2' \frac{f_2'}{f_1'} = -\frac{f_2'}{\gamma}. \quad (13.29)$$

Відносно останньої оптичної поверхні окуляра – компонента 2 вихідна зіниця віддалена на відрізок  $t'$ , який складається з задньої фокальної відстані компонента 2 і відрізка  $z_2'$ :

$$t' = s_{F_2'}' + z_2' = s_{F_2'}' - \frac{f_2'}{\gamma}. \quad (13.30)$$

Оскільки у системи Кеплера кутове збільшення  $\gamma$  має від'ємний знак, другий доданок в (13.30) є додатним, а це означає, що вихідна зіниця знаходиться за заднім фокусом компонента 2.

У випадках, коли телескопічна система Кеплера використовується в зоровій трубі, відстань  $t'$  повинна враховувати ергономічні вимоги. Так з урахуванням довжини вії людини та глибини очниці рекомендоване значення відрізка  $t'$  становить 20–25 мм.

### Діаметри вхідної та вихідної зіниць системи Кеплера

На рис.13.13 показаний хід в системі Кеплера двох променів осевого пучка, які входять в системи через краї апертурної діафрагми і водночас через краї вхідної зіниці цієї системи.

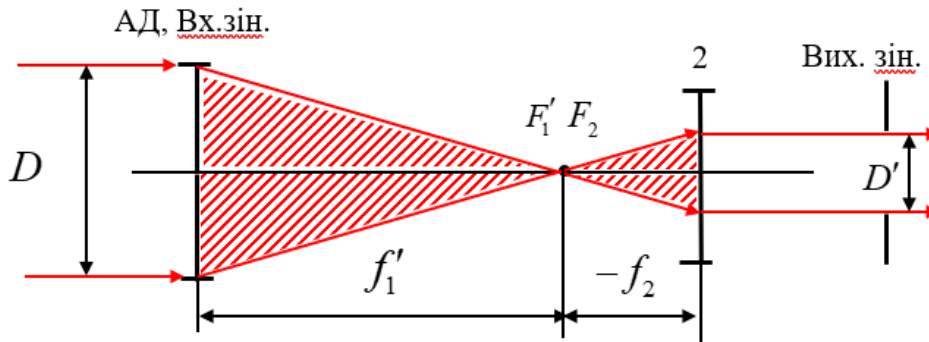


Рис. 13.13. До визначення діаметрів зіниць телескопічної системи Кеплера

Апертурною діафрагмою системи Кеплера переважно є оправа першого компонента з внутрішнім отвором з діаметром  $D$ , або світловий діаметр  $D$  цього компонента. Тому вхідна зіниця має діаметр  $D$ .

Промені, які проходять через краї апертурної діафрагми, або через краї вхідної зіниці, обов'язково проходять через краї вихідної зіниці, оскільки апертурна діафрагма, вхідна зіниця і вихідна зіниця є оптично спряженими.

На рис. 13.13 показано хід паралельних на вході в систему променів осьового пучка, які на виході з системи також зберігають паралельність. Тому поперечна відстань між цими променями вказує діаметр вихідної зіниці, де б вона не знаходилася вздовж оптичної осі.

Із подібності заштрихованих трикутників маємо:

$$\frac{D'}{D} = \left| \frac{f_2}{f_1'} \right| = \left| \frac{1}{\gamma} \right|,$$

звідки діаметр вихідної зіниці систем Кеплера:

$$\boxed{D' = \frac{D}{|\gamma|}} \quad (13.31)$$

Абсолютні значення у формулі (13.31) і у попередньому рівнянні використані з огляду на те, що діаметри зіниць не можуть мати від'ємних значень.

### Положення зіниць в системи Галілея

В системі Галілея діафрагмами є оправи першого і другого компонента, а також зіниця ока, рис. 13.14. Аналіз розподілу ролей між діафрагмами системи Галілея показує, що зіниця ока є апертур-

ною діафрагмою (АД) внаслідок властивостей системи Галілея і відносно малого діаметру отвору зіниці ока. Оскільки зіниця ока розташована за системою, то вона водночас є вихідною зіницею (Вих.зін.), рис. 13.14. Розташування вихідної зіниці в такому випадку може визначатися розмірами наочника, що фіксує положення ока відносно окуляру зорової труби. Це розташування може бути і вільним, залежним від того, як користувач утримує трубу відносно свого ока.

При пошуку вхідної зіниці системи Галілея, потрібно спочатку знайти положення площини, яка оптично спряжена з вихідною зіницею відносно компонента 2. Позначимо її площиною  $II$ , рис. 13.14, а потім знайдемо положення площини  $I$ , яка буде оптично спряженою з площиною  $II$  відносно компонента 1. Саме в площині  $I$  знаходиться вхідна зіниця системи Галілея.

Положення площин  $II$  і  $I$  можна знайти, використовуючи формулу Гауса.

Площина вихідної зіниці оптично спряжена з площиною  $II$ , тобто вона є зображенням того, що знаходиться в площині  $II$ . Відрізок  $a'_2 = t'$ . Цей відрізок та фокусна відстань  $f'_2$  другого компонента разом дозволяють знайти відрізок  $a_2$ , який вказує положення площини  $II$ .

Згідно формули Гауса  $\frac{1}{a'_2} - \frac{1}{a_2} = \frac{1}{f'_2}$ . Оскільки  $a'_2 = t'$  то

$$a_2 = \frac{t' \cdot f'_2}{f'_2 - t'}$$

Аналогічно можна використати формулу Гауса для пошуку положення площини вхідної зіниці, яка оптично спряжена із площиною  $II$ .

Площина  $II$  в цій парі є зображенням вхідної зіниці, сформованим компонентом 1, тому відстань між компонентом 1 і площиною  $II$  позначається відрізком  $a'_1$ . Відрізки  $a_1$  та  $a'_1$  пов'язані формулою

Гауса  $\frac{1}{a'_1} - \frac{1}{a_1} = \frac{1}{f'_1}$ .

Із рис. 13.14 маємо  $a'_1 = L + a_2$ , тоді із попередньої формули після відповідних алгебраїчних перетворень знаходимо кінцеву формулу для відрізка  $a_1$ :

$$\boxed{a_1 = \gamma(L + \gamma t')} \quad (13.32)$$



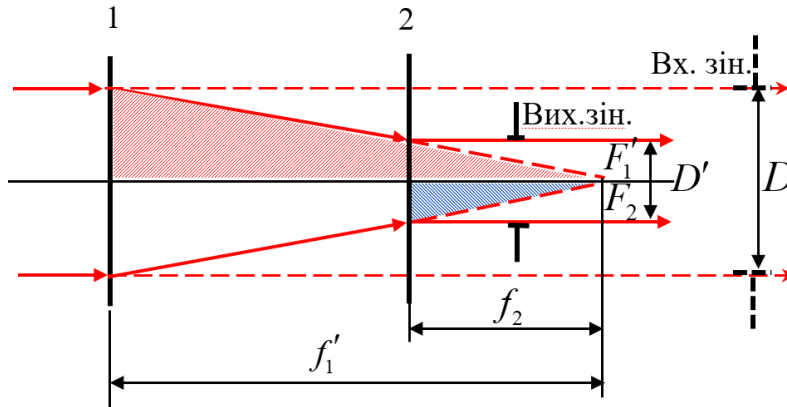


Рис. 13.15. До визначення діаметру вхідної зіниці

Із геометричної подібності заштрихованих на рис. 13.15 трикутників можна встановити, що  $\frac{D}{D'} = \left| \frac{f_1'}{f_2} \right| = \left| -\frac{f_1'}{f_2} \right| = \gamma$ , тому діаметр вхідної зіниці системи Галілея

$$\boxed{D = D'\gamma}, \quad (13.33)$$

або

$$\boxed{D = \gamma D_{\text{зін.ок.}}}, \quad (13.34)$$

### 13.3.4. Просторова роздільна здатність телескопічної системи

Просторовою роздільною здатністю оптичної системи є її спроможність утворювати роздільні зображення двох точкових джерел. Кількісно роздільна здатність оптичної системи характеризується межею роздільної здатності, яка визначається мінімальною кутовою чи лінійною відстанню між двома точковими джерелами простору предметів, зображення яких за визначеним критерієм ще вважаються роздільними.

Роздільна здатність обумовлюється дифракцією світла на краях апертурної діафрагми оптичної системи, а також абераційними спотвореннями зображень (порушеннями гомоцентричності пучків променів, що проходять через систему).

Якщо оптична система не має аберацій, то її потенціальна можливість формувати роздільно зображення точкових джерел залежить тільки від дифракції.

Критерій межі роздільної здатності, обумовленої дифракцією світлових хвиль на краях круглої апертурної діафрагми, запропонував англійський фізик Релей.

Для цього він запропонував використовувати радіус кола Ері, в дифракційному зображенні точки, рис. 4.5, б.



*Джон Вільям Стретт*  
(лорд Релей)  
англійський фізик  
1842–1919

На рис. 13.16, а показано перший компонент (об'єктив) телескопічної системи Кеплера, оправа якого є апертурною діафрагмою, і який формує зображення безкінечно віддалених точкових джерел світла в своїй фокальній площині.

Якщо аберації у об'єктива відсутні, то розподіл освітленості в дифракційному зображенні точкового джерела має вигляд, показаний на рис. 4.5, б. Релей запропонував межею роздільної здатності такого об'єктива вважати відстань  $\delta$  між центрами двох сусідніх дифракційних зображень точкових джерел, яка дорівнює радіусу  $r$  кола Ері, рис. 13.16, б, **критерій Релея**:

$$\delta = r = \frac{1,22\lambda f_1'}{D}, \quad (13.35)$$

де  $\lambda$  – довжина хвилі.

При цьому розподіл освітленості в зображенні двох сусідніх точок має вигляд 13.16, б. Між двома максимумами освітленості існує локальний мінімум освітленості, який відрізняється від  $E_{\max}$  на величину  $\Delta E = 0.265E_{\max}$ . При цьому зображення двох точок має вигляд, показаний на рис. 13.16, в.

Кутова відстань  $\psi$  між двома точковими джерелами світла, вказує кутову межу просторового розділення об'єктива в просторі предметів, якщо згідно критерію Релея значення  $\delta = r$ . Тоді кутова межа просторової роздільної здатності визначається за формулою:

$$\boxed{\psi[\text{рад}] = \frac{\delta}{f_1'} = \frac{1.22\lambda}{D}}. \quad (13.36)$$

На довжині хвилі, що відповідає найбільшій спектральній чутливості ока в денний час  $\lambda = 0.55 \cdot 10^{-3}$  мм,



$$\psi[\text{рад}] = \frac{1.22\lambda}{D} = \frac{0.000671}{D}.$$

В цю формулу діаметр входної зіниці  $D$  підставляється в мм.

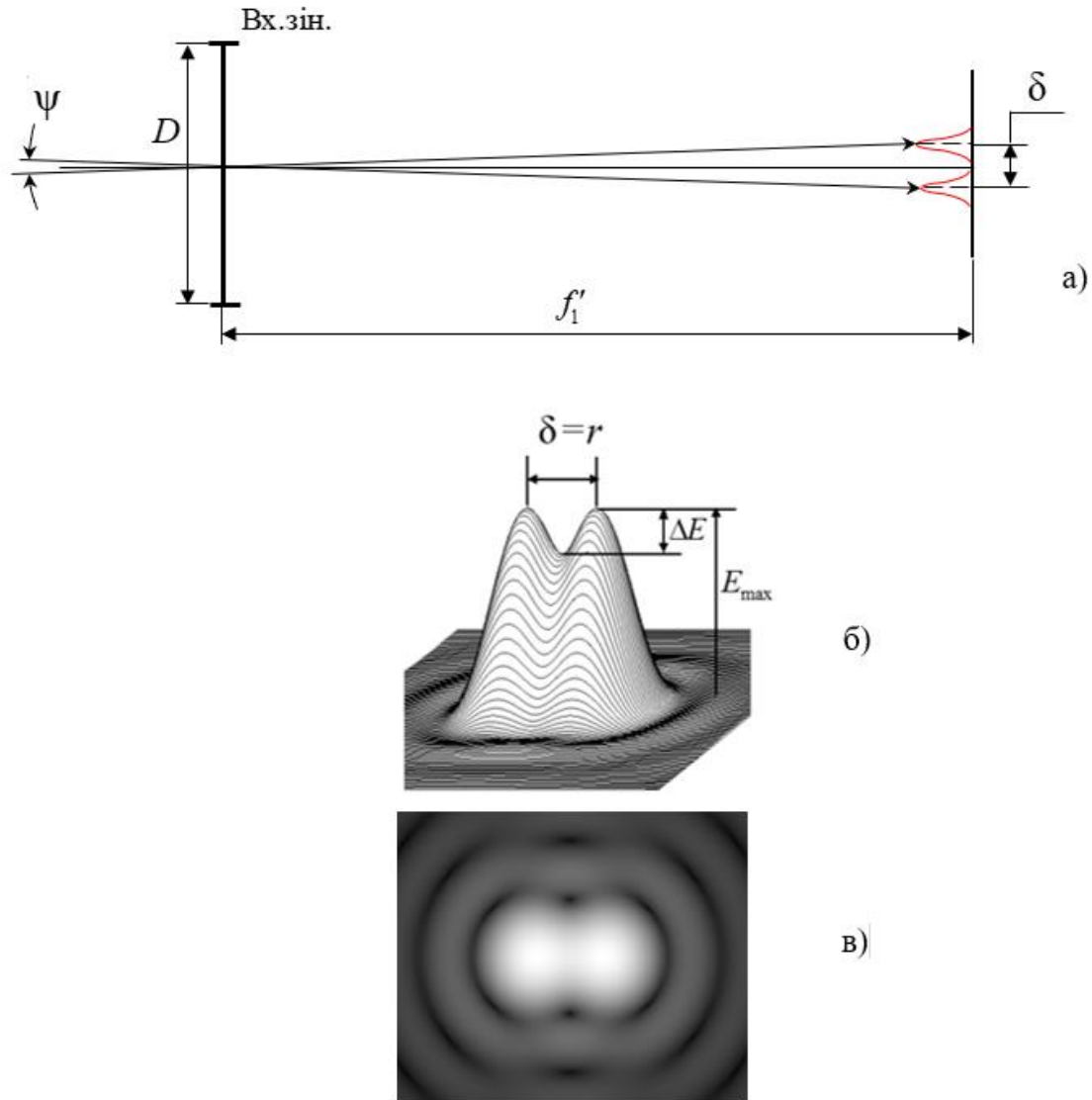


Рис. 13.16. До визначення межі роздільної здатності згідно критерію Релея: *a* – об’єктив телескопічної системи; *б* – тривимірний розподіл освітленості в зображенні двох точкових джерел у задній фокальній площині об’єктиву; *в* – двовимірний розподіл освітленості в зображенні двох точкових джерел у задній фокальній площині об’єктиву

При переході від радіан до кутових секунд,  $1'' = \frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60} [\text{рад}]$ ,

$$\psi[\text{кут.с.}] = \frac{138.4''}{D} \approx \frac{140''}{D}. \quad (13.37)$$

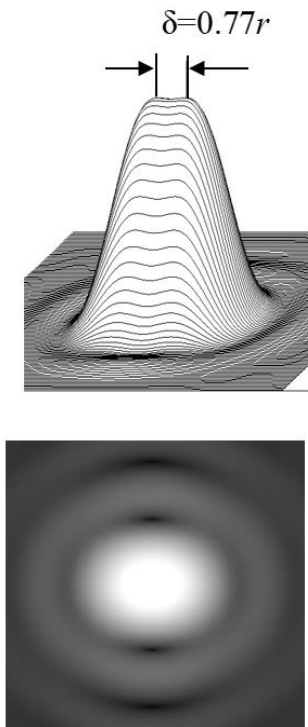


Рис. 13.17. До визначення межі роздільної здатності за критерієм Сперроу

Локальний мінімум освітленості між двома зображеннями точок зникає повністю, тобто  $\Delta E = 0$ , коли відстань між двома центрами зображень точок досягає значення  $\delta = 0.77r$ , рис. 13.17.

Вказане значення  $\delta$  відповідає **критерію Сперроу**. Це значення є абсолютною межею роздільної здатності, коли зображення двох точок зливаються повністю в одну світлову пляму, рис. 13.17. При цьому

$$\psi[\text{рад}] = \frac{\delta}{f_1'} = \frac{0.94\lambda}{D}, \quad (13.38)$$

а при  $\lambda = 0.55 \cdot 10^{-3}$  мм в кутових секундах:

$$\boxed{\psi[\text{кут.с.}] \approx \frac{108''}{D}}. \quad (13.39)$$

Критерій Сперроу частіше застосовується для оцінки роздільної здатності телескопів – телескопічних систем, що використовуються в астрономії.

### 13.3.5. Корисне кутове або видиме збільшення телескопічної системи

Через зорову трубу, або через телескоп, око бачить два точкових джерела, що знаходяться на межі роздільної здатності під кутом  $\psi' = \psi \cdot \gamma$ , або  $\psi' = \psi \cdot \Gamma$ .

При зростанні значення кутового  $\gamma$  чи видимого  $\Gamma$  збільшення, око отримує можливість бачити більш дрібні елементи простору предметів, якщо  $\psi' < \varepsilon$ , де  $\varepsilon$  – кутова межа просторової роздільної здатності ока.

Коли кут, через зростання  $\gamma$  чи  $\Gamma$ , досягає значення  $\psi' > \varepsilon$ , то око бачить лише збільшене спотворене дифракцією зображення простору предметів. Більш дрібні елементи в зображенні вже не спостерігаються, тому подальший ріст значень  $\gamma$  чи  $\Gamma$  не має сенсу.

З цього витікає наступний висновок: кутове чи видиме збільшення телескопічної системи досягає свого корисного значення при  $\psi' = \varepsilon$ .

Оскільки  $\psi' = \psi\Gamma = \frac{140''}{D}\Gamma$ , то при  $\frac{140''}{D}\Gamma = \varepsilon = 60''$  корисне збільшення  $\Gamma_{кор}$  має значення

$$\Gamma_{кор} = \frac{60''}{140''}D = 0.43D. \quad (13.40)$$

Люди в молодому віці з нормальним зором мають значення  $\varepsilon = 30''$ , з якого

$$\Gamma_{кор} = \frac{30''}{140''}D = 0.21D. \quad (13.41)$$

Тому в літературних джерелах дані про корисне видимого чи кутового збільшення телескопічної системи знаходяться в інтервалі значень

$$0.2D \leq \Gamma_{кор} \leq 0.5D. \quad (13.42)$$

В формулах (13.40)–(13.42) діаметр вхідної зіниці має розмірність [мм].

### 13.4. Об'єктиви і окуляри зорових труб

Основними компонентами телескопічних систем зорових труб є об'єктив – перший компонент телескопічної системи, та окуляр – останній компонент телескопічної системи, рис. 13.4. Об'єктив формує дійсне зображення площини предметів в своїй задній фокальній площині. Окуляр дозволяє оку роздивлятися зображення, сформоване об'єктивом. Оку без окуляру було б неможливим бачити зображення, сформоване об'єктивом.

**Об'єктив**, як правило, це довгофокусний компонент, з невеликим кутовим полем зору (одиниці градусів). **Окуляр** – короткофокусний компонент з відносно великим кутом поля зору (десятки градусів).

Вимоги до якості зображень, які повинні забезпечувати об'єктив та окуляр, обумовлюють оптичну структуру цих компонентів.

На рис. 13.18 показано типові оптичні системи лінзових об'єктивів телескопічних систем, які частіш за все складаються з двох лінз, склеєних або не склеєних.

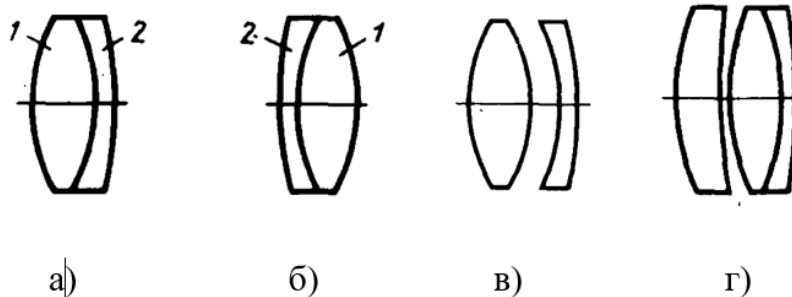


Рис. 13.18. Системи лінзових об'єктивів: а, б – дволінзові склеєні; 1 – лінза із оптичного скла марок флінт; 2 – лінза із оптичного скла марок флінт; в – дволінзовий несклеєний об'єктив; трилінзовий об'єктив

На рис. 13.19 показані класичні системи дзеркальних об'єктивів, які вперше стали використовувати в телескопах, а на рис. 13.20 представлена одна з багатьох, але найбільш відома у всьому світі система дзеркально-лінзового об'єктива Максутова-Касегрена.

Системами, які представлені на рис. 13.18–13.20, далеко не обмежується існуюча в наш час вся сукупність лінзових, дзеркальних та дзеркально-лінзових об'єктивів, створених ще з часів їх перших творців. За декілька століть з часів життя Ньютона, Касегрена та Грегорі створено сотні систем об'єктивів. Детальну інформацію про них можна знайти в патентній літературі, довідниках, монографіях, підручниках з прикладної оптики, архівах підприємств та фірм, в каталогах комп'ютерних програм.

Оптичні системи окулярів та їх основні параметри представлені в табл. 13.1. У окулярів великі кути поля зору. Тому в них особливо шкідливими для якості зображення є аберації астигматизм та хроматизм збільшення, які підлягають виправленню. Мінімізація вказаних аберацій в оптичних системах окулярів можлива при використанні в них не менш ніж двох компонентів рознесених один від одного на деяку відстань, а також при використанні дволінзових склейок з оптичних матеріалів з різними коефіцієнтами дисперсії. Найпростішим за своєю структурою є окуляр Рамсдена. Цей окуляр переважно використовується в простих зорових трубах з невеликим полем зору.

