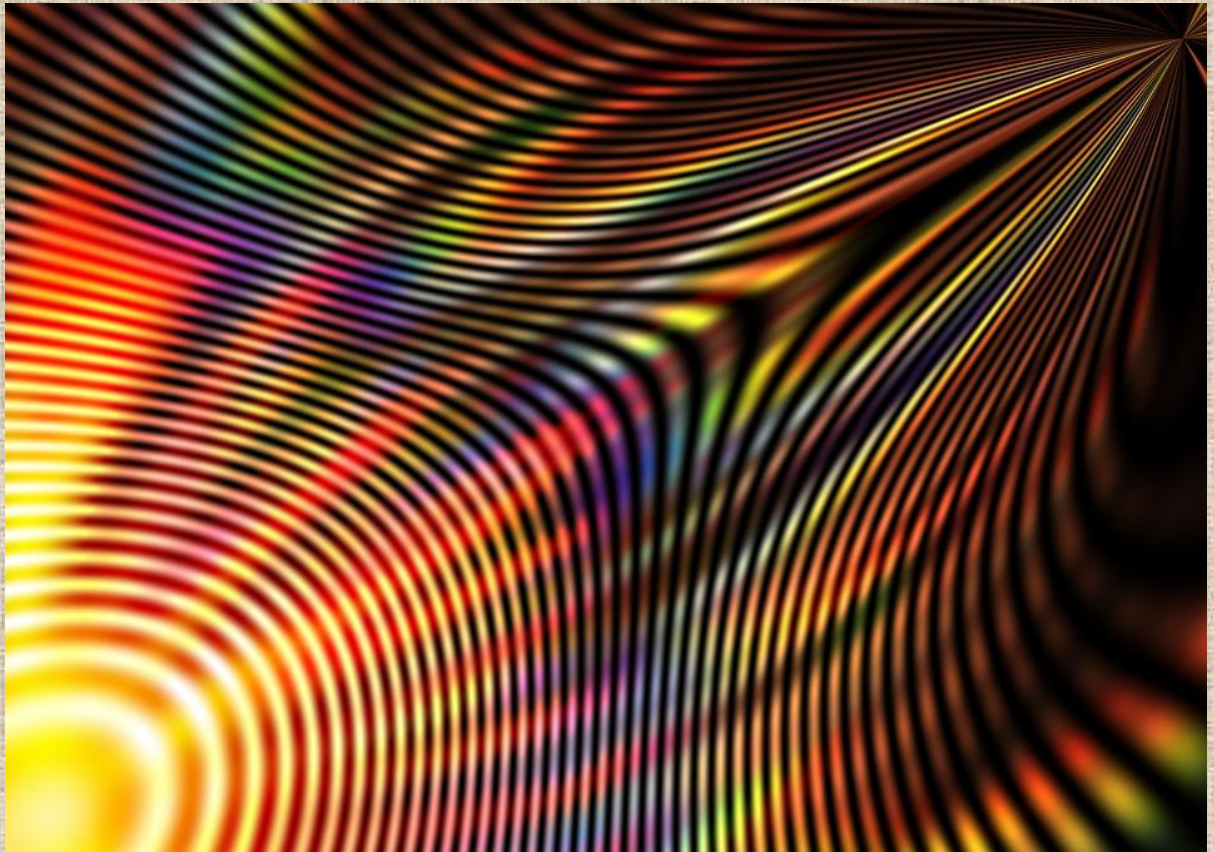


В.Г. Колобродов

ХВИЛЬОВА ОПТИКА

**ЧАСТИНА 1. ЕЛЕКТРОМАГНІТНА ТЕОРІЯ СВІТЛА
ТА ІНТЕРФЕРЕНЦІЯ**



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ХВИЛЬОВА ОПТИКА

ЧАСТИНА 1. ЕЛЕКТРОМАГНІТНА ТЕОРІЯ СВІТЛА ТА ІНТЕРФЕРЕНЦІЯ

Підручник

для студентів

спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані
системи та технології»

спеціалізації «Комп'ютерно інтегровані оптико-електронні системи і
технології»

та спеціальності 152 «Метрологія та інформаційно-вимірвальна
техніка»

спеціалізації «Фотоніка та оптоінформатика»

*«Затверджено Вченою радою
НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського»
(Протокол № _____ 2017)*

КИЇВ

НТУУ «КПІ ІМ. І. СІКОРСЬКОГО»

2017

Хвильова оптика. Частина 1. Електромагнітна теорія світла та інтерференція: Підручник для студентів спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані системи та технології» спеціалізації «Комп'ютерно інтегровані оптико-електронні системи і технології» та спеціальності 152 «Метрологія та інформаційно-вимірвальна техніка» спеціалізації «Фотоніка та оптоінформатика» [Текст]/Уклад.: В.Г. Колобродов. –К.:НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського», 2017.–208 с.

Викладено основні відомості з оптики, що вивчаються у вищих навчальних закладах, і в повному вигляді розглянуто фізичний зміст таких оптичних явищ: електромагнітна теорія світла, проходження світла через межу двох діелектриків, дисперсія і інтерференція світла. Складні теоретичні положення оптичних явищ викладено в доступній формі для студентів технічних спеціальностей. Для практичного засвоєння теоретичного матеріалу значну увагу приділено прикладам розв'язання задач.

Навчальне електронне мережне видання

ХВИЛЬОВА ОПТИКА

ЧАСТИНА 1. ЕЛЕКТРОМАГНІТНА ТЕОРІЯ СВІТЛА ТА ІНТЕРФЕРЕНЦІЯ

Підручник

для студентів

спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані системи та технології»

спеціалізації «Комп'ютерно інтегровані оптико-електронні системи і технології»

та спеціальності 152 «Метрологія та інформаційно-вимірвальна техніка» спеціалізації «Фотоніка та оптоінформатика»

Укладач: *Колобродов Валентин Георгійович, д.т.н., професор*

Рецензенти: *Коваленко Валерій Фадеєвич, д-р фіз.-мат. наук, професор
(Київський національний університет імені Тараса Шевченка)*

*Поліщук Аркадій Петрович, д-р фіз.-мат. наук, професор
(Національний авіаційний університет України)*

Відповідальний редактор: *Микитенко Володимир Іванович, к.т.н, доцент*

За редакцією укладача

ЗМІСТ

Вступ	7
Розділ 1 Основні етапи розвитку оптики	9
1.1. Складові частини оптики.....	9
1.2. Історія розвитку оптики	11
1.3. Основні закони оптики.....	15
1.3.1. Принцип Ферма.	15
1.3.2. Принцип Гюйгенса.....	18
1.4. Приклади застосування законів геометричної оптики.....	19
1.5. Задачі для самостійного розв'язування	21
Розділ 2. Електромагнітна теорія світла	25
2.1. Шкала електромагнітних хвиль.....	25
2.2. Рівняння Максвелла	29
2.3. Рівняння Максвелла для оптичних середовищ.....	31
2.4. Поняття поляризації світла.....	33
2.5. Хвильове рівняння	35
2.6. Рівняння плоскої монохроматичної хвилі. Синфазність векторів \vec{E} і \vec{H} в електромагнітній хвилі.....	37
2.7. Хвильове рівняння в векторному вигляді.....	40
2.8. Плоскі і сферичні монохроматичні хвилі.....	41
2.9. Скалярні гармонічні хвилі. Рівняння Гельмгольца	44
2.10. Інтенсивність світла.....	45
2.11. Оптичні спектри. Біле світло.....	46
2.12. Цуги хвиль	49
2.13. Групова швидкість	51
2.14. Ефект Доплера	54
2.15. Основи класичної теорії електромагнітного випромінювання	58

2.15.1. Випромінювання лінійного гармонічного осцилятора (диполя)	58
2.15.2. Інтенсивність і тривалість випромінювання диполя	61
2.15.3. Ширина спектральної лінії випромінювання диполя	63
2.16. Приклади розрахунку параметрів електромагнітного поля	65
2.17. Задачі для самостійного розв'язування	71
Розділ 3. Відбиття та заломлення світла на основі електромагнітної теорії	73
3.1. Характеристики відбивання і пропускання світла	73
3.2. Характеристики відбитої і заломленої хвиль при нормальному падінні на межу двох діелектриків	75
3.3. Енергетичні коефіцієнти відбивання і пропускання при нормальному падінні хвилі на межу двох діелектриків	78
3.4. Закони відбивання і заломлення на основі електромагнітної теорії світла	80
3.5. Характеристики відбитої та заломленої світлових хвиль при куті падіння, який відмінний від нуля. Формули Френеля	83
3.5.1. Формули Френеля для випадку, коли вектор \vec{E}_{\parallel} паралельний площині падіння	84
3.5.2. Формули Френеля для випадку, коли вектор \vec{E}_{\perp} перпендикулярний площині падіння	86
3.5.3. Формули Френеля для часткових і загального енергетичних коефіцієнтів відбиття	88
3.6. Особливості відбивання світлової хвилі від поверхні металів	91
3.7. Приклади розрахунку коефіцієнтів відбиття і заломлення світла на межі двох діелектриків. Формули Френеля	94
3.8. Задачі для самостійного розв'язування	99
Розділ 4. Основи електронної теорії дисперсії світла	104
4.1. Поняття дисперсії світла	104
4.2. Електронна теорія дисперсії світла	107
4.3. Поглинання світла	111
4.4. Закон поглинання світла Бугера-Ламберта	113
4.5. Приклади розрахунку дисперсії і поглинання світла	116

4.6. Задачі для самостійного розв'язування	122
Розділ 5. Інтерференція світла	126
5.1. Поняття інтерференції світла	126
5.2. Інтенсивність світла при суперпозиції двох монохроматичних хвиль	126
5.3. Інтерференція двох хвиль, коливання яких відбувається в одному напрямку	129
5.4. Інтерферометр Юнга. Ширина інтерференційних смуг	131
5.5. Вплив немонахроматичності світла на інтерференцію	133
5.6. Когерентність випромінювання	134
5.6.1. Визначення когерентності	134
5.6.2. Вимірювання міри когерентності випромінювання	136
5.6.3. Некогерентне випромінювання	139
5.7. Отримання когерентних пучків в оптиці	139
5.7.1. Метод ділення хвильового фронту	140
5.7.1.1. Метод Юнга	140
5.7.1.2. Біпризма Френеля	140
5.7.1.3. Білінза Біє	141
5.7.1.4. Дзеркало Ллойда	141
5.7.1.5. Метод Лінніка	141
5.7.2. Метод ділення амплітуди	142
5.7.2.1. Смуги рівного нахилу (інтерференція від плоско-паралельної пластинки)	142
5.7.2.2. Смуги рівної товщини (інтерференція від пластинки змінної товщини)	145
5.8. Кільця Ньютона	145
5.9. Стоячі світлові хвилі. Дослід Вінера	149
5.10. Двопроменеві інтерферометри	152

5.10.1. Інтерферометр Жамена	152
5.10.2. Інтерферометр Маха–Цендера	154
5.10.3. Інтерферометр Майкельсона	154
5.10.4. Фур'є – спектрометр	156
5.10.5. Інтерферометр Тваймана – Грина	158
5.10.6. Зірковий інтерферометр Майкельсона	160
5.11. Лазерний гіроскоп	161
5.12. Багатопроменева інтерференція	163
5.12.1. Інтерференція променів, що відбилися від пластинки, або пройшли через неї. Формули Ері	163
5.12.2. Залежність інтенсивності променів, що відбилися від пластинки, або пройшли через неї, від різниці фаз і коефіцієнта відбиття	165
5.13. Багатопроменеві інтерферометри	168
5.13.1. Інтерферометр Фабрі–Перо	168
5.13.2. Інтерферометр (пластинка) Люммера – Герке	170
5.14. Застосування інтерференції	171
5.14.1. Дослідження стану оптичних поверхонь	171
5.14.2. Вимірювання малих кутів між поверхнями прозорих пластин	172
5.14.3. Вимірювання малих змін довжини об'єктів при їх нагріванні	173
5.15. Просвітлення оптичних елементів	174
5.16. Теоретичні основи просвітлячих покриттів	176
5.16.1. Відбивання і проходження електромагнітної хвилі через багатошарову систему	176
5.16.2. Одношарові просвітляючі покриття для фіксованої довжини хвилі	181
5.17. Приклади розрахунку інтерференційних картин	183
5.18. Задачі для самостійного розв'язування	196
Перелік посилань.....	207

ВСТУП

Широке впровадження досягнень науки у виробництво – необхідна риса сьогодення. Одним із яскравих прикладів тут є оптика. Бурхливий розвиток лазерної техніки став не тільки науковим досягненням, але істотно змінив технологію використання оптичних явищ у різних сферах діяльності: від медичного застосування до військового призначення.

Це видання охоплює дві фундаментальні дисципліни: «Хвильову оптику» об'ємом 14 кредитів і «Електромагнітну та квантову теорію випромінювання» об'ємом 4 кредити. Підручник написано на основі досвіду викладання автором цих курсів протягом тридцяти років на кафедрі оптичних та оптико-електронних приладів Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Робота над цим підручником тривала більше 10 років. За цей час були видані посібник і багато методичних вказівок до практичних занять та лабораторного практикуму. Даний курс базується на відомих підручниках і монографіях таких, як «Основы оптики» Борна М. и Вольфа Э. [1], «Оптика» Ландсберг Г.С. [2], «Оптика» Годжаева Н.М. [3], «Дифракційна теорія оптичних систем» Колобродова В.Г. і Тимчика Г.С. [4], «Основы оптики» Стафеева С.К., Боярского К.К., Башниной Г.Л. [5], «Розв'язування задач з курсу «Загальна фізика» Коваленка В.Ф. і Колобродова В.Г. [6], «Электромагнитная теория света в прикладной физической оптике» Троицкого С.С. [7].

Підручник складається із двох частин. В першій частині представлені такі розділи, як основні етапи розвитку оптики, електромагнітна теорія світла, відбиття та заломлення світла на основі електромагнітної теорії, основи електронної теорії дисперсії світла, інтерференція світла. Для засвоєння теоретичного матеріалу в підручнику значну увагу приділено розв'язанню прикладів і наведено велику кількість задач для самостійного розв'язання.

Автор висловлює подяку к.т.н., доценту Троїцькому С.С., а також рецензентам д-ру фіз.-мат. наук, професору Коваленку В.Ф. і д-ру фіз.-мат. наук, професору Поліщуку А.П. за доброзичливу критику і ряд рекомендацій по удосконаленню підручника.

Підручник призначений для бакалаврів і магістрів спеціальностей 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані системи та технології» (спеціалізація «Комп'ютерно інтегровані оптико-електронні системи і технології») та 152 «Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка» (спеціалізація «Фотоніка та оптоінформатика»), а також для фізичних, оптичних та радіотехнічних спеціальностей і буде корисним для аспірантів і науково-інженерних працівників оптичного та оптико-електронного приладобудування.

РОЗДІЛ 1

ОСНОВНІ ЕТАПИ РОЗВИТКУ ОПТИКИ

1.1. Складові частини оптики

Оптика – розділ фізики, в якому вивчаються оптичне випромінювання (світло), процеси його розповсюдження і явища, що спостерігаються при взаємодії світла і речовини [8]. Назва оптика походить від грецького слова *optike* – наука про зорове сприйняття (*optos* – видимий, зоровий).

Згідно традиціям оптику ділять на складові частини: геометричну, фізичну та фізіологічну.

Геометрична оптика – не розглядає питання про природу світла, виходить із емпіричних законів його розповсюдження в однорідному середовищі, а також заломлення і відбивання на межі середовищ з різними оптичними властивостями. Геометрична оптика широко застосовується для розрахунку і конструювання оптичних приладів різного призначення. Використанням комп'ютерних програм до розрахунку оптичних системи займається *обчислювальна оптика*.

Фізіологічна оптика також не розглядає природу світла, а вивчає закономірності сприйняття світлового зображення за допомогою органів зору (очей). Вона тісно пов'язана з офтальмологією, біофізикою та психологією.

Фізична оптика розглядає проблеми, що пов'язані з природою світла і світловими явищами. В свою чергу складовими частинами фізичної оптики є хвильова оптика і квантова оптика.

Хвильова оптика стверджує, що світло являє собою поперечні електромагнітні хвилі. Математичною основою хвильової оптики є *рівняння Максвелла*. Властивості середовища при цьому характеризуються діелектричною проникністю ε і магнітною проникністю μ , які входять до

рівнянь Максвелла у вигляді коефіцієнтів. Ці коефіцієнти однозначно визначають *показник заломлення* n середовища:

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu} . \quad (1.1)$$

Хвильова оптика вивчає такі явища як інтерференція, дифракція, поляризація, розсіювання світла, а також розповсюдження світла в анізотропних середовищах. Феноменологічна хвильова оптика не вивчає залежність величин ε і μ від структури середовища і тому не може пояснити таке явище як *дисперсія* – залежність показника заломлення n середовища від довжини хвилі світла λ .

В класичній хвильовій оптиці параметри середовища вважають такими, що не залежать від інтенсивності світла, а оптичні явища в *лінійній оптиці* описуються лінійними диференціальними рівняннями Максвелла. В той же час, при великій інтенсивності світла показник заломлення середовища залежить від напруженості електричного поля світлової хвилі. Це призводить до зміни кута заломлення на межі двох середовищ при зміні його інтенсивності; до стиску або розширення світлового пучка; до зміни спектрального складу світла, що проходить через нелінійне середовище; до генерації нових хвиль в нелінійних кристалах. Ці явища вивчає *нелінійна оптика*, яка почала активно розвиватись з появою потужних лазерів.

Хвильова оптика не спроможна задовільно пояснити явища випромінювання і поглинання світла в середовищі (фотоефект, фотохімічні перетворення молекул). Для пояснення цих явищ необхідно вважати, що випромінювання і поглинання енергії світла атомом або молекулою здійснюється дискретними порціями (квантами), пропорційними частоті випромінювання. Тому світловому електромагнітному полю необхідно зіставити потік квантів світла – фотонів. Явища, в яких при взаємодії світла і середовища проявляються квантові властивості атома або молекули, вивчаються в **квантовій оптиці**.

Двоїстість природи світла (наявність у нього у нього одночасно характерних рис, які властиві і хвилям і частинкам) називається *корпускулярно-хвильовим дуалізмом*. Історично концепція корпускулярно-хвильового дуалізму вперше була сформульована саме для оптичного випромінювання, а потім для матеріальних часток і радіовипромінювання.

1.2. Історія розвитку оптики

Оптика – одна із найрівніших наук, яка тісно пов'язана з потребами практики на протязі свого розвитку. Прямолінійність розповсюдження світла була відома народам Месопотамії за 5 тисяч років до нашої ери, що використовувалась при будівельних роботах. Піфагор в 6 столітті до нашої ери стверджував, що тіла становляться видимими завдяки частинкам, які вони випромінюють. Аристотель в 4 столітті до нашої ери вважав, що світло – це збуджене середовище між об'єктом і оком. В тому ж столітті Платон сформулював два важливих закони геометричної оптики (*катоптрики*) – прямолінійність розповсюдження світла і рівність їх кутів падіння і відбивання. Головним вкладом греків в розвиток оптики полягає в тому, що вони знайшли закони прямолінійного розповсюдження і відбивання світла і могли їх використовувати на практиці.

Наступним важливим кроком розвитку оптики було розуміння закону заломлення світла (*діоптрика*), який був обґрунтований в 16 столітті. В 13 столітті з'явилися окуляри. В 1590 році З. Янсен (Нідерланди) побудував перший дволінзовий мікроскоп, а в 1609 році Г. Галілей (Італія) – телескоп. Однак точні закони заломлення світла були експериментально встановлені лише в 1620 році голландським вченим В. Снелем і французьким вченим Р. Декартом (1637 р.). На основі цих законів був сформульований *принцип Ферма*, яким було закінчено фундамент побудови геометричної оптики.

Подальший розвиток оптики пов'язаний з відкриттям в 1665 році дифракції світла (італійський вчений Ф. Гримальді), інтерференції світла, а

також подвійного променезаломлення (датський вчений Е. Бартоліні, 1669 р.), які неможливо пояснити в рамках геометричної оптики. І. Ньютон звертав велику увагу на періодичність світлових явищ і допускав можливість їх хвильової інтерпретації, але віддавав перевагу корпускулярній концепції світла. Він вважав, що світло – це потік часток, що діють на ефір і визивають в ньому коливання.

Гюйгенс на основі ідей Леонардо да Вінчі виходив із аналогії між багатьма оптичними і акустичними явищами. Він вважав, що світлове збудження являє собою імпульси пружних коливань ефіру, які розповсюджуються з великою, але кінцевою швидкістю. Найбільшим вкладом Гюйгенса в оптику є встановлення ним принципу, згідно якому кожна точка хвильового фронту можна розглядати як джерело вторинних сферичних хвиль, а дотична поверхня до цих хвиль являє собою фронт хвилі в наступні моменти часу. Спираючись на цей принцип, Гюйгенс дав хвильове пояснення законам відбивання і заломлення, згідно яким показник середовища дорівнює

$$n_{21} = v_1/v_2 . \quad (1.2)$$

де v_1 і v_2 – швидкість світла в 1-му і 2-му середовищах.

Гюйгенс пояснив також подвійне променезаломлення. Але створивши фундаментальні принципи хвильової оптики, Гюйгенс не розробив послідовну хвильову теорію світла, яка змогла б протидіяти «корпускулярній» теорії світла Ньютона, яка панувала в оптиці до початку XIX століття.

Перемога хвильової оптики пов'язана з роботами англійського вченого Т. Юнга і французького вченого О. Френеля. В 1801 році Юнг сформулював принципи інтерференції, які дозволили йому пояснити кольори тонких плівок, що послужило основою для розуміння усіх інтерференційних явищ. Френель, використовуючи принцип Гюйгенса, дав задовільне хвильове пояснення прямолінійності розповсюдження світла і пояснив багаточисельні дифракційні явища. Однак пояснити дифракційні явища, виходячи і наявності пружного ефіру було неможливо. Ці труднощі були розв'язані англійським вченим Дж. К.

Максвеллом, який, ґрунтуючись на відкритті англійського фізика М. Фарадея, розробив електромагнітну теорію світла. Згідно теорії Максвелла світло являє собою поперечні коливання напруженості електричного і магнітного поля, яке розповсюджується із швидкістю

$$v = c/n = c/\sqrt{\epsilon\mu}, \quad (1.3)$$

де c – швидкість світла в вакуумі.

В 90-х роках ХІХ століття німецькі фізики П. Друде, Г. Гельмгольц і особливо голландський фізик Х. Лоренц при створенні електронної теорії побудови речовини поєднали ідею про осцилятори і електромагнітну теорію світла. Плідне представлення електронів як осциляторів, які входять до складу атомів і молекул і здатні здійснювати в них коливання, дозволило описати багато оптичних явищ, в тому числі нормальну і аномальну дисперсії, так як в електронній теорії величина діелектричної проникності ϵ залежить від частоти (довжини) світлової хвилі.

Таким чином, побудова електромагнітної теорії світла і доповнення її електронною теорією взаємодії світла було визначним етапом в розвитку оптики. Електромагнітна теорія світла стала відправним пунктом при створенні теорії відносності. Плідність класичної електродинамічної теорії світла Максвелла була підтверджена в голографії Д. Габора (1947 р.) при запису хвильового поля на площині, в розробці голограм Ю.Н. Денисюка (1962 р.) при запису поля в тривимірному середовищі.

Не дивлячись на значні успіхи хвильової теорії Максвелла, вона не була спроможна пояснити процеси випромінювання і поглинання світла, особливо стосовно спектрального складу випромінювання абсолютно чорного тіла. Розглядаючи цю принципову проблему, німецький фізик М. Планк прийшов до висновку, що атом або молекула віддає енергію електромагнітному полю і отримує її від нього не неперервно, а порціями (квантами), пропорційними частоті коливань. Розвиток ідеї Планка, яка не відповідала класичним представленням, не тільки вирішило проблему теплового випромінювання, але і

заклало основи усій сучасній квантовій фізиці. Роботи Планка і Ейнштейна (1905 р.), який приписав квантам світла – фотонам, крім енергії, також імпульс і масу, повернули оптиці корпускулярні представлення. Фотонні представлення дозволили Ейнштейну пояснити закони фотоефекту і фотохімічних реакцій.

Тому перехід до квантових представленням був наступним істотним кроком в розвитку оптики. В сучасній оптиці квантові представлення не протиставляються хвильовим, поєднуються на ідейній основі квантової механіки і квантової електродинаміки. Квантова теорія дозволила дати інтерпретацію спектрам атомів і молекул, пояснити дію електричного, магнітного і акустичного полів на спектри.

Таким чином, дві із найбільших фундаментальних теорій сучасної фізики – квантова механіка і спеціальна теорія відносності – гуртувались на спостереженні і аналізі оптичних явищ.

Найбільш важлива подія сучасної оптики – експериментальне виявлення і створення методів генерації примусового випромінювання атомів і молекул, яке було передбачене Ейнштейном в 1916 році. Примусово спущений фотон дублює фотон, який визвав цей перехід, що призводить розмноження (підсилення) фотонів. Доповнення такого квантового підсилувача оптичною системою оберненого зв'язку за допомогою дзеркал перетворює його в оптичний квантовий генератор – лазер. Перші квантові генератори сантиметрового діапазону – мазери були створені американським фізиком Ч. Таунсоном і російськими фізиками А.М. Прохоровим і Н.Г. Басовим в 1955 році. В 1961 році був побудований перший лазер на рубіні, в наступному році – перший газовий лазер на суміші гелію і неону, а в 1963 році – напівпровідникові лазери. Важливість цих фундаментальних робіт полягає в тому, що вони стимулювали розвиток як традиційної оптики, так і появу нових наукових і технологічних напрямків – нелінійна і параметрична оптика, силова оптика, оптичні системи обробки інформації і зв'язку. Все це підтверджує

динамічність оптики, що властиво наукам, які знаходяться на передньому краю знань.

1.3. Основні закони оптики

Уже в перші періоди оптичних досліджень експериментально були встановлені такі чотири закони оптичних явищ [2]:

1. Закон прямолінійного поширення світла.
2. Закон незалежності світлових пучків.
3. Закон відбивання світла від дзеркальної поверхні.
4. Закон заломлення світла на межі двох прозорих середовищ.

1.3.1. Принцип Ферма

Принцип Ферма, який лежить в основі геометричної оптики, стверджує, що промінь світла завжди розповсюджується в просторі між двома точками по тому шляху, уздовж якого час його проходження менший, ніж уздовж любого із других шляхів, що поєднують ці точки [1]. Час проходження світлом відстані l в середовищі з показником заломлення n пропорційний оптичній довжині шляху S . Для однорідного середовища

$$S = nl, \quad (1.4)$$

а для неоднорідного середовища

$$S = \int n dl, \quad (1.5)$$

Таким чином, в такій формі принцип Ферма є принципом найменшої оптичної довжини шляху. Вперше цей принцип був сформульований французьким вченим П. Ферма (1660 р.), із якого слідували усі закони геометричної оптики: для однорідного середовища він призводить до прямолінійного розповсюдження світла, а для випадку падіння променя на межу розділу між середовища з різними показниками заломлення можна отримати закон дзеркального відбивання світла і закон заломлення.

Користуючись принципом Ферма доведемо закон заломлення світла на межі двох оптичних середовищ [2]. Нехай промінь світла виходить із точки A і після заломлення приходить у точку B (рис. 1.1). Проведемо через точки A і B площину нормально до розділу, яка називається *площиною падіння*. Будь-який шлях AO_1B , що лежить поза площиною падіння, світло проходить за більший час, ніж шлях AOB , проведений у площині падіння так, щоб точка O була слідом перпендикуляра, опущеного з точки O_1 на площину падіння. Справді, із прямокутних трикутників ΔAOO_1 і ΔBOO_1 маємо, що $AO_1 > AO$ і $O_1B > OB$.

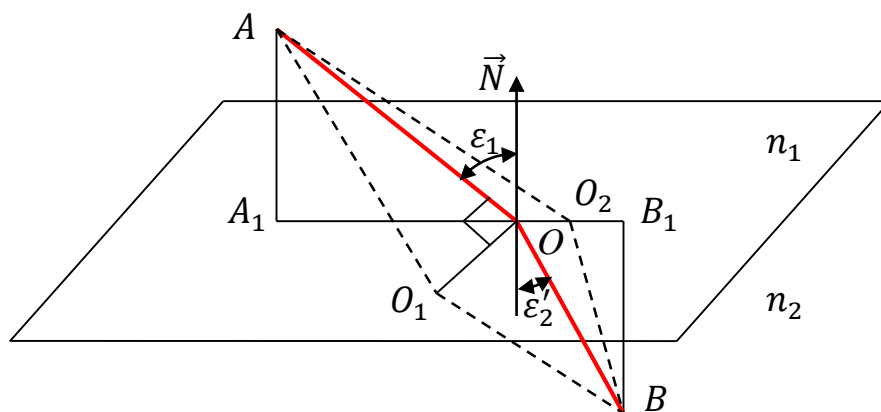


Рис. 1.1. Виведення закону заломлення із принципу Ферма

Отже о з принципом Ферма, шлях, який потребує мінімального часу, повинен лежати у площині падання. звідси маємо *першу частину закону заломлення* – **падаючий і заломлений промені і нормаль \vec{N} до площини розділу двох середовищ лежать в площині падіння.**

Щоб із усіх шляхів від точки A до точки B , які лежать у площині падіння, обрати шлях, що потребує мінімального часу, дослідимо, як змінюється цей шлях залежно від положення точки O на лінії перетину площини падіння і площини розділу (рис. 1.1). Положення точки O визначається довжиною відрізка $A_1O = x$, де точка A_1 – слід перпендикуляра, опущеного з точки A на площину розділу. Час поширення променя по шляху AOB є:

$$t = \frac{AO}{v_1} + \frac{OB}{v_2}, \quad (1.6)$$

де v_1 і v_2 - швидкість світла в першому і другому середовищах.

Із трикутників ΔBB_1O і ΔAA_1O маємо: $OB = \sqrt{BB_1^2 + (A_1B_1 - x)^2}$ і $AO = \sqrt{AA_1^2 + x^2}$. Тоді рівняння (1.6) матиме вигляд:

$$t = \frac{\sqrt{AA_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{BB_1^2 + (A_1B_1 - x)^2}}{v_2}. \quad (1.7)$$

Умова, що визначає, при якому значенні x цей час буде мінімальним, є рівність $\frac{dt}{dx} = 0$. З неї випливає:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v_1} \frac{x}{\sqrt{AA_1^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2} \frac{A_1B_1 - x}{\sqrt{BB_1^2 + (A_1B_1 - x)^2}} = 0. \quad (1.8)$$

Використовуючи рис. 1.1 і формулу (1.3), рівняння (1.8) запишемо у вигляді:

$$\frac{\sin \varepsilon_1}{v_1} - \frac{\sin \varepsilon'_2}{v_2} = 0, \text{ або } n_1 \sin \varepsilon_1 = n_2 \sin \varepsilon'_2. \quad (1.9)$$

Отже, з принципу Ферма випливає закон заломлення світлових променів (1.9). Із залежності (1.9) видно, що при розповсюдженні світла із більш щільного середовища в менш щільне ($n_1 > n_2$), наприклад, із скла в повітря, кут заломлення ε'_2 буде більше кута падіння ε_1 (рис. 1.2). Будемо збільшувати кут падіння до тих, поки кут падіння не стане рівним 90° . За цієї умови енергія

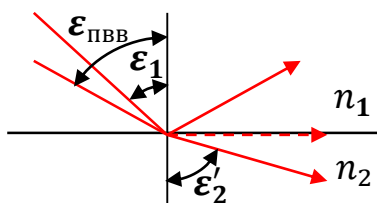


Рис. 1.2. Визначення кута повного внутрішнього відбивання

заломленого променя буде дорівнювати нулю, падаючий промінь буде повністю відбиватись, а таке явище називається *повним внутрішнім відбиванням* (ПВВ).

Визначимо із закону заломлення (1.9) кут $\varepsilon_{\text{ПВВ}}$, коли кут заломлення $\varepsilon'_2 = 90^\circ$.

$$n_1 \sin \varepsilon_{\text{ПВВ}} = n_2 \sin 90^\circ.$$

Звідки

$$\varepsilon_{\text{ПВВ}} = \arcsin \frac{n_2}{n_1}. \quad (1.10)$$

Необхідно також відзначити, що при куті падіння ε_1 , більшого за граничний кут $\varepsilon_{\text{ПВВ}}$, буде спостерігатись повне внутрішнє відбивання. Явище ПВО широко використовуються в різноманітних оптичних приладах, в тому числі оптично-волоконних лініях зв'язку.

1.3.2. Принцип Гюйгенса

Голанський вчений Х. Гюйгенс запропонував в 1678 році принцип, який дозволив пояснити деякі оптичні явища, ґрунтуючись на хвильовому представленні світла. Принципу Гюйгенса можна сформулювати так: **кожну точку хвильового фронту можна розглядати як центр вторинного збудження, що породжує вторинні сферичні хвилі, а хвильовим фронтом в любий наступний момент часу служить дотична поверхня до цих вторинних сферичних хвиль** [2].

Цей постулат служить правилом побудови поверхонь, «оптично паралельних» одна до одної. Він дає можливість вивести закони заломлення і відбивання на межі двох оптичних середовищ.

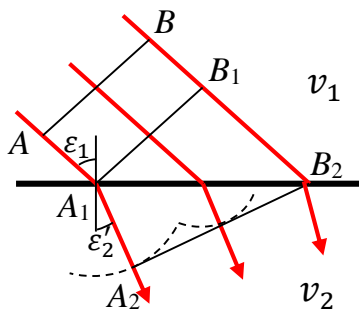


Рис. 1.3. Побудова заломленої хвилі за Гюйгенсом

В якості прикладу розглянемо заломлення плоскої хвилі (паралельного пучка світла) на плоскій межі двох середовищ, в яких швидкість розповсюдження світла v_1 і v_2 . Нехай паралельний пучок променів, що має плоский хвильовий фронт AB падає під

кутом ε_1 на поверхню розподілу (рис. 1.3). Нехай в момент часу $t = 0$ точка A досягла заломлюючого середовища в точці A_1 . Тоді за час $\tau = B_1B_2/v_1$, коли точка B_1 досягла заломлюючого середовища в точці B_2 , із точки A_1 згідно принципу Гюйгенса розповсюджується вторинна сферична хвиля на відстань $A_1A_2 = v_2\tau$. За принципом Гюйгенса нове положення хвильового фронту у

другому середовищі визначається дотичною A_2B_2 до вторинних хвиль. Тоді напрямок поширення пучка променів у другому середовищі визначається перпендикуляром A_1A_2 , проведеним із точки A_1 до дотичної A_2B_2 .

Із трикутників $A_1B_1B_2$ і $A_1A_2B_2$ маємо

$$A_1B_2 = \frac{B_1B_2}{\sin \varepsilon_1} = \frac{A_1A_2}{\sin \varepsilon_2'}$$

або

$$\frac{v_1 \tau}{\sin \varepsilon_1} = \frac{v_2 \tau}{\sin \varepsilon_2'}$$

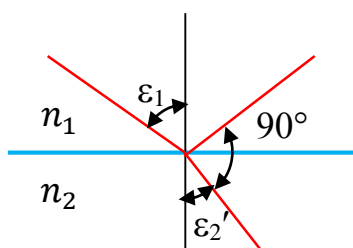
Звідки

$$n_1 \sin \varepsilon_1 = n_2 \sin \varepsilon_2'. \quad (1.11)$$

1.4. Приклади застосування законів геометричної оптики

Приклад 1.1. При якому куті падіння промінь світла, який відбився від межі “повітря – скло”, буде перпендикулярний до променя, який заломлюється. Показник заломлення скла $n_2 = 1,5$.

Розв’язання. Скло має більшу оптичну густину, ніж повітря. Із формули



(1.9) випливає, що кут заломлення ε_2' буде

меншим, ніж кут падіння ε_1 . Із рис. 1.4 маємо:

$\varepsilon_2' = 180^\circ - 90^\circ - \varepsilon_1 = 90^\circ - \varepsilon_1$. Тоді закон

заломлення (1.9) запишеться у вигляді:

Рис.1.4. До прикладу 1.1 $n_1 \sin \varepsilon_1 = n_2 \sin(90^\circ - \varepsilon_1) = n_2 \cos \varepsilon_1$. Звідки

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{n_2}{n_1}, \text{ або } \varepsilon_1 = \operatorname{arctg} \left(\frac{n_2}{n_1} \right).$$

Якщо $n_1 = 1$, а $n_2 = 1,5$, то $\varepsilon_1 = 56^\circ 19'$.

Приклад 1.2. Промінь світла падає під кутом 30° на плоскопаралельну скляну пластину ($n_2 = 1,5$) товщиною $d = 10$ см. Визначте зміщення променя, що пройшов через пластину.

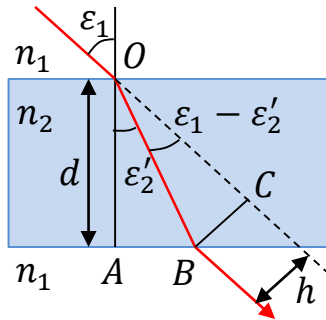


Рис. 1.5 До прикладу 1.2

заломлення (1.9)

$$\varepsilon'_2 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \varepsilon_1\right) = \arcsin\left(\frac{1}{1,5} \sin 30^\circ\right) = 19,5^\circ.$$

Потім із прямокутного трикутника OAB знаходимо

$$OB = \frac{d}{\cos \varepsilon'_2} = \frac{10}{\cos 19,5^\circ} = 10,6 \text{ см.}$$

Тоді зміщення променя $h = BC = 10,61 \cdot \sin(30^\circ - 19,5^\circ) = 1,93 \text{ см.}$

Приклад 1.3. На вхідну грань призми з кутом заломлення $\theta = 40^\circ$ нормально падає промінь монохроматичного світла ($n = 1,48$). Визначте кут відхилення та мінімальний кут відхилення променя призмою.

Розв'язання. Розглянемо рис. 1.6. Промінь падає нормально на вхідну грань призми і тому при заломленні не відхиляється від попереднього напрямку. На вихідній грані промінь заломлюється на кут ε_4 . Із рис. 1.6 знаходимо, що кут відхилення визначається за формулою

$$\sigma = \varepsilon_4 - \varepsilon_3 = \varepsilon_4 - \theta,$$

де ε_3 – кут падіння променя на вихідну грань. Із закону заломлення (1.9) на вихідній грані $n \sin \varepsilon_3 = \sin \varepsilon_4$ впливає, що

$$\varepsilon_4 = \arcsin(n \cdot \sin \theta) = \arcsin(1,48 \cdot \sin 40^\circ) = 72^\circ.$$

Тоді кут відхилення променя призмою $\sigma = \varepsilon_4 - \theta = 72^\circ - 40^\circ = 32^\circ$.

Розв'язання. Через те, що пластина знаходиться в однорідному середовищі (повітрі), то промінь, що вийшов із пластини, буде паралельним променю, що падає (рис. 1.5).

Із прямокутного трикутника OBC маємо

$$BC = h = OB \cdot \sin(\varepsilon_1 - \varepsilon'_2),$$

де кут заломлення ε'_2 визначається із закону

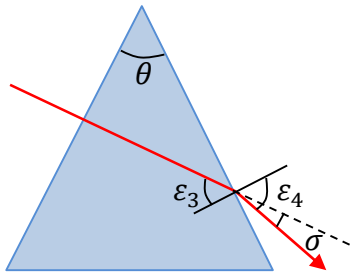


Рис. 1.6. До прикладу 1.3

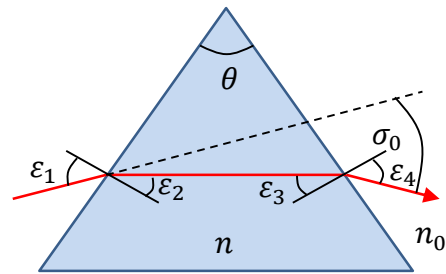


Рис.1.7. Проходження променя через призму

Мінімальний кут відхилення променя призмою спостерігається у випадку, коли промінь в призмі буде перпендикулярним до бісектриси кута заломлення (паралельно основі призми) (рис. 1.7), і визначається за формулою

$$\sigma_o = 2 \arcsin \left(\frac{n}{n_o} \sin \frac{\theta}{2} \right) - \theta = 2 \arcsin (1,48 \cdot \sin 20^\circ) = 20^\circ 49', \quad (1.12)$$

де n – показник заломлення матеріалу призми для певної довжини хвилі монохроматичного світла; n_o – показник заломлення середовища, яке оточує призму; θ – кут заломлення призми.

1.5. Задачі для самостійного розв’язування

Задача 1.1. При якому куті падіння промінь світла, який відбивається від межі “вода – скло” ($n_1 = 1,33$; $n_2 = 1,5$), буде перпендикулярним до заломленого променя?

Відповідь: $\epsilon_1 = 48^\circ 26'$.

Задача 1.2. При якому куті падіння промінь світла, який відбивається від межі “повітря – вода” ($n_2 = 1,33$), буде направленим під кутом 100° до заломленого променя?

Відповідь: $\epsilon_1 = 46^\circ 47'$.

Задача 1.3. Фіолетовий промінь падає на плоскопаралельну пластину, яка виготовлена із скла марки ТК8 ($n = 1,628$), і виходить із неї паралельно

падаючому променю. Якою повинна бути товщина пластини, щоб зміщення променя складало 5 мм при кутах падіння: а) 30°; б) 45°; в) 60°?

Відповідь: а) 22,68 мм; б) 13,65 мм; в) 9,06 мм

Задача 1.4. На плоскопаралельну пластину із скла марки Ф1 ($n = 1,6137$) товщиною 1 см падає промінь світла жовтого кольору під кутом 60°. Частина світла відбивається від верхньої поверхні, а частина, що заломлюється, проходить в пластину, відбивається від її нижньої поверхні і заломлюється вдруге на верхній поверхні, виходить паралельно першому відбитому променю. Визначте: а) відстань між цими променями; б) цю відстань для пластини із скла марки ТФ7 ($n = 1,73$).

Відповідь: а) 6,36 мм; б) 5,77 мм.

Задача 1.5. Промінь світла проходить через плоскопаралельну скляну пластину ($n = 1,5$) товщиною 3 см. Визначте зміщення променя пластиною при кутах падіння 25°, 50°, 70°.

Відповідь: 4,7 мм, 11,53 мм; 19,94 мм.

Задача 1.6.* На плоскопаралельну скляну пластину падає під кутом ε_1 вузький пучок світла шириною a , який має дві спектральні компоненти. Показники заломлення для цих двох компонентів різні: n_1 і n_2 . Визначте мінімальну товщину пластини, при якій світло, що пройшло через пластину, буде поширюватися у вигляді двох окремих пучків, кожен із яких має тільки одну спектральну компоненту.

$$\text{Відповідь: } h_{\min} = \frac{a}{\cos \varepsilon_1 \left\{ \operatorname{tg} \left[\arcsin \left(\frac{1}{n_2} \sin \varepsilon_1 \right) \right] - \operatorname{tg} \left[\arcsin \left(\frac{1}{n_1} \sin \varepsilon_1 \right) \right] \right\}}$$

Задача 1.7. На дні посудини, що наповнена водою до висоти 10 см, знаходиться точкове джерело світла, над яким на поверхні води плаває непрозорий диск. Центр диска знаходиться над джерелом світла. Визначте

найменший радіус диска, при якому ні один промінь від джерела світла не виходить на поверхню води. Як зміниться цей радіус, якщо воду ($n = 1,33$) замінити скипидаром ($n = 1,483$)?

Відповідь: а) 11,4 см; б) 9,13 см.

Задача 1.8. В якому напрямку до лінії горизонту плавець, який пірнув у воду, спостерігає Сонце, що заходить?

Вказівка: Розгляньте обернений хід променів.

Відповідь: $41^\circ 15'$.

Задача 1.9. Промінь світла нормально падає на передню грань скляної призми і виходить із другої, відхилившись на кут 20° від попереднього напрямку. Визначте показник заломлення скла призми, якщо її кут заломлення дорівнює: а) 30° ; б) 20° .

Відповідь: а) 1,5321; б) 1,8795.

Задача 1.10. При якому найбільшому куті падіння променя на скляну призму ($n = 1,5$) з кутом заломлення 45° ще не настає повне внутрішнє відбивання від вихідної грані?

Відповідь: $4^\circ 47'$.

Задача 1.11. При якому куті заломлення скляної призми ($n = 1,5$) кут найменшого відхилення променя дорівнює її куту заломлення?

Відповідь: $82^\circ 49'$.

Задача 1.12. Рівностороння скляна призма має кут найменшого відхилення променя в повітрі 37° . Який кут найменшого відхилення того ж променя має ця призма, коли вона знаходиться у воді ($n = 1,33$)?

Відповідь: $8^\circ 33'$.

Задача 1.13. Промінь жовтого кольору нормально падає на вхідну грань призми із скла марки КФ6 ($n = 1,50$) з кутом заломлення 40° . Визначте: а) кут

відхилення променя призмою; б) мінімальний кут відхилення променя призмою і відповідний йому кут падіння.

Відповідь: а) $\sigma = 34^{\circ}37'$; б) $\sigma_0 = 21^{\circ}44'$, $\varepsilon_1 = 30^{\circ}52'$.

Задача 1.14. Монохроматичний промінь синього кольору нормально падає на бокову грань призми, що виготовлена із скла марки СТК12 ($n = 1,70$), і виходить через другу грань з кутом відхилення 25° . Визначте кут заломлення призми.

Відповідь: $28^{\circ}02'$.

Задача 1.15. Показник заломлення скла призми марки ТК13 для червоного монохроматичного променя дорівнює 1,60. Визначте кут відхилення цього променя призмою з кутом заломлення 10° при куті падіння на вхідну грань 10° .

Відповідь: $6^{\circ}34'$.

Задача 1.16. Визначте кут падіння променя монохроматичного світла на вхідну грань скляної призми ($n = 1,6$) з кутом заломлення 45° , при якому на вихідній грані спостерігалось повне внутрішнє відбивання.

Відповідь: $10^{\circ}08'$.

Задача 1.17.* Промінь білого світла падає на бокову грань рівнобедреної призми з кутом заломлення 45° під таким кутом, при якому червоний промінь виходить із неї перпендикулярно до вихідної грані. Визначте кути відхилення призмою червоного і фіолетового променів, якщо показники заломлення скла призми для них відповідно дорівнюють 1,37 і 1,42.

Відповідь: $\sigma_r = 30^{\circ}38'$; $\sigma_v = 33^{\circ}27'$.

РОЗДІЛ 2

ЕЛЕКТРОМАГНІТНА ТЕОРІЯ СВІТЛА

2.1. Шкала електромагнітних хвиль

У хвильовій оптиці світло являє собою електромагнітне поле, яке змінюється в часі і просторі. *Оптичним випромінюванням* називаються електромагнітні хвилі з довжиною хвилі λ від 1 нм (10^{-9} м) до 1 мм (10^{-3} м) [8]. Згідно міжнародного стандарту DIN 5031, В1.7 світло, у широкому розумінні, має довжину хвилі від 100 нм до 1 мм, а видиме випромінювання або світло у

вузькому розумінні, займає спектральний діапазон від 380 нм до 780 нм.

Світло у вигляді електромагнітних хвиль розповсюджується у вакуумі з швидкістю $c = 299793$ км/с (наближено $c \approx 3 \cdot 10^5$ км/с = $3 \cdot 10^8$ м/с). Вивченням властивостей електромагнітних хвиль займається *електродинаміка*. На рис. 2.1 і 2.2 представлена залежність зміни

напруженості електричного поля світлової хвилі у просторі і часі.