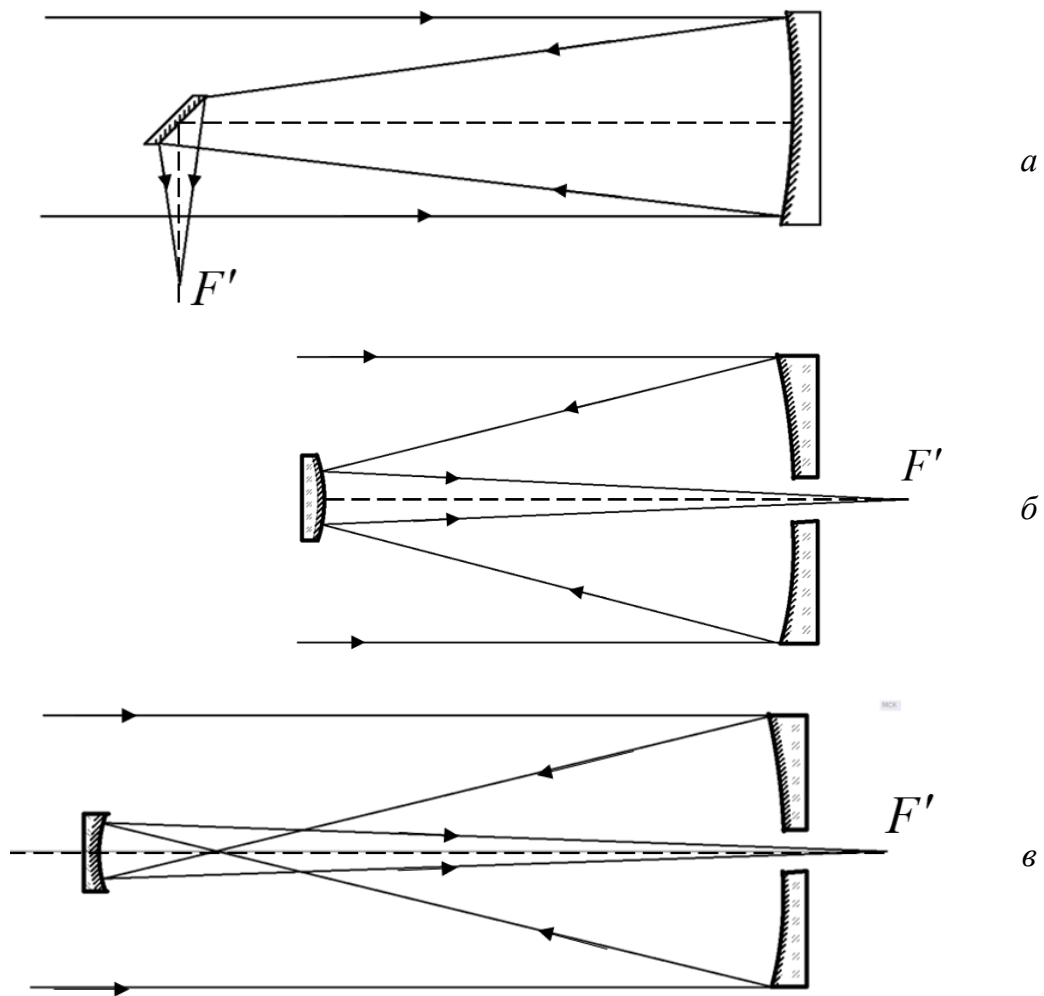


Рис. 13.19. Дзеркальні системи об'єктивів телескопічних систем: *a* – система Ньютона; *б* – система Касегрена; *в* – система Грегорі

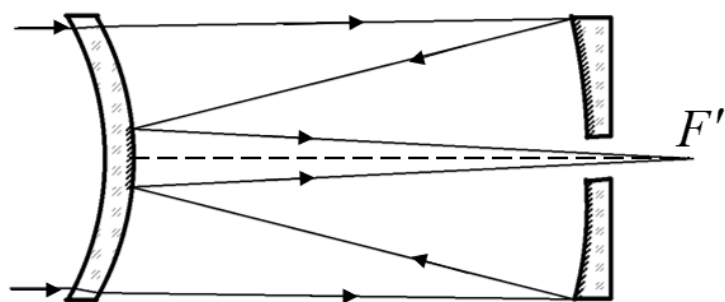
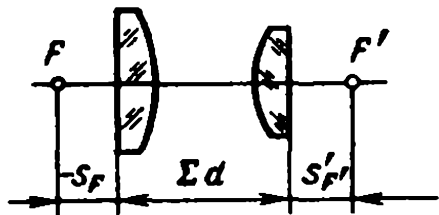
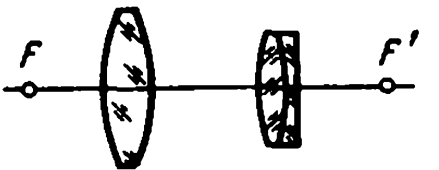
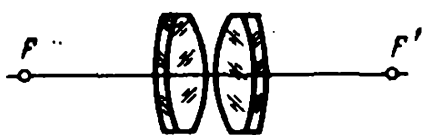
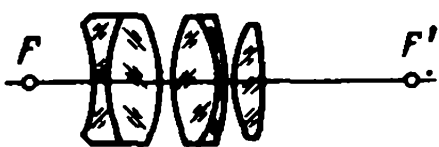
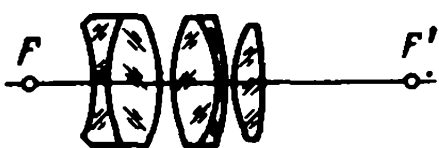

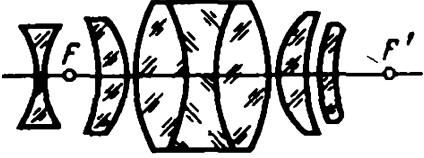
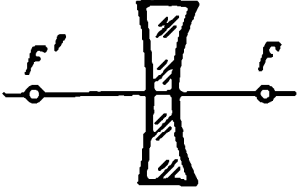
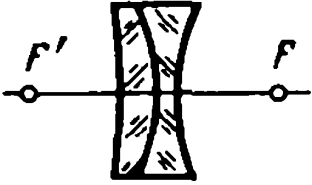


Рис. 13.20. Дзеркально-лінзова система Максутова-Касегрена

## Окуляри телескопічних систем

Окуляр	$2\omega'$	$\frac{s_F}{f'}$	$\frac{s'_{F'}}{f'}$	$\frac{\sum d}{f'}$
		$f'$ – задня фокусна відстань окуляра		
Окуляр Рамсдена 	$20^\circ-30^\circ$	$\approx -0.3$	$\approx 0.3$	$\approx 1$
Окуляр Кельнера 	$40^\circ-45^\circ$	$\approx -0.3$	$\approx 0.4$	$\approx 1.25$
Симетричний окуляр 	$40^\circ-45^\circ$	$\approx -0.75$	$\approx 0.75$	$\approx 0.75$
Окуляр з віддаленою зіницею 	$\approx 50^\circ$	$\approx -0.3$	$\approx 1$	$\approx 1.4$
Окуляр Ерфле 	$\approx 65^\circ$	$\approx -0.35$	$\approx 0.7$	$\approx 1.6$
Ортоскопічний окуляр 	$40^\circ$	$\approx -0.6$	$\approx 0.75$	$0.75$

<p>Ширококутний окуляр</p> 	90°	≈ -0.4	≈ 0.45	≈ 2.5
<p>Від'ємний однолінзовий окуляр для системи Галілея</p> 	≤ 20°	≈ 0.9	≈ -0.9	≈ 0.1
<p>Від'ємний дволінзовий окуляр для системи Галілея</p> 	≤ 20°	≈ 0.85	≈ -0.85	≈ 0.2

Вибір типу окуляра залежить від вимог до його кута поля зору  $2\omega'$  та потрібної відстані  $t' = s'_{F'} + z'_2$  від останньої поверхні окуляра до зіниці ока, ((13.30), рис. 13.12). З практичного досвіду використання зорових труб встановлено, що комфортним для користувача є відстань  $t' = (15...20)$  мм при фокусній відстані окуляра  $f' = 20...25$  мм, звідки задній фокальний відрізок окуляра має бути в межах:

$$s'_{F'} = (15...20) - z'_2.$$

Параметри  $2\omega'$  та  $s'_{F'}$  є вихідними даними для вибору типу окуляра з табл. 13.1.

Потрібні значення  $f'$ ,  $2\omega'$  визначаються за результатами габаритного розрахунку оптичної системи зорової труби, значення відрізка  $t'$ , як правило, надається у вихідних даних до розрахунку.

Структуру та конструктивні параметри окремих з числа наведених оптичних систем об'єктивів та окулярів можна знайти в довідниках, монографіях, підручниках [4; 5; 7; 9; 10].

### 13.5. Габаритний розрахунок телескопічних систем

Габаритний розрахунок оптичної системи – це пошук поздовжніх та поперечних параметрів оптичних компонентів, осьових відстаней між компонентами та відрізків, яким встановлюються положення діафрагм оптичної системи та діаметри їх отворів.

В простих телескопічних системах Кеплера та Галілея (без обертальних систем) поздовжніми параметрами компонентів є:

$f'_{об}$  – фокусна відстань об'єктиву (першого від простору предметів компоненту телескопічної системи);

$f'_{ок}$  – фокусна відстань окуляра (останнього компоненту телескопічної системи);

$d$  – осьова відстань між першим та останнім компонентами, яка встановлюється між задньою головною точкою об'єктиву та передньою головною точкою окуляра;

$d_{пр}$  – осьовий розмір розгортки призми (призм);

$t'$  – відстань від останньої поверхні окуляра до зіниці ока.

Поздовжні параметри визначають осьовий габарит системи.

До поперечних параметрів відносять:

$\varnothing_{об}$  – світловий діаметр об'єктиву (діаметр зони заповненої променями осьового та крайнього позаосьового пучка);

$\varnothing_{ок}$  – світловий діаметр окуляра;

$a$  – довжина катету вхідної грані призми (призм) або

$\varnothing_{вх}$  – світловий діаметр на вхідній грані призми (призм);

$D$  – діаметр вхідної зіниці телескопічної системи;

$D'$  – діаметр вихідної зіниці телескопічної системи;

$D_{шд}$  – діаметр польової діафрагми.

Поперечні параметри визначають поперечні габарити системи.

Порядок дій при виконанні габаритного розрахунку залежить від комбінації заданих (відомих із технічного завдання) значень поздовжніх і поперечних параметрів системи і тих значень параметрів, що підлягають розрахунку.

З наведеного списку поздовжніх та поперечних параметрів можна скласти велику кількість комбінацій із заданих і розрахункових параметрів. Тому існує така ж кількість розрахункових схем. Проте кожна з цих схем базується на складанні і розв'язанні систе-



ми рівнянь, в яких присутні задані і розрахункові параметри. Пошук значень розрахункових поздовжніх і поперечних параметрів є метою габаритного розрахунку оптичної системи.

Перед початком габаритного розрахунку складають перелік параметрів, значення яких зафіксовані в технічному завданні, а також перелік параметрів, значення яких підлягають розрахунку.

Для складання рівнянь використовують формули з гаусової оптики, теорії ідеальної оптичної системи, теорії діафрагм, теорії передачі і формування потоків випромінення оптичною системою, теорії спеціальних оптичних систем.

Вихідними даними до габаритного розрахунку телескопічної системи частіш за все є:

- кутове чи видиме збільшення  $\gamma$  чи  $\Gamma$ ;
- осьова довжина системи  $L$  або відстань  $d$  між головними площинами об'єктива та окуляра;
- діаметр вихідної зіниці  $D'$ ;
- кут поля зору в просторі предметів  $2\omega$ .

При наведених вихідних даних результатом габаритного розрахунку простих телескопічної системи повинні бути:

$f'_{об}$ ,  $f'_{ок}$ ,  $D$ ,  $D_{ПД}$ , фактичне значення відрізка  $t'$  згідно обраного типу окуляра.

Якщо в оптичній системі зорової труби застосовані лінзова обертальна система чи обертальна призма, то додатково розраховуються параметри цих компонентів.

Порядок виконання габаритного розрахунку телескопічної системи Галілея та Кеплера показані на прикладах завдань 13.1, 13.2, 13.3.

### **Приклад габаритного розрахунку системи Кеплера**

**Завдання 13.2.** Здійснити габаритний розрахунок системи Кеплера при вихідних даних:  $\gamma = -10$ ,  $d = 220$  мм,  $2\omega = 4^\circ$ ,  $D' = 4$  мм,  $t' \geq 15$  мм, він'єтування крайнього по полю зору пучка променів є недопустимим.

В результаті габаритного розрахунку потрібно знайти значення параметрів:

$$f'_{об}, f'_{ок}, D, \varnothing_{ПД}, \varnothing_{об}, \varnothing_{ок}.$$

### **Розв'язання.**

На рис. 13.21 показана телескопічна система Кеплера з параметрами, які задані і які підлягають розрахунку.

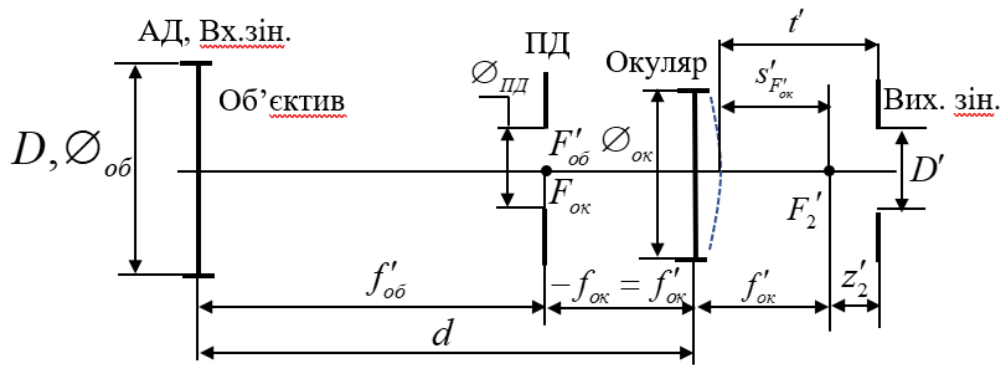


Рис. 13.21. До габаритного розрахунку системи Кеплера

1. Розрахунок поздовжніх параметрів  $f'_{об}$ ,  $f'_{ок}$ ,  $t'$ :

Для розрахунку  $f'_{об}$  та  $f'_{ок}$  складається і розв'язується система рівнянь з використанням співвідношення відрізків  $f'_{об}$ ,  $f'_{ок}$ ,  $d$  з рис. 13.21 та формули (13.8):

$$\begin{cases} f'_{об} + f'_{ок} = d & (1) \\ \frac{f'_{об}}{f'_{ок}} = -\gamma & (2) \end{cases} \text{ або } \begin{cases} f'_{об} + f'_{ок} = 220 & (1) \\ \frac{f'_{об}}{f'_{ок}} = 10 & (2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'_{об} = 200 \text{ мм} \\ f'_{ок} = 20 \text{ мм} \end{cases}$$

2. Розрахунок поля зору окуляра  $2\omega'$ :

Оскільки згідно формули (13.17)  $|\gamma| = \frac{\omega'}{\omega}$ , то кут поля зору окуляра  $2\omega' = 2\omega|\gamma|$ , або  $2\omega' = 2\omega|\gamma| = 4^\circ \cdot 10 = 40^\circ$ .

3. Розрахунок відрізка  $z'_2$ :

Згідно формули (13.29)  $z'_2 = -\frac{f'_{ок}}{\gamma} = -\frac{20}{-10} = 2(\text{мм})$ .

4. Розрахунок заднього фокального відрізка окуляра:

У відповідності з формулою (13.30) і вимоги до відрізка  $t'$  задній фокальний відрізок окуляра  $s'_{F'_{ок}}$  повинен бути не менш ніж

$$s'_{F'_{ок}} \geq t' - z'_2 = 15 - 2 = 13(\text{мм}). \text{ При цьому відношення } \frac{s'_{F'_{ок}}}{f'_{ок}} = \frac{13}{20} = 0.65.$$

5. Вибір типу окуляра:

Отримані значення параметрів  $2\omega'$  і  $\frac{s'_{F'_{ок}}}{f'_{ок}}$  дозволяють вибрати тип окуляру. Значення  $\frac{s'_{F'_{ок}}}{f'_{ок}} = 0.65$  можуть забезпечити декілька типів окуляра (див. табл. 13.1) – симетричний, окуляр Ерфле, окуляр з

віддаленою зіницею, ортоскопічний. Окуляри Ерфле та з віддаленою зіницею має надлишкове поле зору та підвищену складність. Ортоскопічний окуляр має мінімальну дисторсію, але за технічним завданням це не потребується. Тому раціональним буде вибір симетричного окуляру.

6. Розрахунок діаметру вхідної зіниці  $D$  та  $\varnothing_{об}$  :

Згідно формули (13.31)  $D = |\gamma| D' = 10 \cdot 4 = 40 \text{ мм}$ . Оскільки в системі Кеплера оправа об'єктиву, як правило, є апертурною діафрагмою і вхідною зіницею, то світловий діаметр об'єктиву можна прирівняти до діаметру вхідної зіниці  $\varnothing_{об} = D = 40 \text{ мм}$ .

7. Розрахунок діаметру польової діафрагми  $D_{пд}$ .

$$\text{Згідно формули (13.11)} \quad 2\omega [\text{град}] = \frac{180 D_{пд}}{\pi f'_1}$$

$$D_{пд} = \frac{2\pi f'_{об} \omega [\text{град}]}{180} = \frac{3.14 \cdot 200}{90} 2 = 13.96 \approx 14 \text{ мм}.$$

Точна формула розрахунку  $D_{пд} = 2 f'_{об} \text{tg} \omega = 2 \cdot 200 \cdot \text{tg} 2^\circ = 13.97 \text{ мм}$  дає практично той самий результат.

8. Розрахунок світлового діаметру  $\varnothing_{ок}$  тонкого окуляра.

На рис. 13.22 показано пучок променів, що надходять в систему від краю поля зору під кутом  $\omega$ . Умовою повного проходження через систему цього пучка є наявність такого світлового діаметру  $\varnothing_{ок}$  у тонкого окуляра, при якому промінь з номером 1 не він'єтується, тобто проходить через окуляр як і інші промені цього пучка 2 і 3.

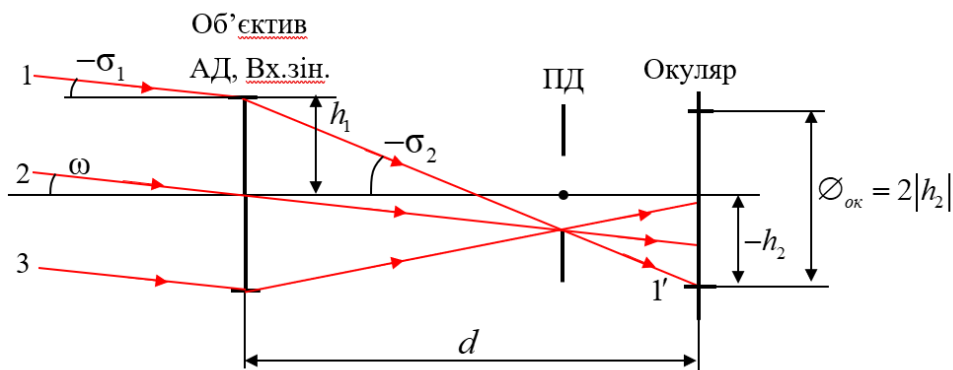


Рис. 13.22. До визначення світлового діаметру тонкого окуляру

Як видно з рис. 13.22, діаметр  $\varnothing_{ок} = 2|h_2|$ , де  $h_2$  – висота променю 1 в площині тонкого окуляра. Розрахувати значення  $h_2$  можна за фор-

мулами (7.19), (7.20) кутів і висот нульового променя, що проходить через систему, задану кардинальними елементами компонентів.

На вході в систему висота променя 1  $h_1 = 0.5D$ , а кут нахилу  $\sigma_1 = \omega = 2^\circ$ , тоді

$$\operatorname{tg} \sigma_2 = \operatorname{tg} \sigma_1 + h_1 \Phi_1 = \operatorname{tg} (2^\circ) + 0.5 \cdot 40 \cdot \frac{1}{200} = 0,1349;$$

$$h_2 = h_1 - d \cdot \operatorname{tg} \sigma_2 = 20 - 220 \cdot 0,1349 = -9,678 \text{ мм};$$

$$\varnothing_{ок} = 2|h_2| = 2 \cdot 9,678 = 19,36 \text{ мм}.$$

Якщо б в завданні на габаритний розрахунок для крайнього пучка допускалося він'єтування половини пучка, тоді б діаметр  $\varnothing_{ок}$  визначався з використанням висоти  $h_2$  в площині окуляра променя з номером 2, рис. 13.22.

### Приклад габаритного розрахунку системи Галілея

**Завдання 13.3.** Здійснити габаритний розрахунок системи Галілея для театрального бінокля при вихідних даних:  $\gamma = 3$ ,  $L = 40$  мм. При коефіцієнті він'єтування  $k_\omega = 0$  поле зору в просторі зображень  $2\omega'_{k=0} = 30^\circ$ , діаметр вихідної зіниці – діаметр зіниці ока  $D' = 4$  мм, віддаленість зіниці ока від окуляра  $t' = 15$  мм.

В результаті габаритного розрахунку потрібно знайти значення параметрів:

$$f'_{об}, f'_{ок}, D, \varnothing_{об}, \varnothing_{ок}.$$

#### Розв'язання.

1. Розрахунок  $f'_{об}$  та  $f'_{ок}$

Для розрахунку  $f'_{об}$  та  $f'_{ок}$  складається і розв'язується система рівнянь з використанням рис. 13.9 та формули (13.8):

$$\begin{cases} f'_{об} + f'_{ок} = L & (1) \\ \frac{f'_{об}}{f'_{ок}} = -\gamma & (2) \end{cases} \text{ або } \begin{cases} f'_{об} + f'_{ок} = 40 & (1) \\ \frac{f'_{об}}{f'_{ок}} = 3 & (2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'_{об} = 60 \text{ мм} \\ f'_{ок} = -20 \text{ мм} \end{cases}.$$

2. Розрахунок поля зору окуляра в просторі предметів  $2\omega_{k=0}$ .

Згідно формули (13.17)  $|\gamma| = \frac{\omega'}{\omega}$ , кут поля зору окуляра в просторі предметів

$$2\omega_{k=0} = \frac{2\omega'_{k=0}}{|\gamma|} = \frac{30^\circ}{3} = 10^\circ.$$

3. Розрахунок світлового діаметра об'єктива  $\varnothing_{об}$  :

Згідно формули (13.25)  $tg\omega'_{k=0} = \frac{\varnothing_{об} + \gamma\varnothing_{зін.ок.}}{2(\gamma t' + L)}$ , звідки

$$\varnothing_{об} = 2(\gamma t' + L) \cdot tg\omega'_{k=0} - \gamma\varnothing_{зін.ок.} = 2(3 \cdot 15 + 40) \cdot tg15^\circ - 3 \cdot 4 = 33.55 \text{ мм.}$$

4. Розрахунок світлового діаметру окуляра.

Світловий діаметр окуляра повинен забезпечувати повне проходження із простору предметів через оптичну систему Галілея того пучка променів, який на вході в об'єктив має найбільший кут нахилу до оптичної осі, але при якому зіниця ока ще повністю заповнюється променями пучка. Цей кут відповідає умові відсутності він'єтування пучка променів, а значить він має значення  $\sigma = \omega_{k=1}$ .

Оскільки згідно з (13.22)  $tg\omega'_{k=1} = \frac{\varnothing_{об} - \gamma D_{зін.ок.}}{2(\gamma t' + L)}$

$$= \frac{33.55 - 3 \cdot 4}{2(3 \cdot 15 + 40)} = 0.1267, \text{ звідки } \omega'_{k=1} = artg(0.1267) = 7.225^\circ, \text{ то кут нахи-}$$

лу цього пучка на вході в систему  $\omega_{k=1} = \frac{\omega'_{k=1}}{\gamma} = \frac{7.225^\circ}{3} = 2.408^\circ$ .

З рис. 13.23 видно, що повне проходження цього пучка променів через отвір оправы окуляра можливий, коли верхній промінь пучка проходить через край світлового діаметру окуляра, або  $0.5\varnothing_{ок} = h_2$ .

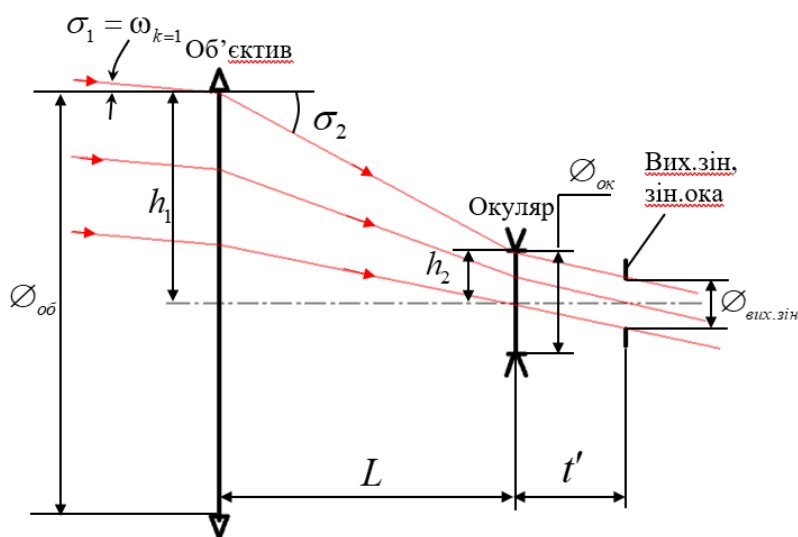


Рис. 13.23. До габаритного розрахунку системи Галілея

Висоту  $h_2$  можна знайти розрахунком ходу верхнього нульового променя, який входить в систему на висоті  $h_1 = 0.5\varnothing_{об}$  під кутом  $\sigma_1 = \omega_{k=1}$ . Із розрахунку ходу вказаного променя за формулами (7.19), (7.20):

$$tg\sigma_2 = tg\sigma_1 + h_1\Phi_1 = tg2.408^\circ + 0.5 \cdot 33.55 \frac{1}{60} = 0.32163$$

$$h_2 = h_1 - L \cdot tg\sigma_2 = 16.775 - 40 \cdot 0.32163 = 3.91 \text{ мм},$$

звідки  $\varnothing_{ок} = 2h_2 = 2 \cdot 3.91 = 7.82 \text{ мм}$ .

## РОЗДІЛ 14. ОПТИЧНІ СИСТЕМИ ЛУП І МІКРОСКОПІВ

Оптичні системи луп та мікроскопів відносяться до класу 10 в якому предмет знаходиться на кінцевій відстані – в передній фокальній площині системи, а зображення – на безкінечності.

### 14.1. Лупа

**Лупа – одиночна лінза (група лінз)**, що має додатну оптичну силу і призначена для розгляду через неї оком дрібних предметів, розташованих у її фокальній площині або поруч з нею.

Чому потрібні лупи, які в побуті називають збільшувальним склом?

Коли необхідно чітко бачити дрібні структури предмету (наприклад, пробу на ювелірних виробках з дорогоцінних металів або дрібний шрифт) людина наближає предмет до ока. При цьому розмір зображення на сітківці зростає і це сприяє зоровому органу краще бачити збільшене зображення дрібних фрагментів предмету.

Проте наближати предмет до ока можна до 250 мм – відстані найкращого бачення (див. розд. 12). Не завжди на такій відстані око бачить дрібні деталі предмету, які необхідно бачити чітко. В такому випадку використовують лупу.

До головних **функціональних параметрів лупи** відносять:

- видиме збільшення  $\Gamma$ ;
- лінійний розмір поля зору;
- глибину простору предметів.

#### 14.1.1. Видиме збільшення лупи $\Gamma$

На рис. 14.1 показано дію лупи, яка дозволяє оку бачити збільшене зображення предмету. Іншими словами лупа забезпечує  $\Gamma > 1$ .