Світлова хвиля характеризується довжиною хвилі λ і частотою ν . В оптиці довжина хвилі вимірюється в: мікрометрах – $1 \text{ мкм} = 10^{-6}$ м, нанометрах – $1 \text{ нм} = 10^{-9}$ м, ангстремах – $1 \text{ \AA} = 10^{-10}$ м, в частота – в герцах: $1 \text{ Гц} = 1 \text{ с}^{-1}$. Між довжиною хвилі і частотою існує зв'язок:

$$\lambda \nu = c. \quad (2.1)$$

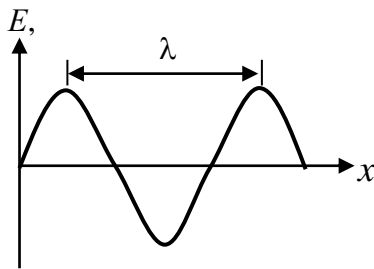


Рис. 2.1. Просторова залежність напруженості електричного поля світлової хвилі

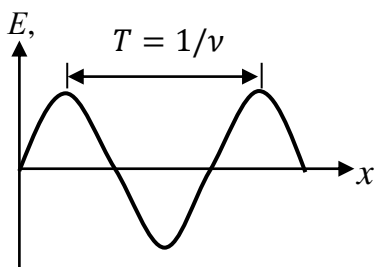


Рис. 2.2. Часова залежність напруженості електричного поля

Шкала електромагнітних хвиль характеризує властивості електромагнітного випромінювання в залежності від довжини хвилі або частоти (рис. 2.3). В залежності від діапазону зміни довжини хвилі випромінювання ділиться на:

1. Радіохвилі.
2. Інфрачервоне випромінювання.
3. Видиме випромінювання.
4. Ультрафіолетове випромінювання.
5. Рентгенівське випромінювання.

По мірі зменшення довжини хвилі (збільшення частоти) зменшуються хвильові властивості випромінювання і збільшуються квантові.

Радіохвилі ($1 \text{ мм} < \lambda < 10 \text{ км}$) виникають в результаті протікання струму в коливних контурах радіо ланцюгів. В залежності від довжини хвилі розрізняють: міліметрові хвилі, сантиметрові хвилі, дециметрові хвилі, метрові хвилі, короткі хвилі, середні хвилі і довгі хвилі.

Оптичне випромінювання (світло в широкому розумінні) ($1 \text{ нм} < \lambda < 1 \text{ мм}$) виникає в результаті зміни енергетичного стану молекули або атома (енергетичних переходів). Оптичний діапазон підрозділяється на інфрачервоне випромінювання, видиме випромінювання (світло у вузькому розумінні) і ультрафіолетове випромінювання.

Інфрачервоне випромінювання ($0,78 \text{ мкм} < \lambda < 1 \text{ мм}$) виникає при нагріванні тіл в результаті коливних енергетичних переходів молекул. Цей вид випромінювання був відкритий Гершелем в 1800 році. Шкала інфрачервоного випромінювання ділиться на ближню, середню і дальню області (рис. 2.3). Біля 50% енергії випромінювання Сонця знаходиться в цьому діапазоні.

Видиме випромінювання (світло) ($0,4 \text{ мкм} < \lambda < 0,78 \text{ мм}$) виникає в результаті енергетичних переходів верхніх електронів атомів. Цей діапазон шкали визначається спектральною чутливістю ока людини (рис. 2.4). Згідно

міжнародного стандарту DIN 5031, В1.7 видиме випромінювання займає спектральний діапазон від 380 нм до 780 нм. Цьому діапазону властиві такі характеристики: частота $10^{14} - 10^{15}$ Гц, період коливань $10^{-15} - 10^{-14}$ с, енергія кванта $(2,5 - 4,7)10^{-19}$ Дж.

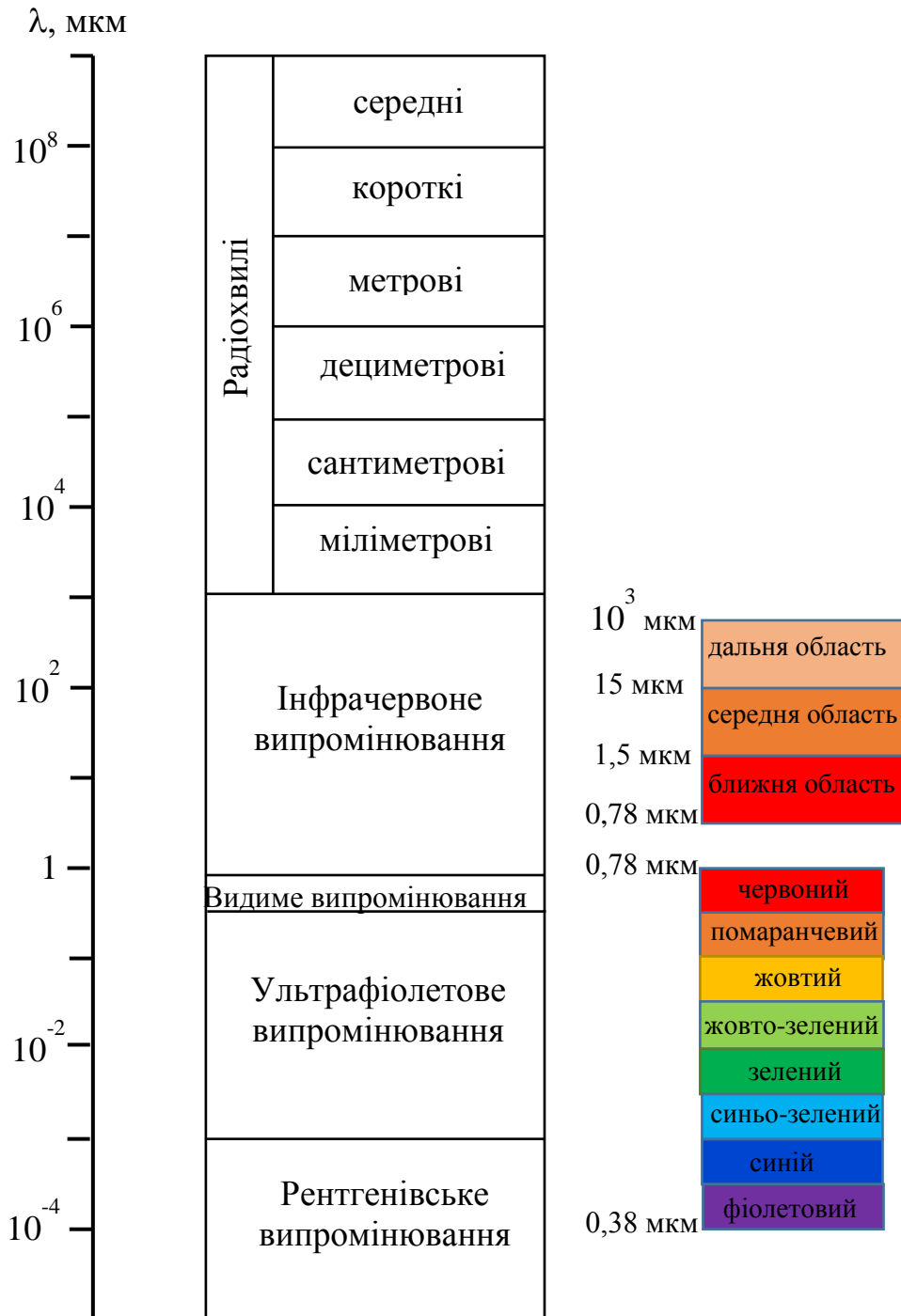


Рис. 2.3. Шкала електромагнітних хвиль

Око сприймає світло у вигляді восьми кольорів:

1. Червоний – $0,647 \text{ мкм} < \lambda < 0,780 \text{ мкм}$.
2. Помаранчевий – $0,585 \text{ мкм} < \lambda < 0,647 \text{ мкм}$.
3. Жовтий – $0,575 \text{ мкм} < \lambda < 0,585 \text{ мкм}$.
4. Жовто-зелений – $0,527 \text{ мкм} < \lambda < 0,575 \text{ мкм}$.
5. Зелений – $0,517 \text{ мкм} < \lambda < 0,527 \text{ мкм}$.
6. Синьо-зелений – $0,486 \text{ мкм} < \lambda < 0,527 \text{ мкм}$.
7. Синій – $0,424 \text{ мкм} < \lambda < 0,486 \text{ мкм}$.
8. Фіолетовий $0,380 \text{ мкм} < \lambda < 0,424 \text{ мкм}$.

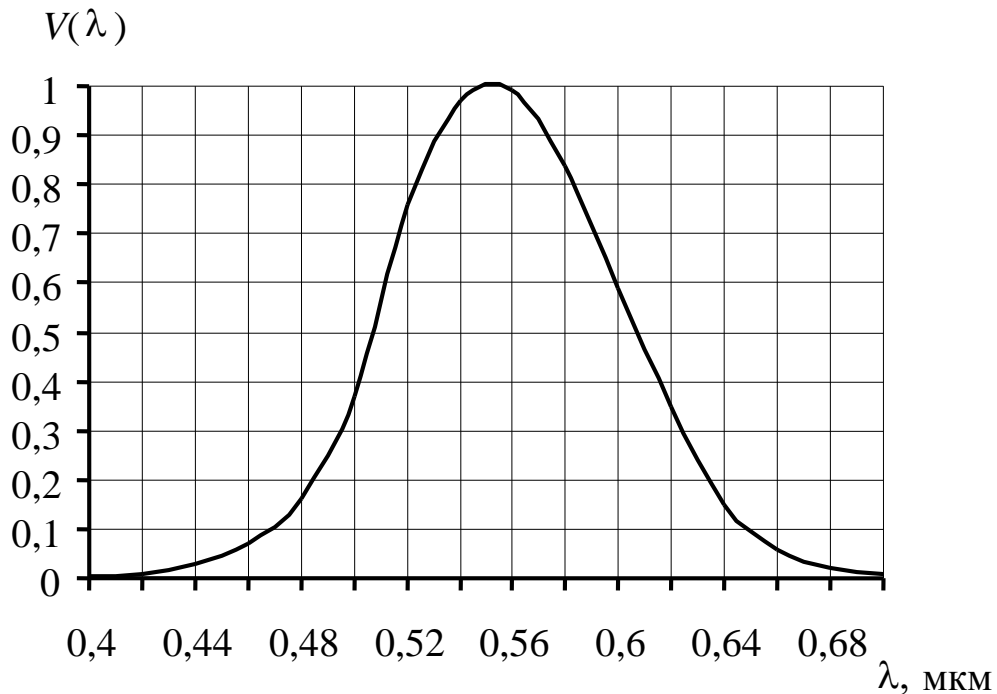


Рис. 2.4. Відносна спектральна чутливість ока

Ультрафіолетове випромінювання ($1 \text{ нм} < \lambda < 0,38 \text{ мкм}$) виникає в результаті енергетичних переходів середніх електронів атомів. Це невидиме випромінювання було відкрито Волластом і Рітгером в 1801 році. Воно впливає, головним чином, на фотохімічні реакції і викликає фотоефект.

Рентгенівське випромінювання ($10^{-3} \text{ нм} < \lambda < 1 \text{ нм}$) виникає в результаті енергетичних переходів нижніх електронів атомів або при гальмуванні

електронів. Це жорстке невидиме випромінювання було відкрито Рентгеном в 1895 році

Гама випромінювання ($\lambda < 10^{-3}$ нм) виникає при розпаді ядра атома. Це надзвичайно жорстке випромінювання було відкрито Віллардом в 1900 році при радіоактивному розпаді.

2.2. Рівняння Максвелла

В основі електромагнітної теорії світла лежить система рівнянь Максвелла, яка встановлює зв'язок між напруженістю електричного $\vec{E}(x, y, z, t)$ і магнітного $\vec{H}(x, y, z, t)$ полів та їх індукціями $\vec{D}(x, y, z, t)$ і $\vec{B}(x, y, z, t)$, що змінюються у часі і просторі. Електричні та магнітні властивості середовища характеризуються діелектричною ϵ та магнітною μ проникністю і питомою електричною провідністю σ . Система рівнянь Максвелла являється аксіомою, яка лежить в основі електродинаміки.

Указані чотири вектори електромагнітного поля пов'язані між собою рівняннями Максвелла, які виконуються у кожній точці, де фізичні властивості середовища неперервні. Повна система рівнянь Максвелла в диференціальній формі має вигляд

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}; \quad (2.2)$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}; \quad (2.3)$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho; \quad (2.4)$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0, \quad (2.5)$$

де $\vec{j}(x, y, z, t)$ – щільність струму провідності; ρ – щільність електричних зарядів.

Щоб за заданого розподілу зарядів за допомогою рівнянь Максвелла визначити вектори електромагнітного поля, систему рівнянь доповнюють

матеріальними рівняннями, які враховують реакцію середовища на зовнішнє електромагнітне поле. Для ізотропного середовища ці рівняння мають вигляд

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}; \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (2.6)$$

де ε_0 , μ_0 – електрична і магнітна сталі, $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{Ф} \cdot \text{м}^{-1}$, $\mu_0 = 1,257 \text{Гн} \cdot \text{м}^{-1}$.

В системі СГСЕ рівняння Максвелла (2.2) – (2.6) мають вигляд:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (2.2')$$

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}; \quad (2.3')$$

$$\text{div} \vec{D} = 4\pi \rho; \quad (2.4')$$

$$\text{div} \vec{B} = 0; \quad (2.5')$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu \vec{H}; \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (2.6')$$

Перші два матеріальні рівняння (2.6) пов'язують напруженість та індукцію електричного і магнітного полів, а третє рівняння – це закон Ома в диференціальній формі.

Перше рівняння (2.2) являє собою узагальнений закон електромагнітної індукції Фарадея: зміна магнітного поля у часі викликає появу електричного поля, причому електричне поле існує незалежно від наявності в ньому провідника. Знак « \leftarrow » у рівнянні (2.2) означає, що електричне поле намагається компенсувати магнітне поле, яке його викликало.

Рівняння (2.3) означає, що магнітне поле утворюється за рахунок зміни у часі електричного поля та електричного струму.

Рівняння (2.4) означає, що електричне поле утворюється зарядами, на яких починаються і закінчуються силові лінії поля.

Рівняння (2.5) свідчить про те, що немає магнітних зарядів, а силові лінії магнітного поля замкнені.

Визначимо оператори, які входять до системи рівнянь (2.2) – (2.5):

$$\operatorname{rot}\vec{E} = [\vec{\nabla} \times \vec{E}] = \begin{pmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

де $[\vec{\nabla} \times \vec{E}]$ – векторний добуток оператора Гамільтона $\vec{\nabla}$ і вектору напруженості електричного поля \vec{E} ,

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{x}_0 + \frac{\partial}{\partial y} \vec{y}_0 + \frac{\partial}{\partial z} \vec{z}_0, \quad (2.8)$$

$$\vec{E} = E_x \vec{x}_0 + E_y \vec{y}_0 + E_z \vec{z}_0; \quad (2.9)$$

E_x, E_y, E_z – компоненти вектору \vec{E} ; $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ – одиничні орти.

Причому $|\vec{x}_0| = |\vec{y}_0| = |\vec{z}_0| = 1$.

$$\operatorname{div}\vec{D} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}, \quad (2.10)$$

де $(\vec{\nabla} \cdot \vec{D})$ – скалярний добуток оператора Гамільтона $\vec{\nabla}$ і вектору індукції електричного поля \vec{D} .

2.3. Рівняння Максвелла для оптичних середовищ

Оптичні середовища є діелектриками, для яких $\sigma = 0$, $\mu = 1$, $\vec{j} = 0$. Тоді рівняння Максвелла (2.2) – (2.5) для таких прозорих середовищ з урахуванням (2.6) матимуть вигляд

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\mu_0 \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \quad (2.11)$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad (2.12)$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0; \quad (2.13)$$

$$\operatorname{div}\vec{H} = 0, \quad (2.14)$$

Із системи рівнянь (2.11) – (2.14) слідує такі висновки, які будуть обґрунтовані в п. 2.5:

1. Світло розповсюджується із швидкістю

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{n}, \quad (2.15)$$

де $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ – швидкість світла в вакуумі.

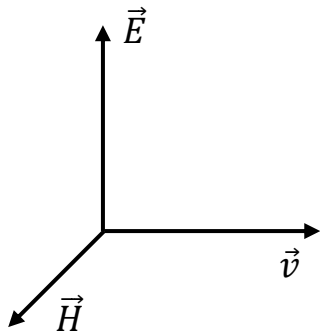


Рис. 2.5. Поперечна електромагнітна хвиля

2. Електромагнітні хвилі являються поперечними, тобто вектори \vec{E} і \vec{H} перпендикулярні до вектору швидкості \vec{v} : $\vec{E} \perp \vec{v}, \vec{H} \perp \vec{v}$.

3. Вектори $\vec{E}, \vec{H}, \vec{v}$ завжди утворюють праву трійку декартової системи координат (рис. 2.5).

4. Вектори \vec{E} і \vec{H} змінюються у часі і просторі одночасно (синхронно).

Для розв'язання диференціальних рівнянь (2.11) – (2.14) необхідно знати початкові і граничні умови. Початкові умови визначаються, зазвичай, коли $t = 0$, а граничні умови – на межі двох середовищ з різними показниками заломлення. Із електродинаміки відомо, що граничні умови на межі двох

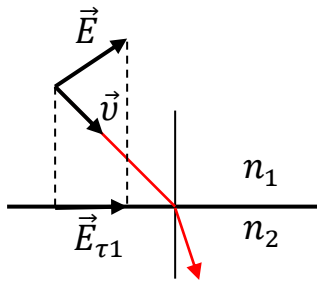


Рис. 2.6. Тангенціальна складова вектору напруженості електричного поля

діелектриків мають вигляд

$$E_{\tau_1} = E_{\tau_2} \text{ і } H_{\tau_1} = H_{\tau_2}, \quad (2.16)$$

де E_{τ} – тангенціальна складова вектору \vec{E} (проекція вектору \vec{E} на межу двох середовищ, рис. 2.6). Умови (2.16) використовують для визначення зміни параметрів електромагнітного поля, яке поширюється у різних середовищах.

2.4. Поняття поляризації світла

Поляризація світла – фізична характеристика оптичного випромінювання, яка описує поперечну анізотропію світлових хвиль, тобто нееквівалентність різних напрямків в площині, перпендикулярній світловому променю [8]. Для електромагнітної хвилі вектори $\vec{E}, \vec{H}, \vec{v}$ завжди утворюють праву трійку декартової системи координат (рис. 2.5). Вектор \vec{v} співпадає з напрямком розповсюдження променя (світла), а орієнтація вектору \vec{E} визначається видом поляризації. Певна орієнтація вектору \vec{E} в просторі називається *поляризацією світла*.

Вперше поперечну анізотропію світлового променя виявив голландський вчений Х. Гюйгенс в 1690 році при досліджах з кристалами ісландського шпату. Поняття «поляризація світла» було введено до оптики І. Ньютоном в 1704 році.

Для *природнього світла* вектор \vec{E} займає рівноймовірне положення в просторі. Векторна модель природнього світла наведена на рис. 2.7.

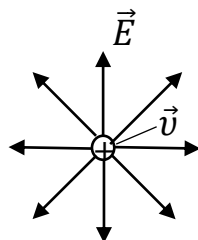


Рис. 2.7. Природня поляризація світла

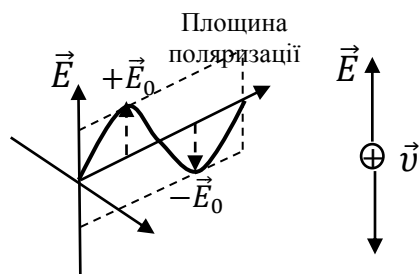


Рис. 2.8. Лінійно поляризоване світло

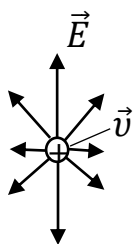


Рис. 2.9. Частково поляризоване світло

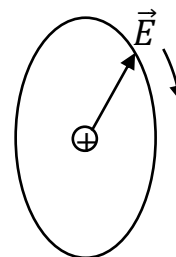


Рис. 2.10. Еліптично поляризоване світло

В залежності від орієнтації вектору \vec{E} розглядають такі види поляризації:

- *Лінійне або плоско поляризоване світло*, коли вектор \vec{E} коливається в одній площині (рис. 2.8). Площина, що проходить через вектори \vec{E} і \vec{v} називається *площиною поляризації*.
- *Частково поляризоване світло*, коли вектор \vec{E} має переважний (більш ймовірний) напрямок орієнтації у просторі (рис. 2.9).
- *Еліптично поляризоване світло*, коли вектор \vec{E} розповсюджується у просторі по гвинтовій траєкторії зі змінною амплітудою, проекція якої на площину, що перпендикулярна до напрямку променя, описує еліпс (рис. 2.10).
- *Циркулярно поляризоване світло* (поляризоване по колу) є частковим випадком еліптично поляризованого світла, коли еліпс перетворюється в коло.

Хвильовою або фазовою поверхнею називають поверхню, на якій світлова хвиля має постійну фазу.

В залежності від виду фазової поверхні хвилі діляться на:

- Плоскі хвилі, в яких фазова поверхня є площина (рис. 2.11).
- Сферичні хвилі, що розходяться, в яких фазова поверхня має сферичну форму (рис. 2.12).
- Сферичні хвилі, що збігаються, в яких фазова поверхня має сферичну форму (рис. 2.13).

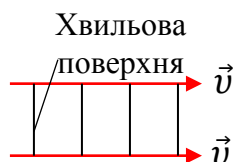


Рис. 2.11. Плоскі хвилі

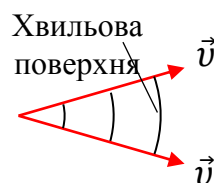


Рис. 2.12. Сферичні хвилі, що розходяться

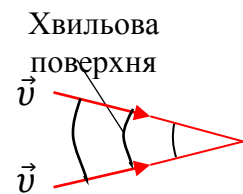


Рис. 2.13. Сферичні хвилі, що збігаються

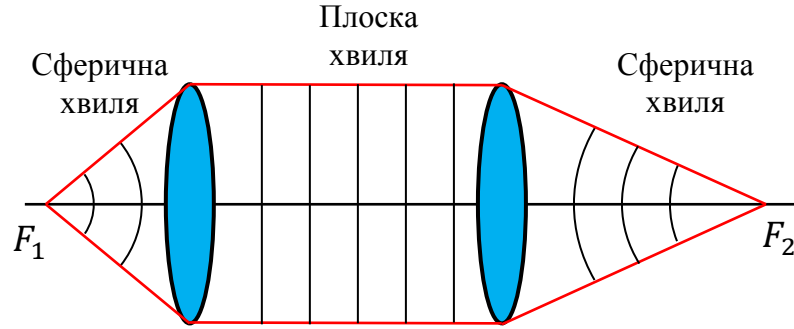


Рис. 2.14. Перетворення сферичної хвилі, що розходить, в плоску хвилю і плоскої хвилі в сферичну, що збігаються

Аналогом плоских хвиль в геометричній оптиці є паралельний пучок променів, а сферичних хвиль – пучок променів, що фокусується або розфокусується. За допомогою лінз можна перетворити сферичну хвилю в плоску і навпаки (рис. 2. 14).