За визначенням **видиме збільшення лупи**  $\Gamma = \frac{tg \omega'}{tg \omega}$ , де  $\omega$  – кут, під яким неозброєне око бачить предмет, рис. 14.1, а),  $\omega'$  – кут, під яким око бачить сформоване лупою зображення того самого предмету, рис. 14.1, б).

Кутовий розмір предмету  $\omega$  оцінюється з мінімально допустимої відстані 250 мм (див. підрозд. 12.7). Тому нормальне еметропічне

неозброєне око бачить предмет величиною  $y$  з цієї відстані під кутом, тангенс якого

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{y}{250}.$$

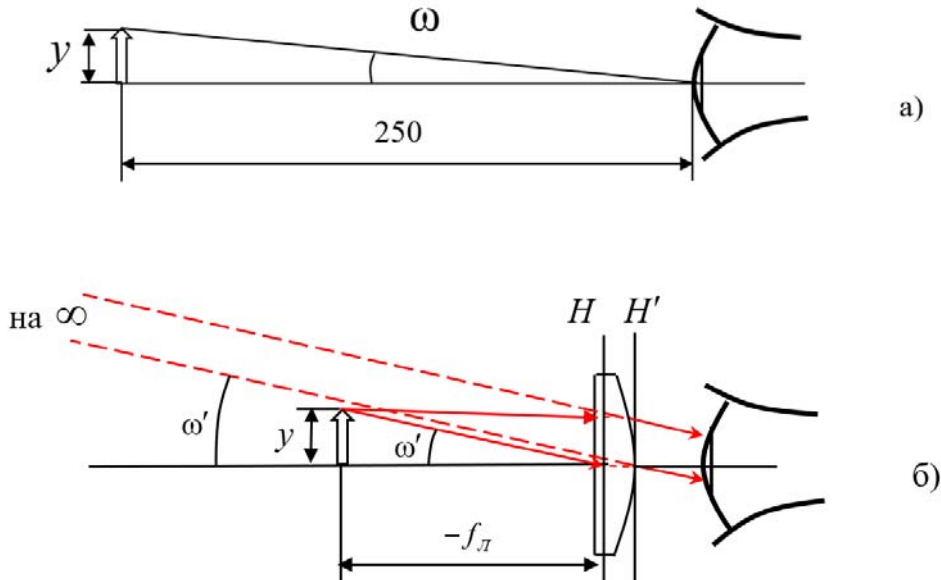


Рис. 14.1. До визначення видимого збільшення лупи при акомодатції ока користувача на безкінечність

Якщо той самий предмет розмістити у передній фокальній площині лупи, то його уявне зображення опиниться на безкінечності і око, що також акомодовано на безкінечність, буде бачити зображення під кутом  $\omega'$ , тангенс якого

$$\operatorname{tg} \omega' = \frac{y}{|f_l|} = \frac{y}{f'_l}.$$

При цьому видиме збільшення лупи

$$\Gamma_{\infty} = \frac{\operatorname{tg} \omega'}{\operatorname{tg} \omega} = \frac{\frac{y}{f'_l}}{\frac{y}{250}} = \frac{250}{f'_l}. \quad (14.1)$$

Індекс  $\infty$  у позначенні видимого збільшення означає, що зображення предмету знаходиться на безкінечності і око також акомодовано на безкінечність.

З виразу (14.1) видно, що видиме збільшення може бути більшим за одиницю, якщо задня фокусна відстань лупи  $f'_l < 250$  мм.



Реальні однолінзові лупи мають значення видимого збільшення  $\Gamma_{\infty}$  в діапазоні від  $1.5^{\times}$  до  $7^{\times}$ . Більш складні за складом лупи можуть мати видиме збільшення до  $40^{\times}$ . Чим більшим є видиме збільшення, тим згідно (14.1) більш короткофокусною стає лупа, і, як наслідок, зменшується її діаметр, скорочується її поле зору і вона стає незручною у використанні.

А що стається із видимим збільшенням, якщо предмет пересувається від фокальної площини в сторону лупи? При цьому уявне зображення предмету згідно формули Ньютона або Гауса також пересувається із безкінечності в сторону лупи. При цьому оку потрібно змінювати стан акомодациї на кінцеву відстань. Ця відстань не має бути меншою за 250 мм, рис. 14.2.

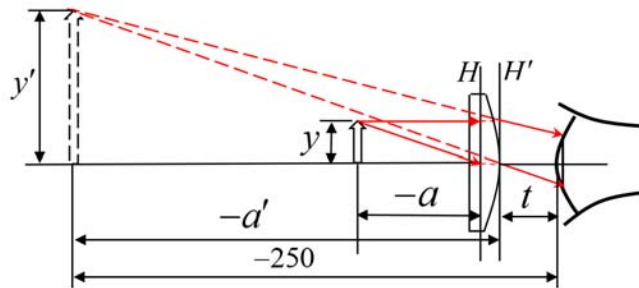


Рис. 14.2. До визначення видимого збільшення лупи при акомодациї ока на 250 мм

Розмір зображення  $y'$  при цьому визначається формулою  $y' = y\beta$ , де згідно (7.15)  $\beta = \frac{a'}{a}$ .

Якщо відрізок  $a$  заданий, і відомим є значення фокусної відстані лупи  $f'_l$ , то у відповідності з формулою Гауса (7.9)  $a' = \frac{a f'_l}{a + f'_l}$ .

При наближенні ока впритул до лупи, коли відрізком  $t$  можна нехтувати, відрізок  $a'$  отримує значення 250 мм, коли  $a = -\frac{250 f'_l}{250 + f'_l}$ , що ви-тікає з попереднього виразу. При цьому лінійне збільшення

$$\beta = \frac{a'}{a} = \frac{-250}{-\frac{250 f'_l}{250 + f'_l}} = \frac{250 + f'_l}{f'_l},$$

і розмір зображення  $y' = y\beta = y \frac{250 + f'_l}{f'_l}$ .

Тоді  $\operatorname{tg} \omega' = \frac{y'}{250} = \frac{y}{250} \frac{250 + f'_л}{f'_л}$ , а видиме збільшення

$$\Gamma_{250} = \frac{\operatorname{tg} \omega'}{\operatorname{tg} \omega} = \frac{\frac{y}{250} \frac{250 + f'_л}{f'_л}}{\frac{y}{250}} = \frac{250 + f'_л}{f'_л} = \frac{250}{f'_л} + 1.$$

Оскільки  $\frac{250}{f'_л} = \Gamma_\infty$ , то при найменшій відстані 250 мм між оком і зображенням предмету, а також при акомодациї ока на 250 мм, формула для видимого збільшення має вигляд:

$$\Gamma_{250} = \Gamma_\infty + 1. \quad (14.2)$$

З отриманого результату витікає важливий висновок – значення видимого збільшення лупи може знаходитися в інтервалі від  $\Gamma_\infty$  до  $\Gamma_\infty + 1$ .

#### 14.1.2. Поле зору лупи

Поле зору лупи – зона в площині предметів, яку око може одночасно спостерігати через лупу. Розмір поля зору при цьому обумовлений розмірами і взаємним розташуванням двох діафрагм, рис. 14.3. Одна з них – непрозора оправа лупи, друга – непрозора райдужка навколо зіниці ока користувача лупи.

Розподіл ролей між вказаними діафрагмами можна виявити, аналізуючи їх зображення в просторі предметів. Зображення діафрагми 1 буде самою діафрагмою через відсутність оптичних елементів по ходу променів від неї в сторону ПП. Зображення зіниці ока в просторі предметів формується лупою. Для знаходження зображення зіниці доцільно використати формулу Гауса. В зв'язку з тим, що промені від діафрагми йдуть на лупу справа наліво, тобто у «від'ємному» напрямку ходу променів, формула Гауса має перетворюється до вигляду

$$\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f_л}, \quad (14.3)$$

де  $f_л$  – передня фокусна відстань лупи, а відрізки  $a$ ,  $a'$  вказані на рис. 14.3, а).

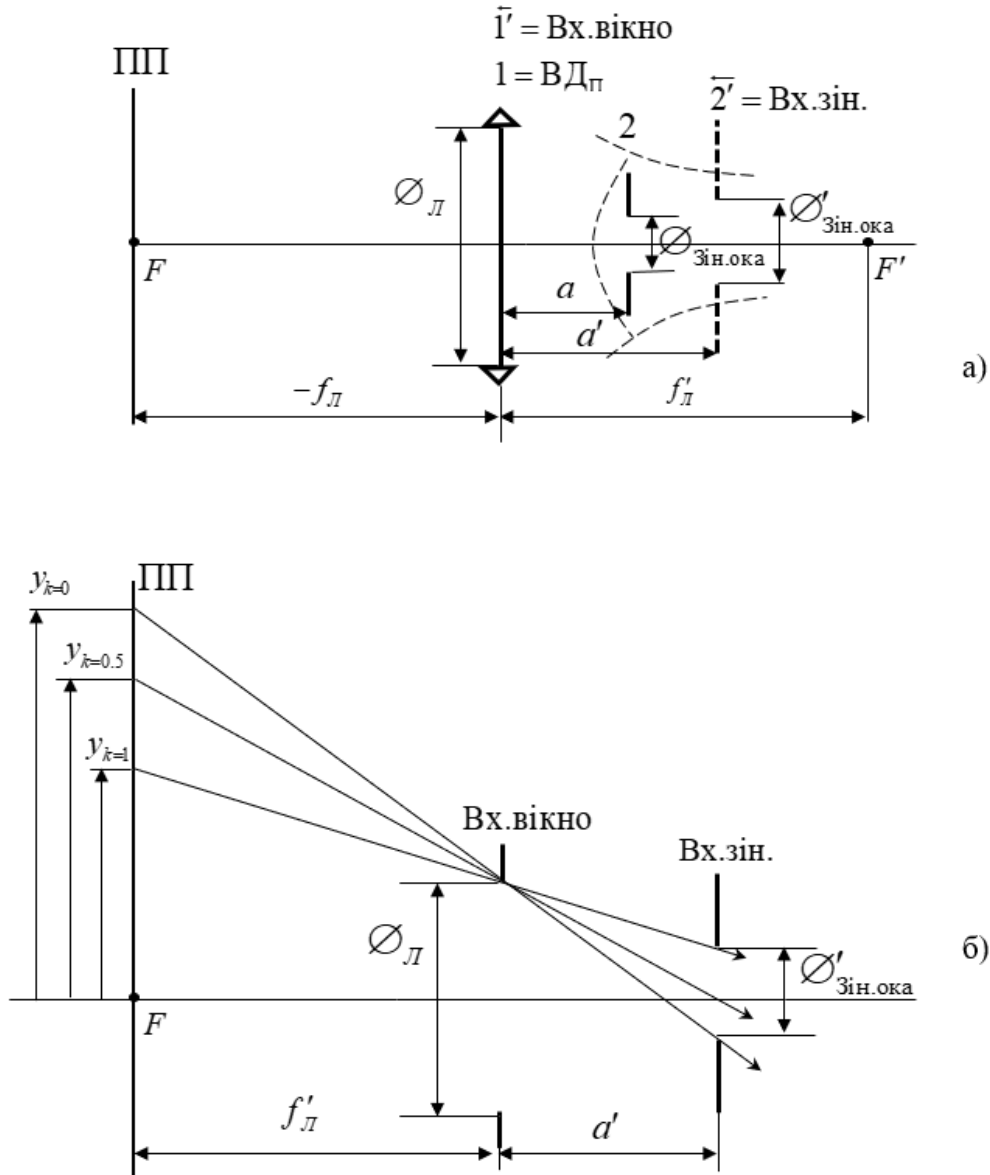


Рис. 14.3. До визначення розмірів поля зору лупи:  
 а – лупа в оправі (1), зіниця ока (2), ПП – площина предметів;  
 б – вхідне вікно та вхідна зіниця системи, представлені на схемі а

Положення зображення діафрагми 2 в просторі предметів визначається відрізком  $a'$ , який з (14.3) розраховується за формулами:

$$a' = \frac{a f_L}{a + f_L} \text{ або } a' = -\frac{a f'_L}{a - f'_L}. \quad (14.4)$$

Діаметр зображення діафрагми 2 (зображення зіниці ока)  $\varnothing'_{\text{зіін.ока}}$

$$\varnothing'_{\text{зіін.ока}} = \beta \varnothing_{\text{зіін.ока}}, \quad (14.5)$$

де  $\beta = \frac{a'}{a}$ .

Оскільки діаметр зіниці ока не перевищує 6...8 мм і є набагато меншим діаметру оправу лупи  $\varnothing_L$  та її зображення  $\bar{1}'$ , то зображення  $\bar{2}'$  із осьової точки ПП виглядає під меншим кутом ніж зображення оправу лупи  $\bar{1}'$ . Через це діафрагма 2 – зіниця ока є апертурною, а її зображенні вхідною зіницею системи.

По першій ознаці польової діафрагми (оптичне спряження з ПП) в системі її не існує, тому єдина неапертурна діафрагма 1 – оправу лупи, є він'єтною, яка до того ж обмежує поле зору. Її зображення  $\bar{1}'$  в просторі предметів є вхідним вікном системи.

Для пошуку розмірів поля зору лупи на рис. 14.3, б достатньо показати лише вхідну зіницю, вхідне вікно системи, ПП і відповідні промені.

Згідно формул (10.8), (10.10), (10.12) при трьох вказаних значеннях коефіцієнту він'єтування  $k_\omega = 1, 0.5, 0$  діаметр поля зору лупи визначаються за формулами:

$$\varnothing_{k=1} = \frac{f'_L + a'}{a'} (\varnothing_L - \varnothing'_{\text{зін.ок.}}) + \varnothing'_{\text{зін.ок.}} ; \quad (14.6)$$

$$\varnothing_{k=0.5} = \frac{f'_L + a'}{a'} \varnothing_L = \frac{50 + 33 \cdot (3)}{33 \cdot (3)} 25 = 62.5 \text{ мм} ;$$

$$\varnothing_{k=0.5} = \frac{f'_L + a'}{a'} \varnothing_L = \frac{50 + 33 \cdot (3)}{33 \cdot (3)} 25 = 62.5 \text{ мм} ; \quad (14.7)$$

$$\varnothing_{k=0} = \frac{f'_L + a'}{a'} (\varnothing_L + \varnothing'_{\text{зін.ок.}}) - \varnothing'_{\text{зін.ок.}} . \quad (14.8)$$

**Завдання 14.1.** Розрахувати діаметр поля зору лупи з видимим збільшенням  $\Gamma_\infty = 5$ , якщо внутрішній діаметр оправу лупи 25 мм, діаметр зіниці ока 4 мм, зіниця ока віддалена від задньої головної площини лупи на 20 мм, площина предметів знаходиться в передній фокальній площині лупи. Діаметри поля зору розрахувати при трьох значеннях коефіцієнту він'єтування  $k_\omega = 1, 0.5, 0$ .

**Розв'язання.** Згідно вихідних даних задня фокусна відстань лупи  $f'_L = \frac{250}{\Gamma_\infty} = \frac{250}{5} = 50 \text{ мм}$ ,

$$\varnothing_L = 25 \text{ мм} , \varnothing_{\text{зін.ок.}} = 4 \text{ мм} , a = 20 \text{ мм} .$$

Для розрахунків діаметру поля зору лупи за формулами (14.6)–(14.8) потрібно попередньо знайти значення відрізка  $a'$  та діаметру зображення зіниці ока  $\varnothing_{\text{Зін.ок.}}$ :

$$1. a' = -\frac{a f'_{\text{Л}}}{a - f'_{\text{Л}}} = -\frac{20 \cdot 50}{20 - 50} = 33.(3) \text{ мм.}$$

$$2. \beta = \frac{a'}{a} = \frac{33.(3)}{20} = 1.(6); \varnothing'_{\text{Зін.ок.}} = \beta \varnothing_{\text{Зін.ок.}} = 1.(6) \cdot 4 = 6.(6) \text{ мм.}$$

$$3. \varnothing_{k=1} = \frac{f'_{\text{Л}} + a'}{a'} (\varnothing_{\text{Л}} - \varnothing_{\text{Зін.ок.}}) + \varnothing_{\text{Зін.ок.}} = \frac{50 + 33.(3)}{33.(3)} (25 - 6.(6)) + 6.(6) = 52.5 \text{ мм,}$$

$$\varnothing_{k=0.5} = \frac{f'_{\text{Л}} + a'}{a'} \varnothing_{\text{Л}} = \frac{50 + 33.(3)}{33.(3)} 25 = 62.5 \text{ мм,}$$

$$\varnothing_{k=0} = \frac{f'_{\text{Л}} + a'}{a'} (\varnothing_{\text{Л}} + \varnothing'_{\text{Зін.ок.}}) - \varnothing'_{\text{Зін.ок.}} = \frac{50 + 33.(3)}{33.(3)} (25 + 6.(6)) - 6.(6) = 72.5 \text{ мм.}$$

### 14.1.3. Глибина простору різкого для ока зображення, сформованого лупою

**Глибина простору різкого для ока зображення** це відстань вздовж оптичної осі між двома площинами в просторі предметів, між якими знаходяться предметні точки, зображення яких, сформовані лупою, оку здаються однаково «різкими». Вказану відстань в подальшому будемо коротко називати **глибиною простору предметів** (ГПП). Цей параметр лупи має важливе значення для користувача, якщо він за допомогою лупи спостерігає об'ємний предмет.

Глибина простору предметів лупи  $T$  має дві складові – геометричну  $T_g$  та акомодативну  $T_a$ :

$$T = T_g + T_a. \quad (14.9)$$

**Геометрична складова** обумовлена властивістю зорового органу людини сприймати будь-які предмети чи їх зображення як точки, коли їх зображення на сітківці не є більшими ніж сумарна ширина двох сусідніх ковбочок. Іншими словами, коли кутовий розмір предмету чи його зображення не є більшим  $\varepsilon$  – кутової межі розділення ока в фактичних умовах спостережень, див. підр. 12.6.

Існування геометричної складової ГПП –  $T_2$  є наслідком того, що зоровий орган сприймає зображення фрагментів об'ємного предмету однаково різко у випадку, коли дефокусовані зображення цих фрагментів мають кутовий розмір не більший ніж  $\varepsilon$ .

**Акомодаційна складова** обумовлена здатністю ока до автофокусування на ті зображення фрагментів предмету, які відносно ока знаходяться вздовж оптичної осі на відстані в межах обсягу акомодатції. Щодо пресбіопічного ока, у якого нульовий обсяг акомодатції, то для нього акомодатційна складова відсутня зовсім і ГПП визначається тільки геометричною складовою.

**Розрахунок геометричної складової ГПП лупи.** Виникнення геометричної складової ГПП пояснюється за допомогою рис. 14.4, на якому показано, що в площинах, зсунутих відносно передньої фокальної площини лупи вздовж оптичної осі на дистанцію  $\pm Z$ , виникає пляма дефокусування з діаметром  $\varnothing_{\text{деф}}$  в пучку променів, що проходять через лупу і повністю заповнюють отвір зіниці ока з діаметром  $\varnothing_{\text{зін.ок.}}$ . Зображення плями для ока спостерігача має кутовий розмір  $\alpha$ . Якщо кутовий діаметр  $\alpha$  цієї плями не перевершує кут  $\varepsilon$ , то око сприймає пляму як точку. А це означає, що осьова точка в площині предметів (ПП) і вказана пляма сприймаються оком однаково «різко», хоча між ними є дистанція  $2Z$ . При цьому загальна геометрична складова  $T_2 = 2Z$ .

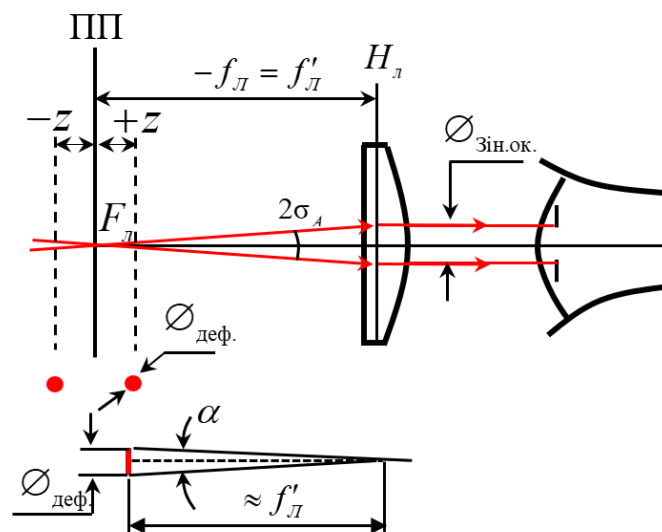


Рис. 14.4. До визначення геометричної складової ГПП лупи

Згідно рисунку  $\alpha \approx \frac{\varnothing_{\text{деф}}}{f'_l}$ .

При умові  $\alpha = \varepsilon$  допустимий діаметр плями  $\varnothing_{\text{деф}} = \varepsilon \cdot f'_l$ .

З іншого боку  $\frac{\varnothing_{\text{деф}}}{Z} \approx 2\sigma_A \approx \frac{\varnothing_{\text{Зін.ок.}}}{f'_l}$ , звідки  $Z = \frac{\varnothing_{\text{деф}}}{\varnothing_{\text{Зін.ок.}}} f'_l = \frac{\varepsilon (f'_l)^2}{\varnothing_{\text{Зін.ок.}}}$ ,

$$T_z = 2Z = 2 \frac{\varepsilon (f'_l)^2}{\varnothing_{\text{Зін.ок.}}} \quad (14.10)$$

В формулі (14.10) кут  $\varepsilon$  повинен бути представленим в радіанах. Коли око має нормальну гостроту зору і  $\varepsilon = 1' = 2.9 \cdot 10^{-4} \text{ рад}$ , то

$$T_z = 5.8 \cdot 10^{-4} \frac{(f'_l)^2}{\varnothing_{\text{Зін.ок.}}} \quad (14.11)$$

З отриманого виразу витікають умови збільшення  $T_z$  шляхом зменшення діаметру зіниці ока, що досягається підвищенням освітленості предмету, при якому зіниця звужується, а також збільшенням фокусної відстані лупи. Але останнє призводить до зменшення видимого збільшення.

При підстановці в (14.10), (14.11) значення  $f'_l = \frac{250}{\Gamma_\infty}$ , отримаємо:

$$T_z = 1.25 \cdot 10^5 \frac{\varepsilon}{\varnothing_{\text{Зін.ок.}} \Gamma_\infty^2} [\text{мм}], \quad (14.12)$$

при  $\varepsilon = 1' = 2.9 \cdot 10^{-4} \text{ рад}$

$$T_z = \frac{36.25}{\varnothing_{\text{Зін.ок.}} \Gamma_\infty^2} [\text{мм}]. \quad (14.13)$$

У формулах (14.12), (14.13) діаметр  $\varnothing_{\text{Зін.ок.}}$  повинен бути в мм.

**Розрахунок акомодативної складової ГПП лупи.** На рис. 14.5 площина предметів  $III$  розташована у передній фокальній площині лупи. При цьому око бачить  $III$  на безкінечності. Якщо  $III$  пересунути на дистанцію  $Z_A$  ближче до лупи в положення  $III_l$ , то лупа утворить уявне зображення площини  $III_1$ , а саме  $III'_1$ , яке із безкінечності пересунеться до лупи і буде знаходитися на відстані  $-Z'_A$  від її фокальної площини.

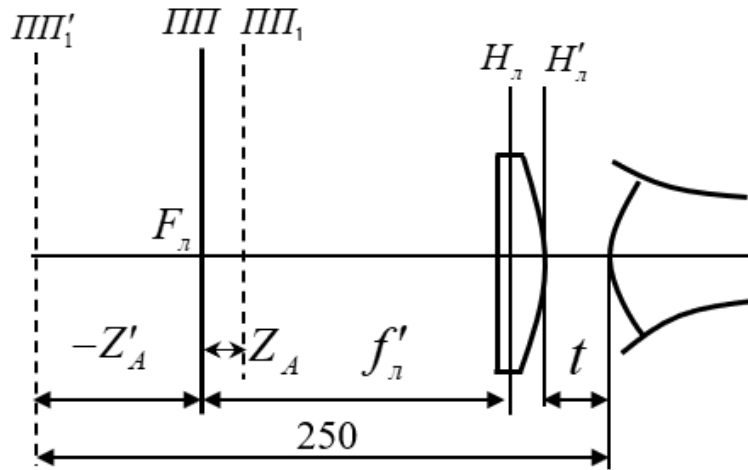


Рис. 14.5. До визначення акомодативної складової ГПП лупи

Нормальне еметропічне око здатне бачити без напругу зображення  $ПП'_1$  при умові, що воно від ока знаходиться на відстані не менш ніж 250 мм. При цьому проміжок між  $ПП$  і  $ПП'_1$  є акомодативною складовою ГПП лупи, тобто  $T = Z_A$ .