2.5. Хвильове рівняння

Розв'яжемо систему рівнянь Максвелла (2.11) – (2.14), використовуючи (2.7) і (2.9). Представимо перше рівняння (2.11) у вигляді

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= \begin{pmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \vec{x}_0 + \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \vec{y}_0 + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{z}_0 = \\ &= -\mu_0 \mu \left(\frac{\partial H_x}{\partial t} \vec{x}_0 + \frac{\partial H_y}{\partial t} \vec{y}_0 + \frac{\partial H_z}{\partial t} \vec{z}_0 \right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Векторна рівність (2.17) буде виконуватися у тому випадку, коли будуть рівні проекції правої і лівої частини (2.17) на відповідні осі x, y, z :

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu_0 \mu \frac{\partial H_x}{\partial t}; \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 \mu \frac{\partial H_y}{\partial t}; \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu_0 \mu \frac{\partial H_z}{\partial t}. \quad (2.20)$$

Розглянемо розв'язок системи рівнянь (2.18) – (2.20) для плоскої хвилі, яка поляризована в площині xu і розповсюджується уздовж осі x , тобто

$$\vec{E} = E_x \vec{x}_0 + E_y \vec{y}_0 + E_z \vec{z}_0 = \{0; E; 0\}.$$

Для такої хвилі рівняння (2.18) – (2.20) матимуть вигляд:

$$0 - 0 = -\mu_0 \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} \rightarrow H_x = 0;$$

$$0 - 0 = -\mu_0 \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \rightarrow H_y = 0;$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - 0 = -\mu_0 \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \rightarrow H_z \neq 0.$$

Таким чином, вектор \vec{H} має компоненти: $\{0; 0; H_z = H\}$. Це означає, що вектор \vec{H} направлений уздовж осі z , а **електромагнітна світла хвиля є поперечною**.

Запишемо рівняння (2.11) і (2.12) для векторів $\vec{E} = \{0; E; 0\}$ і $\vec{H} = \{0; 0; H\}$:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\mu_0 \mu \frac{\partial H}{\partial t}; \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (2.22)$$

Розв'яжемо систему рівнянь (2.21) і (2.22). Візьмемо похідну по від правої і лівої частин рівняння (2.21) і підставимо (2.22) в отримане співвідношення:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\mu_0 \mu \frac{\partial H}{\partial t} \right); \\ \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} &= -\mu_0 \mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right) = \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Аналогічно можна отримати рівняння і для вектору \vec{H} :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \quad (2.24)$$

Рівняння (2.23) і (2.24) називаються **хвильовими рівняннями**. Вони є розв'язками системи рівнянь Максвелла. Розв'язок рівняння (2.23) розглядається в курсі математики «Рівняння математичної фізики».

В загальному випадку розв'язком хвильового рівняння є поперечна гармонічна хвиля, яка розповсюджується із швидкістю

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n}. \quad (2.25)$$

Звідси маємо співвідношення

$$n = \sqrt{\epsilon\mu}, \quad (2.26)$$

яке називається *формулою Максвелла*.

Рівняння такої хвилі має вигляд гармонічної функції

$$E = f \left[\omega \left(t \pm \frac{x}{v} \right) \right], \quad (2.27)$$

де ω – циклічна частота. Знак « $-$ » відповідає хвилі, що розповсюджується уздовж осі x , а знак « $+$ » – для хвилі, що розповсюджується в протилежному напрямку.

Найпростішою функцією (2.27) являється гармонічна (синусоїдальна) функція

$$E(x, t) = E_0 \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right]. \quad (2.28)$$

Аналогічно для напруженості магнітного поля

$$H(x, t) = H_0 \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right]. \quad (2.29)$$

Світло являє собою напруженості електричного і магнітного полів. Експериментальні дослідження показують, найбільше на середовище впливає електричне поле, тому інколи напруженість електричного поля \vec{E} називають *світловим вектором*.

2.6. Рівняння плоскої монохроматичної хвилі.

Синфазність векторів \vec{E} і \vec{H} в електромагнітній хвилі

Рівняння світлової хвилі (2.28) описує плоску монохроматичну хвилю з частотою ω , яка має постійну фазу в площині $x = x_0$.

В цьому рівнянні:

$E(x, t)$ – амплітуда поля, яка змінюється в просторі і часі;

E_0 – постійна (максимальна) амплітуда;

$\varphi(x, t) = \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)$ – фаза хвилі;

v – швидкість переміщення світлової хвилі з постійною фазою $\varphi(x, t) = \text{const}$, або швидкість переміщення фазової поверхні. Тому вона називається *фазовою швидкістю*.

Фазу світлової хвилі можна записати в наступних виглядах:

$$\varphi(x, t) = \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = \omega t - \omega \frac{x}{v} = 2\pi\nu t - \frac{2\pi\nu x}{v} = \omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} = \omega t - kx, \quad (2.30)$$

де $k = 2\pi/\lambda$ – хвильове число.

Визначимо фазову швидкість шляхом диференціювання фази (2.30) по t , коли $\varphi(x, t) = \text{const}$.

$$\omega - k \frac{dx}{dt} = 0. \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}. \quad (2.31)$$

Із рівняння світлової хвилі (2.28) видно, що функція $E(x, t)$ має два періоди (рис. 2.15):

1. Просторовий період, який дорівнює довжині хвилі λ , $E(x, t) = E(x + \lambda, t)$.
2. Часовий період $T = 1/\nu$, $E(x, t) = E(x, t + T)$.

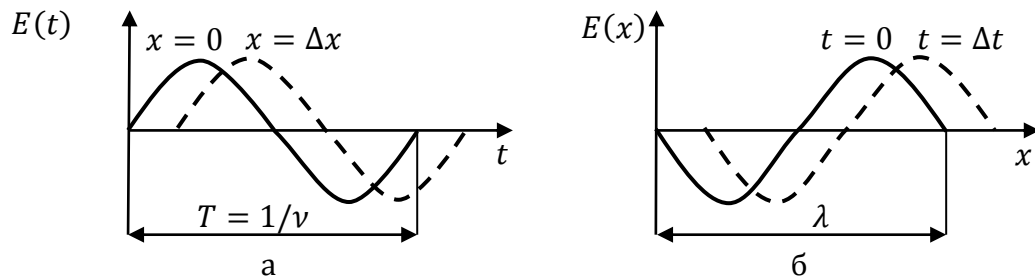


Рис. 2.15. Просторове і часове представлення плоскої монохроматичної хвилі:
а – зміна амплітуди поля у просторі; б – зміна амплітуди поля у часі

Функція (2.28) називається *рівнянням світлової хвилі в дійсній формі*. Цю функцію можна представити в *комплексній формі*, яка з урахуванням (2.30) і наявності початкової фази φ_0 має вигляд

$$E(x, t) = E_0 \exp[j(\omega t - kx + \varphi_0)]. \quad (2.32)$$

Комплексна форма (2.32) дозволяє значно спростити математичні перетворення, так як функцію $E(x, t)$ можна представити в вигляді добутку функцій з незалежними змінними

$$E(x, t) = E_0 e^{j\varphi_0} e^{j\omega t} e^{-jkx}. \quad (2.33)$$

Перехід від дійсної форми до комплексної форми представлення світлової хвилі здійснюється за допомогою формул Ейлера

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \quad \text{і} \quad e^{\pm jx} = \cos x \pm j \sin x. \quad (2.34)$$

Встановимо взаємозв'язок між амплітудами електричного поля $E(x, t)$ і магнітного поля $H(x, t)$, які описуються функціями (2.28) і (2.29) відповідно. Підставимо ці функції до рівняння (2.21)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ E_0 \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right] \right\} &= -\mu_0 \mu \frac{\partial}{\partial t} \left\{ H_0 \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right] \right\}; \\ E_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right] \left(-\frac{\omega}{v} \right) &= -\mu_0 \mu H_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right] \omega; \\ E_0 \frac{1}{v} &= E_0 \frac{\sqrt{\varepsilon \mu}}{c} = E_0 \sqrt{\varepsilon \mu} \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \mu_0 \mu H_0; \\ E_0 \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0} &= \sqrt{\mu \mu_0} H_0. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Співвідношення (2.35) означає, амплітуди електричного поля (2.28) і магнітного поля (2.29) мають однакові знаки і змінюються одночасно (*синфазно*) (рис. 2.16).

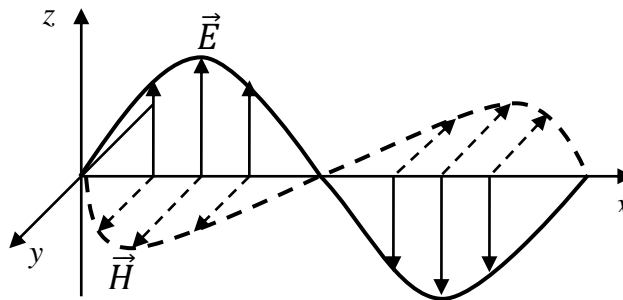


Рис. 2.16. Зміна амплітуд електричного і магнітного полів в просторі

2.7. Хвильове рівняння у векторному вигляді

Рівняння Максвелла (2.11)–(2.13) пов'язують між собою вектори \vec{E} , \vec{H} , \vec{D} і \vec{B} електромагнітного поля. Диференціальні рівняння, яким повинен задовольняти кожен із векторів, можна отримати вилученням інших векторів.

Запишемо перші два рівняння Максвелла для однорідного та ізотропного діелектрика:

$$\begin{cases} \text{rot}\vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial\vec{H}}{\partial t}; \\ \text{rot}\vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}. \end{cases} \quad (2.36)$$

Візьмемо похідну за t від правої і лівої частин другого рівняння:

$$\text{rot} \frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}.$$

Підставимо у це рівняння $\partial\vec{H}/\partial t$ із першого рівняння системи (2.36):

$$-\frac{1}{\mu\mu_0} \text{rot}(\text{rot}\vec{E}) = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}.$$

Використаємо відому тотожність векторного аналізу

$$\text{rot}(\text{rot}) = \text{grad}(\text{div}) - \Delta, \quad (2.37)$$

де Δ – оператор Лапласа, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Тоді, з урахуванням рівняння (2.11) та (2.37), остаточно отримаємо

$$\Delta\vec{E} = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}. \quad (2.38)$$

Аналогічне рівняння можна отримати і для напруженості магнітного поля \vec{H} :

$$\Delta\vec{H} = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}. \quad (2.39)$$

Рівняння (2.38) і (2.39) називають *хвильовими рівняннями в векторному вигляді*. Із цих рівнянь випливає, що існують електромагнітні хвилі, які поширюються зі швидкістю

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}}. \quad (2.40)$$

Швидкість розповсюдження електромагнітних хвиль у вакуумі, для якого $\varepsilon = \mu = 1$, дорівнює $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Цей результат практично співпадає з експериментально отриманим значенням швидкості світла, який становить $c = 299792456 \text{ м/с}$.

2.8. Плоскі і сферичні монохроматичні хвилі

Знайдемо розв'язок хвильового рівняння (2.38) для різних випадків поширення світла [4]. Припустимо, що електричне поле залежить лише від однієї координати x і часу t , тоді рівняння (2.38) з урахуванням (2.40) матиме вигляд

$$\Delta \vec{E}(x, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(x, t)}{\partial t^2}. \quad (3.41)$$

Одним із можливих розв'язків цього рівняння є *плоска монохроматична хвиля*

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right], \quad (2.42)$$

де \vec{E}_0 – амплітуда; φ_0 – початкова фаза; ω – циклічна частота, $\omega = 2\pi\nu$, де ν – частота, Гц;

$$\varphi(x, t) = \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0, \quad (2.43)$$

де φ – фаза хвилі.

Розподіл напруженості поля у плоскій монохроматичній хвилі зображено на рис. 2.17. Якщо у рівнянні (2.43) зафіксувати час $t = t_0$, то залежність поля від координати x дає «фотографію» хвилі – розподіл напруженості поля у просторі. Нехай у момент часу t_0 точка з фазою φ_0 має координату x_0 . Тоді у момент часу $t_0 + \Delta t$ точка з цією фазою зміститься на відстань $\Delta x = v\Delta t$. Якщо $\Delta x > 0$, то хвиля поширюється уздовж додатного

напрямку осі x . Щоб отримати рівняння хвилі, яка поширюється уздовж від'ємного напрямку осі x , достатньо змінити знак у виразі для фази (2.43):

$$\varphi(x, t) = \omega \left(t + \frac{x}{v} \right) + \varphi_0. \quad (2.44)$$

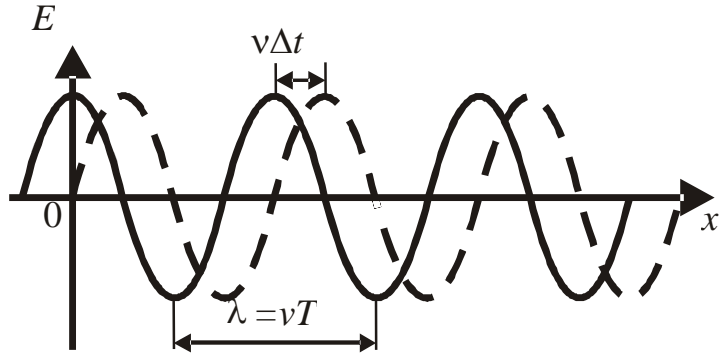


Рис. 2.17. Поширення монохроматичної хвилі

Отже, параметр v більш точно називати не просто швидкістю, а *фазовою швидкістю*, яка визначає швидкість переміщення хвильового фронту, тобто поверхні, на якій коливання відбуваються з однаковою фазою. У випадку, що розглядається, хвильовий фронт є плоским, перпендикулярним до осі x , де $x = x_0$.

Поле хвилі (2.43) за умови $\varphi_0 = 0$ можна подати в іншому вигляді:

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \cos(kx - 2\pi vt), \quad (2.45)$$

де k – хвильове число, см^{-1} , $k = \omega/v = 2\pi/\lambda$.

Дослідження монохроматичного світла суттєво спрощуються, якщо подати вираз (2.45) у комплексному вигляді:

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \exp[j(kx - 2\pi vt)]. \quad (2.46)$$

У багатьох випадках виникає потреба досліджувати поширення плоскої хвилі не уздовж осі x , а в деякому довільному напрямку. Нехай цей напрямок задається одиничним вектором нормалі \vec{N} до хвильового фронту (рис. 2.18). Тоді рівняння поверхні сталої фази можна записати у вигляді $\vec{r}\vec{N} = r_0 = \text{const}$, де \vec{r} – радіус-вектор, який визначає координати довільної точки P хвильового фронту.

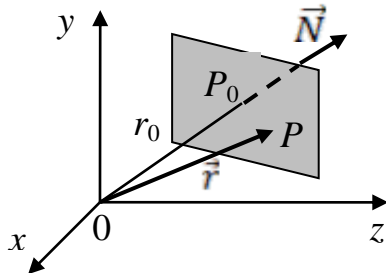


Рис. 2.18. Поширення фронту плоскої хвилі

Отже, у рівнянні плоскої хвилі (2.46) замість x слід записати скалярний добуток $r_0 = \vec{r}\vec{N}$:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp[j(\vec{k}\vec{r} - 2\pi vt)], \quad (2.47)$$

де \vec{k} – хвильовий вектор, довжина якого дорівнює хвильовому числу, а орієнтація вказує напрямок переміщення хвильового фронту, $\vec{k} = k\vec{N}$.

Хвильові фронти *сферичних хвиль* являють собою концентричні сфери. Аналіз цих хвиль зручно виконувати у сферичній системі координат r, θ, φ . Сферичні хвилі є таким розв'язком хвильового рівняння (2.38), який залежить лише від відстані r і не залежить від кутових координат θ, φ .

У сферичній системі координат радіальну частину оператора Лапласа можна записати у вигляді

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \vec{E}). \quad (2.48)$$

Тоді хвильове рівняння з урахуванням (2.48) матиме вигляд

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \vec{E}) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r \vec{E}). \quad (2.49)$$

Рівняння (2.49) збігається з рівнянням (2.38), якщо замінити \vec{E} на $(r \vec{E})$. Його розв'язок аналогічний виразу (2.47):

$$\vec{E}(r, t) = \frac{\vec{E}_0}{r} \exp[j(kr - 2\pi vt)] = \vec{E}(r) \exp(-j2\pi vt), \quad (2.50)$$

де \vec{E}_0 – амплітуда сферичної хвилі за $r = 1$; $\vec{E}(r)$ – змінна амплітуда сферичної хвилі, яка залежить лише від радіуса r ,

$$\vec{E}(r) = \frac{\vec{E}_0}{r} \exp(jkr). \quad (2.51)$$

Рівняння (2.50) описує монохроматичну сферичну хвилю, що поширюється від центра системи координат.

Амплітуда сферичної хвилі, що збігається до центра системи координат, описується функцією

$$\vec{E}(r) = \frac{\vec{E}_0}{r} \exp(-jkr). \quad (2.52)$$

2.9. Скалярні гармонічні хвилі. Рівняння Гельмгольца

Між амплітудами електричного E_0 і магнітного H_0 полів існує зв'язок: $E_0\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} = H_0\sqrt{\mu\mu_0}$. У межах скалярної теорії дифракції не розглядають взаємозв'язку між векторами електричного \vec{E} і магнітного \vec{H} полів за допомогою рівнянь Максвелла, а враховують лише скалярну амплітуду $V(x, y, z, t)$ одного з поперечних компонентів електричного або магнітного полів. Ця амплітуда задовольняє однорідному хвильовому рівнянню

$$\Delta V - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0, \quad (2.53)$$

де v – фазова швидкість, яка визначається за формулою (2.31).

Найбільш простим розв'язком цього рівняння є *скалярна монохроматична хвиля*, яку можна подати аналогічно рівнянню (2.44) або (2.50) у вигляді

$$V(\vec{r}, t) = V(\vec{r}) \exp(-j2\pi vt). \quad (2.54)$$

Функцію (2.54) називають комплексним *оптичним сигналом*.

Запишемо хвильове рівняння (2.53) для монохроматичної хвилі (2.54):

$$\Delta V(\vec{r}) \exp(-2\pi vt) - \frac{1}{v^2} V(\vec{r}) (-j2\pi v)^2 \exp(-j2\pi vt) = 0,$$

звідки

$$\Delta V(\vec{r}) + k^2 V(\vec{r}) = 0. \quad (2.55)$$

Вираз (2.55) називають *рівнянням Гельмгольца*, його розв'язок дає змогу визначити амплітуду поля $V(\vec{r})$ у довільній точці простору, яку задано радіусом-вектором $\vec{r} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0$, для монохроматичного світла. **Рівняння Гельмгольца являє собою хвильове рівняння для монохроматичних хвиль. Воно є основою скалярної теорії дифракції.**

2.10. Інтенсивність світла

Енергетичною характеристикою світлового поля є інтенсивність світла, яка визначається середнім потоком через одиничну площадку, що розташована перпендикулярно до напрямку розповсюдження світла.

В електродинаміці щільність потоку енергії електромагнітного поля визначається вектором Пойтінга

$$\vec{S} = [\vec{E} \times \vec{H}]. \quad (2.56)$$

Для плоскої монохроматичної хвилі (2.54), яку представимо як

$$E(t) = E_0 \cos \omega t, \quad (2.57)$$

модуль вектору \vec{S} можна подати у вигляді

$$S = |\vec{S}| = EH. \quad (2.58)$$

Із співвідношення (2.35) для вакууму маємо $H = E\sqrt{\varepsilon_0/\mu_0} = c\varepsilon_0 E$. Тоді (2.58) з урахуванням (2.57) можна записати у вигляді

$$S(t) = c\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2 \omega t = c\varepsilon_0 E_0^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\omega t \right). \quad (2.59)$$

Із функцій (2.57) і (2.59), графіки яких наведені на рис. 2.19, видно, що модуль вектору Пойтінга змінюється з подвоєною частотою 2ω . Наприклад, якщо частота хвилі видимого діапазону 10^{15} Гц, то енергія електромагнітного поля змінюється з частотою $2 \cdot 10^{15}$ Гц. Усі приймачі світла неспроможні зафіксувати зміну енергії світла з такою частотою, а реєструють її середнє значення.

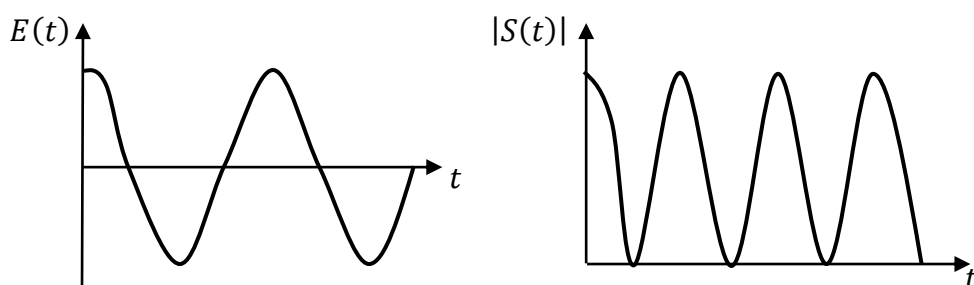


Рис. 2.19. Зміна амплітуди $E(t)$ і модуля вектору Пойтінга $|\vec{S}(t)|$ електромагнітної хвилі у часі

Виходячи із цього в оптиці в якості енергетичної величини світла використовується інтенсивність I , яка являє собою середнє значення за час спостереження t_0 модуля вектору Пойтінга, тобто

$$I = \langle S(t) \rangle_t = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} c \varepsilon_0 E_0^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\omega t \right) dt = \\ = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2 \left[1 + \frac{1}{2\omega t_0} (\cos 2\omega t_0 - 1) \right] \approx \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2. \quad (2.60)$$

Із формули (2.60) видно, що інтенсивність світла пропорційна квадрату амплітуди світлової хвилі. Фізично під інтенсивністю світла розуміють середній в часі світловий потік через одиничну площадку, яка перпендикулярна до напрямку розповсюдження світла.

2.11. Оптичні спектри. Біле світло

Раніше ми розглядали світлове поле у вигляді монохроматичної хвилі, яка триває нескінченно довго. Амплітуда такої хвилі описується функцією

$$E(t, x) = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (2.61)$$

В природі такого випромінювання не існує. Справа в тому, що любе джерело світла складається із великої кількості атомів або молекул, які випромінюють світло незалежно один від одного з різними амплітудами E_{0i} , частотами ω_i (довжинами хвиль) і початковими фазами φ_{0i} . Тому випромінювання світла можна наближено представити як хаотичну суміш незгоджених монохроматичних хвиль з різними амплітудами і частотами. Таке наближення не стосується лазерних джерел випромінювання.

Сукупність монохроматичних хвиль (дискретну або неперервну), які випромінює джерело світла, називають *спектром* цього джерела. Математично таку сукупність можна представити у вигляді:

- для дискретного спектра

$$E_r = \sum_i E_{0i}(\omega_i) \cos(\omega_i t + \varphi_{0i}), \quad (2.62)$$

де $E_{0i}(\omega_i)$ – амплітуда монохроматичної хвилі з частотою ω_i .

- для неперервного спектра

$$E_r = \int_0^{\infty} E_0(\omega) \cos(\omega t) d\omega, \quad (2.63)$$

де $E_0(\omega)d\omega$ – амплітуда хвилі в інтервалі частот $d\omega$.

Джерелами дискретного спектра являються газорозрядні лампи, неперервного спектра – лампи розжарювання.

Оптичні спектри можна отримати і дослідити за допомогою монохроматорів, спектрофотометрів, інтерферометрів і фільтрів. Основним елементом таких приладів є, як правило, призми і дифракційні ґратки.

Біле світло являється складним оптичним випромінювання Сонця, ламп розжарювання. Спектр білого світла являється неперервним і заповнює увесь видимий діапазон електромагнітного випромінювання з довжинами хвиль від 380 нм до 780 нм. Різні довжини хвиль видимого діапазону, а точніше їх частоти, характеризуються відповідним кольором. Ньютоном було доведено, що біле світло за допомогою призми розкладається у сім кольорів веселки: червоний, помаранчевий, жовтий, зелений, голубий, синій і фіолетовий.

З фізіологічної точки зору біле світло являє собою електромагнітне випромінювання, що складається із семи кольорів веселки в пропорції, яка викликає в нормальному оці біле кольорове відчуття. Еквівалентне білому світлу фізіологічне відчуття можна отримати від трьох монохроматичних кольорів (червоний, зелений і синій) *RGB*, змішаних в певному відношенні.

Математично спектр випромінювання визначається як розподіл амплітуди або інтенсивності випромінювання по частотам або довжинам хвиль. Він представляється графіком однієї із функцій $E_0(\omega)$, $E_0(\lambda)$ або $I(\omega)$, $I(\lambda)$. Необхідно відзначити, що найбільш стабільним параметром монохроматичної хвилі є її частота ν або кругова частота

$$\omega = 2\pi\nu. \quad (2.64)$$

Вона залишається незмінною в різних середовищах, тоді як довжина хвилі залежить від показника заломлення n середовища

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{c}{n\nu} = \frac{2\pi c}{n\omega}. \quad (2.65)$$

В залежності від природи випромінювача спектри світла бувають неперервними, лінійчатими і смугастими. Неперервні спектри випромінювання створюють нагріті тверді тіла або гази при високому тиску. Лінійчаті спектри випромінюють збуджені гази (гелій, неон) або пари металів (ртуть, натрій). Смугові спектри випромінюють збуджені молекули газів при значних температурі і тиску.

Лінійчаті спектри мають вигляд вузьких ліній різного кольору, що називаються *спектральними лініями*, які займають певне положення на шкалі довжин хвиль, що строго визначається хімічним складом джерела випромінювання. Тому спектральні лінії використовуються як джерела монохроматичного випромінювання. Для цього достатньо необхідну спектральну лінію відокремлюють від інших за допомогою діафрагми.

Найбільш яскраві спектральні лінії газів і парів металів, які легко отримати, прийняті в оптиці в якості стандартних монохроматичних джерел випромінювання. Такі спектральні лінії називаються *лініями Фраунгофера*. В табл. 2.1 наведені позначення, довжина хвилі, колір і хімічний елемент для спектральних ліній видимого діапазону, які найбільш часто використовуються в оптиці. Показники заломлення оптичного скла вимірюються для довжини хвилі 546,1 нм, яка відповідає *e*-лінії ртуті.

Крім спектрів випромінювання існують і спектри поглинання, які утворюються при проходженні неперервного спектра, наприклад білого світла, через прозорі середовища. В результаті на фоні суцільного спектру виникають темні лінії або смуги поглинання. Найбільш характерним лінійчатим спектром поглинання є спектр випромінювання від Сонця, який виникає внаслідок поглинання випромінювання атмосферою Землі. В лінійчатих спектрах випромінювання і поглинання спектральні лінії знаходяться в певних місцях, що використовується для визначення хімічного складу речовини.

Джерела монохроматичного випромінювання

Позначення лінії	Довжина хвилі, нм	Колір спектральної лінії	Хімічний елемент
A'	766,5	темно-червоний	K – калій
C	656,3	червоний	H – водень
C'	643,8	червоний	Cd – кадмій
D	589,3	жовтий	Na – натрій
d	587,6	жовтий	He – гелій
e	546,1	зелений	Hg – ртуть
F	486,1	голубий	H – водень
F'	480,0	синій	Cd – кадмій
g	435,8	фіолетовий	Hg – ртуть
G'	434,1	фіолетовий	H – водень
h	404,7	фіолетовий	Hg – ртуть

2.12. Цуги хвиль

Розглянута раніше модель монохроматичного випромінювання справедлива для випадку, коли випромінювання триває нескінченно довго. Атоми або молекули випромінюють світло протягом невеликого часу на протязі $\tau = 10^{-8}$ с. Частина (кусок) гармонічного коливання (2.46) протягом певного часу τ називається *цугом хвилі*. Окремі цуги мають різні початкові фази, орієнтації площини і напрямки розповсюдження. Тому випромінювання одного атома можна представити у вигляді потоку нерегулярних цугів (рис. 2.20).

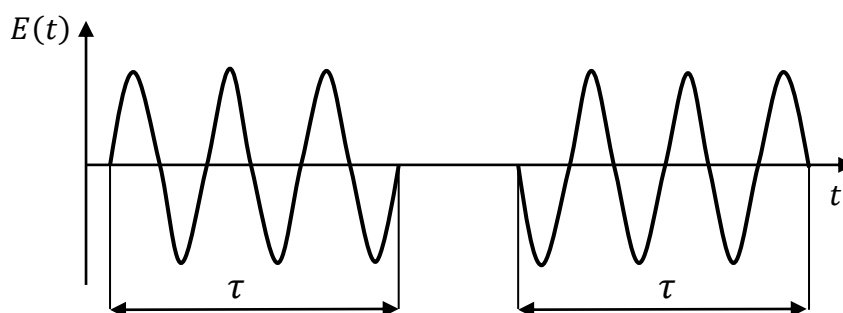


Рис. 2.20. Цуги монохроматичних хвиль

Розглянемо математичну модель окремого цуга у вигляді гармонічного коливання з частотою ω_0 і тривалістю τ . В одному цугі з частотою $5 \cdot 10^{15}$ Гц розміщено $5 \cdot 10^7$ періодів хвилі, а довжина цуга у просторі становить $l_c = c\tau = 3$ м. Тривалість і довжину цуга називають *часом і довжиною когерентності випромінювання*.

Математично цуг описується функцією (рис. 2. 21).

$$E(t) = \begin{cases} E_0 \exp(j\omega_0 t), & \text{коли } -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2}; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (2.66)$$

Представимо функцію (2.66) у вигляді інтеграла Фур'є

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) \exp(j\omega t) d\omega, \quad (2.67)$$

де $E(\omega)$ – спектр функції $E(t)$,

$$E(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) \exp(-j\omega t) dt. \quad (2.68)$$

Після підстановки (2.66) до (2.68) отримаємо

$$\begin{aligned} E(\omega) &= \frac{E_0}{2\pi} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \exp[j(\omega_0 - \omega)t] dt = \frac{E_0}{2\pi} \frac{1}{j(\omega_0 - \omega)} \exp[j(\omega_0 - \omega)t] \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \\ &= \frac{E_0}{2\pi} \frac{2}{(\omega_0 - \omega)} \sin \left[(\omega_0 - \omega) \frac{\tau}{2} \right] = \frac{E_0 \tau}{2\pi} \frac{\sin \left[(\omega_0 - \omega) \frac{\tau}{2} \right]}{(\omega_0 - \omega) \frac{\tau}{2}}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Інтенсивність кожної гармонічної складової цуга визначимо за формулою (2.60)

$$I(\omega) = \left(\frac{\tau}{2\pi} \right)^2 I_0 \left\{ \frac{\sin \left[(\omega_0 - \omega) \frac{\tau}{2} \right]}{(\omega_0 - \omega) \frac{\tau}{2}} \right\}^2, \quad (2.70)$$

де $I_0 = c\epsilon_0 E_0^2 / 2$ – інтенсивність випромінювання цуга.

Функція (2.70) називається *спектром випромінювання цуга, або контуром спектральної лінії*. Знайдемо максимум цієї функції, використовуючи границю

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, коли $\omega = \omega_0$. Тоді

$$I_{max}(\omega = \omega_0) = \left(\frac{\tau}{2\pi} \right)^2 I_0. \quad (2.71)$$

Графік нормованої функції наведено на рис. 2.22. Аналіз функції (2.70) показує, що спектр цуга має головний максимум, коли $\omega = \omega_0$, і вторинні максимуми малої інтенсивності, які можна на враховувати. Тому вважають, що спектр цуга зосереджений в межах головного максимуму. Ширину спектра головного максимуму знаходимо із умови $I(\omega = \omega_0 + \Delta\omega/2) = 0$. Звідки

$$\sin^2 \left[\left(\omega_0 - \omega - \frac{\Delta\omega}{2} \right) \frac{\tau}{2} \right] = 0; \Rightarrow \frac{\sin \Delta\omega\tau}{4} = 0; \Rightarrow \frac{\Delta\omega\tau}{4} = \pi.$$

$$\Delta\omega = 2(\omega_0 - \omega) = \frac{4\pi}{\tau}. \quad (2.72)$$

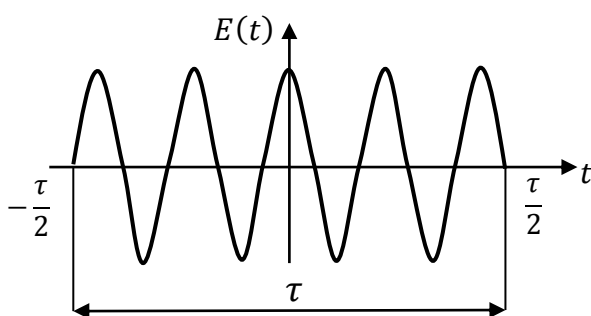


Рис. 2.21. Математична модель цуга

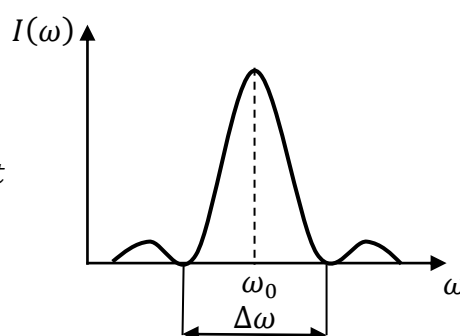


Рис. 2.22. Спектр цуга

Із формули (2.72) видно, що збільшення тривалості цуга призводить до зменшення ширини спектра випромінювання. Наприклад, якщо $\tau = 10^{-8}$ с, то $\Delta\omega = 4\pi 10^{-8}$ рад/с. Для строго монохроматичного випромінювання, коли $\omega = \omega_0$, а $\Delta\omega = 0$, тривалість цуга повинна бути нескінченною. Випромінювання, в якого $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1$, називається *квазімонохроматичним*.

2.13. Групова швидкість світла

Ідеальна монохроматична світлова хвиля

$$E(x, t) = E_0 \exp[j(\omega t - kx)] = E_0 \exp \left[j\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right] \quad (2.73)$$

розповсюджується в середовищі із фазовою швидкістю

$$v = \frac{c}{n} = \frac{\omega}{k} \quad (2.74)$$

і має довжину хвилі

$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu} = \frac{2\pi v}{\omega}. \quad (2.75)$$

Реальна квазімонохроматична хвиля, яку випромінює атом, являє собою групу монохроматичних хвиль з частотами, близькими до основної частоти ω_0 . В вакуумі ($n = 1$) усі хвилі, що складають групу, розповсюджуються з однаковою швидкістю c і проходять за час t однакові відстані. При цьому форма світлового імпульсу (цуга) не деформується, а сам цуг розповсюджується із швидкістю c .

В середовищах, яким властива дисперсія, показник заломлення залежить від довжини хвилі $n(\lambda)$ або від частоти $n(\omega)$. Тому монохроматичні складові групи хвиль будуть мати різні фазові швидкості $v(\omega)$ і за однаковий час будуть проходити різні відстані, що призводить до деформації цуга.

Визначимо швидкість розповсюдження інтенсивності групи хвиль, яка відповідає максимальній результуючій амплітуді групи хвиль. Для спрощення математичних перетворень розглянемо дві монохроматичні хвилі з близькими частотами і однаковими амплітудами

$$E_1 = E_0 \cos[j(\omega_1 t - k_1 x)] \text{ і } E_2 = E_0 \cos[j(\omega_2 t - k_2 x)], \quad (2.76)$$

де $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$; $\Delta k = k_1 - k_2$; $\omega_1 \approx \omega_2$; $k_1 \approx k_2$.

Результуюча амплітуда

$$\begin{aligned} E_r &= E_1 + E_2 = E_0 \cos(\omega_1 t - k_1 x) + E_0 \cos(\omega_2 t - k_2 x) = \\ &= 2E_0 \cos\left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{k_1 - k_2}{2}x\right] \cos\left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{k_1 + k_2}{2}x\right] = \\ &= A_r \cos[\omega_1 t - k_1 x], \end{aligned} \quad (2.77)$$

де A_r – амплітуда групи хвиль, яка визначає інтенсивність світла, $I_r \sim |A_r|^2$,

$$A_r = 2E_0 \cos\left[\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right]. \quad (2.78)$$

На рис. 2.23 наведені графіки функцій $E_1(t)$, $E_2(t)$, $E_r(t)$.

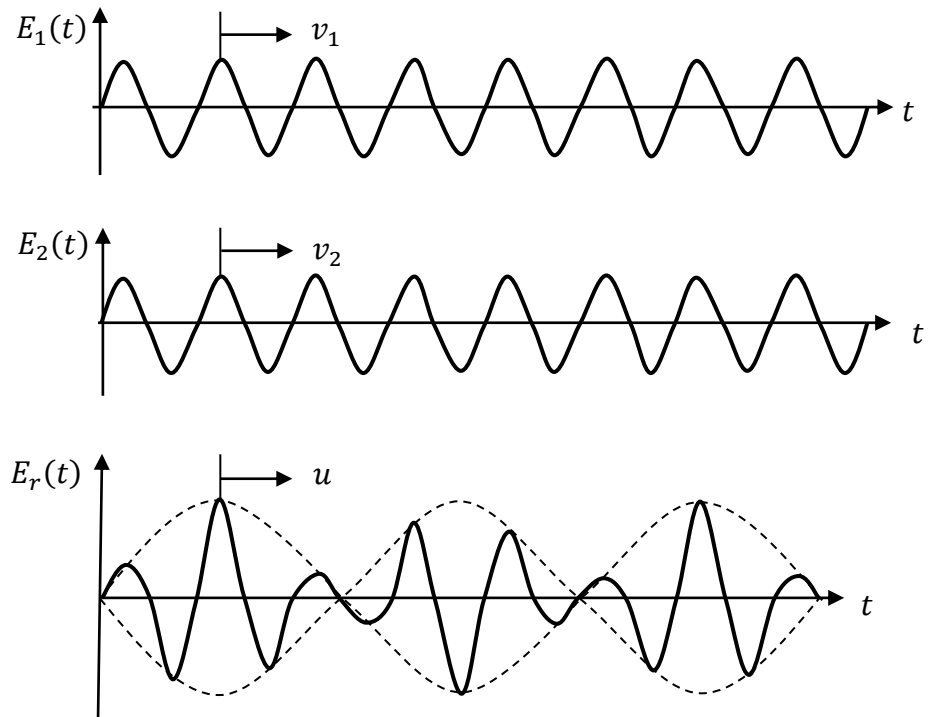


Рис. 2.23. До визначення групової швидкості розповсюдження світла

Амплітуда (2.78) має максимальне значення, коли

$$\cos \left[\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x \right] = 1 \Rightarrow \frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x = 0. \quad (2.79)$$

Із рівняння (2.79) знаходимо групову швидкість

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (2.80)$$

Встановимо взаємозв'язок між груповою і фазовою швидкостями, використовуючи формули (2.74) і (2.80).

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(vk)}{dk} = \frac{vdk + kdv}{dk} = v + k \frac{dv}{dk}, \quad (2.80)$$

де $k = 2\pi/\lambda$ – хвильове число,

$$dk = -\frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda.$$

Тоді

$$u = v - \frac{2\pi}{\lambda} \frac{dv}{\frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \quad (2.81)$$

Вираз (2.81) називається *формулою Релея*.

Запишемо формулу (2.81) для середовища з дисперсією $dn/d\lambda$.

$$\frac{dv}{d\lambda} = \frac{dv}{dn} \frac{dn}{d\lambda} = \frac{d\left(\frac{c}{n}\right)}{dn} \frac{dn}{d\lambda} = \frac{\left(\frac{-c}{n^2}\right) dn}{dn} \frac{dn}{d\lambda} = \frac{-c}{n^2} \frac{dn}{d\lambda}.$$

$$u = v + \frac{c}{n^2} \frac{dn}{d\lambda} = v \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda}\right). \quad (2.82)$$

Проаналізуємо співвідношення (2.82) для різних середовищ.

1. Дисперсія відсутня, коли $\frac{dn}{d\lambda} = 0$. В цьому випадку групова швидкість дорівнює фазовій швидкості, $u = v$.
2. Для середовища з нормальною дисперсією, коли $\frac{dn}{d\lambda} < 0$, групова швидкість буде меншою, ніж фазова швидкості, $u < v$.
3. Для середовища з аномальною дисперсією, коли $\frac{dn}{d\lambda} > 0$, групова швидкість буде більшою, ніж фазова швидкості, $u > v$.

2.14. Ефект Доплера

Ефект Доплера проявляється в зміні частоти коливань або довжини світлової хвилі, яку сприймає спостерігач, якщо джерело випромінювання і спостерігач рухаються відносно один одного. Цей ефект названо в честь австрійського фізика К. Доплера, який перше в 1842 році теоретично обґрунтував його в оптиці і акустиці.

Для пояснення цього ефекту розглянемо джерело, яке випромінює світлові імпульси з періодом λ_0 (рис. 2.24). Якщо спостерігач і джерело випромінювання нерухомі, то спостерігач сприймає ці імпульси з періодом T_0 і частотою ν_0 ,

$$T_0 = \frac{\lambda_0}{c} ; \quad \nu_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{c}{\lambda_0}. \quad (2.83)$$

Якщо спостерігач рухається до джерела випромінювання з швидкістю v , то за період T_0 він зміститься на відстань vT_0 і буде сприймати імпульси з періодом $\lambda = \lambda_0 - vT_0$ (рис. 2.24). Тоді часовий період сприймаючих імпульсів буде дорівнювати $T = \lambda/c$, а частота

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_0 - \nu T} = \frac{c}{\lambda_0 \left(1 - \frac{\nu}{c} T\right)} = \frac{\nu_0}{\left(1 - \frac{\nu}{c}\right)}. \quad (2.84)$$

Із формули (2.84) маємо, що для випадку, коли джерело випромінювання наближається до спостерігача, то $\nu > 0$ і $\nu > \nu_0$, тобто сприймаюча частота збільшується. Для випадку, коли джерело випромінювання віддаляється від спостерігача, то $\nu < 0$ і $\nu < \nu_0$, тобто сприймаюча частота зменшується.

Строго ефект Допплера можна пояснити, використовуючи перетворення Лоренца із теорії відносності. Розглянемо дві системи координат x, y, z, t і x', y', z', t' , які пов'язані з джерелом випромінювання і спостерігачем відповідно. Якщо ці системи рухаються відносно одна одній з постійною швидкістю ν , то такі системи називаються *інерціальними*.

Нехай напрямок швидкості ν співпадає з віссю x (рис. 2.25). Відповідно до перетворення Лоренца між системами координат існує зв'язок:

$$x = \frac{x' + \nu t'}{\sqrt{1 - \frac{\nu^2}{c^2}}}; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \frac{t' + \left(\frac{\nu}{c^2}\right)x'}{\sqrt{1 - \frac{\nu^2}{c^2}}}. \quad (2.85)$$

Запишемо рівняння плоскої монохроматичної хвилі, які створює джерело випромінювання, що розташоване в системі координат $xuzt$:

$$E(x, t) = E \exp \left[j 2 \pi \nu \left(t - \frac{x}{c} \right) \right]. \quad (2.86)$$

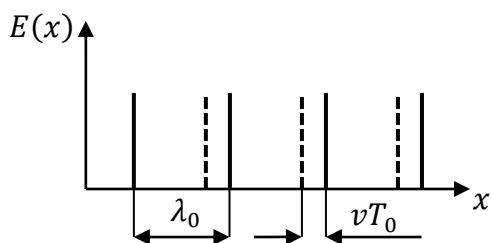


Рис. 2.24. Пояснення ефекту Допплера

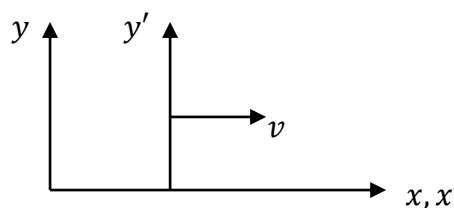


Рис. 2.25. Інерціальні системи координат

Підставимо в рівняння (2.86) перетворення Лоренца (2.85).

$$\begin{aligned}
E(x, t) &= E \exp \left[j2\pi v \left(\frac{t' + \left(\frac{v}{c^2}\right)x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{1}{c} \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \right] = \\
&= E \exp \left[j2\pi \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(t' + \frac{v}{c^2} x' - \frac{x'}{c} - \frac{v}{c} t' \right) \right] = \\
&= E \exp \left[j2\pi \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(1 - \frac{v}{c} \right) \left(t' - \frac{x'}{c} \right) \right]. \tag{2.87}
\end{aligned}$$

Рівняння світлової хвилі (2.86) в системі координат $x'y'z't'$ має вигляд

$$E(x', t') = E \exp \left[j2\pi v' \left(t' - \frac{x'}{c} \right) \right]. \tag{2.89}$$

Рівняння (2.86) і (2.89) описують одну і ту ж хвилю. Тому із порівняння цих рівнянь маємо

$$v' = v \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{2.90}$$

Формула (2.90) описує поздовжній ефект Доплера (приймач випромінювання рухається уздовж осі x). Для невеликої відносної швидкості приймача, коли виконується умова $v \ll c$, формула (2.90) набуває вигляду

$$v' = v \left(1 - \frac{v}{c} \right). \tag{2.91}$$

Проаналізуємо формулу (2.91), використовуючи співвідношення

$$\lambda v = c \Rightarrow \lambda \Delta v + v \Delta \lambda = 0 \Rightarrow \frac{\Delta v}{v} = -\frac{\Delta \lambda}{\lambda}.$$

Тоді

$$\Delta v = v' - v = -v \frac{v}{c}, \text{ або } \Delta \lambda = \lambda' - \lambda = \lambda \frac{v}{c}. \tag{2.92}$$

Із співвідношень (2.92) маємо:

1. Якщо приймач віддаляється від джерела випромінювання, то

$$v > 0, \Delta v < 0 \Rightarrow v' < v, \Delta \lambda > 0 \Rightarrow \lambda' > \lambda. \tag{2.93}$$

Це означає, що частота випромінювання, яке сприймає приймач, зменшується, а довжина хвилі збільшується. Таке явище називається «червоним» зміщенням.

2. Якщо приймач наближається до джерела випромінювання, то

$$v < 0, \Delta\nu > 0 \Rightarrow \nu' > \nu, \Delta\lambda < 0 \Rightarrow \lambda' < \lambda. \quad (2.94)$$

Це означає, що частота випромінювання, яку сприймає приймач, збільшується, а довжина хвилі зменшується. Таке явище називається «фіолетовим» зміщенням.

Аналогічно можна розглянути і поперечний ефект Доплера, коли приймач випромінювання переміщується з відносною швидкістю v в напрямку перпендикулярному до осі x , на якій розташовані джерело і приймач випромінювання. За таких умов частота, яку сприймає приймач, визначається за формулою

$$\nu' = \nu \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.95)$$

Ефект Доплера спостерігається і застосовується:

1. При астрономічних спостереженнях для визначення швидкості переміщення зірок відносно Землі. Із формули (2.92) маємо

$$v = c \frac{\Delta\lambda}{\lambda}. \quad (2.96)$$

Дослідження спектра випромінювання зірок свідчать про те, що завжди спостерігається «червоне» зміщення. Це свідчить про розширення Всесвіту.

2. Для вимірювання швидкості руху об'єктів спостереження на основі інтерференційних методів.

3. Допплерівське розширення спектрів випромінювання атомів і молекул при їх хаотичному русі.

2.15. Основи класичної теорії електромагнітного випромінювання

2.15.1. Випромінювання лінійного гармонічного осцилятора (диполя)

В класичній (неквантовій) електронній теорії випромінювання атома розглядається на основі моделі лінійного гармонічного осцилятора – випромінюючого диполя. Під диполем розуміється система із двох рівних по величині і протилежних по знаку електричних зарядів, які знаходяться на малій відстані один від одного. Добуток величини заряду одного із зарядів на відстань між ними називається *дипольним моментом*. Нейтральний ізольований атом можна представити сукупністю диполів, що коливаються, випромінювання яких еквівалентно випромінюванню атома.

Розглянемо найбільш простий випадок – випромінювання електрона, який здійснює коливання під дією сили збудження. В якості моделі такого випромінювача виберемо атом водню, який складається із одного валентного електрона з масою m і зарядом e і нерухомого ядра. Нехай на атом водню, що знаходиться у вакуумі, діє світлова плоско поляризована електромагнітна хвиля. Електричне поле \vec{E} цієї хвилі відхиляє електрон із стану рівноваги на величину \vec{r} .