З формули Ньютона  $Z'_A = -\frac{(f'_л)^2}{Z_A}$ . Якщо знехтувати відстанню між головними площинами лупи, то відрізок  $Z_A$  можна знайти з рівняння  $-Z'_A + f'_л + t = 250$ , або з рівняння  $\frac{(f'_л)^2}{Z_A} + f'_л + t = 250$ , з якого

$$T_A = Z_A = \frac{(f'_л)^2}{250 - f'_л - t}. \quad (14.14)$$

**Завдання 14.2.** Лупа має  $\Gamma_\infty = 10^\times$ , діаметр  $\varnothing_{Л} = 30$  мм,  $a = 20$  мм,  $\varnothing_{\text{Зін.ок.}} = 4$  мм.

Знайти діаметр поля зору лупи при коефіцієнті він'єтування  $k = 0$ , а також глибину простору предметів  $T$ .

**Розв'язання.**

1. Фокусна відстань лупи  $f'_л = \frac{250}{\Gamma_\infty} = \frac{250}{10} = 25$  мм.

2. При  $k = 0$  згідно (14.13) діаметр поля зору

$$\varnothing_{k=0} = \frac{f'_л + a'}{a'} (\varnothing_{Л} + \varnothing'_{\text{Зін.ок.}}) - \varnothing'_{\text{Зін.ок.}}$$

Потрібно знайти значення  $a'$  та  $\varnothing'_{\text{Зін.ок.}}$ .



Згідно (14.4) та (14.5)

$$a' = -\frac{a f'_l}{a - f'_l} = -\frac{20 \cdot 25}{20 - 25} = 100 \text{ мм};$$

$$\beta = \frac{a'}{a} = \frac{100}{20} = 5; \quad \varnothing'_{\text{зін.ок.}} = \beta \varnothing_{\text{зін.ок.}} = 5 \cdot 4 = 20 \text{ мм.}$$

Тоді

$$\varnothing_{k=0} = \frac{f'_l + a'}{a'} (\varnothing_l + \varnothing'_{\text{зін.ок.}}) - \varnothing'_{\text{зін.ок.}} = \frac{25 + 100}{100} (30 + 20) - 20 = 42.5 \text{ мм.}$$

Глибина простору предметів лупи згідно (14.9):

$$T = T_z + T_a.$$

Згідно (14.13)

$$T_z = \frac{36.25}{\varnothing_{\text{зін.ок.}} \Gamma_\infty^2} = \frac{36.25}{4 \cdot 10^2} = 0.09 \text{ мм.}$$

Згідно (14.14)

$$T_A = Z_A = \frac{(f'_l)^2}{250 - f'_l - t} = \frac{25^2}{250 - 25 - 20} = 3.05 \text{ мм.}$$

Сумарна ГПП:

$$T = T_z + T_a = 0.09 + 3.05 = 3.14 \text{ мм.}$$

## 14.2. Оптична система мікроскопа

З розвитком науки, техніки і технологій нагальною ставала потреба в оснащенні ока пристроєм, який би дозволяв спостерігати і досліджувати мікрооб'єкти. Проте однолінзова лупа, що використовувалася в таких випадках, була неспроможною давати великі значення видимого збільшення  $\Gamma_\infty$  по тій причині, що вона мала фокусну відстань, а як наслідок і малий діаметр. Він був тим меншим, чим більшим було значення  $\Gamma_\infty$ . Так при  $\Gamma_\infty = 100$ , однолінзова лупа згідно формулі (14.1) має фокусну відстань  $f'_l = 250/100 = 2.5$  мм. Навіть при надзвичайно великому для лінзи відносному отворі  $\varnothing_l : f'_l = 1:1$  діаметр такої лупи становить всього 2.5 мм. Користуватися такою лінзою-лупою надто незручно, до того ж вона не може забезпечувати потрібну якість зображення і достатній розмір поля зору. Тому перехід до більш складної оптичної системи

лупи був неминучим (короткий історичний нарис розвитку мікроскопії викладений нижче).

Оптична система сучасного мікроскопа складається з не менш як двох оптичних компонентів – об'єктива і окуляра, рис. 14.6. Тому її іноді називають двокаскадною лупою.

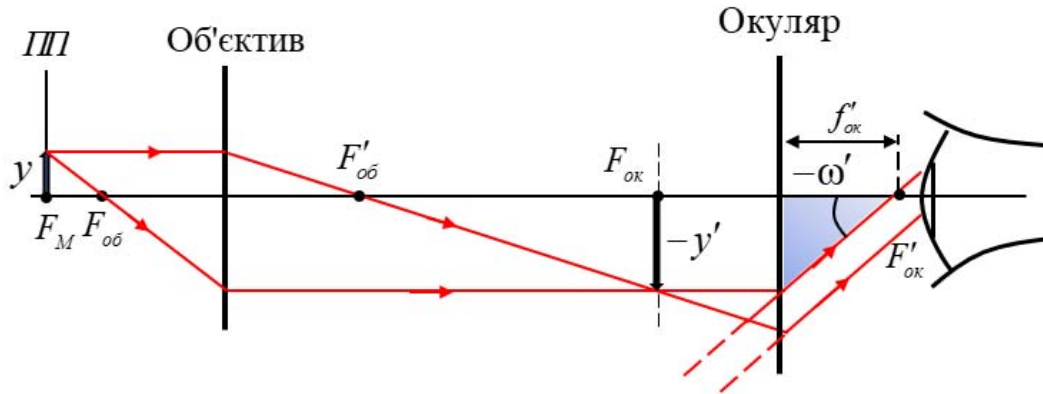


Рис. 14.6. Оптична система класичного мікроскопа

Об'єктив формує дійсне зображення предметів, що знаходиться перед переднім фокусом об'єктива. Окуляр дозволяє оку бачити зображення, сформованого об'єктивом, тому окуляр діє як лупа.

Для еметропічного ока мікроскоп формує зображення на безкінечності, а це означає, що площина предметів (ПП) знаходиться в його передній фокальній площині, в точці переднього фокусу  $F_M$ .

### 14.2.1. Історія виникнення і розвитку оптичної мікроскопії

Існує припущення, що в період між 1590 та 1610 роками першими творцями першого дволінзового пристрою, який пізніше отримав назву мікроскопа, були голландські майстри Ганс Янссен та його син Захарій. Цей пристрій з видимим збільшенням майже  $10^x$  складався з двох збиральних лінз.

У 1610 році відомий італійський вчений Галілео Галілей збудував аналогічний пристрій. Але в ньому перша лінза (об'єктив) була збиральна (додатна), а друга (окуляр) – розсіювальна (від'ємна). Таку систему він створив в розвиток своєї зорової труби, помітивши, що при наближенні предмету до труби на невелику відстань збільшене зображення предмету можна спостерігати через трубу при збільшеній відстані між лінзами труби.

Термін «мікроскоп», наскільки відомо, вперше використав стосовно до пристрою Галілея у 1625 році член римської Академії Г. Фабер.

Відомою особистістю в історії мікроскопії є Антон ван Левенгук, який першим спостерігав за допомогою свого пристрою простіші мікроскопічні організми – бактерії, інфузорії, сперматозоїди, еритроцити, очі комах та інше. Але його пристрій все ж був мініатюрною однолінзовою мікролупою, за допомогою якої він зміг зробити значні відкриття в біології.

Подальші вдосконалення в області мікроскопії стосувалися насамперед досягнення високої якості зображень, що є дуже важливим для такої техніки. Так у 1750–1770 роках Ейлер запропонував метод створення ахроматичних об'єктивів для об'єктивів мікроскопів, які дозволяли суттєво підвищувати якість зображень.

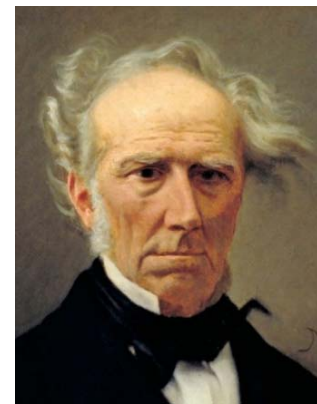
Розвитку мікроскопії багато сприяли дослідження італійського оптика Д. Амічі. Він першим запропонував використовувати імерсію для підвищення роздільної здатності мікроскопа.

Великий внесок у розвиток теорії мікроскопії зробив німецький фізик Ернст Аббе, який створив дифракційну теорію мікроскопу.

Ще одним суттєвим кроком у розвиток мікроскопії стало теоретичне обґрунтування у 1941 році фазово-контрастної мікроскопії голландським фізиком Фріцом Церніке, за що у 1953 році він отримав нобелівську премію.



*Антон ван Левенгук, голландський біолог, фізик, винахідник (1632–1723)*



*Джамбаттиста Амічі, італійський оптик, астроном, ботанік (1786–1863)*



*Фріц Церніке, голландський фізик (1908–1993)*

### 14.2.2. Основні функціональні параметри оптичних систем мікроскопів

До основних функціональних параметрів оптичних систем мікроскопів відносяться:

- видиме збільшення  $\Gamma_M$ ;
- розмір поля зору в площині предметів ( $2y$ ) та в просторі зображень ( $2\omega'$ );
- діаметр ( $D'$ ) та положення вихідної зіниці;
- розташування вихідної зіниці відносно останньої оптичної поверхні системи ( $t'$ );
- просторова дифракційна ( $\delta_\theta$ ) та візуальна ( $\delta_\epsilon$ ) роздільна здатність оптичної системи мікроскопа;
- корисне збільшення оптичної системи мікроскопа ( $\Gamma_{кор}$ );
- глибина простору предметів  $T$ .

**Видиме збільшення мікроскопа  $\Gamma_M$ .** Головним функціональним параметром оптичної системи мікроскопа є *видиме збільшення*. Воно розраховується, як і для лупи, за формулою

$$\Gamma_M = \frac{tg \omega'}{tg \omega}, \quad (14.15)$$

де  $\omega$  – кут, під яким око бачить предмет величиною  $y$  з дистанції 250 мм, а  $\omega'$  – кут, під яким око спостерігає зображення того самого предмету, сформованого оптичною системою мікроскопа, рис. 14.6.

При цьому  $tg \omega = \frac{y}{250}$ , а  $tg \omega' = \frac{y'}{f'_{ок}}$ . Згідно рис. 14.6  $y' = y \cdot \beta_{об}$ ,

де  $\beta_{об}$  – лінійне збільшення об'єктиву, тому  $tg \omega' = \frac{y \cdot \beta_{об}}{f'_{ок}}$ . Після підс-

тановки виразів цих тангенсів у (14.15), маємо формулу видимого збільшення оптичної системи мікроскопа у вигляді:

$$\Gamma_M = \frac{tg \omega'}{tg \omega} = \frac{\frac{y \cdot \beta_{об}}{f'_{ок}}}{\frac{y}{250}} = \beta_{об} \frac{250}{f'_{ок}}.$$

Оскільки окуляр виконує роль лупи, то  $\frac{250}{f'_{ок}} = \Gamma_{ок}$  – видиме збільшення окуляра, звідки кінцева формула видимого збільшення мікроскопа:

$$\boxed{\Gamma_M = \beta_{об} \Gamma_{ок}} \quad (14.16)$$

В наш час об'єктиви оптичних мікроскопів забезпечують лінійне збільшення  $\beta_{об}$  в інтервалі від -1 до -100 і більше, а окуляри мають видиме збільшення від  $2^x$  до  $15^x$  і більше. Тому оптична система мікроскопа, згідно наведеним цифрам, теоретично здатна забезпечувати видиме збільшення від  $2^x$  до  $1500^x$ .

Формула (14.16) показує, що  $\Gamma_M$  має від'ємне значення через від'ємне значення  $\beta_{об}$ . Тому зображення, сформоване двокомпонентною оптичною системою мікроскопа, є перевернутим, що видно з рис. 14.6.

Оптичну систему мікроскопа можна розглядати як складну лупу, у якій видиме збільшення  $\Gamma_{\infty} = \frac{250}{f'}$ . Прирівнявши праву частину цієї формули до правої частини формули (14.11), знаходимо задню фокусну відстань оптичної системи мікроскопа  $f'_M$  із рівняння  $\beta_{об} \Gamma_{ок} = \frac{250}{f'_M}$ , звідки фокусна відстань системи мікроскопа

$$f'_M = \frac{250}{\beta_{об} \Gamma_{ок}} = \frac{250}{\beta_{об} \frac{250}{f'_{ок}}} = \frac{f'_{ок}}{\beta_{об}} \quad (14.17)$$

Якщо у мікроскопа  $\beta_{об} = -100$  а  $f'_{ок} = 16.66$  мм, то згідно (14.17) його оптична система має фокусну відстань  $f'_M = \frac{f'_{ок}}{\beta_{об}} = \frac{16.66}{-100} = -0.1666$  мм. Однолінзова лупа таку фокусну відстань забезпечити практично не може. В цьому полягає значна перевага двокаскадної оптичної системи мікроскопа перед однокаскадною оптичною системою лупи.

**Розмір поля зору мікроскопа в площині предметів ( $2y$ ) та в просторі зображень ( $2\omega'$ ).** В оптичній системі мікроскопа присутня польова діафрагма, яка оптично спряжена з площиною предметів *III*.

До того ж вона знаходиться в передній фокальній площині окуляра і конструктивно пов'язана з ним, рис. 14.7.

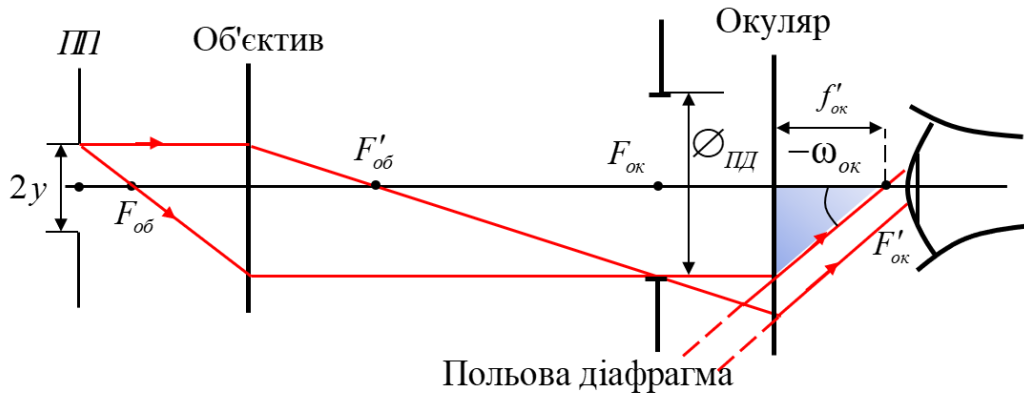


Рис. 14.7. До визначення розміру поля зору мікроскопа

Діаметр польової діафрагми  $\varnothing_{ПП}$  залежить від можливостей оптичної системи окуляра забезпечувати якісне зображення в межах його кута поля зору  $2\omega_{ок}$ . Найпростіші окуляри мікроскопа мають кут  $2\omega_{ок} = 30^\circ$ . У більш складних двокомпонентних окулярів з ахроматизацією кут  $2\omega_{ок} = 40^\circ \dots 45^\circ$ . Є ширококутні окуляри з кутом поля зору  $2\omega_{ок} = 60^\circ \dots 70^\circ$ . У всіх цих окулярах діаметр польової діафрагми пов'язаний з кутом поля зору і фокусною відстанню окуляра виразом, що витікає з співвідношень катетів трикутника, позначеного на рис. 14.7.

$$\varnothing_{ПП} = 2f'_{ок} \operatorname{tg} \omega_{ок}. \quad (14.18)$$

Оскільки полем зору будь-якої оптичної системи, в тому числі і мікроскопа, є зона зображення в ПП польової діафрагми, а польову діафрагму і поле зору оптично спрягає об'єктив мікроскопа, то лінійний розмір (діаметр) поля зору мікроскопа  $2y$  визначається через лінійне збільшення  $\beta_{об}$ :

$$2y = \frac{\varnothing_{ПП}}{|\beta_{об}|}.$$

З урахуванням (14.18)

$$2y = \frac{2f'_{ок} \operatorname{tg} \omega_{ок}}{|\beta_{об}|}.$$

Якщо чисельник і знаменник цього виразу помножити на 250 мм, то отримаємо вираз  $2y = \frac{500 f'_{ок} \operatorname{tg} \omega_{ок}}{250 |\beta_{об}|}$ , де в знаменнику присутнє ви-  
диме збільшення окуляру  $\Gamma_{ок} = \frac{250}{f'_{ок}}$ , звідки

$$2y = \frac{500 \operatorname{tg} \omega_{ок}}{|\beta_{об}| \Gamma_{ок}} = \frac{500 \operatorname{tg} \omega_{ок}}{|\Gamma_M|}. \quad (14.19)$$

Формула (14.19) свідчить про те, що зростання значення видимо-  
мого збільшення мікроскопу призводить до звуження його лінійного  
поля зору. Розширенню поля зору сприяє використання більш широ-  
кокутного окуляра.

В просторі зображень кутове поле зору мікроскопа  $2\omega'$  визнача-  
ється кутом поля зору окуляра  $2\omega_{ок}$ :

$$2\omega' = 2\omega_{ок}. \quad (14.20)$$

**Діаметр та положення вихідної зіниці ( $D'$ ) мікроскопа.** Пов-  
ноцінне функціонування мікроскопа з оком людини потребує узго-  
дження діаметра вихідної зіниці цього приладу з діаметром зіниці ока  
та просторове суміщення вказаних зіниць. Тому діаметру та поло-  
женню вихідної зіниці мікроскопа приділяється особлива увага як під  
час його експлуатації, так і при проектуванні його оптичної системи.

На рис. 14.8 показано хід двох променів осьового пучка, що  
проходять через краї апертурної діафрагми, а тому і через краї вихід-  
ної зіниці.

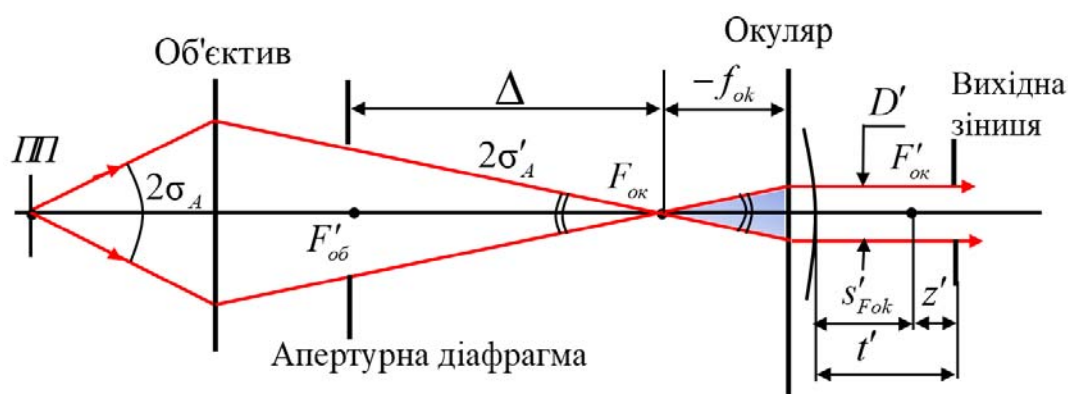


Рис. 14.8. До визначення діаметру та положення  
вихідної зіниці оптичної системи мікроскопа

Апертурна діафрагма зазвичай знаходиться в площині поблизу  
заднього фокусу об'єктива мікроскопа і на відстані  $\Delta$  від переднього

фокусу окуляра. Через це вихідна зіниця, будучи зображенням апертурної діафрагми у просторі зображень, сформоване окуляром, згідно формули Ньютона знаходиться за заднім фокусом  $F'_{ok}$  на дистанції

$$z' = \frac{(f'_{ok})^2}{\Delta}.$$

Відрізок  $t'$ , що вказує положення вихідної зіниці відносно останньої оптичної поверхні окуляра, визначається при цьому за формулою:

$$t' = s'_{Fok} + \frac{(f'_{ok})^2}{\Delta}. \quad (14.21)$$

Промені осьового пучка на виході з системи мікроскопа паралельні до оптичної осі. Вони проходять через краї вихідної зіниці, тому незалежно від розташування вздовж оптичної осі її діаметр  $D'$  через співвідношення сторін заштрихованого на рис. 14.8 трикутника визначається за формулою

$$D' = 2f'_{ok} \operatorname{tg} \sigma'_a.$$

Задній апертурний кут  $2\sigma'_a$  має в мікроскопах, як правило, такі значення, при яких є можливою заміна  $\operatorname{tg} \sigma'_a$  на  $\sin \sigma'_a$ .

Оптичну систему об'єктива мікроскопа добре коригують на аберації, що дозволяє використовувати до неї закон синусів Аббе, згідно якого  $\sin \sigma'_a = \frac{n_1 \sin \sigma_a}{\beta_{об}}$ , де  $n_1$  - показник заломлення середовища в просторі перед об'єктивом. Тому діаметр вихідної зіниці  $D' = 2f'_{ok} \frac{n_1 \sin \sigma_a}{\beta_{об}}$ .

Здобуток  $n_1 \sin \sigma_a$  називають **числовою апертурою мікроскопа** і позначають  $n_1 \sin \sigma_a = A$ . З використанням цього позначення  $D' = 2f'_{ok} \frac{A}{\beta_{об}}$ .

Якщо чисельник і знаменник отриманої формули помножити на 250 мм, то отримуємо  $D' = 2 \cdot 250 \frac{A}{\beta_{об}} \frac{f'_{ok}}{250}$ , в якій  $\frac{f'_{ok}}{250} = \frac{1}{\Gamma_{ok}}$ .

$$D' = 2 \cdot 250 \frac{A}{\beta_{об}} \frac{f'_{ok}}{250},$$

Тому кінцева формула розрахунку діаметра вихідної зіниці мікроскопа має вигляд:

$$D' = \frac{500 A}{\beta_{об} \Gamma_{ok}} = \frac{500 A}{\Gamma_M}. \quad (14.22)$$



Формула (14.22) показує, що діаметр вихідної зіниці зменшується при зростанні видимого збільшення оптичної системи мікроскопа. А збільшення значення числової апертури  $A$  навпаки сприяє зростанню значення  $D'$ .

Потрібно відзначити, що зменшення діаметра вихідної зіниці  $D'$  є фактором, що обмежує значення  $\Gamma_M$ . Якщо об'єктив, наприклад, має числову апертуру  $A=0.6$ , а допустимий діаметр зіниці складає 0.5 мм, то згідно (14.22)  $(\Gamma_M)_{\max} = 600$ .

Значення діаметру вихідної зіниці впливає на фізичну **світлосилу** системи мікроскоп + око.

Фізична світлосила, як показано в підрозд. 11.5, це співвідношення  $H = \frac{E}{L}$ , де  $E$  освітленість площини зображення предмету з яскравістю  $L$ . Площиною зображення в даному випадку є сітківка ока, освітленість якої розраховується за формулою (11.41)

$$E = \pi \tau_{oc} \tau_{ok} \frac{n_1^2}{n_c^2} L \cdot \sin^2(\sigma'_A), \quad (14.23)$$

де  $\tau_{oc}$  – коефіцієнт світлопропускання оптичної системи мікроскопа,  $\tau_{ok}$  – коефіцієнт світлопропускання оптичної системи ока,  $n_1$  – показник заломлення середовища між предметною площиною і об'єктивом мікроскопа,  $n_c = 1.337$  – показник заломлення скловидного тіла в оці,  $L$  – яскравість площини зображень,  $\sigma'_A$  – задній апертурний кут між променями, що сходяться в оці на сітківці.

Оскільки  $\sin \sigma'_A \approx \text{tg } \sigma'_A = \frac{D}{f'_{ok}}$ , де  $D$  – діаметр освітленої зони зіниці ока,  $f'_{ok}$  – задня фокусна відстань оптичної системи ока, то формулу (14.23) можна записати у вигляді

$$E = \pi \tau_{oc} \tau_{ok} \frac{n_1^2}{n_c^2} L \left( \frac{D}{f'_{ok}} \right)^2,$$

звідки фізична світлосила

$$H = \frac{E}{L} = \pi \tau_{oc} \tau_{ok} \frac{n_1^2}{n_c^2} \left( \frac{D}{f'_{ok}} \right)^2. \quad (14.24)$$

До тих пір, поки діаметр вихідної зіниці мікроскопа перевищує діаметр зіниці ока, світлосила має сталі значення при будь-яких змінах значення видимого збільшення. Якщо ж діаметр вихідної зіниці мікроскопа  $D'$  стає меншим діаметра зіниці ока  $D_{ок}$ , то світлосила зменшується і зоровий орган сприймає зображення як менш яскраве. Це явище прогресує по мірі подальшого зменшення діаметру вихідної зіниці мікроскопа, через що зображення сприймається оком як все більш темне. Для збільшення суб'єктивної яскравості зображення (збільшення освітленості зображення на сітківці) потребується, як правило, суттєве збільшення освітленості площини предметів мікроскопа. Для цього в мікроскопах з великими значеннями видимого збільшення (малими діаметрами вихідної зіниці) використовують спеціальні освітлювальні системи, які іноді за складністю їх оптичних систем не поступаються оптичним системам самого візуального каналу мікроскопу.

**Просторова дифракційна ( $\delta_o$ ) та візуальна ( $\delta_v$ ) роздільна здатність оптичної системи мікроскопа.** Просторова роздільна здатність мікроскопа кількісно характеризується мінімальною відстанню  $\delta$  між двома точковими джерелами в площині предметів, зображення яких зоровим органом, або фотоелектричним аналізатором ще сприймаються як окремі, роздільні. Чим менша вказана відстань, тим кращою є просторова роздільна здатність мікроскопа.

Перешкодою для зменшення відстані  $\delta$  є аберації оптичної системи об'єктиву мікроскопа та дифракція світлових хвиль на краях апертурної діафрагми. Якщо аберації можна скоригувати, то усунути явище дифракції не можливо в принципі. Тому зображення точки, сформоване навіть безабераційним об'єктивом мікроскопа, має вигляд, показаний на рис. 4.5, б).

Німецький фізик Е. Аббе, який створив дифракційну теорію мікроскопа, довів, що межа роздільної здатності об'єктиву мікроскопа залежить від переднього апертурного кута, довжини хвилі та способу освітлення площини предметів сторонніми джерелами. Так при освітленості площини предметів мікроскопа дуже віддаленим джерелом світла, коли на цю площину падають пласкі фронти світлових хвиль (паралельні пучки променів, рис. 14.9, а), межа роздільної здатності

$$\delta = \frac{\lambda}{A}, \quad (14.25)$$

де  $\lambda$  – довжина світлової хвилі,  $A = n_1 \sin \sigma_A$  – числова апертура об'єктива мікроскопа.

При освітленні площини предметів пучками променів, що сходяться в площині предметів і при тому мають апертурний кут не менший ніж вхідний апертурний кут об'єктиву, рис. 4.9, б), лінійна межа роздільної здатності становить

$$\delta = \frac{\lambda}{2A}. \quad (14.26)$$

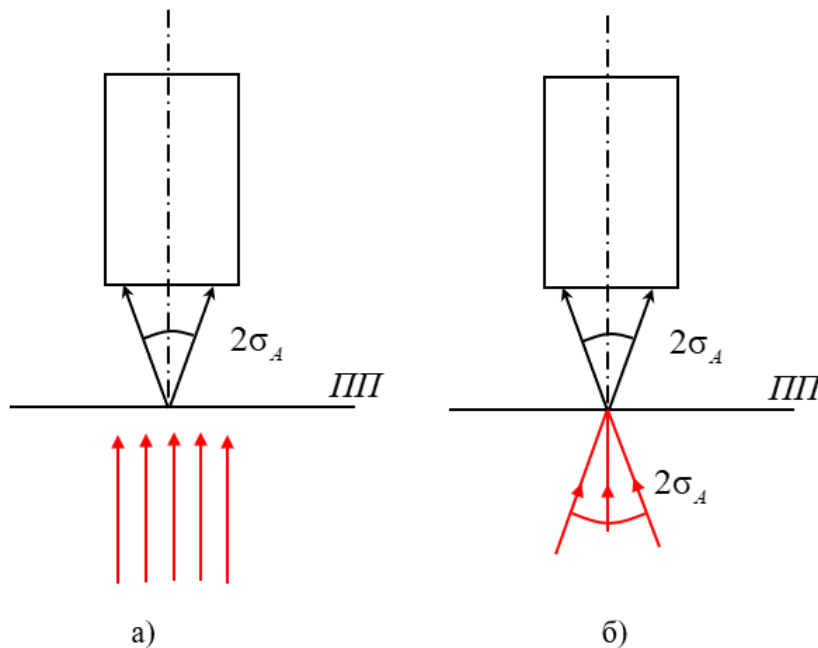


Рис. 14.9. До визначення межі роздільної здатності об'єктиву мікроскопа

З виразів (14.25), (14.26) видно, що лінійну межу роздільної здатності  $\delta$  можна покращувати (зменшувати) за рахунок використання більш короткохвильового випромінення, або за рахунок збільшення числової апертури.

Перший спосіб привів до створення електронних мікроскопів, другий – до збільшенню переднього апертурного кута  $\sigma_A$  за рахунок використання імерсійної рідини з показником заломлення більше одиниці, яка розміщується між предметною площиною та першою оптичною поверхнею об'єктиву мікроскопа. Відомі такі імерсійні рідини, як вода ( $n_1 = 1.33$ ), кедрове масло ( $n_1 = 1.52$ ), монобромнафталін ( $n_1 = 1.7$ ) та інші.

**Корисне видиме збільшення мікроскопа.** Двоє точкових джерел в площині предметів мікроскопа, які знаходяться на відстані одне

від одного  $\delta = \frac{\lambda}{2A}$ , мають зображення за мікроскопом на безкінечності, розташовані на кутовій відстані  $\psi = \frac{\delta}{f'_M}$ .

Згідно формул (14.17) та (14.26) кут

$$\psi = \frac{\delta}{f'_M} = \frac{\frac{\lambda}{2A}}{\frac{f'_{ок}}{\beta_{об}}} = \frac{\lambda \cdot \beta_{об}}{2A \cdot f'_{ок}}.$$

Помноживши чисельник і знаменник на 250 мм отримаємо вираз

$$\psi = \frac{\lambda \cdot \beta_{об} \cdot 250}{500A \cdot f'_{ок}} = \frac{\lambda \beta_{об} \Gamma_{ок}}{500A} = \frac{\lambda \Gamma_M}{500A}, \quad (14.27)$$

в якому кут  $\psi$  – в радіанах, а довжина хвилі – в мм.

Якщо кут  $\psi$  при якомусь конкретному значенні  $\Gamma_M$  стає більшим кута роздільної здатності ока  $\varepsilon$ , то подальше збільшення  $\psi$  за рахунок збільшення  $\Gamma_M$  втрачає сенс, бо око не отримує при цьому можливість бачити більш дрібні структурні елементи предмету. Тут настає межа **корисного значення параметру  $\Gamma_M$** . Цю межу визначають з рівняння

$$\psi = \varepsilon.$$

При роботі з мікроскопом через умови спостережень, через обмеження освітленої зони отвору зіниці кут  $\varepsilon = 2' \dots 4'$ , що встановлено з практики роботи людини з мікроскопами. У вказаному діапазоні кут  $\varepsilon = (5.8 - 11.6) \cdot 10^{-4}$  радіан.

Тоді згідно (14.27)  $\frac{\lambda \Gamma_{кор}}{500A} = (5.8 - 11.6) \cdot 10^{-4}$ , де  $\Gamma_{кор}$  – корисне значення

видимого збільшення мікроскопа.

При довжині хвилі  $\lambda = 0.55 \cdot 10^{-3}$  мм, що відповідає максимальній спектральній чутливості сітківки ока, з попереднього рівняння маємо

$$\Gamma_{кор} \approx (500 - 1000)A.$$

Якщо вважати, що максимально досяжна числова апертура  $A$  має значення приблизно 1.5, то максимальне корисне видиме збільшення оптичного мікроскопа, що функціонує у видимому спектрі світлових хвиль, знаходиться в межах:

$$\Gamma_{кор} \approx (750 - 1500)^x.$$

**Глибина простору предметів мікроскопа.** Мікроскоп, як і лупа, теж має свою **глибину простору предметів** (ГПП), яка позначається буквою  $T$ . Зображення точок, що знаходяться в зоні ГПП, сприймаються оком однаково «різко». Як і у лупи ГПП мікроскопа має геометричну складову  $T_z$ , акомодативну глибину  $T_a$ , а також дифракційну  $T_\delta$ :

$$T = T_z + T_a + T_\delta. \quad (14.28)$$

Поява в цьому виразі дифракційної складової обумовлена тим, що внаслідок дифракції зображення точки, сформоване оптичною системою мікроскопа, має вигляд освітленого центрального кола (кола Ері), навколо якого концентрично розташовані темні та світлі кола. Якщо при зсуві предметної точки дефокусоване на сітківці зображення цієї точки має діаметр не більший, ніж діаметр кола Ері, то такий зсув відносять до дифракційної складової  $T_\delta$ .

**Розрахунок геометричної складової  $T_z$ .** Для розрахунку параметра  $T_z$  можна скористуватися формулою (14.10) знайденої для лупи, замінивши в ній фокусну відстань лупи на фокусну відстань мікроскопа, тоді

$$T_z = 2 \frac{\varepsilon (f'_M)^2}{\varnothing_{\text{зін.ок.}}} \quad (14.29)$$

Формулою (14.29) можна користуватися у випадку, коли діаметр зіниці ока  $\varnothing_{\text{зін.ок.}}$  є меншим ніж діаметр  $D'$  вихідної зіниці мікроскопа. Проте у переважній кількості випадків  $D' \leq \varnothing_{\text{зін.ок.}}$ , тому у формулі (14.29) замість  $\varnothing_{\text{зін.ок.}}$  потрібно мати  $D'$ :

$$T_z = 2 \frac{\varepsilon (f'_M)^2}{D'} \quad (14.30)$$

Згідно формулі (14.12) діаметр вихідної зіниці мікроскопа  $D' = \frac{500 A}{\Gamma_M}$ , підстановка якого у (14.30) призводить до виразу

$$T_z = \frac{\varepsilon \Gamma_M (f'_M)^2}{250 A}.$$

Помноживши чисельник і знаменник на 250 мм і користуючись формулою  $\Gamma_M = \frac{250}{f'_M}$ , отримуємо формулу:

$$T_z = \frac{250\varepsilon}{A\Gamma_M}, \quad (14.31)$$

в якій кутову межу роздільної здатності  $\varepsilon$  з практики часто дорівнюють двом кутовим хвилинам  $2' = 5.82 \cdot 10^{-4}$  радіан.

**Розрахунок акомодативної складової  $T_a$ .** Акомодативну складову ГПП також можна визначити за допомогою формули (14.14), отриманої для лупи, замінивши фокусну відстань лупи на фокусну відстань мікроскопа:

$$T_a = \frac{(f'_M)^2}{250 - f'_M - t}. \quad (14.32)$$

Враховуючи те, що  $f'_M \ll 250$  і  $t \ll 250$ , формулу (14.32) можна спростити до вигляду  $T_a = \frac{(f'_M)^2}{250}$ .

Помноживши чисельник і знаменник на 250 мм, з урахуванням, що  $\Gamma_M = \frac{250}{f'_M}$  цей вираз можна представити у вигляді

$$T_a = \frac{250}{\Gamma_M^2}. \quad (14.33)$$

**Розрахунок дифракційної складової  $T_\delta$ .** Явище дифракції світлових хвиль на краях апертурної діафрагми збільшує глибину простору предметів. Складова  $T_\delta$  розраховується за формулою [11]:

$$T_\delta = \frac{4n_1\lambda}{\bar{k}A^2},$$

де  $n_1$  – показник заломлення середовища між предметом та першою оптичною поверхнею мікроскопа,  $\lambda$  довжини світлової хвилі,  $\bar{k} = 8$ , тому

$$T_\delta = \frac{n_1\lambda}{2A^2}. \quad (14.34)$$

Загальна формула розрахунку параметра  $T$  мікроскопа

$$T = \frac{250\varepsilon}{A\Gamma_M} + \frac{250}{\Gamma_M^2} + \frac{n_1\lambda}{2A^2}. \quad (14.35)$$

З отриманої формули видно, що із зростанням значень видимого збільшення мікроскопа  $\Gamma_M$  та числової апертури  $A$  глибина простору предметів зменшується.

**Завдання 14.3.** Мікроскоп має об'єктив із лінійним збільшенням  $\beta_{об} = 40$  і числовою апертурою  $A = 0.65$ , та окуляр із видимим збільшенням  $\Gamma_{ок} = 15^\times$ . В просторі предметів  $n_1 = 1$ .

Розрахувати глибину простору предметів  $T$  при  $\lambda = 0.55$  мкм та при  $\varepsilon = 2' = 5.8 \cdot 10^{-4}$  рад.

**Розв'язання.**

1. Розрахунок видимого збільшення мікроскопа

$$\Gamma_M = \beta_{об} \cdot \Gamma_{ок} = 40 \cdot 15 = 600.$$

2. Розрахунок геометричної складової ГПП:

$$T_z = \frac{250\varepsilon}{A\Gamma_M} = \frac{250 \cdot 5.82 \cdot 10^{-4}}{0.65 \cdot 600} = 3.73 \cdot 10^{-4} \text{ мм.}$$

3. Розрахунок акомодативної складової ГПП:

$$T_a = \frac{250}{\Gamma_M^2} = \frac{250}{600^2} = 6.9 \cdot 10^{-4} \text{ мм.}$$

4. Розрахунок дифракційної складової ГПП:

$$T_d = \frac{n_1\lambda}{2A^2} = \frac{1 \cdot 0.55 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 0.65^2} = 6.51 \cdot 10^{-4} \text{ мм.}$$

5. Розрахунок ГПП мікроскопа:

$$T = T_z + T_a + T_d = (3.73 + 6.9 + 6.51) \cdot 10^{-4} = 1.72 \cdot 10^{-3} \text{ (мм)} = 1.72 \text{ мкм.}$$

Результат розрахунку показує наскільки малою є глибина простору предметів мікроскопа навіть із середнім значенням видимого збільшення 600. Тому для фокусування мікроскопа з такою ГПП на площину предметів потрібно мати механізм мікропереміщень мікроскопа відносно площини предметів.

## 14.3. Об'єктиви, окуляри та тубус мікроскопів

### 14.3.1. Об'єктиви мікроскопів

Об'єктиви мікроскопів у переважній більшості мають лінзову оптичну систему. Чим більшими є значення лінійного збільшення  $\beta_{об}$  і числова апертура  $A$  мікрооб'єктива, тим складнішою є його оптична система. На рис. 4.10 показано приклади оптичних систем лінзових мікрооб'єктивів.

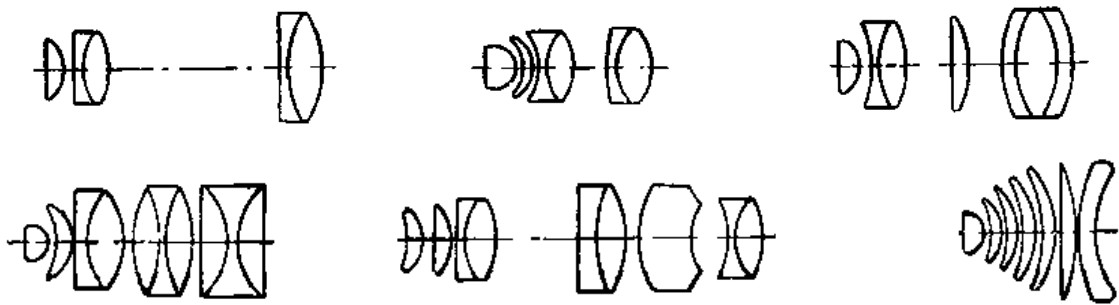


Рис. 14.10. Приклади оптичних систем лінзових мікрооб'єктивів

Дзеркальні оптичні системи мікрооб'єктивів використовуються лише в тих випадках, коли потрібно забезпечувати функціонування у широкому спектральному діапазоні від ультрафіолетового до далекого інфрачервоного при відсутності хроматичних аберацій. На рис. 14.11 продемонстровано чисто дзеркальний мікрооб'єктив, що працює в спектральному діапазоні від 0.2 до 15 мкм без додаткового перефокусування мікроскопа відносно предметної площини.

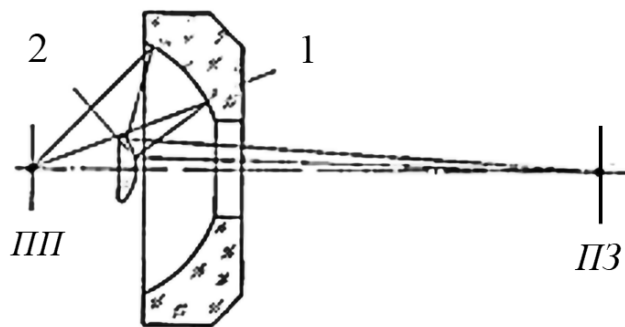


Рис. 14.11. Дзеркальний мікрооб'єктив: 1 – увігнуте дзеркало, 2 – опукле дзеркало, ПП – площина предметів, ПЗ – площина зображень



### 14.3.2. Окуляри мікроскопів

Найбільш вживаним окуляром мікроскопів є окуляр Гюйгенса. Він має у своєму складі дві опукло-пласкі лінзи, повернуті опуклою поверхнею до об'єктива мікроскопа, рис. 14.12.

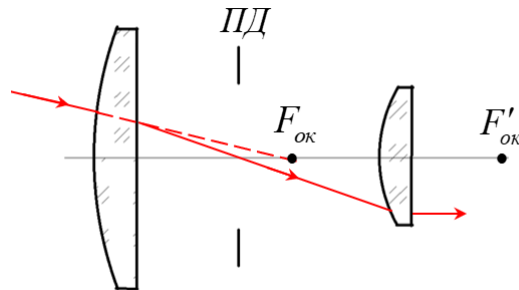


Рис. 14.12. Окуляр Гюйгенса: ПД – польова діафрагма

Особливістю цього окуляра є те, що його передній фокус  $F_{ок}$  знаходиться між лінзами, а осьова точка польової діафрагми, через яку проходить заломлений на першій лінзі промінь, є суміщеною з переднім фокусом другої лінзи. Тому цей промінь виходить з окуляра паралельно оптичній осі.

Незважаючи на простоту системи, цей окуляр гарно виправлений на хроматизм та монохроматичні аберації, тому він забезпечує достатньо високу якість зображення.

Розташування переднього фокусу окуляра між лінзами дає можливість між ними розташувати пластину з перехрестям, шкалою, сіткою, потрібну для позиціонування приладу та для вимірювань. Недоліком цього окуляру є невелике поле зору до  $30^\circ$ .

Крім окуляра Гюйгенса в мікроскопах використовують також окуляри, представлені в табл. 13.1, а також гомали – окуляри з від'ємною оптичною силою, рис. 14.13.

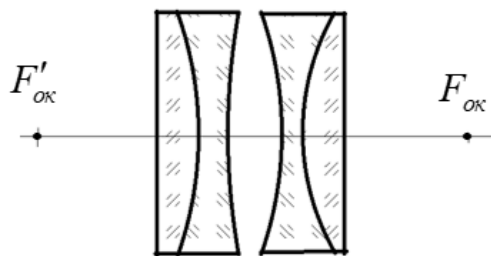


Рис. 14.13. Окуляр типу гомал

### 14.3.3. Тубус мікроскопа

Найпростішою конструкцією тубуса мікроскопа є трубка, рис. 14.14, на яку з однієї сторони на різьбі загвинчується об'єктив, а з другого кінця вставляється окуляр. Довжина тубуса є стандартною 160 мм (іноді 190 мм). Конструкція об'єктивів і окулярів зроблена так, щоб їх заміна не потребувала зсуву мікроскопа відносно площини предметів, тобто не потребувалось перефокусування мікроскопа.

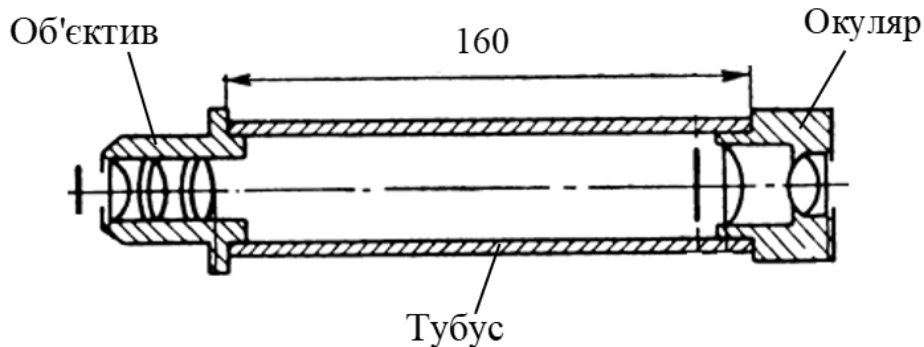


Рис. 14.14. Найпростіша складальна схема мікроскопа.

Якщо тубус не може бути виконаним у вигляді трубки, то при іншій конструкції дистанція 160 мм все одно повинна бути збереженою.

В деяких мікроскопах використовуються мікрооб'єктиви, які спроектовані для формування зображення ПП на безкінечності. Тоді за таким об'єктивом в тубусі встановлюється тубусна лінза, у фокальній площині якої опиняється зображення предмету. З цим зображенням суміщається передня фокальна площина окуляра. Тубусна лінза разом з окуляром по суті є телескопічною системою – зоровою трубою. В такому випадку довжину тубуса називають безкінечною.

### 14.3.4. Позначення на серійних об'єктивах та окулярах

При виробництві об'єктивів і окулярів мікроскопів на їх корпусах наносять деякі оптичні параметри. На рис. 14.15 показано типовий зовнішній вигляд мікрооб'єктивів.



Мікрооб'єктив:  
 лінійне збільшення  $\beta = 20\times$   
 числова апертура  $A = 0.4$   
 довжина тубуса 160 мм  
 товщина покривного скла 0.17 мм



Мікрооб'єктив:  
 лінійне збільшення  $\beta = 10\times$   
 числова апертура  $A = 0.25$   
 довжина тубуса  $\infty$   
 товщина покривного скла 0.17 мм

Рис. 14.15. Типовий зовнішній вигляд мікрооб'єктивів

Покривним склом є плоско-паралельна пластина, виготовлена із оптичного скла К8 або ВК7 і призначена для роботи з біологічними об'єктами, які вона притискає до предметного стола у вигляді прозорої скляної пластини з набагато більшою товщиною. Через цю пластину проходить світло з метою освітлення на просвіт тонкого зрізу біоматеріалу. Товщина покривного скла стандартна 0.17 мм, яка враховується при абераційному синтезі мікрооб'єктива.

Типовий вигляд окуляра мікроскопа показано на рис. 14.16. Маркування на верхньому торці  $10\times$  означає видиме збільшення  $\Gamma_{ок}$ .

Якщо перед цифрою стоїть буква К, наприклад К10 $\times$ , то це означає, що окуляр – компенсаційний.

Такий окуляр компенсує залишковий хроматизм ахроматизованого мікрооб'єктивів.

З компенсаційним окуляром краще робити цифрову фотографію при суміщенні вхідної зіниці об'єктива фотоапарата з вихідною зіницею мікроскопа. Фотографування можна робити фотоапаратом, вбудованим в мобільний телефон.



Рис. 14.16. Окуляр Гюйгенса

Якщо на окулярі додатково стоїть маркування /18, наприклад, K10×/18, то це означає, що окуляр має діаметр польової діафрагми 18 мм.

Діаметр польової діафрагми окуляра та його видиме збільшення поєднують в параметрі, який називають **окулярним числом**. Цей параметр дорівнює добутку діаметра польової діафрагми та видимого збільшення. Окулярне число опосередковано відображає кут поля зору окуляра. Окулярне число по суті це діаметр спостережної зони у віртуальній площині, розташованій на відстані 250 мм від ока. Так окуляр з видимим збільшенням  $\Gamma_{ок} = 10$  та діаметром польової діафрагми  $\varnothing_{пд} = 20$  мм має окулярне число:

$$\text{Ок. число} = \Gamma_{ок} \cdot \varnothing_{пд} = 10 \cdot 20 = 200 \text{ мм.}$$

Цей параметр більше використовується для оцінки комфорту спостереження оком зображення, сформованого окуляром як лупою.

Додаткову інформацію щодо устрою, параметрів та характеристик мікроскопів спеціального призначення можна знайти в роботі [11].

## РОЗДІЛ 15. ПРОЕКЦІЙНІ ОПТИЧНІ СИСТЕМИ

Проекційні оптичні системи відносяться до класу 11, в яких предмет та його зображення знаходяться на кінцевій відстані від самої проекційної оптичної системи.

Площиною предметів проекційних систем є прозорі слайди, комп'ютерно керовані прозорі рідкокристалічні транспаранти, інформаційні світлодіодні матриці, непрозорі деталі та інше.

Площиною зображень проекційних систем є матові скляні екрани, кіноекрани, фотопластини, фотоплівки, матричні фотоприймачі типу приладів із зарядовим зв'язком (ПЗЗ), або комплементарні метал-оксидні напівпровідникові (КМОП) матриці.

Основні функції проекційних систем:

- візуалізація в зручному масштабі інформації, яка міститься на носіях;
- перенесення оптичної інформації з одного носія на інший.

Проекційна оптична система має в своєму складі лише три елементи:

- носій інформації, який сам випромінює (світлодіодна матриця) або пропускає через себе (прозорий слайд) чи відбиває стороннє світло;
- проекційний об'єктив;
- елемент відображення інформації (екран) чи пристрій її збереження (фотоматеріал на плівці чи на скляній пластині)).

На рис. 15.1 показані оптичні проекційні системи для трьох випадків.