Виберемо систему координат x, y, z , центр якого співпадає з ядром водню, а вісь z направимо уздовж вектору \vec{r} (рис. 2.26). Під дією пружної сили з коефіцієнтом пружності b , яка повертає електрон до ядра,

$$\vec{F}_1 = -b\vec{r} \quad (2.97)$$

електрон здійснює гармонічні коливання уздовж осі z біля початку координат.

Таким чином, коливання електрона визначається функцією $\vec{r}(t)$. Для знаходження цієї функції скористаємося законом Ньютона

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -b\vec{r}. \quad (2.98)$$

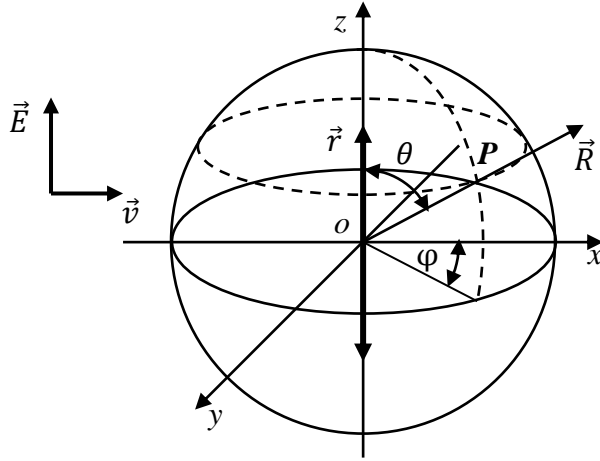


Рис. 2.26. Модель випромінювання гармонічного осцилятора

Розв'язок диференційного рівняння (2.98) будемо шукати у вигляді

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 e^{j\omega_0 t}. \quad (2.99)$$

Підставимо (2.99) до (2.98)

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -m\omega_0^2 \vec{r}_0 e^{j\omega_0 t} = -b\vec{r}_0 e^{j\omega_0 t}. \quad (2.100)$$

Звідки

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{b}{m}}. \quad (2.101)$$

В рівнянні (2.98) параметр ω_0 визначає власну частоту коливання диполя.

Зміщення електрона з зарядом e на величину $\vec{r}(t)$ створює змінний дипольний момент атома

$$\vec{p}(t) = e\vec{r}(t), \quad (2.102)$$

напрямок якого співпадає з віссю z .

Із курсу «Фізика» відомо [9], що осцилятор, дипольний момент якого змінюється за гармонічним законом (2.99), створює електромагнітні хвилі, в яких напруженості електричного \vec{E} і магнітного \vec{H} полів взаємно перпендикулярні. В точці $P(r, \theta, \varphi)$ сферичної системи координат електромагнітне поле описується функціями (рис. 2.26):

$$\vec{H}(t) = \frac{1}{4\pi c^2 R} \left[\frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} \left(t - \frac{R}{c} \right) \times \vec{R}_0 \right]; \quad (2.103)$$

$$\vec{E}(t) = [\vec{H}(t) \times \vec{R}_0], \quad (2.104)$$

де θ і φ – полярний і аксіальні кути відповідно, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$; R – відстань від диполя до точки $P(r, \theta, \varphi)$, де визначається поле, $0 \leq R < \infty$; $\vec{R}_0 = \vec{R}/R$.

Визначимо взаємну орієнтацію векторів \vec{E} і \vec{H} стосовно системи координат, що наведені на рис. 2.26. Із співвідношення (2.100) маємо, що

$$\frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} = -\omega_0^2 \vec{p}. \quad (2.105)$$

Це означає, що вектори $d^2 \vec{p}/dt^2$ і \vec{p} направлені в протилежних напрямках уздовж осі z .

Розглянемо перетин сфери меридіональною площиною, яка проходить через точку P (рис. 2.27). Вектори \vec{R}_0 і $d^2 \vec{p}/dt^2$ лежать в цій площині. Згідно (2.103) вектор \vec{H} повинен бути перпендикулярним до площини перетину в напрямку глядача (по дотичній до паралелі в точці P). Тоді із (2.104) маємо, що вектор \vec{E} направлений по дотичній до меридіану в точці P ввєрх (згідно з правою системою векторів \vec{E} , \vec{H} і \vec{R}_0).

Запишемо модулі векторів для вакууму, використовуючи (2.103), (2.105) і враховуючи, що $|\vec{R}_0| = 1$.

$$E(t) = \frac{1}{c\epsilon_0} H(t) = \frac{1}{4\pi c^2 \epsilon_0 R} \left| \frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} \left(t - \frac{R}{c} \right) \right| \sin\theta = \frac{\omega_0^2}{4\pi c^2 \epsilon_0 R} \left| \vec{p} \left(t - \frac{R}{c} \right) \right| \sin\theta. \quad (2.106)$$

Аналіз виразів (2.104) і (2.106) показує, що

1. Вектори \vec{E} і \vec{H} лежать в площині, дотичній до сферичної хвильової поверхні в точці спостереження P .
2. Коли $\theta = 0$, $E = H = 0$, тобто диполь не випромінює електромагнітну енергію в напрямку своєї вісі.
3. Коли $\theta = \pi/2$, E і H мають максимальне значення, тобто максимальне випромінювання відбувається в напрямку, перпендикулярному до вісі диполя.

2.15.2. Інтенсивність і тривалість випромінювання диполя

Для знаходження інтенсивності світла, що випромінює диполь, скористаємося формулою (2.56) для вектору Пойтінга \vec{S} , яка визначає щільність потоку енергії електромагнітного поля. Для електромагнітного поля (2.103) і (2.104), яке створює диполь, модуль вектора \vec{S} можна подати у вигляді

$$S(t) = |\vec{S}| = |EH| = c\varepsilon_0 |E(t)|^2 = \frac{\omega_0^4}{4\pi c^3 R^2} \sin^2 \theta \left| \vec{p} \left(t - \frac{R}{c} \right) \right|^2. \quad (2.107)$$

Визначимо інтенсивність випромінювання диполя як середнє значення функції $S(t)$ в часі. Якщо дипольний момент змінюється в часі по гармонічному закону (2.99), то аналогічно (2.60) інтенсивність випромінювання диполя визначається як

$$I = \langle S(t) \rangle_t = \frac{\omega_0^4 p_0^2}{8\pi c^3 R^2} \sin^2 \theta. \quad (2.108)$$

На рис. 2.28 наведена залежність інтенсивності розсіювання I від полярного кута θ (індикатриса розсіювання). Із формули (2.108) видно, що диполь випромінює монохроматичну хвилю, інтенсивність якої пропорційна ω_0^4 .

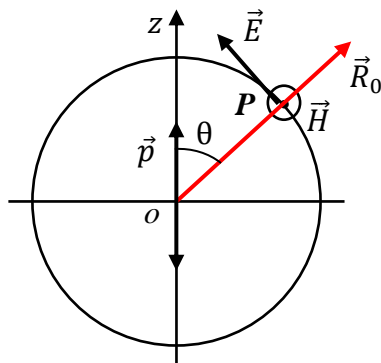


Рис. 2.27. Меридіональна перетин сферичної системи координат

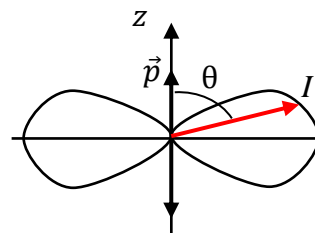


Рис.2.28. Індикатриса розсіювання випромінювання диполем

Під час випромінювання диполь втрачає енергію \mathcal{E} . Знайдемо закон зміни його енергії в часі $\mathcal{E}(t)$. Для цього запишемо рівняння зменшення енергії за одиницю часу.

$$\frac{d\mathcal{E}(t)}{dt} = -\Phi, \quad (2.109)$$

де Φ – сумарний потік випромінювання диполя в усіх напрямках. Для знаходження цього потоку необхідно розрахувати інтеграл від функції (2.108) по сферичній поверхні (рис. 2.26), тобто

$$\Phi = \iint I ds = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi I d\varphi R^2 \sin\theta d\theta. \quad (2.110)$$

Після підстановки (2.108) до інтеграла (2.110) маємо

$$\Phi = \frac{\omega_0^4 p_0^2}{3c^3}. \quad (2.111)$$

Тоді рівняння (2.109) матиме вигляд

$$\frac{d\mathcal{E}(t)}{dt} = -\frac{\omega_0^4 p_0^2}{3c^3}. \quad (2.112)$$

З іншого боку, сумарна енергія осцилятора (потенціальна і кінетична) визначаються за формулою

$$\mathcal{E} = \frac{m\omega_0^2 p_0^2}{2e^2}, \quad (2.113)$$

де m і e – маса і заряд електрона відповідно. Звідки

$$\omega_0^2 p_0^2 = \frac{2e^2}{m} \mathcal{E}. \quad (2.114)$$

Після підстановки (2.114) до (2.112) отримаємо диференціальне рівняння

$$\frac{d\mathcal{E}(t)}{dt} = -\frac{2\omega_0^2}{3c^3 m} \mathcal{E} = -\gamma \mathcal{E}, \text{ або } \frac{d\mathcal{E}}{\mathcal{E}} = -\gamma dt, \quad (2.115)$$

де γ – коефіцієнт затухання,

$$\gamma = \frac{2\omega_0^2}{3c^3 m}. \quad (2.116)$$

Інтегруємо це рівняння в межах: для лівої частини – від $\mathcal{E}(0)$ до $\mathcal{E}(t)$; для правої частини – 0 від до t . В результаті отримаємо функцію

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0)e^{-\gamma t}. \quad (2.117)$$

Графік функції $\mathcal{E}(t)$ наведено на рис. 2.29. Залежність (2.117) свідчить про те, що енергія випромінювання диполя зменшується по експоненціальному закону з коефіцієнтом затухання γ . За час $\tau = 1/\gamma$ енергія зменшується в $e = 2,73$ разів. Величину τ називають *часом життя диполя* при вільному

випромінюванні. Для частоти ω_0 , яка відповідає середині видимого діапазону, $\tau \approx 10^{-8}$ с.

Таким чином, дійсне випромінювання осцилятора не являється гармонічним, а являє собою повільно затухаюче коливання з частотою ω_0 , яке можна представити у вигляді рівняння

$$E(t) = E_0 e^{-\gamma t/2} e^{j\omega_0 t}. \quad (2.118)$$

Таке випромінювання з довільною початковою фазою $\varphi_0(t)$

$$E(t) = E_0 \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right) \exp\{j[\omega_0 t + \varphi_0(t)]\} \quad (2.119)$$

являється більш точною моделлю цуга.

2.15.3. Ширина спектральної лінії випромінювання диполя

Випромінювання диполя (2.118) не являється строго монохроматичним і може бути представлено групою хвиль з вузьким неперервним спектром, графік якого називається *контуром спектральної лінії*.

Знайдемо формулу спектральної лінії $I(\omega)$, для чого використаємо перетворення Фур'є, яке описує спектр функції $E(t)$.

$$E(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) \exp(-j\omega t) dt. \quad (2.120)$$

Підставимо амплітуду світлового поля (2.118), яку випромінює осцилятор, до інтегралу (2.120) з урахуванням того, що $E(t) = 0$, коли $t < 0$.

$$\begin{aligned} E(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} E_0 e^{-\gamma t/2} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{E_0}{2\pi} \int_0^{\infty} \exp\left\{\left[-j(\omega - \omega_0) - \frac{\gamma}{2}\right]t\right\} dt = \frac{E_0}{2\pi} \frac{1}{j(\omega - \omega_0) - \frac{\gamma}{2}}. \end{aligned} \quad (2.121)$$

Знайдемо спектральний розподіл інтенсивності $I(\omega)$, який пропорційний квадрату відповідного спектра хвилі $E(\omega)$:

$$I(\omega) = a|E(\omega)|^2 = aE(\omega)E^*(\omega) = a\left(\frac{E_0}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}. \quad (2.122)$$

Коефіцієнт пропорційності знаходиться із умови, що сума спектральних складових інтенсивності $I(\omega)$ дорівнює повній інтенсивності випромінювання I_0 , тобто

$$I_0 = \int_0^{\infty} I(\omega) d\omega. \quad (2.123)$$

Після підстановки (2.122) до (2.123) маємо

$$I_0 = \int_0^{\infty} I(\omega) d\omega = a \left(\frac{E_0}{2\pi}\right)^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}} d\omega = a \left(\frac{E_0}{2\pi}\right)^2 \frac{2\pi}{\gamma}. \quad (2.124)$$

Звідки

$$a = \frac{2\pi}{\gamma} I_0. \quad (2.125)$$

Тоді вираз (2.122) матиме вигляд

$$I(\omega) = I_0 \frac{\gamma}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}. \quad (2.126)$$

Графік контуру спектральної лінії наведено на рис. 2.30. Аналіз функції (2.126) показує, що вона має максимальне значення, коли $\omega = \omega_0$.

$$I_{max}(\omega = \omega_0) = I_0 \frac{2}{\pi\gamma}. \quad (2.127)$$

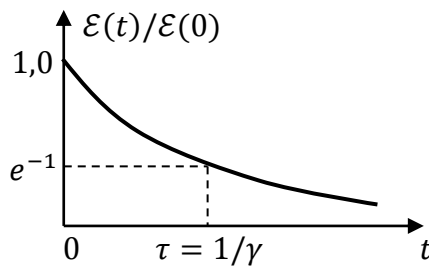


Рис. 2.29. Зменшення енергії під час випромінювання осцилятора

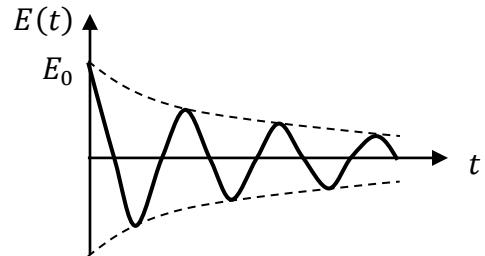


Рис. 2.30. Спектральна лінія випромінювання диполя

Ширина контуру $\Delta\omega_{0,5}$ на рівні $0,5I_{max}$ називається *природньою шириною спектральної лінії* (рис. 2.30). Знайдемо величину $\Delta\omega_{0,5}$ із рівняння

$$I\left(\omega = \omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega_{0,5}\right) = I_0 \frac{\gamma}{2\pi} \frac{1}{\left(\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega_{0,5} - \omega_0\right)^2 + \frac{\gamma^2}{4}} = \frac{1}{2} I_{max} = \frac{1}{2} I_0 \frac{2}{\pi\gamma}.$$

Звідки

$$\Delta\omega_{0,5} = \gamma = \frac{2\omega_0^2}{3c^3m} = \frac{1}{\tau}. \quad (2.128)$$

Таким чином, природня ширина спектральної лінії випромінювання при гармонічному русі електрона атома дорівнює коефіцієнту затухання γ і оберненому значенню часу випромінювання осцилятора τ .

Природня ширина спектральної лінії в довжинах хвиль визначається за формулою

$$\Delta\lambda_{0,5} = \frac{2\pi c}{\omega_0^2} \Delta\omega_{0,5}. \quad (2.129)$$

Для середини видимого діапазону вона становить $\Delta\lambda_{0,5} = 10^{-4}\text{\AA}$. Спектральні лінії, які отримані в реальних умовах, мають ширину смуги на 2...3 порядку більшою за природню ширину. Розширення спектральних ліній відбувається за рахунок нагріву газу і ефекту Допплера.

2.16. Приклади розрахунку параметрів електромагнітного поля

Приклад 2.1. Плоска електромагнітна хвиля падає нормально на поверхню плоскопаралельного шару немагнітної речовини товщиною h , діелектрична проникність якого експоненційно падає від значення ε_1 на передній поверхні до ε_2 на задній. Знайдіть час поширення такої хвилі через цей шар.

Розв'язання. Швидкість поширення фази хвилі згідно з виразом (2.25) $v = c/\sqrt{\mu\varepsilon}$. Оскільки середовище немагнітне, то $\mu = 1$. За умовою діелектрична проникність не стала величина, її значення залежить від відстані від поверхні шару, тому швидкість теж не буде сталою величиною. Якщо сумістити передню поверхню плоскопаралельного шару з початком координат, то залежність діелектричної проникності від координати x матиме вигляд

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_1 \exp\left(-\frac{a}{h}x\right).$$

Тоді, якщо $x = h$, то $\varepsilon = \varepsilon_2$, звідки $a = \ln\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)$. Це означає, що швидкість поширення хвилі у заданому середовищі теж залежить від координати x .

Якщо поділити шар на проміжки, де швидкість можна вважати сталою величиною, то час, потрібний для того, щоб пройти елементарний проміжок,

$$dt = \frac{dx}{v(x)} = \frac{dx}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \exp\left(-\frac{a}{h}x\right)}.$$

Тоді час поширення світла через шар визначається як інтеграл

$$t = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{c} \int_0^h \exp\left(-\frac{a}{2h}x\right) dx = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{c} \left(-\frac{2h}{a}\right) \exp\left(-\frac{a}{2h}x\right) \Big|_0^h = \frac{2h}{c \ln(\varepsilon_1/\varepsilon_2)} (\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}).$$

Приклад 2.2. У вакуумі поширюється плоска світлова хвиля $\vec{E}(x, t) = \vec{y}_0 E_0 \cos(\omega t - kx)$, де \vec{y}_0 – орт осі y , $E_0 = 160$ В/м, $k = 0,51$ м⁻¹. Знайдіть вектор \vec{H} в точці з координатою $x = 7,7$ м в момент часу: а) $t = 0$; б) $t = 33$ нс.

Розв'язання. Запишемо рівняння Максвелла (2.12) для вакууму в розгорнутому вигляді:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{x}_0 \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \vec{y}_0 \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \vec{z}_0 \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) = \vec{y}_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}.$$

Звідки

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}.$$

З умови прикладу маємо:

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon_0 E_0 \omega \sin(\omega t - kx).$$

Звідки

$$\begin{aligned} H(x, t) &= \int \varepsilon_0 E_0 \omega \sin(\omega t - kx) dx = \frac{\varepsilon_0 E_0 \omega}{k} \cos(\omega t - kx) = \\ &= c \varepsilon_0 E_0 \cos(\omega t - kx). \end{aligned}$$

Тоді значення вектора \vec{H} у відповідних точках:

$$\begin{aligned} \text{а) } H(7,7; 0) &= c \varepsilon_0 E_0 \cos(\omega t - kx) = 8,85410^{-12} \text{ Ф/м} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} \cdot 160 \text{ В/м} \times \\ &\times \cos\left(-0,51 \text{ м}^{-1} \cdot 7,7 \text{ м}\right) = -0,30 \text{ А/м}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } H(7,7; 33 \cdot 10^{-9}) &= 8,85410^{-12} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 160 \times \\ &\times \cos(0,51 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 33 \cdot 10^{-9} - 0,51 \cdot 7,7) = 0,18 \text{ А/м.} \end{aligned}$$

Приклад 2.3. В однорідному та ізотропному середовищах за $\varepsilon = 3$ та $\mu = 1$ поширюється плоска електромагнітна хвиля. Амплітуда напруженості електричного поля хвилі $E_0 = 10$ В/м. Знайдіть амплітуду напруженості магнітного поля і фазову швидкість хвилі.

Розв'язання. Між амплітудами електричного E_0 і магнітного H_0 полів є зв'язок (2.35):

$$E_0 \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0} = H_0 \sqrt{\mu \mu_0},$$

де ε_0 – електрична стала, $\varepsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12}$ Ф/м; μ_0 – магнітна стала, $\mu_0 = 1,2566 \cdot 10^{-6}$ Гн/м.

Тоді

$$H_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} E_0 = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,8542 \cdot 10^{-12}}{1 \cdot 1,2566 \cdot 10^{-6}}} 10 = 0,046 \text{ А/м.}$$

Під час отримання розмірності було враховано, що $\text{Ф} = \text{Кл/В}$ і $\text{Гн} = \text{В} \cdot \text{с/А}$.

Фазову швидкість хвилі розрахуємо за формулою (2.15):

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{3}} = 1,73 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

Приклад 2.4. На плоский екран, розміщений у площині xu , падає під кутом $\varepsilon_1 = 1^\circ$ плоска монохроматична хвиля ($\lambda = 0,628$ мкм). Хвильовий вектор \vec{k} лежить у площині uz . Знайдіть розподіл амплітуди поля у площині екрана.

Розв'язання. Амплітуду поля плоскої хвилі визначають за рівнянням (2.47), яке подамо у вигляді

$$E(x, y, z) = E_0 \exp[j(\vec{k}\vec{r})]. \quad (2.130)$$

Запишемо скалярний добуток двох векторів $\vec{k}\vec{r}$, використовуючи рис. 2.31, з якого видно, що хвильовий вектор \vec{k} утворює такі кути з осями x, y, z : $\alpha = \pi/2$;

$\beta = \pi/2 + \varepsilon_1; \gamma = \varepsilon_1$. Оскільки екран розміщений у площині xy , для будь-якої точки екрана $z = 0$. Тоді рівняння (2.130) набуде вигляду

$$E(x, y, 0) = E_0 \exp\left(-j \frac{2\pi \sin \varepsilon_1}{\lambda} y\right).$$

У дійсній формі цей розподіл запишемо як

$$E(x, y, 0) = E_0 \cos\left(\frac{2\pi \sin \varepsilon_1}{\lambda} y\right).$$

З останнього виразу випливає, що амплітуда світлового поля має максимуми і мінімуми, розміщені паралельно осі x .

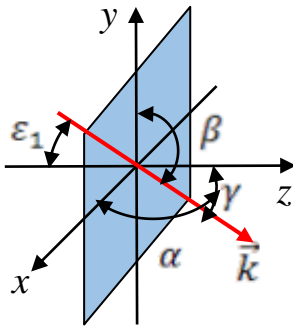


Рис. 2.31. До прикладу 2.4

Приклад 2.5. Запишіть рівняння сферичної хвилі (2.51) у квадратичному наближенні, коли точкове джерело розміщене на значній відстані від площини спостереження, а область спостереження перебуває біля оптичної осі. Для цього скористайтесь наближенням $\sqrt{1 + \xi} \approx 1 + \xi/2$, яке справедливе за $\xi \ll 1$.

Розв'язання. Сферична хвиля описується рівнянням (2.51), яке подамо у вигляді

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\vec{E}_0}{r} \exp(jkr).$$

Доберемо систему координат, як показано на рис. 2.32. Нехай точкове джерело світла розміщене на відстані $-z$

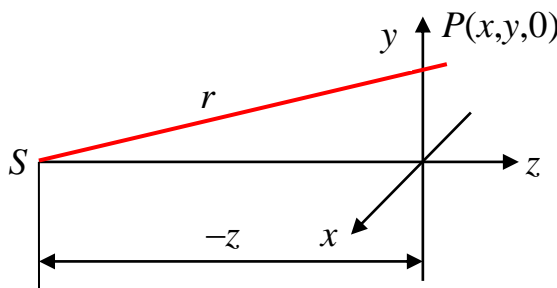


Рис. 2.32. До прикладу 2.5

від площини спостереження xy . Тоді радіус $r = SP$ становитиме

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = z \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}}.$$

Оскільки $z^2 \gg x^2 + y^2$, то останній вираз наближено можна записати як

$$r \approx z \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{2z^2}\right). \quad (2.131)$$

Це і є *квадратичне наближення* для радіуса r . Підставивши наближення (2.131) у рівнянні (2.51) отримаємо вираз для сферичної хвилі у квадратичному наближенні:

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\vec{E}_0}{z} \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda} z\right) \exp\left[j \frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2)\right] = \frac{\vec{E}_{0k}}{z} \exp\left[j \frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2)\right], \quad (2.132)$$

де \vec{E}_{0k} – комплексна амплітуда поля, $\vec{E}_{0k} = \vec{E}_0 \exp(jkz)$.

Приклад 2.6. Просторовий фільтр зі змінними в часі характеристиками можна реалізувати за допомогою інтерферометра Фабри-Перо. Фільтр складається з тонких прозорих скляних пластинок, що використовуються як підкладки, на внутрішній поверхні яких нанесено речовину з високим коефіцієнтом відбиття (рис. 2.33). Плоска монохроматична хвиля падає перпендикулярно до поверхні однієї зі скляних пластин.