На схемі рис. 15.1, *а* показана проекційна система, в якій предметом слугує зверху яскрава світлодіодна матриця, яка відображає тексти, рисунки, фотографії навіть в кольоровому форматі. Така схема має місце, наприклад, в комп'ютерних проекторах.

Схема рис. 15.1, *б* демонструє так звану **діапроекційну оптичну систему**, яка утворює на екрані зображення прозорих слайдів чи керованих транспарантів. В цій схемі використовується освітлювальна система площини предметів, складена з джерела випромінювання та лінзового чи дзеркального конденсора. Прилади, в яких використовується така система, називаються **діапроекторами** або **кодоскопами**.

Якщо предмет непрозорий (лист паперу з текстом, механічна деталь) то для його освітлення використовуються додаткові джерела

світла, що розсіюється на предметі, рис. 15.1, в. Сама оптична система називається **епіпроекційною**, а прилад, де вона використовується, має назву **епіпроектор**.

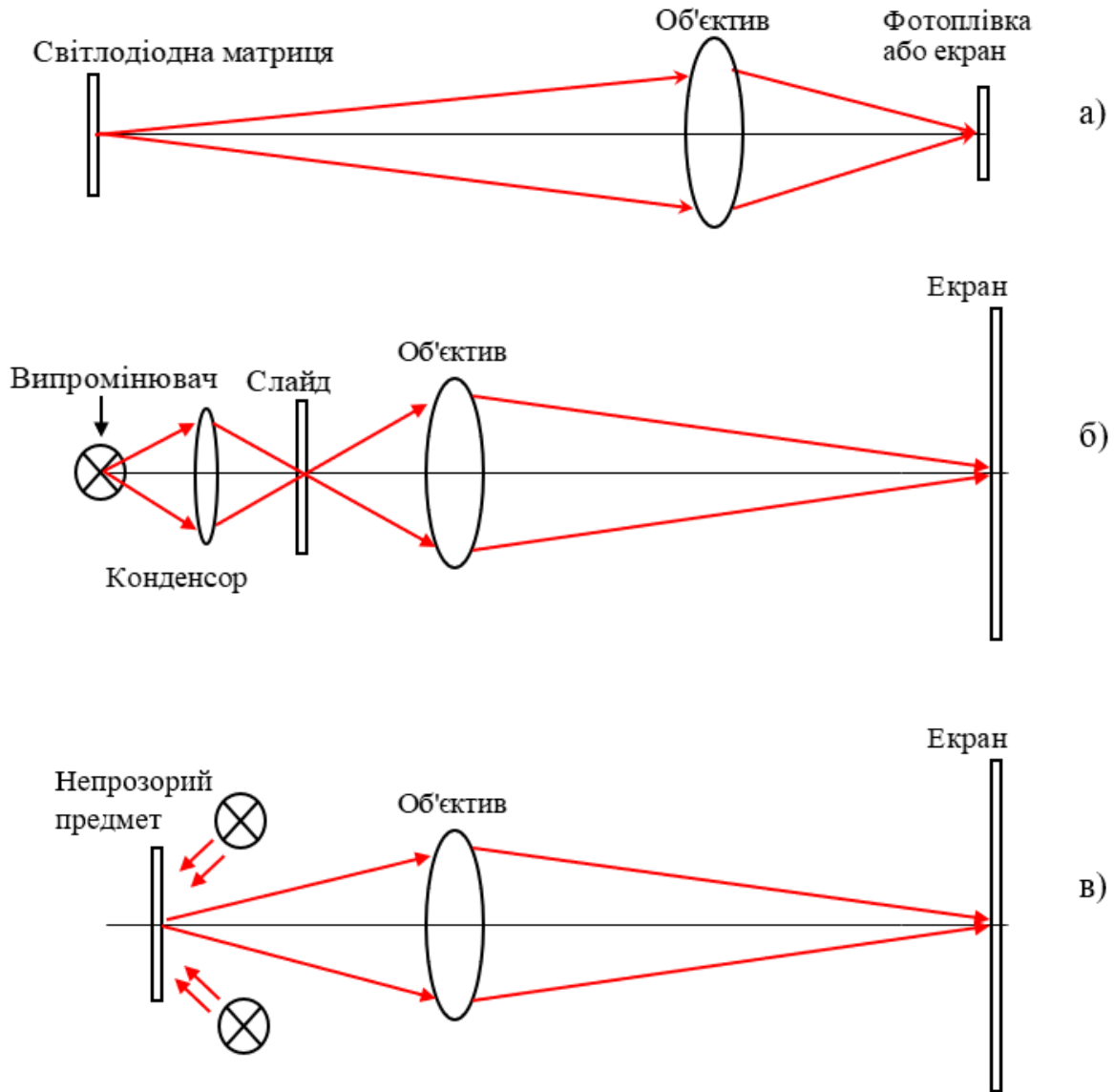


Рис. 15.1. Проекційні оптичні системи: а – предмет – випромінювальний; б – предмет прозорий опромінюється на просвіт; в – предмет непрозорий і опромінюється з відбивання і розсіюванням світла

## 15.1. Основні функціональні параметри проекційних систем

- проекційна довжина;
- лінійне збільшення зображення;
- освітленість екрану в зонах на оптичній осі і на периферії;
- розміри поля зору в площині предметів або в площині зображень.

**Проекційна довжина** – це відстань  $l$  між площиною предметів ПП (слайд, транспарант, світлодіодна матриця) і площиною зображень ПЗ (екран, матове скло, матричний фотоприймач) рис. 15.2. При габаритних розрахунках проекційної системи проекційну довжину, як правило, задають в технічному завданні. Згідно рисунку

$$l = -a + a' . \quad (15.1)$$

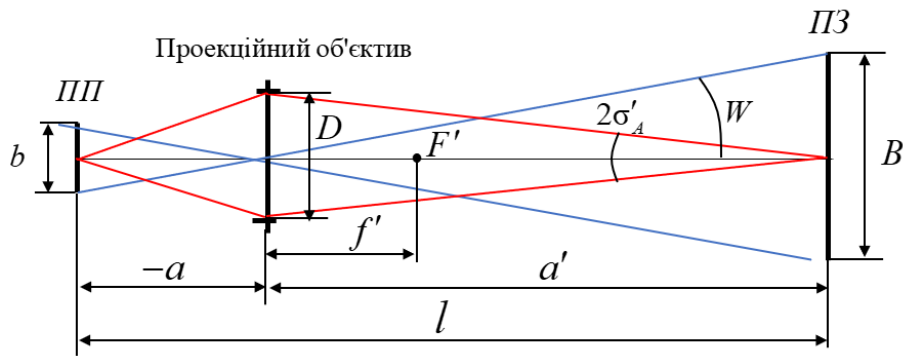


Рис. 15.2. До габаритного розрахунку проекційної оптичної системи

**Лінійне збільшення** проекційної системи  $\beta$  – відношення розміру зображення  $B$  до оптично спряженого розміру  $b$  в площині предметів. Оскільки проекційний об'єктив формує дійсне, але перевернуте зображення предмету, то лінійне збільшення має від'ємне значення:

$$\beta = -\frac{B}{b} . \quad (15.2)$$

### Освітленість в осьовій і периферійних точках площини зображень

Освітленість в осьовій точці ПЗ можна розрахувати за формулами (11.42), (11.49), (11.50).

При  $n_{p+1} = n_1$ :

згідно (11.41):

$$E_0 = \pi \tau_{oc} L \sin^2 \sigma'_A ;$$

згідно (11.48):

$$E_0 = \frac{\pi}{4} \tau_{oc} \left( \frac{D}{f'} \right)^2 \frac{\beta_3^2}{(\beta_3 - \beta)^2} L;$$

згідно (11.49):

$$E_0 = \frac{\pi}{4} \tau_{oc} \left( \frac{D}{f'} \right)^2 \frac{1}{(1 - \beta)^2} L,$$

де  $\tau_{oc}$  – коефіцієнт світлопропускання проєкційного об'єктива;  $L$  – яскравість в площині предметів;  $\frac{D}{f'}$  – відносний отвір проєкційного об'єктива;  $\beta_3$  – лінійне збільшення в оптично спряжених площинах вихідної та вхідної зіниці проєкційного об'єктива;  $2\sigma'_A$  – задній апертурний кут проєкційного об'єктива.

Більш точний результат розрахунку  $E_0$  дає формула (11.41). Якщо відоме значення  $\beta_3$ , то для розрахунку можна використовувати формулу (11.48).

При відсутності даних про  $\beta_3$  годиться для розрахунку формула (11.49), але при цьому потрібно розуміти, що вона дає наближений результат.

Розрахунок освітленості в периферійних точках ПЗ можна здійснити за формулою (11.43)

$$E_W = E_0 k_Q(W) \cos^4 W, \quad (15.3)$$

в якій кут  $W$  відображений на рис. 15.2,  $k_Q(W)$  – залежний від кута  $W$  коефіцієнт він'єтування позаосьового пучка променів.

### **Розміри поля зору проєкційної системи**

В проєкційній системі завжди присутня польова діафрагма. Вона знаходиться або в площині предметів, або в площині зображень.

В площині предметів функції польової діафрагми виконує або кадрове вікно слайда, або межі робочої зони транспаранта чи межі робочої зони світлодіодного індикатора.

В площині зображень польовою діафрагмою можуть бути краї екрану, або краї кадрової рамки фотоплівки, або краї світлочутливої зони матричного фотоприймача.



З наведеного витікає, що полем зору в площині предметів чи в площині зображень є отвір самої польової діафрагми.

## 15.2. Освітлювальна підсистема проєкційних систем

В площині предмету проєкційних систем можуть знаходитися прозорі слайди, прозорі транспаранти, прозорі пластини з нанесеними на них рисунками.

В такому випадку площину предметів потрібно освітлювати сторонніми джерелами світла – лампами розжарювання, світлодіодами. Для цього в проєкційних системах використовують лінзові конденсори, сферичні або еліпсоїдні дзеркала. При цьому використовується одна із схем:

- з проєкцією конденсором випромінювального тіла випромінювача в площину предметів, рис. 15.3, а;
- з проєкцією конденсором випромінювального тіла випромінювача в площину вхідної зіниці проєкційного об'єктиву, рис. 15.3, б.

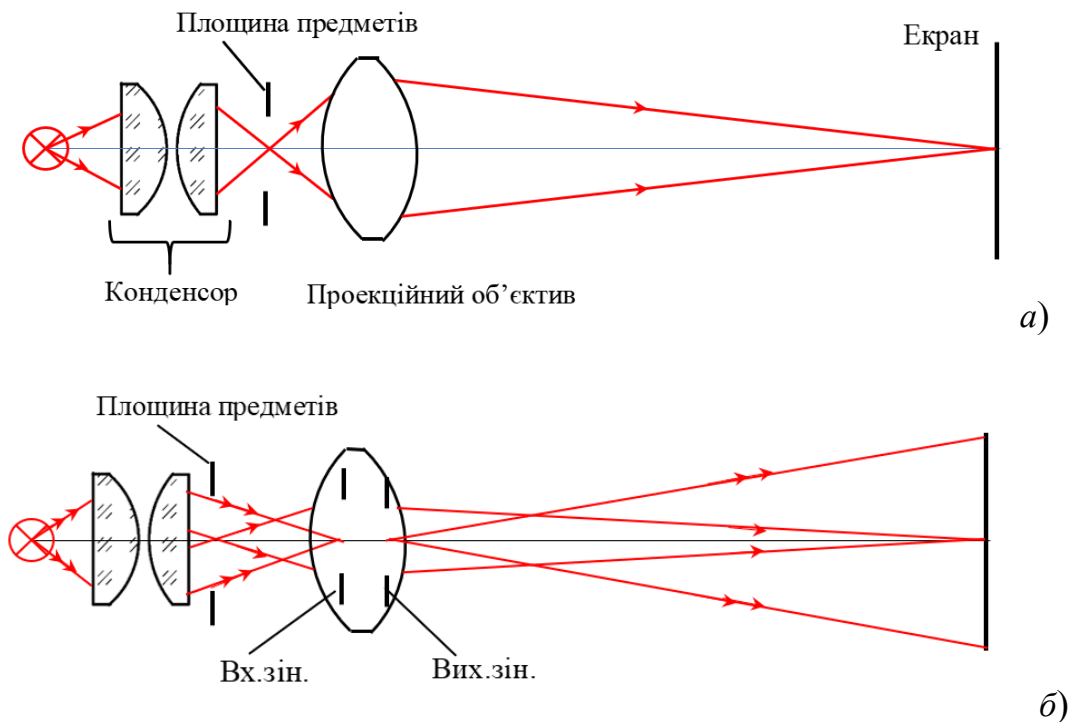


Рис. 15.3. Оптичні системи діапроекторів:

- а – з проєкцією випромінювального тіла в площину предметів;
- б – з проєкцією випромінювального тіла в площину вхідної зіниці проєкційного об'єктиву

Схема на рис. 15.3, *a* забезпечує більшу освітленість слайду в площині предмету і це її перевага. Але недолік схеми полягає у накладанні зображення випромінювального тіла на зображення слайду, що призводить до нерівномірної освітленості зображення слайда на екрані. Якщо, наприклад, випромінювачем слугує лампа розжарювання із спіральною ниттю, то накладання її зображення на слайд є недопустимим.

В схемі на рис. 15.3, *б* площина предметів розташована майже впритул до конденсора, що суттєво підвищує рівномірність освітлення слайду. Але при цьому для збереження того ж рівня освітленості площини зображень, яку дає схема на рис. 15.3, *a*, потрібне повне заповнення отвору вхідної зіниці об'єктиву зображенням випромінювального тіла. В протилежному випадку освітленість зображення на екрані стане помітно меншою.

### 15.3. Габаритний розрахунок проекційної оптичної системи

Вихідними даними для габаритного розрахунку проекційної системи, як правило є [12; 13]:

- проекційна довжина  $l$ ;
- розміри слайду  $x \times y$  і розміри екрану  $X \times Y$  або лінійне збільшення  $\beta$  зображення;
- потрібна освітленість осьової точки екрану  $E_0$ ;
- яскравість в площині слайду  $L$ ;
- допустиме значення коефіцієнту світлопропускання об'єктиву  $\tau_{oc}$ .

В результаті габаритного розрахунку потрібно визначити:

- фокусну відстань проекційного об'єктиву;
- положення об'єктиву між слайдом і екраном;
- діаметр вхідної зіниці об'єктиву.

Порядок виконання габаритного розрахунку покажемо на прикладі розв'язання завдання 15.1.

**Завдання 15.1.** Здійснити габаритний розрахунок проекційної системи при наступних вихідних даних:

- проекційна відстань між слайдом і екраном 2000 мм;
- розмір слайду 24x36 мм;
- розмір екрану 1.2x1.8 м;

- освітленість екрану на оптичній осі 100 Лк;
- яскравість в площині слайду  $4 \cdot 10^6$  ніт ,
- $\tau_{oc} = 0.7$  .

**Розв’язання.**

1. Розрахунок положення проєкційного об’єктива між слайдом і екраном:

Складається система рівнянь з використанням формул ідеальної оптичної системи в припущенні, що об’єктив є безкінечно тонкий. Згідно рис. 15.2

$$\begin{cases} -a + a' = l \\ \frac{a'}{a} = \beta \end{cases} ,$$

де  $\beta = -\frac{X}{x}$  або  $\beta = -\frac{Y}{y}$ . З двох значень обирається менше, якщо прямокутні границі слайду і екрану не є подібними фігурами.

Якщо з вихідних даних обидві формули розрахунку  $\beta$  дають однаковий результат, це свідчить про подібність заданих прямокутних габаритів слайду і екрану, тоді:

$$\beta = -\frac{X}{x} = -\frac{Y}{y} = -\frac{1200}{24} = -50 .$$

Із розв’язання системи рівнянь відносно невідомих  $a$  і  $a'$

$$\begin{cases} -a + a' = l \\ \frac{a'}{a} = \beta \end{cases}$$

маємо:  $a = -39.215$ мм,  $a' = 1960.78$ мм .

2. Розрахунок задньої фокусної відстані об’єктиву:

Отримані в. п. 1 відрізки дозволяють розрахувати задню фокусну відстань об’єктиву, за допомогою формули Гауса, з якої

$$f' = \frac{a \cdot a'}{a - a'} = \frac{-39.215 \cdot 1960.78}{-39.215 - 1960.78} = 38.45 \text{мм} .$$

3. Розрахунок відносного отвору і діаметру вхідної зіниці об’єктива:

Оскільки об’єктив вважається тонким то лінійне збільшення в зіницях  $\beta_z = 1$  і для розрахунку відносного отвору можна викорис-

товувати формулу (11.49), з якої  $E_0 = \frac{\pi}{4} \tau_{oc} \left( \frac{D}{f'} \right)^2 \frac{1}{(1-\beta)^2} L$ , а відносний отвір

$$\frac{D}{f'} = 2(1-\beta) \sqrt{\frac{E_0}{\pi \tau_{oc} L}} = 2(1+50) \sqrt{\frac{100}{3.1416 \cdot 0.7 \cdot 4000000}} = 0.344.$$

При цьому діаметр вхідної зіниці  $D = f' \cdot \frac{D}{f'} =$

$$= 38.45 \cdot 0.344 = 13.23 \text{ мм}$$

**Примітка:** В тому випадку, коли слайд освітлюється за допомогою конденсора, то його оптична система розраховується як проєкційна система. Залежно від вибору системи освітлення (рис. 15.3, *a*) чи (рис.15.3, *б*) площиною зображень конденсора слід для першої системи обирати кадрову рамку слайду, а для другої системи – отвір вхідної зіниці проєкційного об'єктиву.

Кількість лінз конденсора залежить від його переднього апертурного кута. Методика розрахунку конструктивних параметрів оптичної системи лінзового конденсора викладена в [7] на стор. 115–116.

## РОЗДІЛ 16. ОПТИЧНІ СИСТЕМИ ОБ'ЄКТИВІВ

Об'єктив – оптична система, що призначена для формування дійсних зображень предметів, які знаходяться у просторі перед об'єктивом. Практично кожний оптичний прилад має свій об'єктив. Частина з них вже розглянута в розділах 13, 14, 15.

Функціональне призначення та умови використання і вимоги до оптичних параметрів впливають на структуру оптичних систем об'єктивів. В даному розділі будуть розглянуті тільки ті об'єктиви, які призначені для формування оптичних зображень на фоточутливих матеріалах, світлочутливих поверхнях матричних фотоелектричних приймачів з метою їх реєстрації та збереження на тривалі терміни.

За ознакою використання вище вказані об'єктиви розділяються на:

фотографічні, кінознімальні, аерофотознімальні, телевізійні, репродукційні, проєкційні, флюорографічні, астрофотографічні [14].

За ознакою робочого спектрального діапазону – для видимого діапазону, інфрачервоні, ультрафіолетові.

### 16.1. Основні функціональні параметри оптичних систем об'єктивів:

- задня фокусна відстань (просто фокусна відстань)  $f'$ ;
- поле зору  $2\omega$ ;
- відносний отвір  $D : f'$ ;
- діафрагмове число  $K = f' : D$ ;
- ефективне діафрагмове число  $K_{ef} = (f' : \tau D)$ ,

де

- $\tau$  – коефіцієнт світлопропускання оптичної системи об'єктива;
- просторова роздільна здатність в просторі предметів та в просторі зображень;
- глибина простору предметів  $T$ ;
- модуляційна передавальна функція МПФ, або частотно-контрастна характеристика (ЧКХ);
- кутова або лінійна просторова роздільна здатність.

### 16.1.1. Фокусна відстань і поле зору об'єктива

Задня фокусна відстань об'єктива  $f'$  – параметр, який впливає на розмір зображення або на розмір поля зору в просторі предметів. Якщо предмет має кутовий розмір  $\varphi$ , то розмір його зображення у фокальній площині об'єктива при невеликих значеннях кута в радіанах, рис. 16.1, можна розрахувати за формулою:

$$y = \varphi f', \quad (16.1)$$

або за точною формулою:

$$y = 2f' \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}. \quad (16.2)$$

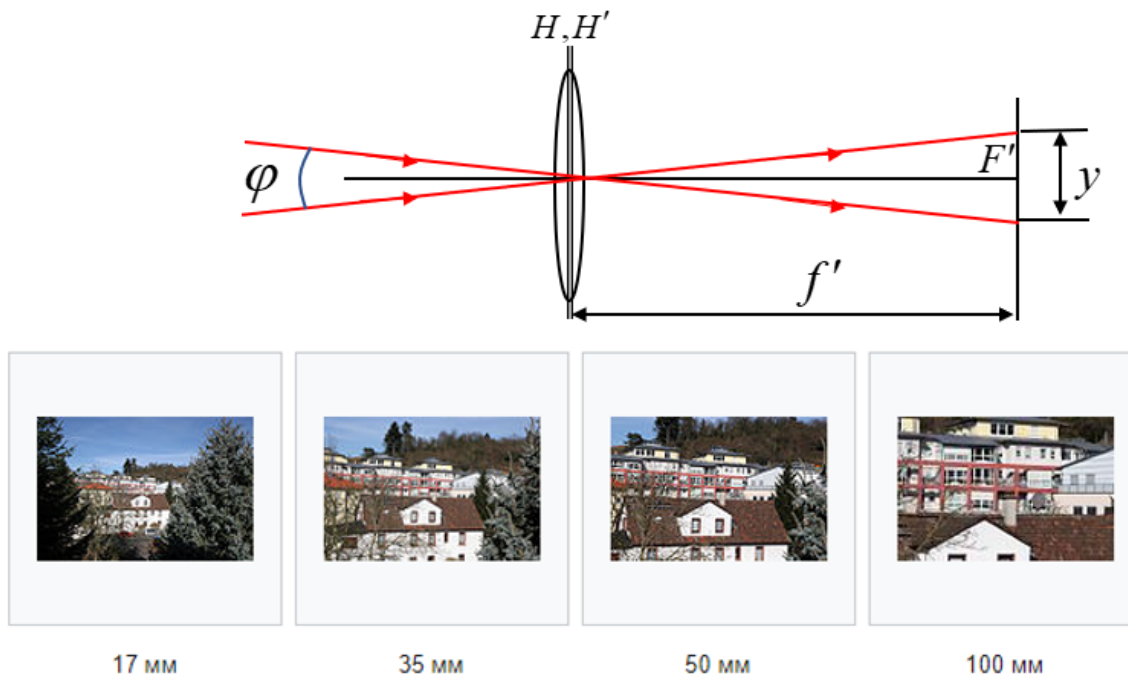


Рис. 16.1. Знімки з одного місця при різних вказаних фокусних відстанях об'єктива

З рис. 16.1 видно, що чим більшою у об'єктива фокусна відстань, тим більшим є масштаб зображення. Але коли польова діафрагма фотоапарата має фіксований розмір (рамка кадрового вікна на фотоплівки, межі світлочутливої зони фотоприймача зображень) то в такому разі кутове поле зору фотоапарата в просторі предметів

$$2\omega[\text{рад}] \approx \frac{d}{f'}, \quad (16.3)$$

або за точною формулою

$$2\omega = 2\arctg \frac{d}{2f'}, \quad (16.4)$$

де  $d$  – діагональ прямокутної польової діафрагми або діаметр круглого отвору польової діафрагми.

Із формул (16.3), (6.4) витікає, що кутовий розмір поля зору  $2\omega$  зменшується зворотно пропорційно фокусній відстані, фото на рис. 16.1.

### 16.1.2. Відносний отвір об'єктива, діафрагмове число

Освітленість осьової точки площини зображень, згідно формул (11.49) – (11.51), пропорційна  $(D:f')^2$ . Чим більшим є значення відносного отвору, тим меншим при фотографуванні може бути час фотоекспозиції або час накопичення електричного заряду в фотоприймачах зображень. Тому цей важливий параметр відображають на зовнішньому кільці, яке дозволяє вручну регулювати діаметр апертурної діафрагми об'єктивів фотоапаратів та інших об'єктивів і тим самим змінювати відносний отвір, впливаючи на час експозиції кадру. Відносний отвір на об'єктиві відображають через зворотне значення – діафрагмове число  $K=(f':D)$ , яке забезпечує більш зручну цілочислову шкалу.

Оскільки на освітленість в площині зображень, а значить і на час експозиції, впливає також  $\tau$ –коефіцієнт світлопропускання об'єктива, суттєво залежний від структури оптичної системи, то вплив коефіцієнта  $\tau$  відображають через ефективний відносний отвір  $\tau D:f'$  або діафрагмове число  $K_{ef}=(f':\tau D)$ .

Для ефективних відносних отворів використовують числа: 1:0.7; 1:1; 1:1.4; 1:2; 1:2.8; 1:4; 1:2; 1:2.8; 1:4; 1:5.6; 1:8; 1:11; 1:16; 1:22; 1:32; 1:64. Перехід від одного відносного отвору до сусіднього змінює освітленість зображення вдвоє.

### 16.1.3. Глибина простору предметів

Глибина простору предметів (ГПП) у об'єктива обмежується двома площинами, між якими всі предметні точки мають зображення у площині реєстратора (фотоплівка, матричний фотоприймач) допустимої якості.

На рис. 16.2 показано об'єктив, сфокусований на конкретну площину предметів. Вона має назву основний план або площина наводки. Справа та зліва від основного плану знаходяться площини – задній план та передній план. Зображення цих трьох вказаних планів згідно формули Ньютона або формули Гауса знаходяться вздовж оптичної осі в різних місцях. Зображення осьових точок заднього і переднього планів дефокусовані відносно зображення основного плану на дистанцію  $\Delta$ . Якщо нехтувати аберациями об'єктива, або мати об'єктив з гарно виправленими аберациями, то діаметри плям в  $\emptyset$  від дефокусування  $\Delta$  визначаються за формулою

$$\emptyset = 2\Delta \cdot \operatorname{tg}\sigma'_A, \quad (16.5)$$

де  $\Delta$  – зсув зображення заднього або переднього плану відносно зображення основного плану,  $\emptyset$  – діаметр плями від дефокусування зображення, апертурний кут  $2\sigma'_A$  на всіх трьох схемах є практично однаковим через малі значення  $\Delta$ .

**Глибиною простору предметів** буде все те, що знаходиться між площинами  $\Pi_{II}$  і  $\Pi_{III}$  при умові, що значення  $\emptyset$  не виходить за межі допустимого.

Допустиме значення  $\emptyset$  визначається з урахуванням розмірів фоточутливих елементів приймача зображень. Так для світлочутливих фотоматеріалів значення  $\emptyset$  визначається із розмірів зерна, оскільки розміри зерна є різними, залежними від світлочутливості фотоматеріалу. Так у більш світлочутливих фотоматеріалів зерна є більшими за розмірами у порівнянні із зернами менш світлочутливого фотоматеріалу.

Те саме стосується матричних фотоприймачів. Ідеально сфокусоване на фотоприймачі зображення точки і розмите дефокусуванням зображення точки у вигляді плями сприймаються фотоприймачем як однакові за розмірами, якщо розмите зображення точки не виходить за межі одного пікселя фотоприймача.

Для пошуку відрізків  $z_{II}$  та  $z_3$ , що вказують положення  $\Pi_{II}$  та  $\Pi_{III}$  і межі ГПП скористуємось формулою Ньютона (7.7), з якої

$$z'_O = -\frac{f'^2}{z_O}; \quad z'_{II} = -\frac{f'^2}{z_{II}}; \quad z'_3 = -\frac{f'^2}{z_3},$$

де  $f'$  – задня фокусна відстань об'єктива.



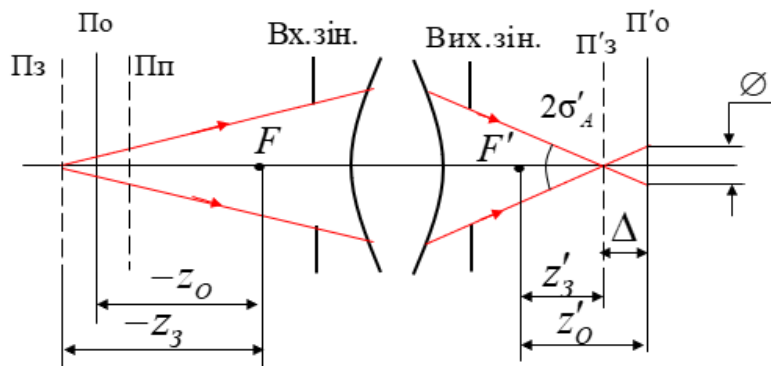
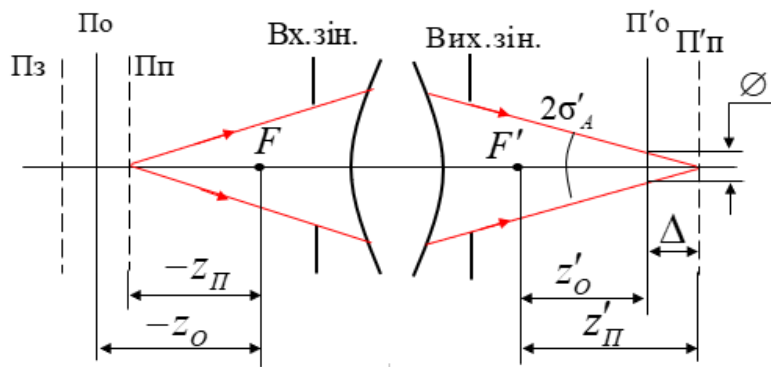
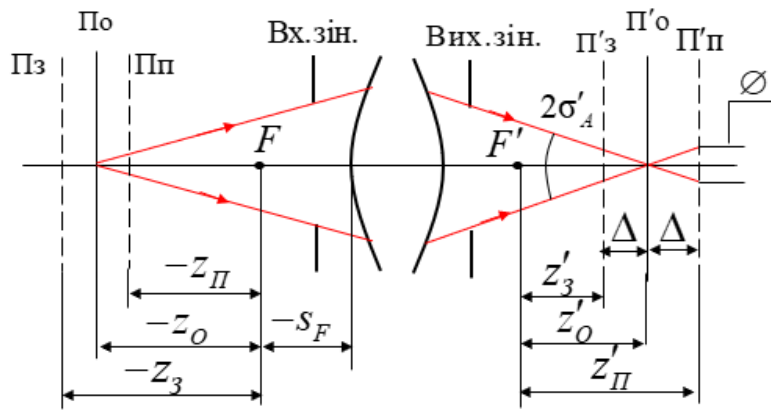


Рис. 16.2. До визначення глибини простору предметів об'єктива:  
 $\Pi_0$  – основний план;  $\Pi_{II}$  – передній план;  $\Pi_3$  – задній план;  $\Pi'_0$  – зображення  
 основного плану;  $\Pi'_{II}$  – зображення переднього плану;  
 $\Pi'_3$  – зображення заднього плану

Оскільки допустиме дефокусування зображення згідно (16.5)

$\Delta = \frac{\varnothing}{2tg \sigma'_A}$ , то глибина простору предметів визначається з рівнянь:

$$z'_{II} - z'_0 = \Delta = \frac{\varnothing}{2tg \sigma'_A} \quad \text{і} \quad z'_0 - z'_3 = \Delta = \frac{\varnothing}{2tg \sigma'_A},$$

з яких

$$-f'^2 \left( \frac{1}{z_{II}} - \frac{1}{z_O} \right) = \frac{\emptyset}{2tg\sigma'_A}, \quad -f'^2 \left( \frac{1}{z_O} - \frac{1}{z_3} \right) = \frac{\emptyset}{2tg\sigma'_A},$$

або

$$\frac{1}{z_{II}} = \frac{1}{z_O} - \frac{\emptyset}{2f'^2 tg\sigma'_A}; \quad \frac{1}{z_3} = \frac{1}{z_O} + \frac{\emptyset}{2f'^2 tg\sigma'_A}.$$

Наведені вирази та дозволяють отримати формули розрахунку дистанцій  $z_{II}$  і  $z_3$ , якими визначаються межі глибини простору предметів.

$$z_{II} = \frac{z_O}{1 - \frac{\emptyset \cdot z_O}{2f'^2 tg\sigma'_A}}; \quad (16.6)$$

$$z_3 = \frac{z_O}{1 + \frac{\emptyset \cdot z_O}{2f'^2 tg\sigma'_A}}. \quad (16.7)$$

В розд. 11, п. 11.5 показано, що  $tg\sigma'_A = 0.5 \frac{D}{f'} \frac{\beta_3}{\beta_3 - \beta}$ . Тоді вирази (16.6) та (16.7) отримують наступний вигляд:

$$z_{II} = \frac{z_O}{1 - \frac{\emptyset \cdot z_O \cdot \beta_3}{KD^2 \beta_3 - \beta}}; \quad (16.8)$$

$$z_3 = \frac{z_O}{1 + \frac{\emptyset \cdot z_O \cdot \beta_3}{KD^2 \beta_3 - \beta}}, \quad (16.9)$$

де  $K = \frac{f'}{D}$  діафрагмове число,  $\beta_3$  – лінійне збільшення в зіницях об'єктиву,  $\beta$  – лінійне збільшення в оптично спряжених площинах  $P_O, P'_O$ , рис. 16.2.

У випадку, коли основний план знаходиться на безкінечності, задній теж знаходиться на безкінечності, а передній план знаходиться на відстані, що визначається за формулою (16.8) при  $\beta = 0$ :

$$z_{II\infty} = \lim_{z_O \rightarrow \infty} \frac{z_O}{1 - \frac{\emptyset \cdot z_O \cdot \beta_3}{KD^2 \beta_3 - \beta}} = -\frac{KD^2}{\emptyset} = -\frac{f'^2}{K\emptyset}. \quad (16.10)$$

План, що знаходиться від об'єктиву на відстані  $z_{\Pi\infty}$ , називають **гіперфокальним**. Але при такому розташуванні основного плану половина глибини простору предметів не використовується, бо задній план не може знаходитися за безкінечністю.

Щоб збільшити глибину простору предметів основний план потрібно пересунути на місце гіперфокального і тоді передній план опиняється перед основним на відстані удвічі коротшою за  $z_{\Pi\infty}$ , тобто

$$\boxed{\frac{z_{\Pi}}{z_{\Pi\infty}} = -\frac{KD^2}{2\emptyset} = -\frac{f'^2}{2K\emptyset}} \quad (16.11)$$

За рахунок цього глибина простору предметів удвічі збільшується. Відстань  $\overline{z_{\Pi}}$  називають **початком безкінечності** для об'єктива, тому що зображення всіх точок у просторі, який починається з цього плану і до безкінечності аналізатором (фотоплівкою, матричним фотоприймачем) будуть сприйматися однаково різко.

**Завдання 16.1.** При фотографуванні цифровим фотоапаратом план, на якому сфокусований об'єктів, знаходиться від передньої оптичної поверхні на відстані  $-2000$  мм. Передній фокальний відрізок об'єктиву  $s_F = -24$  мм. Фокусна відстань  $f' = 50$  мм. Лінійне збільшення в зіницях  $\beta_3 = 0.9$ . Діаметр вхідної зіниці  $D = 20$  мм. Піксель фотоприймача має розмір  $10\text{мкм} \times 10\text{мкм}$ . Яку глибину простору предметів забезпечує при цьому фотооб'єктив?

**Розв'язання.**

1. Основний план знаходиться на відстані від переднього фокусу  $F$  об'єктива на відстані

$$z_O = s_1 - s_F = -2000 - (-24) = -1976 \text{ мм.}$$

2. Лінійне збільшення зображення основного плану на світлочувливій поверхні фотоприймача визначається за формулою (7.4):

$$\beta = -\frac{f}{z_O} = -\frac{-50}{-1976} = -0,0253.$$

3. Діафрагмове число  $K = \frac{f'}{D} = \frac{50}{20} = 2.5$ .

4. Відстань від переднього фокусу об'єктиву до переднього плану згідно (16.8):

$$z_{II} = \frac{z_o}{1 - \frac{\varnothing \cdot z_o}{KD^2} \frac{\beta_3}{\beta_3 - \beta}} = \frac{-1976}{1 - \frac{10 \cdot 10^{-3} \cdot (-1976)}{5 \cdot 10^2} \frac{0.9}{0.9 - (-0.0253)}} = -1902.86 \text{ мм.}$$

5. Відстань від переднього фокусу об'єктиву до заднього плану згідно (16.9):

$$z_3 = \frac{z_o}{1 + \frac{\varnothing \cdot z_o}{KD^2} \frac{\beta_3}{\beta_3 - \beta}} = \frac{-1976}{1 + \frac{10 \cdot 10^{-3} \cdot (-1976)}{5 \cdot 10^2} \frac{0.9}{0.9 - (-0.0253)}} = -2054.99 \text{ мм.}$$

6. Глибина простору предметів становить

$$ГПП = z_{II} - z_3 = -1902.86 - (-2054.99) = 152.13 \text{ мм.}$$

#### 16.1.4. Модуляційна передавальна функція об'єктивів

Основна функція об'єктивів полягає у забезпеченні якісного зображення предметів, що знаходяться в їх полі зору.

Будь яку картину у площині предметів, на яку сфокусований об'єктив, можна розкласти на нескінчену кількість ґраток із синусоїдальним законом світлопропускання або синусоїдальним законом розподілу яскравості. Кожна така ґратка має конкретну періодичність – просторову частоту, та орієнтацію в декартовій системі координат. Розклад картини предмету на набір таких ґраток математично здійснюється за допомогою двомірного Фур'є-перетворення. Результат такого перетворення називають просторовим спектром.

Аберації оптичної системи разом з дифракцією спотворюють зображення ґраток, з яких складається картина у площині зображень. Через це окремі дрібні елементи простору предметів можуть бути істотно спотвореними навіть до їх повного зникнення в оптичному зображенні, рис. 16.3.

Щоб розібратися в тому, як спотворюється оптичне зображення оптичною системою, розглянемо спотворення зображення однієї окремої синусоїдальної ґратки.



Рис. 16.3. Результат спотворення оптичною системою зображення (справа) картини простору предметів (зліва)

На рис. 16.4 зліва показана одна ґратка із всіх, що належить просторовому спектру картини у площині предметів.

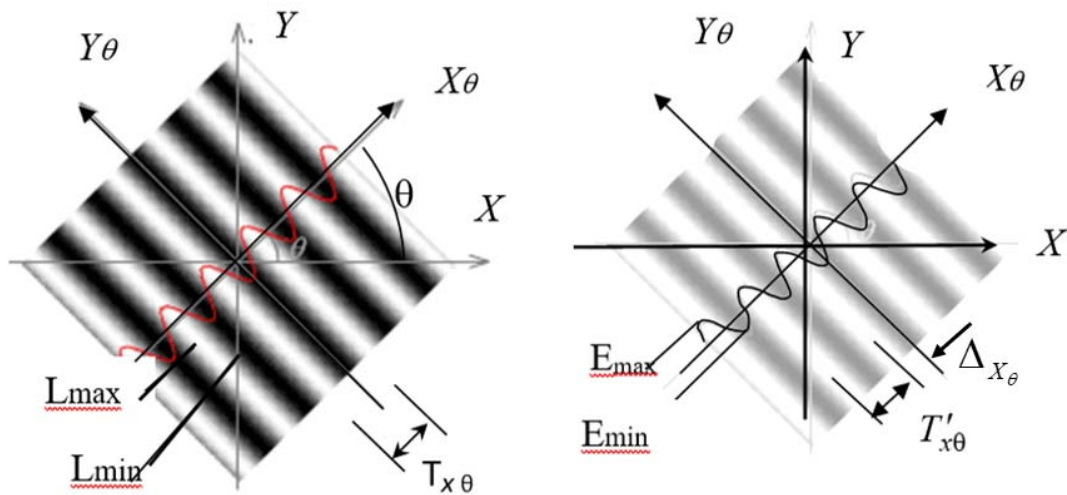


Рис. 16.4. Ґратка в площині предметів (зліва), зображення ґратки в площині зображень (справа)

Синусоїдальний розподіл яскравості в ній характеризується просторовим періодом  $T_{X\theta}$  вздовж осі  $OX_\theta$ , нахиленої до осі  $OX$  під кутом  $\theta$ , та контрастом

$$K_L = \frac{L_{\max} - L_{\min}}{L_{\max} + L_{\min}}.$$

Контраст є відношення амплітуди синусоїди, що описує розподіл яскравості  $\frac{L_{\max} - L_{\min}}{2}$  до середнього значення яскравості  $\frac{L_{\max} + L_{\min}}{2}$ .

Ясно, що максимальне значення контрасту має місце лише у випадку, коли  $L_{\min} = 0$ , тоді  $K_L = 1$ .

Синусоїдальний розподіл освітленості в зображенні ґратки характеризується просторовим періодом  $T'_{x\theta}$  вздовж осі  $OX_\theta$  та контрастом

$$K_E = \frac{E_{\max} - E_{\min}}{E_{\max} + E_{\min}}.$$

Період  $T'_{x\theta}$  пов'язаний з періодом  $T_{x\theta}$  через лінійне збільшення  $\beta$  в оптично спряжених ПП і ПЗ:  $T'_{x\theta} = \beta \cdot T_{x\theta}$ .

Відношення контрастів  $\frac{K_E}{K_L}$  показує наскільки змінюється контраст зображення ґратки по відношенню до її контрасту в площині предметів.

Виявляється, що відносний контраст  $\frac{K_E}{K_L}$  залежить від просторової частоти в площині предметів:  $N \left[ \frac{\text{ліні}}{\text{мм}} \right] = \frac{1}{T_{x\theta}}$ , або у площині зо-

бражень  $N' \left[ \frac{\text{ліні}}{\text{мм}} \right] = \frac{1}{T'_{x\theta}}$ , тобто від просторової частоти ґратки чи її зображення.

Ця залежність отримала назву **модуляційної передавальної функції (МПФ)**.

На практиці частіш використовують МПФ, аргументом якої є просторова частота в площині зображення

$$\text{МПФ}(N') = \frac{K_E(N')}{K_L(N')}.$$

МПФ раніш мала назву частотно-контрастної характеристики (ЧКХ) оптичної системи. У зв'язку з уніфікацією термінології її стали називати модуляційною передавальною функцією (МПФ), оскільки вона відображає залежність амплітуди переданого оптичною системою періодичного сигналу від його частоти.

Приклади графіків  $MПФ(N')$  показані на рис. 16.5. Як видно функція  $MПФ(N')$  монотонно зменшується із зростанням просторової частоти  $N'$ . Навіть у випадку повної відсутності абераційних спотворень в системі все ж через дію дифракції світлових хвиль на краях круглої апертурної діафрагми  $MПФ(N')$  зменшується, як показано графіком 1 на рис. 16.5.

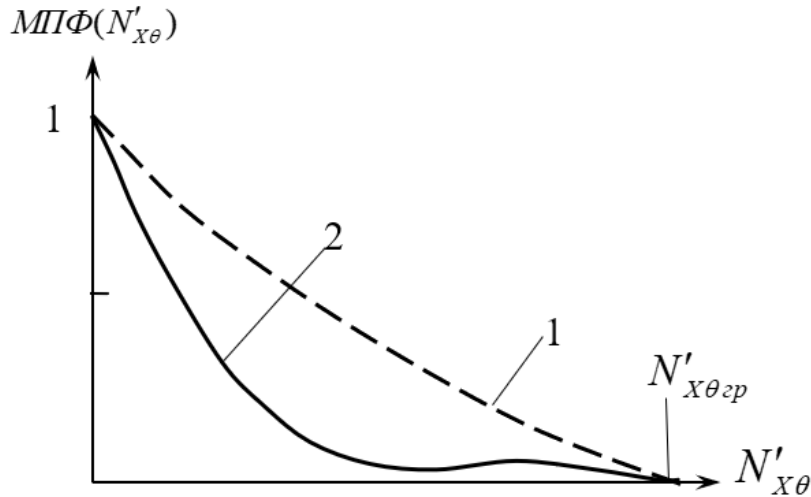


Рис. 16.5. Графіки  $MПФ(N')$  відносно осі  $OX$ , нахиленої на кут  $\theta$  до основної системи координат, належать: 1 – безабераційній оптичній системі, при обмеженні якості зображень дифракцією; 2 – абераційній оптичній системі

Чим більшими є абераційні спотворення, тим швидше зменшується контраст зображення періодичної ґратки із зростанням її просторової частоти.

Як видно з наведених графіків контраст зображення ґратки стає нульовим, тобто її зображення зовсім зникає, при **граничній просторовій частоті**  $N'_{x\theta_{gp}}$ . Ця просторова частота вказує межу просторової роздільної здатності оптичної системи об'єктиву. Дрібні елементи, просторовий спектр яких належить області за межами  $N'_{x\theta_{gp}}$ , в зображенні спостерігатися не будуть, оскільки зображенням ґратки, у якого  $N' > N'_{gp}$ , є рівномірне опромінене поле.

Через таку поведінку  $MПФ(N')$  оптичну систему називають фільтром нижніх просторових частот, розуміючи під цим, що оптична система здатна формувати зображення лише тих предметів,

просторовий спектр яких знаходиться в обмеженому діапазоні нижніх просторових частот.

При оцінці якості зображень той об'єктив, що має більшу граничну просторову частоту і більш високі значення  $M\Phi(N')$  на конкретних просторових частотах, вважається таким, що забезпечує вищу якість зображень.

Вигляд графіків  $M\Phi(N')$  істотно залежить від координат предметної точки в площині предметів (зображень), для якої визначається ця функція. Як правило, чим далі від осі розташована ця точка, тим швидше визначена для неї функція  $M\Phi(N')$  спадає до нуля, тим менші значення має для цієї точки  $N'_{x,y,\theta_{cp}}$ . Це свідчить про закономірне зменшення якості зображення периферійних зон площини зображень у порівнянні з осовою точкою.

## **16.2. Оптичні системи об'єктивів фото, кіно, телевізійної апаратури**

Структура оптичних систем об'єктивів значною мірою визначається розмірами їх поля зору, значенням відносного отвору або світлосили, потрібною просторовою роздільною здатністю, а також робочим спектральним діапазоном.

Чим більшим є поле зору об'єктиву, чим більшим є відносний отвір об'єктиву чи світлосила, чим вищими є вимоги до якості зображення, сформованого об'єктивом, тим складнішою є його оптична система.

За ознакою використаних оптичних елементів об'єктиви бувають лінзовими, дзеркальними та дзеркально-лінзовими.

За сталістю значення фокусної відстані об'єктиви розділяють на ті, що мають фіксовану фокусну відстань («фіксики») та варіо-об'єктиви із дискретно або плавно змінюваною фокусною відстанню – трансфокатори та панкратичні об'єктиви.

На даний час в світі існує величезна кількість об'єктивів, із фокусними відстанями від одиниць мм до декілька метрів, з полями зору від одиниць градусів до 200 градусів і більше, з відносними отворами від 1:20 до 1:0.5, для роботи в спектральному діапазоні від ультрафіолетового до далекого інфрачервоного. Загальною вимогою до об'єктивів є забезпечення високої роздільної здатності при допу-



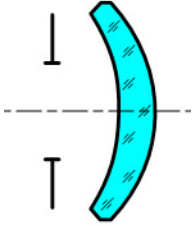
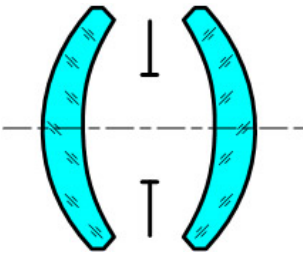
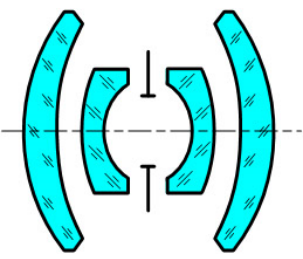
стимих геометричних спотворень зображень по полю зору. Високу роздільну здатність в широкому спектральному діапазоні при широких полях зору і значній світлосилі можуть забезпечувати тільки складні оптичні системи об'єктивів.

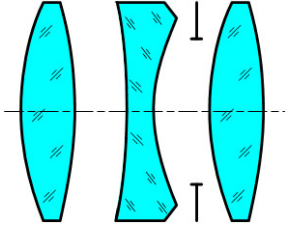
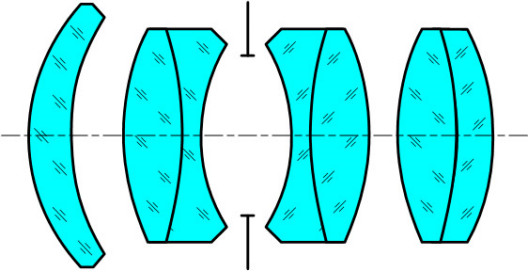
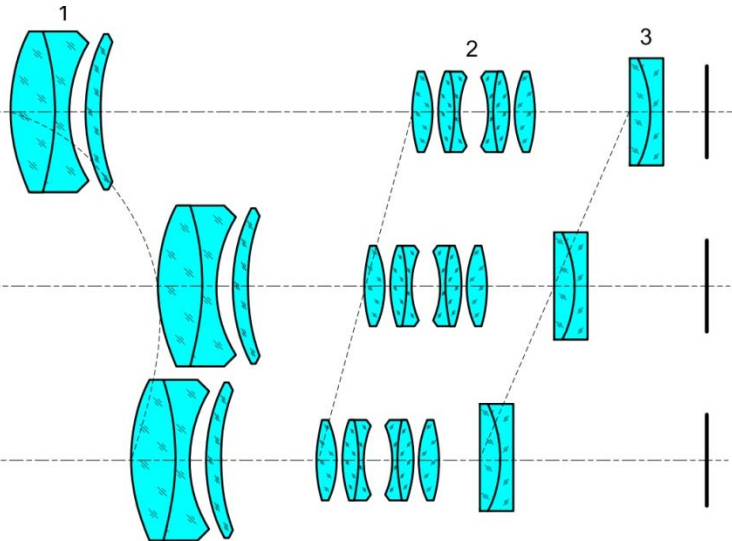
Складність оптичних систем істотно збільшується у варіо-об'єктивах, котрі здатні змінювати фокусну відстань з кратністю від одиниць до декілька десятків.