Доведіть, що комплексна амплітуда хвилі, яка проходить через фільтр, описується функцією

Тонкі скляні пластинки

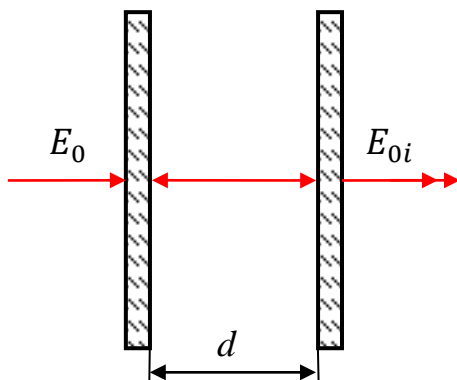


Рис. 2.33. До прикладу

$$E(\omega) = K t_p^2 \exp\left(-\frac{j\omega d}{c}\right) / \left[1 - \rho_p^2 \exp\left(-\frac{j2\omega d}{c}\right)\right],$$

де ω – частота падаючої плоскої хвилі; c – швидкість поширення світла; d – відстань між скляними пластинами; K – константа; ρ_p і t_p – відповідні амплітудні коефіцієнти відбиття і пропускання пластин. Впливом скляних

пластин знехтувати.

Розв'язання. Нехай на першу пластинку інтерферометра нормально падає плоска монохроматична хвиля $E(t) = E_0 \exp(-j\omega t)$. Після проходження першої пластинки вона матиме амплітуду $E'_0 = E_0 t_p$, де t_p – амплітудний коефіцієнт пропускання пластинки. На другу пластинку буде падати хвиля з амплітудою

$$E''_0 = E'_0 \exp(-j\Delta\varphi) = E_0 t_p \exp(-j\Delta\varphi),$$

де

$$\Delta\varphi = kd = \frac{2\pi}{\lambda}d = \frac{\omega d}{c} \quad (2.133)$$

– фазовий зсув, що виникає при проходженні хвилі від однієї платини до другої; d – відстань між пластинами; c – швидкість світла.

Одна частина хвилі E_0'' проходить через другу пластину і має амплітуду $E_{01} = E_0''t_p = E_0t_p^2 \exp(-j\Delta\varphi)$, а друга частина відбивається і має амплітуду $E_{01}' = E_0''\rho_p = E_0t_p\rho_p \exp(-j\Delta\varphi)$, де ρ_p – амплітудний коефіцієнт відбиття пластинки.

Після відбиття від першої пластинки і проходження через другу світлова хвиля має амплітуду

$$E_{02} = E_{01}'\rho_p t_p = E_0\rho_p^2 t_p^2 \exp(-j\Delta\varphi) \exp(-2j\Delta\varphi).$$

В результаті багаторазового відбиття між пластинами на виході інтерферометра утворюється велика кількість когерентних хвиль, які розповсюджуються в одному напрямку. Між цими хвилями відбувається інтерференція, в результаті якої утворюється результуюча амплітуда

$$E_{int} = E_{01} + E_{02} + \dots + E_{0i} + \dots, \quad (2.134)$$

де

$$E_{0i} = E_0\rho_p^{2(i-1)} t_p^2 \exp(-j\Delta\varphi) \exp[-2j(i-1)\Delta\varphi].$$

Вираз (2.134) являє собою суму нескінченної геометричної прогресії, яка визначається за формулою

$$E_{int} = \frac{a_1}{1-q}, \quad (2.135)$$

де $a_1 = E_0t_p^2 \exp(-j\Delta\varphi)$; $q = \rho_p^2 \exp(-j2\Delta\varphi)$ – знаменник прогресії. Тоді

$$E_{int} = \frac{E_0t_p^2 \exp(-j\Delta\varphi)}{1-\rho_p^2 \exp(-j2\Delta\varphi)}.$$

З врахуванням (2.133) маємо

$$E_{int} = \frac{E_0t_p^2 \exp\left(-j\frac{\omega d}{c}\right)}{1-\rho_p^2 \exp\left(-j2\frac{\omega d}{c}\right)}.$$

Отримана формула відповідає умові задачі, коли $K = E_0$, що треба було довести.

2.14. Задачі для самостійного розв'язування

Задача 2.1. Частота електромагнітного випромінювання (світла) $\nu = 6,91 \cdot 10^{14}$ Гц. Знайдіть значення довжини хвилі цього світла у повітрі, який колір має світло?

Відповідь: $\lambda = 434,1$ нм. Синій.

Задача 2.2. Під час поширення в якому середовищі світло з частотою $\nu = 4 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$ буде мати довжину хвилі $\lambda = 500$ нм?

Відповідь: $n = \frac{c}{\lambda\nu} = 1,5$.

Задача 2.3. Який шлях пройде фронт хвилі монохроматичного світла у вакуумі за час, протягом якого він проходить шлях $l_1 = 1$ м у склі марки ТФ1 ($n_e = 1,652$)?

Відповідь: $l_2 = l_1 n_e = 1,652$ м.

Задача 2.4. Скільки довжин хвиль монохроматичного світла з частотою коливань $\nu = 6,17 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$ розміститься на шляху довжиною $l = 2,0$ мм: а) у вакуумі; б) у склі марки ЛК3 ($n_e = 1,4891$).

Відповідь: $N = \frac{l}{\lambda} = \frac{l\nu n}{c}$; $N_v = 4113$; $N_g = 6125$.

Задача 2.5. Світлова хвиля з амплітудою напруженості магнітного поля $H_0 = 0,05$ А/м поширюється у середовищі з показником заломлення $n = 1,5$. Визначте амплітуду напруженості електричного поля.

Вказівка. Скористайтеся прикладом 2.3.

Відповідь: $E_0 = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_0 = 12,6$ В/м.

Задача 2.6. На непрозорий екран із прямокутним отвором розміром 4×2 мм падає під кутом $\varepsilon = 0,1^\circ$ плоска монохроматична хвиля з амплітудою $E_0 = 1 \text{ В/м}$ і частотою $\nu = 6 \cdot 10^{14}$ Гц. Отвір розміщений у центрі системи координат xu . Хвильовий вектор \vec{k} лежить у площині xz . Знайдіть розподіл амплітуди поля $E(x, y)$ в отворі екрана. Визначте відстань між сусідніми максимумами поля. Побудуйте графік розподілу амплітуди поля уздовж осей x та y .

Вказівка. Скористайтеся прикладом 2.4.

Відповідь: $E(x, y) = E_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \sin\varepsilon\right)$; $\Delta x = \frac{\lambda}{\sin\varepsilon} = 286 \text{ мкм}$.

Задача 2.7. Плоский екран із круглим отвором діаметром 2 мм освітлюється сферичною монохроматичною хвилею, що розходить, одиничної амплітуди. Центр випромінювання хвилі розміщений на осі, перпендикулярній екрану, і проходить через центр отвору. Точкове джерело випромінювання перебуває на відстані 1 м від екрана. Знайдіть розподіл амплітуди поля в отворі екрана. Побудуйте графік цього розподілу, якщо довжина хвилі $\lambda = 0,5 \text{ мкм}$.

Вказівка. Скористайтеся прикладом 2.5.

Відповідь: $E(x, y) = E(r) = \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda z} r^2\right) = \cos(2\pi r^2)$.

Задача 2.8. Визначте інтенсивність світла на виході інтерферометра Фабрі–Перро, коли плоска монохроматична хвиля падає під кутом ε_1 на поверхню однієї зі скляних пластинок. Внутрішня поверхня пластинки має енергетичний коефіцієнт відбиття R , а відстань між пластинками d .

Вказівка. Скористайтеся прикладом 2.6.

Відповідь: $I(\omega) = \frac{(1-R)^2}{(1+R)^2 + 4R \sin^2\left(\frac{\omega d \cos\varepsilon_1}{c}\right)}$.

РОЗДІЛ 3

ВІДБИВАННЯ І ЗАЛОМЛЕННЯ СВІТЛА НА ОСНОВІ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ТЕОРІЇ

3.1. Характеристики відбивання і пропускання світла

Відбивання і заломлення світлових (електромагнітних) хвиль відбувається, як правило, на межі двох прозорих діелектриків. Такими межами можуть бути поверхні оптичних елементів (лінз).

В залежності від чистоти обробки поверхні елемента розрізняють такі види відбивання: дзеркальне, розсіяне (дифузне) і змішане (рис. 3.1).

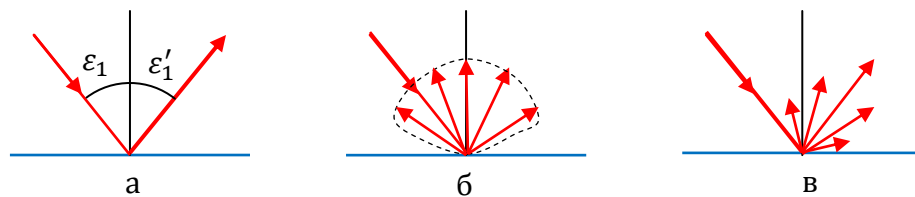


Рис. 3.1. Види відбивання світлових хвиль на межі двох діелектриків:
а – дзеркальне; б – дифузне; в – змішане

Дзеркальне відбивання відбувається на добре оброблених полірованих поверхнях. При дзеркальному відбиванні відбитий промінь має один єдиний напрямок у відповідності до *закону відбивання* ($\varepsilon'_1 = \varepsilon_1$).

У відповідності до Державного стандарту на фізичну оптику ГОСТ 7427-76 в цьому підручнику прийняті такі позначення: кут падіння ε_1 , кут відбивання ε'_1 , кут заломлення ε'_2 . Значення магнітної проникності прийнято рівним одиниці $\mu = 1$, замість діелектричної проникності ε використовують показник заломлення $n = \sqrt{\varepsilon}$, а взаємозв'язок між напруженістю магнітного H і електричного E полів виражається формулою $H = nE$.

Дифузне відбивання спостерігається на шорстких матованих поверхнях і відбувається в усіх напрямках, незалежно від кута падіння.

Змішане відбивання має дзеркальну складову, відповідно до закону відбивання, і дифузну складову в певних кутових межах відносно відбитого дзеркального променя.

В даному підручнику будемо розглядати тільки дзеркальне відбивання, яке має місце на полірованих оптичних поверхнях.

При падінні світлової (електромагнітної) хвилі на межу двох прозорих діелектриків (n_1, n_2) одна її частина відбивається, а друга частина проходить у другий діелектрик.

Розглянемо задачу розподілу енергії падаючої хвилі між відбитою і заломленою хвилями (рис. 3.2). Цей розподіл характеризується енергетичними коефіцієнтами відбиття R і пропускання T :

$$R = \frac{I_R}{I_0} \text{ і } T = \frac{I_D}{I_0}, \quad (3.1)$$

де I_0, I_R, I_D – інтенсивності падаючої, відбитої і заломленої хвиль відповідно.

Необхідно відмітити, що кути падіння і заломлення пов'язані між собою за коном заломлення (законом Снелліуса)

$$\frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \varepsilon_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (3.2)$$

При відсутності поглинання світла на межі діелектриків у відповідності до закону збереження енергії повинна виконуватись рівність

$$I_0 = I_R + I_D. \quad (3.3)$$

Звідки

$$R + T = 1. \quad (3.4)$$

Коефіцієнт T можна розрахувати за формулою

$$T = 1 - R. \quad (3.5)$$

Зазвичай, в оптичних системах коефіцієнт T визначає долю світлової енергії, яка пройшла через систему, а коефіцієнт R – долю втрат енергії на відбивання.

Задача проходження електромагнітної хвилі через межу двох діелектриків формально зводиться до використання граничних умов (2.16): рівності на межі тангенціальних складових векторів \vec{E} і \vec{H} в першому і другому діелектриках:

$$E_{\tau_1} = E_{\tau_2} \text{ і } H_{\tau_1} = H_{\tau_2}. \quad (3.6)$$

Розглянемо спочатку задачу визначення коефіцієнтів відбиття і пропускання для випадку нормального падіння електромагнітної хвилі на межу двох діелектриків.

3.2. Характеристики відбитої і заломленої хвиль при нормальному падінні на межу двох діелектриків

Нехай на межу двох діелектриків (n_1, n_2) нормально падає плоска монохроматична електромагнітна хвиля з відомими для векторів \vec{E} і \vec{H} амплітудами E_0, H_0 і початковою фазами $\varphi_0 = 0$.

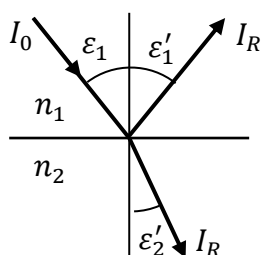


Рис. 3.2. Відбивання і заломлення світла

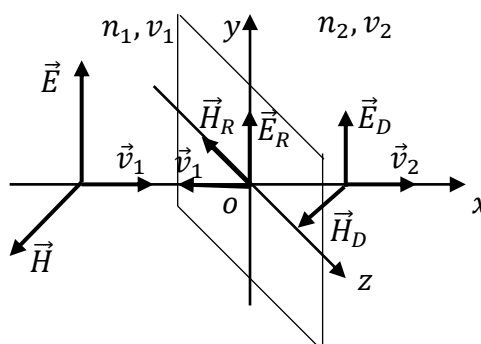


Рис. 3.3. Відбивання і заломлення світлої хвилі при нормальному падінні

Визначимо характеристики відбитої і заломленої хвиль, а також коефіцієнти відбиття і заломлення. При нормальному падінні ($\epsilon'_1 = \epsilon_1 = 0$) заломлена хвиля розповсюджується згідно закону заломлення (3.2) в напрямку падаючої хвилі, тобто $\epsilon'_2 = \epsilon_1 = 0$.

Виберемо систему координат x, y, z так, щоб вісь ox співпадала з напрямком падаючої хвилі, а площина yz являла собою межу двох діелектриків (рис. 3.3). Побудуємо трійки векторів $(\vec{E}, \vec{H}, \vec{v}_1)$ падаючої, $(\vec{E}_R, \vec{H}_R, \vec{v}_1)$ відбитої,

($\vec{E}_D, \vec{H}_D, \vec{v}_2$) заломленої хвиль. Направимо вектори \vec{E} , \vec{E}_R і \vec{E}_D паралельно осі ou , тоді вектора \vec{H} , \vec{H}_R і \vec{H}_D у відповідності до правої системи векторів будуть направлені так, як показано на рис. 3.3.

Фазові швидкості розповсюдження світлової хвилі в діелектриках відповідно дорівнюють:

$$v_1 = \frac{c}{n_1} \text{ і } v_2 = \frac{c}{n_2}. \quad (3.7)$$

Запишемо в комплексній формі вирази для векторів \vec{E} і \vec{H} в падаючій, відбитій і заломленій хвилях через фазові швидкості.

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 \exp \left[j\omega \left(t - \frac{x}{v_1} \right) \right] \\ H &= n_1 E; \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_R &= \vec{E}_{R0} \exp \left[j\omega_R \left(t + \frac{x}{v_1} \right) \right] \\ H_R &= n_1 E_R; \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_D &= \vec{E}_{D0} \exp \left[j\omega_D \left(t - \frac{x}{v_1} \right) \right] \\ H_D &= n_1 E_D, \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

де E_0, E_{R0}, E_{D0} – амплітуди, а $\omega, \omega_R, \omega_D$ – частоти падаючої, відбитої і заломленої хвиль відповідно.

Знайдемо співвідношення між амплітудами E_0, E_{R0}, E_{D0} електричного вектора, виходячи із граничних умов (3.6) в площині uz , коли $x = 0$. При цьому перейдемо від векторних величин до скалярних, так як $\vec{E} \parallel \vec{ou}$, а $\vec{H} \parallel \vec{oz}$.

Проекція в векторів \vec{E} , \vec{E}_R і \vec{E}_D на вісь \vec{ou} для граничної умови (3.6) дає рівняння

$$E + E_R = E_D, \quad (3.11)$$

а проекція в векторів \vec{H} , \vec{H}_R і \vec{H}_D на вісь \vec{oz} дає рівняння

$$H - H_R = H_D. \quad (3.12)$$

Підставимо до рівняння (3.11) вирази електричних векторів (3.8)–(3.10), коли $x = 0$.

$$E_0 \exp(j\omega t) + E_{R0} \exp(j\omega_R t) = E_{D0} \exp(j\omega_D t). \quad (3.13)$$

Це рівняння повинно виконуватись в любий момент часу t , що можливо тільки за умови

$$\omega = \omega_R = \omega_D. \quad (3.14)$$

Таким чином, при відбиванні і заломленні на межі двох діелектриків частота електромагнітної хвилі не змінюється. Тоді рівняння (3.13) матиме вигляд

$$E_0 + E_{R0} = E_{D0}. \quad (3.15)$$

Аналогічно рівняння (3.12) матиме вигляд

$$H_0 - H_{R0} = H_{D0}. \quad (3.16)$$

Замінімо в останньому рівнянні амплітуди магнітного вектора амплітудами електричного вектора

$$n_1 E_0 - n_1 E_{R0} = n_2 E_{D0}. \quad (3.17)$$

Із систем системи рівнянь (3.15) і (3.17) знаходимо амплітуди E_{R0} і E_{D0} :

$$E_{R0} = E_0 \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}; \quad (3.18)$$

$$E_{D0} = E_0 \frac{2n_1}{n_1 + n_2}. \quad (3.19)$$

Визначимо амплітудні коефіцієнти відбиття r і пропускання t як:

$$r = \frac{E_{R0}}{E_0} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}; \quad (3.20)$$

$$t = \frac{E_{D0}}{E_0} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}. \quad (3.21)$$

Формули (3.18) – (3.21) називаються *амплітудними формулами Френеля*.

Аналіз формул (3.18) – (3.21) дозволяє встановити фазові співвідношення між падаючою, відбитою і заломленою хвилями.

1. Із формул (3.19) і (3.21) видно, що при любых значеннях $n_1 > 0$ і $n_2 > 0$ $t > 0$ знаки амплітуд в заломленої і падаючої хвиль однакові, тобто ці хвилі синфазні. Таким чином, при заломленні світлової хвилі на межі двох діелектриків фаза вектора \vec{E} не змінюється ($\varphi_0 = \varphi_D$).

2. Із формул (3.18) і (3.20) видно, що при відбиванні можливі дві ситуації:

2.1. Якщо $n_1 > n_2$, то $r > 0$ і амплітуди відбитої E_{R0} і падаючої E_0 хвиль мають однакові знаки, тобто ці хвилі синфазні. Таким чином, при відбиванні світла від оптично менш щільного середовища (наприклад, від межі «скло – повітря») фаза вектора \vec{E} не змінюється ($\varphi_0 = \varphi_R$).

2.2. Якщо $n_1 < n_2$, то $r < 0$, то амплітуди відбитої E_{R0} і падаючої E_0 хвиль мають протилежні знаки, тобто ці хвилі будуть протифазні. Це може бути в тому випадку, коли фаза вектора \vec{E} при відбиванні на межі зміниться стрибком на π радіан ($\varphi_R = \varphi_0 + \pi$).

Таким чином, при відбиванні від оптично більш щільного середовища світловий вектор змінює свою фазу на π радіан, що відповідає зміні різниці ходу між відбитою і падаючою хвилями на $\lambda/2$.

3.3. Енергетичні коефіцієнти відбиття і пропускання при нормальному падінні хвилі на межу двох діелектриків

Інтенсивності падаючої, відбитої і заломленої хвиль визначаються згідно (2.60) як

$$I_0 = \frac{1}{2} c n_1 E_0^2; \quad I_R = \frac{1}{2} c n_1 E_{R0}^2; \quad I_D = \frac{1}{2} c n_2 E_{D0}^2. \quad (3.22)$$

Енергетичні коефіцієнти відбиття і пропускання визначаються формулами (3.1), які з урахуванням (3.20), (3.21) і (3.22) матимуть вигляд:

$$R = \frac{I_R}{I_0} = \left(\frac{E_{R0}}{E_0} \right)^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2, \quad (3.23)$$

$$T = \frac{I_D}{I_0} = \frac{n_2}{n_1} \left(\frac{E_{R0}}{E_0} \right)^2 = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}. \quad (3.24)$$

Вирази (3.23) і (3.24) називаються *формулами Френеля для енергетичних коефіцієнтів відбиття і пропускання при нормальному падінні світла*.

Неважко переконатись, що $R + T = 1$. Тому при розрахунках енергетичних співвідношень електромагнітних хвиль на межі двох діелектриків коефіцієнт відбиття розраховують за формулою (3.23), а коефіцієнт пропускання – за формулою $T = 1 - R$.

Із формул Френеля (3.23) і (3.24) видно, коефіцієнти R і T не змінюють свого значення при оберненому ході променів (із середовища n_2 в середовище n_1), тобто

$$R_{12} = R_{21} \text{ і } T_{12} = T_{21}. \quad (3.25)$$

Формули Френеля (3.23) і (3.24) являються основними формулами в теорії оптичних і оптико-електронних систем для розрахунку втрат світла за рахунок відбивання в оптичних системах.

Розглянемо методику оцінки втрат світла при відбиванні та пропускання світла лінзою (без врахування втрат на поглинання світла склом). Нехай лінза, виготовлена із скла з показником заломлення $n_2 = 1,52$, знаходиться в повітрі $n_1 = n_3 = 1$ (рис. 3.4). Вона має дві робочі поверхні заломлення «повітря – скло» і «скло – повітря». Коефіцієнт відбиття на одній поверхні згідно (3.23) становить:

$$R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 = \left(\frac{1 - 1,52}{1 + 1,52} \right)^2 = 0,0426,$$

тобто на кожній поверхні лінзи втрачається 4,26% падаючої енергії світла.

Визначимо коефіцієнт пропускання лінзи, для чого проведемо через неї промінь, близький до оптичної осі, і позначимо інтенсивності I_0 , I_1 і I_2 на

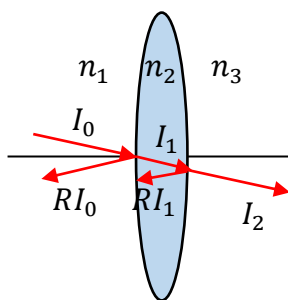


Рис. 3.4. Модель визначення коефіцієнта пропускання лінзи

відповідних ділянках (рис. 3.4). Тоді коефіцієнт пропускання лінзи T_l з урахуванням закону збереження енергії буде дорівнювати

$$T_l = \frac{I_2}{I_0} = \frac{I_1 - I_1 R}{I_0} = \frac{(I_0 - I_0 R)(1 - R)}{I_0} = (1 - R)^2, \quad (3.26)$$

де R – коефіцієнт відбиття на одній поверхні лінзи. При цьому втрати світлової енергії за рахунок френелівського відбивання при проходженні світла через лінзу становлять

$$R_l = 1 - T_l. \quad (3.27)$$

Для нашого прикладу $T_l = (1 - R)^2 = (1 - 0,0426)^2 = 0,9166$ і $R_l = 0,0834$. Таким чином, скляна лінза пропускає 91,66% світлової енергії, а втрати на відбивання в неї становлять 8,34%.

Якщо оптична система складається із m лінз однакового скла, які розташовані в повітрі, то її коефіцієнт пропускання визначається за формулою

$$T_{os} = \left[1 - \left(\frac{1-n}{1+n} \right)^2 \right]^{2m}. \quad (3.28)$$

3.4. Закони відбивання і заломлення на основі електромагнітної теорії світла

Проведемо загальне доведення законів відбивання і заломлення світла на основі фазових співвідношень плоскої електромагнітної хвилі при відбиванні і заломленні її на межі двох діелектриків n_1, n_2 .

Нехай плоска монохроматична хвиля розповсюджується в просторі із швидкістю v_1 в напрямку одиничного вектора \vec{N}_0 , який заданий в системі координат хуз направляючими косинусами $\cos\alpha_0, \cos\beta_0, \cos\gamma_0$.

$$\vec{N}_0 = \vec{x}_0 \cos\alpha_0 + \vec{y}_0 \cos\beta_0 + \vec{z}_0 \cos\gamma_0, \quad (3.29)$$

де $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ – одиничні орти в системі координат хуз.