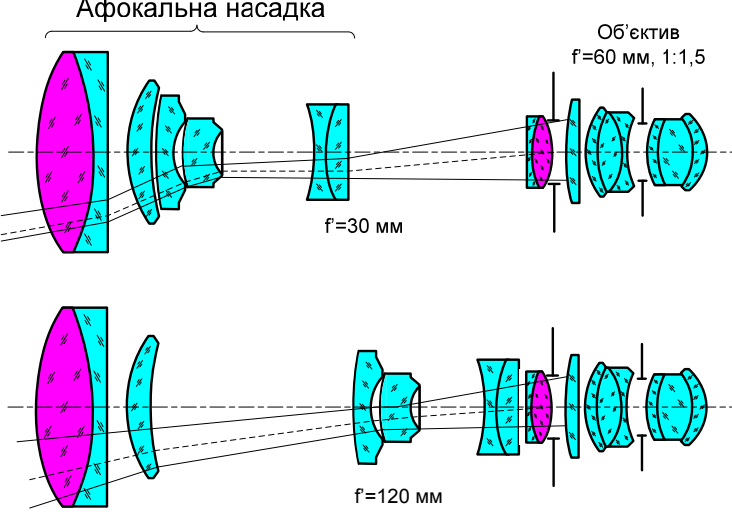
Для підтвердження цих положень в табл. 16.1 наведені приклади оптичних систем деяких історично перших відомих фотооб'єктивів.

Таблиця 16.1

Оптичні системи перших фотооб'єктивів

	Оптична система об'єктива	Кут поля зору	Відносний отвір	Примітка
1	 <p>Монокль</p>	15–20°	1:11	–
2	 <p>«Гіпергон»</p>	135°	1:20	–
3	 <p>«Оріон»</p>	75°	1:6	45...50 ліній/мм

4	 <p style="text-align: center;">Триплет</p>	60°	1:2.4	46 ЛІН/ММ
5	 <p style="text-align: center;">Біотар</p>	35°	1:2	—
6	 <p style="text-align: center;">Панкратичний варіооб'єктив «Кук-варо»</p>	від 48°  до 17°	від 1:3.5  до 1:5.6	зміна фокус- ної відс- тані від 40 до 120 мм

7	<p style="text-align: center;">Афокальна насадка</p>  <p style="text-align: center;">Об'єктив <math>f'=60</math> мм, 1:1,5</p> <p style="text-align: center;"><math>f=30</math> мм</p> <p style="text-align: center;"><math>f=120</math> мм</p> <p style="text-align: center;">Трансфокатор ТФК4</p>	<p>від</p> <p>49°</p> <p>до</p> <p>13°</p>	<p>1:2.8</p>	<p>зміна фоку- сної відс- тані від 30 до 120 мм</p>
---	---	--	--------------	---

## Контрольні запитання

### До розділу 1

1. Що є світло?
2. Хто першим створив теорію електромагнітних хвиль?
3. Хто першим експериментально підтвердив теорію електромагнітних хвиль?
4. Який діапазон довжин електромагнітних хвиль належить оптичному?
5. Що називають фронтом електромагнітної хвилі?
6. Що таке промінь?
7. Який пучок променів називають гомоцентричним?
8. Що таке корпускулярно-хвильовий дуалізм?

### До Розділу 2

1. Який напрямок променю прийнято вважати додатнім?
2. Який відрізок прийнято вважати додатнім?
3. Якщо наступна за номером поверхня знаходиться зліва від попередньої, який знак буде мати відстань між ними?
4. Як співвідносяться показники заломлення до і після дзеркальної поверхні?
5. Кут утворений оптичною віссю і нормаллю до поверхні. Яка з цих ліній є початком відліку кута?
6. Який знак куту дає обертання навколо вершини кута від початкової лінії кута до кінцевої лінії за часовою стрілкою?

### До Розділу 3

1. Чим відрізняються абсолютний і відносний показники заломлення оптичного середовища?
2. Чим відрізняються формулювання принципу Ферма у хвильовій оптиці і у геометричній оптиці?
3. Що таке промінь?
4. В якому випадку порушується закон прямолінійного розповсюдження світла і промінь не є прямою лінією?
5. Що таке оптична довжина променю?
6. В чому полягає закон заломлення променю?

7. Чи можна закон відбиття променю вважати окремим випадком закону заломлення?
8. Коли відбувається повне внутрішнє відбиття променю?

#### **До Розділу 4**

1. Що є простором предметів?
2. Що є простором зображень?
3. Що є зображенням точки?
4. Яке зображення точки є дійсним, а яке – уявним?
5. Чи обов'язковим простором предметів є простір перед оптичною системою?
6. Чи обов'язковим простором зображень є простір за оптичною системою?

#### **До Розділу 5**

1. Що таке оптична система?
2. Які оптичні системи називають центрованими, децентрованими і просторовими?
3. Що таке оптична вісь?
4. Що таке оптична поверхня?
5. Якими є назви поверхонь другого степеневого порядку?
6. Що таке дійсний промінь?
7. В чому полягають недоліки тригонометричних формул розрахунку ходу дійсного променю через оптичну поверхню, яка розділяє два оптичних середовища?

#### **До Розділу 6**

1. Що таке параксіальний промінь?
2. Які відрізки пов'язані формулою відрізків параксіального променю?
3. Які параметри параксіального променю пов'язує інваріант Лагранжа-Гельмгольца?
4. Що таке нульовий промінь?
5. Що таке кардинальні елементи оптичної поверхні чи оптичної системи?
6. Які точки називають головними, вузловими?
7. Які відрізки оптичної системи відносять до кардинальних?

8. Які площини оптичної системи відносять до кардинальних?
9. Як пов'язаний радіус сферичного дзеркала і його фокусна відстань?

### **До Розділу 7**

1. Яку оптичну систему можна вважати ідеальною?
2. Які відрізки пов'язує формула Ньютона?
3. Які відрізки пов'язує формула Гауса?
4. Що таке поперечне (лінійне) збільшення?
5. Яке значення поперечного (лінійного) збільшення властиве головним площинам оптичної системи?
6. Як співвідносяться передня і задня фокусна відстані оптичної системи?
7. Як співвідносяться передня і задня фокусна відстані оптичної поверхні?
8. Що таке діоптрія?
9. Що таке оптична сила оптичної системи?
10. Що таке кутове збільшення оптичної системи?
11. Що таке поздовжнє збільшення оптичної системи?
12. Як співвідносяться між собою поперечне, кутове і поздовжнє збільшення оптичної системи?
13. Що таке допоміжний промінь при графічному пошуку ходу заданого променя через оптичну поверхню чи систему?

### **До Розділу 8**

1. Що таке оптичний матеріал, яким вимогам він повинен відповідати?
2. Які оптичні матеріали використовують для побудови оптичних систем оптичних приладів?
3. Який оптичний матеріал є найбільш поширеним у використанні?
4. Які оптичні матеріали мають найменший коефіцієнт лінійного температурного розширення?
5. Чи можна оптичне скло використовувати для побудови оптичних систем для далекого інфрачервоного діапазону спектру?

## До Розділу 9

1. Що таке лінза та її функціональні параметри?
2. Що таке пласко-паралельна пластина та її функціональні параметри?
3. Чи порушує пласко-паралельна пластина гомоцентричність пучка променів?
4. Що таке призма, які типи призм використовують в оптичних приладах?
5. Що таке відбивальна призма?
6. Що таке обертальна призма чи система призм?
7. Як визначається осьова довжина дзеркальної розгортки призми?
8. Що таке редукована розгортка призми?
9. Типи дзеркальних поверхонь?
10. Що таке світловод?
11. Що таке фокон?
12. Що таке волоконна шайба?

## До Розділу 10

1. Що називають діафрагмами оптичної системи?
2. Які типи діафрагм існують в оптичних системах?
3. На що впливають в оптичних системах діафрагми?
4. В чому полягають властивості апертурної діафрагми?
5. В чому полягають властивості польової діафрагми?
6. В чому полягають властивості віньєтної діафрагми?
7. Що таке вхідна (вихідна) зіниці оптичної системи?
8. Що таке поле зору оптичної системи?
9. Що таке коефіцієнт лінійного віньєтування?
10. Що таке коефіцієнт геометричного віньєтування?

## До Розділу 11

1. Що таке оптичне випромінення?
2. Що таке потік оптичного випромінення?
3. Що таке спектральна щільність потоку оптичного випромінення?
4. Фотометричні і енергетичні одиниці потоку випромінення?
5. Скільки люменів знаходиться в одному ваті потоку випромінення при довжині хвилі 0.55 мкм?

6. Що таке сила світла (випромінення), одиниці фотометрична та енергетична?
7. Що таке світність (одиниці – фотометрична та енергетична)?
8. Що таке яскравість (одиниці – фотометрична та енергетична)?
9. Що таке ламбертів випромінювач?
10. Що таке опроміненість поверхні, (одиниці – фотометрична та енергетична)?
11. Що таке світлова трубка?
12. Що таке коефіцієнт світлопропускання оптичної системи?
13. Що таке відносний отвір оптичної системи?
14. Що таке діафрагмове число?
16. Що таке геометрична світлосила оптичної системи?
17. Що таке фізична світлосила оптичної системи?

### **До Розділу 12**

1. За яким принципом всі оптичні системи розділяють на чотири типи?
2. З яких оптичних елементів складається оптична система ока?
3. Що таке просторова роздільна здатність ока та гострота зору?
4. Які недоліки оптичної системи ока повинні враховуватися при створенні візуальних оптичних систем?
5. Яке око називають еметропічним, яке – аметропічним?
6. Якими лінзами виправляють аметропію оптичної системи ока?

### **До Розділу 13**

1. Які оптичні системи називають телескопічними чи афокальними?
2. Класичні типи телескопічних систем?
3. Які основні функціональні параметри телескопічних систем?
4. Як визначається видиме збільшення телескопічних систем?
5. Чи має польову діафрагму система Кеплера?
6. Чи має польову діафрагму система Галілея?
7. Що таке поле зору телескопічної системи?
8. Що таке просторова роздільна здатність телескопічної системи за критерієм Релея?
9. Що таке корисне збільшення телескопічної системи?



## До Розділу 14

1. Що називають лупою?
2. Якими основними функціональними параметрами характеризують лупу?
3. Як визначається видиме збільшення лупи?
4. Від якого параметру лупи залежить видиме збільшення лупи?
5. Чи може система (лупа + око) мати польову діафрагму, чим обмежується поле зору такої системи?
6. Що таке глибина простору різкого для ока зображення, які складові має ця глибина?
7. Як освітленість предмету впливає на геометричну глибину простору, яку око бачить різко?
8. З яких оптичних компонентів складається оптична система мікроскопа?
9. Які основні функціональні параметри має оптична система мікроскопа?
10. Як визначається видиме збільшення оптичної системи мікроскопа?
11. Від чого залежить просторова роздільна здатність мікроскопа?
12. Що таке корисне видиме збільшення мікроскопа?
13. З яких складових складається глибина простору предметів, яку око спостерігає за допомогою мікроскопу різко?
14. Які параметри присутні на корпусі об'єктиву мікроскопа?
15. Що таке окулярне число?

## До Розділу 15

1. До якого типу оптичних систем відноситься проекційна оптична система?
2. Які основні функціональні параметри проекційної системи?
3. Що таке проекційна довжина?
4. Чим відрізняються два типи освітлювальних підсистем в діапроекторах?
5. В чому полягає різниця між діапроектором і епіпроектором?

## До Розділу 16

1. Для чого призначені об'єктиви в оптичних системах приладів?
2. Які основні функціональні параметри мають фотооб'єктиви?
3. Як визначається глибина простору предметів фото-кіно об'єктивів?
4. Який план перед фото-кіно об'єктивом називають гіперфокальним?
5. Яку відстань від об'єктива до предмета називають початком безкінечності?
6. Що називають модуляційною передавальною функцією об'єктива?
7. Що таке гранична просторова частота об'єктива?

## ЛІТЕРАТУРА

### Основна література

1. Борн М. Основы оптики / М. Борн, Э. Волф // Главная редакция физ.-мат. литературы. – М. : Наука, 1973. – С. 721.
2. Гуриков В. А. Становление прикладной оптики XV–XIX вв. / В. А. Гуриков. – М. : Наука, 1983. – С. 188.
3. Слюсарев Г. Г. Методы расчета оптических систем / Г. Г. Слюсарев. – М. : Машиностроение, 1969. – С. 671.
4. Бегунов Б. Н. Теория оптических систем / Б. Н. Бегунов, П. П. Заказнов, С. И. Кирюшин и др. – М. : Машиностроение, 1981. – С. 449.
5. Турыгин И. А. Прикладная оптика / И. А. Турыгин. – М. : Машиностроение, 1965. – Ч. 1. – С. 364.
6. Родионов С. А. Автоматизация проектирования оптических систем / С. А. Родионов. – Л. : Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1982. – С. 270 с.
7. Панов В. А. Справочник конструктора оптико-механических приборов / В. А. Панов, М. Я. Кругер. – Л. : Машиностроение, 1980. – С. 742.
8. Сокуренок В. М. Око людини та офтальмологічні прилади / В. М. Сокуренок, Г. С. Тимчик, І. Г. Чиж. – Київ : ВПК «Політехніка», 2009. – С. 264.
9. Михельсон Н. Н. Оптические телескопы / Н. Н. Михельсон. – М. : Наука, 1976. – С. 512.
10. Маскутов Д. Д. Астрономическая оптика / Д. Д. Маскутов. – М. : Наука, 1979. – С. 396.
11. Скворцов Г. Е. Микроскопы / Г. Е. Скворцов, В. А. Панов, Н. И. Поляков и др. – Л. : Машиностроение, 1969. – С. 512.
12. Волосов Д. С. Теория и расчет светооптических систем проекционных приборов / Д. С. Волосов, М. В. Цивкин. – М. : Искусство, 1960. – С. 534.
13. Кулагин С. В. Проектирование фото- и киноприборов / С. В. Кулагин, Е. М. Апарин. – М. : Машиностроение, 1986. – С. 280.
14. Волосов Д. С. Фотографическая оптика / Д. С. Волосов. – М. : Искусство, 1978. – С. 546.

## Додаткова література

15. Шредер Г. Техническая оптика / Г. Шредер, Ч. Трайбер // Техносфера. – М., 2006. – С. 426.
16. Velzel C. A Course in Lens Design / C. Velzel. – V138, 2014. – P. 334.
17. Kingslake R. Lens Design Fundamentals / R. Kingslake, J. Barry // SPIE Press, 2010. – P. 549.
18. Vanderwerf D. F. Applied Prismatic and Refractive Optics / D. F. Vanderwerf // SPIE Press, 2010. – P. 297.
19. Walker B. H. Optical Engineering Fundamentals. Second Edition / B. H. Walker // SPIE Press, 2008. – P. 278.
20. Warren J. Smith. Modern Optical Engineering. Fourth Edition / Warren J. Smith // SPIE Press, 2008. – P. 754.
21. Braunecker B. Advanced optics using aspherical elements / B. Braunecker, R. Hentschel, H. Tiziani // SPIE Press, 2008. – P. 414.
22. Walker B. H. Optical design for visual systems / B. H. Walker // SPIE Press 2000. – P. 164.
23. Mouroulis P. Geometrical optics and optical design / P. Mouroulis, J. Macdonald // OXFORD UNIVERSITY PRESS, 1997. – P. 213.
24. Kingslake R. Optical System Design / R. Kingslake // ACADEMIC PRESS Orlando, Florida, 1983. – P. 323.

## ДОДАТКИ

Дані, наведені в таблицях, отримані з [25; 26]

### Яскравість деяких випромінювачів

Джерело	Яскравість у $\left[ \frac{\text{лм}}{\text{м}^2 \text{стер}} \right], \left[ \frac{\text{Кд}}{\text{м}^2} \right]$
Сонце	$15 \cdot 10^8$
Нічне небо при відсутності Луни	10
Вольфрамова нитка лампи розжарювання	$(1.5 - 2) \cdot 10^6$
Поверхня Луни	$2.5 \cdot 10^3$
Екран кінотеатру	5–20
Лист білої бумаги при освітленості (30-50) лк	10–15
Сніг під прямими сонячними променями	$3 \cdot 10^4$

### Освітленість у деяких типових випадках

Локалізація	Освітленість [Лк]
На поверхні Землі від сонячних променів вдень	100000
На поверхні Землі від повної Луни	0.2
На відкритому просторі в похмурий день	1000
В кімнаті поряд з вікном	100
На робочому столі при виконанні тонких робіт	100–50
Потрібна для читання	20–50
На екрані кінотеатру	20–80

### Дифузне відбиття деяких матеріалів

Матеріал	Відбиття у відсотках
Бумага біла	25
Вельвет чорний	0.4
Дерево (сосна)	40
Глина жовта	24
Матеріал окрашений білилами	50
Калька	22
Ґрунт вологий	8

### Відбиття світла металевими поверхнями

Діапазон хвиль	Довжина хвиль в мкм	Алюміній	Мідь	Залізо	Срібло	Нікель	Хром	Кремній
Ультра-фіолетовий	0.188	0.25	0.23	–	0.22	0.35	–	0.64
	0.2	0.31	0.31	–	0.25	0.44	–	0.73
	0.251	0.53	0.26	–	0.33	0.38	–	0.75
	0.305	0.64	0.29	–	0.47		–	0.73
	0.357	0.70	0.32	–	0.67	0.49	–	0.60
Видимий	0.5	–	0.44	0.55	0.90	0.61	0.55	0.34
	0.6	–	0.72	0.58	0.93	0.65	–	0.32
	0.7	–	0.83	0.60	0.94	0.69	0.56	–
Інфра-червоний	0.8	–	0.89	0.62	0.95	0.70	–	–
	1.0	0.74	0.90	0.65	0.96	0.72	0.57	–
	5.0	0.94	0.98	0.92	0.97	0.94	0.81	–
	10.0	0.97	–	–	–	–	0.93	–

# ПОКАЖЧИКИ

## Предметний покажчик

- Аберація 23
  - оптичної системи 58
- Адаптація 287
- Акомодація 287, 298
- Аметропічне око 299
- Апертурна діафрагма 231
- Аризонська модель ока 289
- Асферична поверхня 62
- Афокальна система 301
- Видиме збільшення
  - лупи 336
  - мікроскопа 348
  - телескопічної системи 307, 309
- Вихідна зіниця 235
- Вихідний апертурний кут 235
- Відбивальна призма 194
- Відносна спектральна світлова ефективність 249
- Відносний отвір 276
- Віньєтна діафрагма 240
- Водяниста волога 286
- Волоконно-оптичні елементи 224
- Вторинне джерело випромінення 55
- Вузлові точки
  - оптичної системи 137
  - передня, задня 137
- Вхідна зіниця 234
- Вхідне (вихідне) вікно 241
- Вхідний апертурний кут 235
- Гаусова матриця 100
- Геометрична світлосила 276
- Гіперфокальна відстань 377
- Глибина простору предметів
  - лупи 345
  - мікроскопа 357
  - об'єктива 375

Головні точки оптичної системи 105  
Гомоцентричний пучок променів 23  
Гострота зору 298  
Гранична просторова частота об'єктиву 381  
Гульстранда модель ока 289  
Далекозорість (гіперметропія) 299  
Дзеркало оптичне 212  
Діаграма Аббе 159  
Діапроекторами 365  
Діафрагма 229  
Діафрагмове число 276  
Дійсне зображення точки 56  
Діоптрія 123  
Довжина хвилі 21  
Допоміжній промінь 142  
Екстремаль 42  
Еметропічне око 299  
Епіпроектор 365  
Жовта пляма 293  
Закон  
– відбиття променю 49  
– заломлення променю 46  
– синусів Аббе 275  
Збільшення  
– кутове 136  
– лінійне 93  
– поздовжнє 139  
Зіниця ока 286  
Зорова труба і телескоп Галілея 303  
Зорова труба Кеплера 303  
Зоровий нерв 287  
Імерсійна рідина  
Інваріант  
– Аббе 86  
– Гюйгенса -Гельмгольца 92  
– Лагранжа-Гельмгольца 93  
– Сміта-Гельмгольца 91  
Кандела 254



Кардинальні  
– відрізки 103  
– елементи оптичної поверхні 112  
– елементи оптичної системи 102  
– площини - задня, передня 103  
– точки 103  
Ковбочки 293, 294  
Кодоскоп 365  
Коефіцієнт  
– геометричного віньєтування 242  
– лінійного віньєтування 242  
– світлової ефективності 251  
– світлопропускання 270  
– асферики 64  
Коло Ері 59  
Корисне  
– видиме збільшення мікроскопа 356  
– кутове або видиме збільшення телескопічної системи 324  
Короткозорість (міопія) 299  
Критерій  
– Релея 321  
– Сперроу 323  
Кришталік 286  
Крон, кронглас 158  
Кут  
– відбиття 49  
– падіння 49  
Кутове збільшення телескопічної системи 307  
Ламбертів випромінювач 262  
Лінза 176  
Лінійчатий спектр 248  
Лупа 336  
Люкс 257  
Люмен 254  
Макулярна зона сітківки (макула) 291, 293  
Модуляційна передавальна функція 380  
Найвіддаленіша точка ясного зору 299  
Негомоцентричний пучок променів 23

Об'єктиви  
– зорової труби 325  
– мікроскопів 360  
Обертальна призма 194  
Одномодовий світловод 220  
Окуляри  
– зорових труб 325  
– мікроскопів 261  
Окулярне число 325  
Опроміненість 257  
Оптична  
– вісь 61  
– вісь лінзи 176  
– довжина 41  
– система 288  
Оптичний матеріал 156  
Оптично  
– неоднорідне середовище 38  
– однорідне середовище 38  
Освітленість 257  
Палички 294  
Первинне джерело випромінення 55  
Пласко-паралельна пластина 186  
Площина головна 97  
Повне внутрішнє відбиття 53  
Показник  
– заломлення 40  
– заломлення абсолютний 40  
– заломлення відносний 40  
Поле зору 236,237  
– телескопічної системи 309  
Польова діафрагма 236  
Поток випромінення 247  
Початок безкінечності 377  
Правило знаків  
– для відрізків 28  
– для кутів 30  
Призма 193

Призмона система 199  
Принцип Ферма 38  
Проекційна довжина 366  
Промінь 23  
– дійсний 76  
– нульовий 98  
– параксіальний 84  
Простір  
– зображень 58  
– предметів 58  
Просторова роздільна здатність  
– телескопічної системи 320  
– ока 296  
Протяжне джерело 55  
Райдужка 286, 291  
Редукована пластина, призма 208  
Рогівка 285  
Родопсін 294  
Світлова трубка 267  
Світловод 219  
Світність 255  
Селфок 220  
Сила випромінення  
– енергетична 253  
– фотометрична 253  
Сітківка 287, 293  
Склера 285  
Скловидне тіло 286  
Солінійна спорідненість 116  
Спектральна щільність  
– оптичного випромінення 248  
– потоку 248  
Стерадіан 254  
Судинна оболонка 286  
Суцільний спектр 248  
Телескопічна система 301  
Тілесний кут 253  
Точкове джерело 55

– випромінювання 23  
Тригонометричні формули розрахунку ходу дійсного променя 76  
Промінь дійсний 83  
Уявне зображення точки 56  
Фізична рефракція 287  
фізична світлосила 276  
Флінт, флінтглас 159  
Фовеола 295  
Фокальний відрізок  
– задній 105  
– передній 105  
Фокон 219  
Фокус  
– задній 103  
– передній 105  
Фокусна відстань  
– задня 105  
– передня 105  
Формула  
– Аббе 86  
– висот параксіального променя 91  
– відрізків 87  
– Гауса 122  
– кутів параксіального променя 90  
– Ньютона 117  
Функціонал 42  
Хвильовий фронт 23  
Хороїд 286  
Центральна ямка, фовеа 294  
Чинний отвір вхідної зіниці 241  
Числова апертура мікроскопа 353  
Шайба волоконна 225  
Яскравість 255

## ІМЕННИЙ ПОКАЖЧИК

Аббе Ернст 275  
Амичи Джамбаттиста 348  
Галілей Галілео 306  
Га́ус Іоган Карл Фриідріх 83  
Гельмгольц Герман Людвіг Фердинанд 92  
Герц Генріх 20  
Гюйгенс Християн 92  
Декарт Рене 48  
Ейлер Леонард 42  
Кеплер Йоган 307  
Лагранж Жозеф-Луї 42  
Ламберт Йоган Генріх 262  
Левенгук Антон 347  
Майкельсон Альберт 21  
Максвел Джеймс 19  
Ньютон Ісаак 118  
Планк Макс 26  
Релей Джон Вільям Стретт 321  
Ремер Олаф 21  
Снеліус (Снел) Вілеброрд 48  
Ферма П'єр 39  
Френель Огюстен Жан 53  
Церніке Фріц 348  
Шейнер Христофор 307  
Шотт Отто 158

Навчальне видання

**І. Г. Чиж**

**Теорія оптичних систем**

**Підручник**