Скористаємося скалярним рівнянням (2.47) електричного вектора плоскої монохроматичної хвилі, записавши його у вигляді:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp[j(\vec{k}\vec{r} - 2\pi vt)] = \vec{E}_0 \exp \left[j2\pi v \left(\frac{\vec{k}\vec{r}}{2\pi v} - t \right) \right], \quad (3.30)$$

де \vec{k} – хвильовий вектор, довжина якого дорівнює хвильовому числу, а орієнтація вказує напрямок переміщення хвильового фронту,

$$\vec{k} = k\vec{N}_0 = \frac{2\pi}{\lambda} (\vec{x}_0 \cos\alpha_0 + \vec{y}_0 \cos\beta_0 + \vec{z}_0 \cos\gamma_0); \quad (3.31)$$

\vec{r} – радіус-вектор точки з координатами x, y, z ,

$$\vec{r} = \vec{x}_0 x + \vec{y}_0 y + \vec{z}_0 z. \quad (3.32)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{\vec{k}\vec{r}}{2\pi\nu} &= \frac{1}{\lambda\nu} [(\vec{x}_0\cos\alpha_0 + \vec{y}_0\cos\beta_0 + \vec{z}_0\cos\gamma_0)(\vec{x}_0x + \vec{y}_0y + \vec{z}_0z)] = \\ &= \frac{1}{\nu}(x\cos\alpha_0 + y\cos\beta_0 + z\cos\gamma_0). \end{aligned} \quad (3.33)$$

З урахуванням (3.33) рівняння (3.30) матиме вигляд:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp \left[j\omega \left(\frac{x\cos\alpha_0 + y\cos\beta_0 + z\cos\gamma_0}{\nu} - t \right) \right]. \quad (3.34)$$

Конкретизуємо нашу задачу (рис. 3.5):

1. Початок системи координат xuz розташуємо в точці падіння променя \vec{N}_0 на межу діелектриків n_1, n_2 .
2. В якості межі діелектриків виберемо площину xu , яка описується рівнянням $z = 0$.
3. Площина падіння променя \vec{N}_0 розташована в площині xz , для якої $\beta_0 = \pi/2$ і $\cos\beta_0 = 0$. Тоді $\alpha_0 + \gamma_0 = \pi/2$.

Очевидно, що вісь oz буде нормаллю до межі в точці падіння, а кут γ_0 буде кутом падіння.

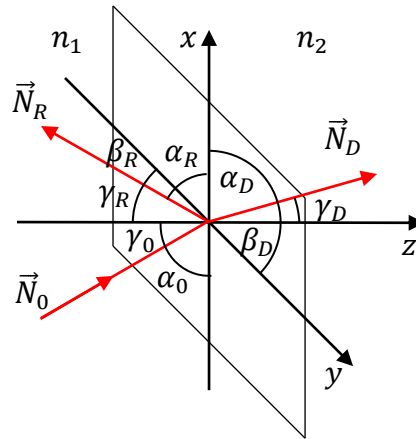


Рис. 3.5. Відбивання і заломлення хвилі на межі двох діелектриків

Проведемо промені відбитої і заломленої хвиль, напрямки розповсюдження яких визначаються одиничними векторами

$$\vec{N}_R = \vec{x}_0\cos\alpha_R + \vec{y}_0\cos\beta_R + \vec{z}_0\cos\gamma_R \quad \text{і} \quad \vec{N}_D = \vec{x}_0\cos\alpha_D + \vec{y}_0\cos\beta_D + \vec{z}_0\cos\gamma_D.$$

Запишемо рівняння (3.34) для кожної із трьох хвиль з урахуванням швидкостей $v_1 = c/n_1$, $v_2 = c/n_2$ і рівності частот $\omega = \omega_R = \omega_D$.

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp \left[j\omega \left(\frac{x \cos \alpha_0 + z \cos \gamma_0}{v_1} - t \right) \right]; \quad (3.35)$$

$$\vec{E}_R(\vec{r}, t) = \vec{E}_{R0} \exp \left[j\omega \left(\frac{x \cos \alpha_R + y \cos \beta_R + z \cos \gamma_R}{v_1} - t \right) \right]; \quad (3.36)$$

$$\vec{E}_D(\vec{r}, t) = \vec{E}_{D0} \exp \left[j\omega \left(\frac{x \cos \alpha_D + y \cos \beta_D + z \cos \gamma_D}{v_2} - t \right) \right]. \quad (3.37)$$

Запишемо граничну умову (3.6) для електричного вектору світлової хвилі на межі двох діелектриків в площині $xу$, коли $z = 0$. Після підстановки (3.35) – (3.37) до (3.6) маємо:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{0\tau} \exp \left[j\omega \left(\frac{x \cos \alpha_0}{v_1} - t \right) \right] + \vec{E}_{R0\tau} \exp \left[j\omega \left(\frac{x \cos \alpha_R + y \cos \beta_R}{v_1} - t \right) \right] = \\ = \vec{E}_{D0\tau} \exp \left[j\omega \left(\frac{x \cos \alpha_D + y \cos \beta_D}{v_2} - t \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Проаналізуємо фазові співвідношення у відбитої і заломленої хвиль, не беручи до уваги амплітудні співвідношення. Гранична умова (3.38) повинна виконуватись в будь-якій точці x, y в любий момент часу t . А це, в свою чергу, можливо при виконанні двох умов:

$$\frac{y \cos \beta_R}{v_1} = \frac{y \cos \beta_D}{v_2} = 0. \quad (3.39)$$

$$\frac{x \cos \alpha_0}{v_1} = \frac{x \cos \alpha_R}{v_1} = \frac{x \cos \alpha_D}{v_2}. \quad (3.40)$$

Із умови (3.39) маємо

$$\cos \beta_R = \cos \beta_D = 0, \text{ або } \beta_R = \beta_D = \pi/2. \quad (3.41)$$

Це означає, що одиничні вектори \vec{N}_R і \vec{N}_D лежать в одній площині xz , де знаходиться вектор \vec{N}_0 . Ця площина називається *площиною падіння*. Цим

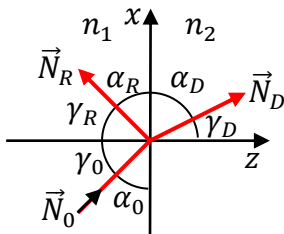


Рис. 3.6. Відбивання і заломлення хвилі

доведена перша частина законів відбивання і заломлення, яка стверджує, що падаючий, відбитий і заломлений промені лежать в одній площині (рис. 3.6).

Таким чином, із рис. 3.6 маємо, що γ_0 – кут падіння, γ_R – кут відбивання, γ_D – кут заломлення.

Із умови (3.40) маємо дві рівності:

1. $\frac{x \cos \alpha_0}{v_1} = \frac{x \cos \alpha_R}{v_1}$, або $\alpha_R = \alpha_0$. Із рис. 3.6 знаходимо, що $\gamma_R = \frac{\pi}{2} - \alpha_R$, $\gamma_0 = \frac{\pi}{2} - \alpha_0$. Звідки $\gamma_R = \gamma_0$. Цим доведена друга частина закону відбивання:

кут відбивання дорівнює куту падіння.

2. $\frac{x \cos \alpha_0}{v_1} = \frac{x \cos \alpha_D}{v_2}$, або $\frac{\sin \gamma_0}{v_1} = \frac{\sin \gamma_D}{v_2}$. Звідки $\frac{\sin \gamma_0}{\sin \gamma_D} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$. Цим доведена друга частина закону заломлення: відношення синуса кута падіння до синусу кута заломлення дорівнює відношенню показника заломлення другого середовища до показника заломлення першого середовища.

3.5. Характеристики відбитої і заломленої світлових хвиль при куті падіння, відмінному від нуля. Формули Френеля

Нехай на межу двох діелектриків n_1, n_2 падає під кутом ε_1 плоска монохроматична хвиля природнього світла. Визначимо співвідношення між амплітудами падаючої E_0 , відбитої E_{R0} і заломленої E_{D0} хвилями, а також коефіцієнт відбиття R . Ці співвідношення називаються *формулами Френеля* на честь французького фізика, який першим їх отримав.

Оскільки при відбиванні і заломленні відбувається часткова поляризація променів, то вирішити поставлену задачу безпосередньо для природнього світла досить складно. Для спрощення розв'язання цієї задачі розглянемо модель природнього світла, в якій його вектор \vec{E}_n представимо у вигляді суми двох хвиль, що плоскополяризовані в двох взаємно перпендикулярних площинах, мають однакову інтенсивність і розповсюджуються в напрямку природнього світла (рис. 3.7). Математично це можна представити у вигляді співвідношень

$$\vec{E}_n = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}; \quad I_n = I_{\parallel} + I_{\perp}; \quad I_{\parallel} = I_{\perp} = 0,5I_n, \quad (3.42)$$

де $\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}_p$ – вектор плоскополяризованої хвилі, площина поляризації якої паралельний площині падіння променя; $\vec{E}_{\perp} = \vec{E}_s$ – вектор плоскополяризованої

хвилі, площина поляризації якої перпендикулярна до площині падіння променя;
 $I_n, I_{\parallel}, I_{\perp}$ – інтенсивності світлових хвиль $\vec{E}_n, \vec{E}_{\parallel}, \vec{E}_{\perp}$ відповідно.

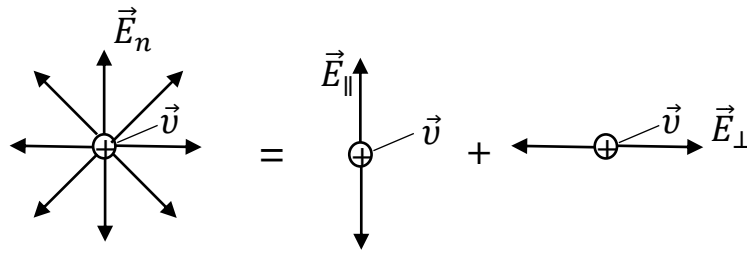


Рис. 3.7. Модель природнього світла

Зведемо поставлену задачу до двох часткових задач відбивання і заломлення плоскополяризованої хвилі, коли

1. Вектор \vec{E}_{\parallel} паралельний площині падіння.
2. Вектор \vec{E}_{\perp} перпендикулярний до площині падіння.

Склавши інтенсивності відбитих і заломлених променів в двох задачах, отримаємо інтенсивність відбитого і заломленого природнього світла.

3.5.1. Формули Френеля для випадку, коли вектор \vec{E}_{\parallel} паралельний площині падіння

Нехай на межу двох діелектриків n_1, n_2 падає під кутом ε_1 плоска монохроматична хвиля \vec{E}_{\parallel} , поляризована в площині падіння. Визначимо співвідношення між амплітудами падаючої $E_{0\parallel}$, відбитої $E_{R0\parallel}$ і заломленої $E_{D0\parallel}$ хвиль. На променевій схемі представимо падаючу, відбиту і заломлену електромагнітні хвилі трійками векторів $(\vec{E}_{0\parallel}, \vec{H}_{0\perp}, \vec{v}_1)$, $(\vec{E}_{R\parallel}, \vec{H}_{R\perp}, \vec{v}_1)$, $(\vec{E}_{D\parallel}, \vec{H}_{D\perp}, \vec{v}_2)$ (рис. 3.8,а). На схемі площина xz являє собою площину падіння, в якій знаходиться площина поляризації хвилі. Межею діелектриків n_1, n_2 є площина yz (вісь oy направлена до читача). Вектори $\vec{E}_{0\parallel}, \vec{E}_{R\parallel}, \vec{E}_{D\parallel}$ лежать в площині падіння, а вектори $\vec{H}_{0\perp}, \vec{H}_{R\perp}, \vec{H}_{D\perp}$ перпендикулярні до площині падіння і направлені уздовж вісі oy , що зображено на схемі кружками з точками.

Запишемо граничні умови (3.6) для електричного і магнітного векторів електромагнітного поля при $x = 0$. Для цього спроектуємо вектора \vec{E} на вісь oz , вектора \vec{H} – на вісь oy . Раніше було доведено, що частота хвилі при відбиванні і заломленні не змінюється, тобто $\omega_R = \omega_D = \omega$. Тоді

$$E_{0\parallel} \cos \varepsilon_1 - E_{R0\parallel} \cos \varepsilon'_1 = E_{D0\parallel} \cos \varepsilon'_2, \quad (3.43)$$

$$H_{0\perp} + H_{R0\perp} = H_{D0\perp}. \quad (3.44)$$

Замінімо в (3.44) амплітуди магнітних векторів на амплітуди електричних векторів

$$H_{0\perp} = n_1 E_{0\parallel}, \quad H_{R0\perp} = n_1 E_{R0\parallel}, \quad H_{D0\perp} = n_2 E_{D0\parallel} \quad (3.45)$$

і врахуємо закон заломлення світла

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \varepsilon'_2}. \quad (3.46)$$

Тоді система рівнянь (3.43), (3.44) матиме вигляд

$$E_{0\parallel} - E_{R0\parallel} = E_{D0\parallel} \frac{\cos \varepsilon'_2}{\cos \varepsilon_1}, \quad (3.43)$$

$$E_{0\parallel} + E_{R0\parallel} = E_{D0\parallel} \frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \varepsilon'_2}. \quad (3.44)$$

Розв'яжемо систему рівнянь (3.43), (3.44) відносно амплітуд $E_{R0\parallel}$ і $E_{D0\parallel}$.

Для визначення $E_{R0\parallel}$ розділимо (3.43) на (3.44)

$$\frac{E_{0\parallel} - E_{R0\parallel}}{E_{0\parallel} + E_{R0\parallel}} = \frac{\cos \varepsilon'_2 \sin \varepsilon'_2}{\cos \varepsilon_1 \sin \varepsilon_1} = \frac{\sin 2\varepsilon'_2}{\sin 2\varepsilon_1} = A. \quad (3.45)$$

Тоді

$$E_{0\parallel} - E_{R0\parallel} = A(E_{0\parallel} + E_{R0\parallel}),$$

або

$$E_{R0\parallel} = E_{0\parallel} \frac{1-A}{1+A}. \quad (3.46)$$

Підставимо (3.45) до (3.46)

$$E_{R0\parallel} = E_{0\parallel} \frac{\sin 2\varepsilon_1 - \sin 2\varepsilon'_2}{\sin 2\varepsilon_1 + \sin 2\varepsilon'_2} = E_{0\parallel} \frac{2 \sin(\varepsilon_1 - \varepsilon'_2) \cos(\varepsilon_1 + \varepsilon'_2)}{2 \sin(\varepsilon_1 + \varepsilon'_2) \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon'_2)} = E_{0\parallel} \frac{\operatorname{tg}(\varepsilon_1 - \varepsilon'_2)}{\operatorname{tg}(\varepsilon_1 + \varepsilon'_2)}. \quad (3.47)$$

Для визначення $E_{D0\parallel}$ складемо праві і ліві частини (3.43) і (3.44).

$$\begin{aligned}
2E_{0\parallel} &= E_{D0\parallel} \left(\frac{\cos\varepsilon_2'}{\cos\varepsilon_1} + \frac{\sin\varepsilon_1}{\sin\varepsilon_2'} \right) = E_{D0\parallel} \frac{\cos\varepsilon_2' \sin\varepsilon_2' + \sin\varepsilon_1 \cos\varepsilon_1}{\cos\varepsilon_1 \sin\varepsilon_2'} \\
&= E_{D0\parallel} \frac{\sin 2\varepsilon_2' + \sin 2\varepsilon_1}{2\cos\varepsilon_1 \sin\varepsilon_2'} = E_{D0\parallel} \frac{\sin 2\varepsilon_2' + \sin 2\varepsilon_1}{2\cos\varepsilon_1 \sin\varepsilon_2'} = E_{D0\parallel} \frac{\sin(\varepsilon_1 + \varepsilon_2') \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_2')}{\cos\varepsilon_1 \sin\varepsilon_2'}. \quad (3.48)
\end{aligned}$$

Звідки

$$E_{D0\parallel} = \frac{2\cos\varepsilon_1 \sin\varepsilon_2'}{\sin(\varepsilon_1 + \varepsilon_2') \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_2')} E_{0\parallel}. \quad (3.49)$$

Формули (3.47) і (3.49) називаються *амплітудними формулами Френеля для паралельних складових*.

Амплітудні коефіцієнти відбиття r_{\parallel} і пропускання t_{\parallel} для паралельних складових визначаються за формулами

$$r_{\parallel} = \frac{E_{R0\parallel}}{E_{0\parallel}} = \frac{\operatorname{tg}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2')}{\operatorname{tg}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2')}, \quad (3.50)$$

$$t_{\parallel} = \frac{E_{D0\parallel}}{E_{0\parallel}} = \frac{2\cos\varepsilon_1 \sin\varepsilon_2'}{\sin(\varepsilon_1 + \varepsilon_2') \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_2')}. \quad (3.51)$$

3.5.2. Формули Френеля для випадку, коли вектор \vec{E}_{\perp} перпендикулярний площині падіння

Нехай на межу двох діелектриків n_1, n_2 падає під кутом ε_1 плоска монохроматична хвиля $\vec{E}_{0\perp}$, поляризована в площині, перпендикулярній до площини падіння. Визначимо співвідношення між амплітудами падаючої $E_{0\perp}$, відбитої $E_{R0\perp}$ і заломленої $E_{D0\perp}$ хвиль. На променевій схемі представимо падаючу, відбиту і заломлену електромагнітні хвилі трійками векторів $(\vec{E}_{0\perp}, \vec{H}_{0\parallel}, \vec{v}_1)$, $(\vec{E}_{R\perp}, \vec{H}_{R\parallel}, \vec{v}_1)$, $(\vec{E}_{D\perp}, \vec{H}_{D\parallel}, \vec{v}_2)$ (рис. 3.8,б). На схемі площина xz являє собою площину падіння, в якій знаходиться вектори $\vec{H}_{0\parallel}, \vec{H}_{R\parallel}, \vec{H}_{D\parallel}$, а вектори $\vec{E}_{0\perp}, \vec{E}_{R\perp}, \vec{E}_{D\perp}$ перпендикулярні до площини падіння і направлені в протилежному напрямку уздовж вісі ou , що зображено на схемі кружками з хрестиками. Межею діелектриків n_1, n_2 є площина yz (вісь ou направлена до читача).

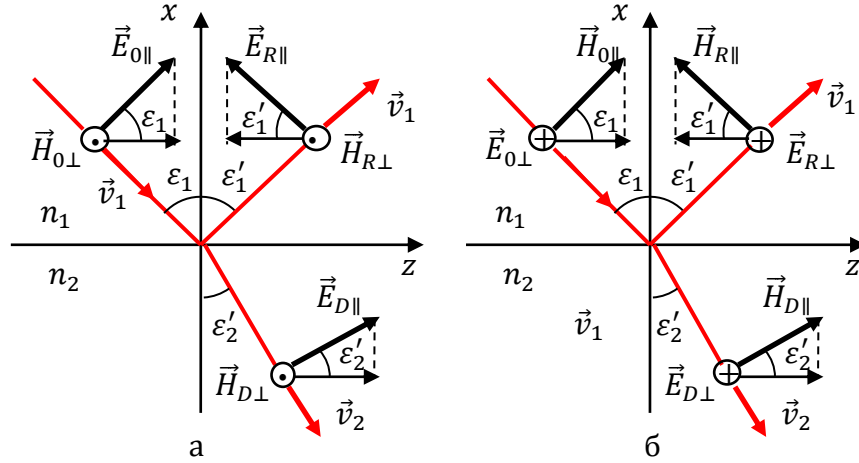


Рис. 3.8. Променева схема для плоскополяризованої хвилі:
а – для \vec{E}_{\parallel} ; б – для \vec{E}_{\perp}

Запишемо граничні умови (3.6) для електричного і магнітного векторів електромагнітного поля при $x = 0$. Для цього спроектуємо вектора \vec{E} на вісь ou , вектора \vec{H} – на вісь oz . Тоді

$$-E_{0\perp} - E_{R0\perp} = -E_{D0\perp}. \quad (3.52)$$

$$H_{0\parallel} \cos \varepsilon_1 - H_{R0\parallel} \cos \varepsilon'_1 = H_{D0\parallel} \cos \varepsilon'_2, \quad (3.53)$$

Замінімо в (3.53) амплітуди магнітних векторів $H_{0\parallel}$ на амплітуди електричних векторів $E_{0\perp}$

$$H_{0\parallel} = n_1 E_{0\perp}, \quad H_{R0\parallel} = n_1 E_{R0\perp}, \quad H_{D0\parallel} = n_2 E_{D0\perp} \quad (3.54)$$

і врахуємо закон заломлення світла (3.46).

Тоді система рівнянь (3.52), (3.53) матиме вигляд

$$E_{0\perp} + E_{R0\perp} = E_{D0\perp}, \quad (3.55)$$

$$E_{0\perp} - E_{R0\perp} = E_{D0\perp} \frac{\cos \varepsilon'_2 \sin \varepsilon_1}{\cos \varepsilon_1 \sin \varepsilon'_2}. \quad (3.56)$$

Визначимо амплітуду заломленої хвилі $E_{D0\perp}$ шляхом складання правих і лівих частин (3.55) і (3.56)

$$\begin{aligned} 2E_{0\perp} &= E_{D0\perp} \left(1 + \frac{\cos \varepsilon'_2 \sin \varepsilon_1}{\cos \varepsilon_1 \sin \varepsilon'_2} \right) = \\ &= E_{D0\perp} \frac{\cos \varepsilon_1 \sin \varepsilon'_2 + \cos \varepsilon'_2 \sin \varepsilon_1}{\cos \varepsilon_1 \sin \varepsilon'_2}. \end{aligned}$$

Звідки

$$E_{D0\perp} = E_{0\perp} \frac{2\cos\varepsilon_1 \sin\varepsilon'_2}{\sin(\varepsilon_1 + \varepsilon'_2)}. \quad (3.57)$$

Для визначення амплітуди відбитої хвилі підставимо (3.57) до (3.55)

$$\begin{aligned} E_{R0\perp} &= E_{D0\perp} - E_{0\perp} = E_{0\perp} \left(\frac{2\cos\varepsilon_1 \sin\varepsilon'_2}{\sin(\varepsilon_1 + \varepsilon'_2)} - 1 \right) = \\ &= E_{0\perp} \frac{2\cos\varepsilon_1 \sin\varepsilon'_2 - \sin(\varepsilon_1 + \varepsilon'_2)}{\sin(\varepsilon_1 + \varepsilon'_2)} = E_{0\perp} \frac{\cos\varepsilon_1 \sin\varepsilon'_2 - \sin\varepsilon_1 \cos\varepsilon'_2}{\sin(\varepsilon_1 + \varepsilon'_2)} = \\ &= -E_{0\perp} \frac{\sin(\varepsilon_1 - \varepsilon'_2)}{\sin(\varepsilon_1 + \varepsilon'_2)}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Формули (3.57) і (3.58) називаються амплітудними *формулами Френеля для перпендикулярних складових*.

Амплітудні коефіцієнти відбиття r_{\perp} і пропускання t_{\perp} для перпендикулярних складових визначаються за формулами

$$r_{\perp} = \frac{E_{R0\perp}}{E_{0\perp}} = -\frac{\sin(\varepsilon_1 - \varepsilon'_2)}{\sin(\varepsilon_1 + \varepsilon'_2)}, \quad (3.59)$$

$$t_{\perp} = \frac{E_{D0\perp}}{E_{0\perp}} = \frac{2\cos\varepsilon_1 \sin\varepsilon'_2}{\sin(\varepsilon_1 + \varepsilon'_2)}. \quad (3.60)$$

3.5.3. Формули Френеля для часткових і загального енергетичних коефіцієнтів відбиття

Часткові енергетичні коефіцієнти відбиття для паралельної і перпендикулярної складових природнього світла визначимо формулами

$$R_{\parallel} = \frac{I_{R\parallel}}{I_{0\parallel}} = \frac{(E_{R0\parallel})^2}{(E_{0\parallel})^2}, \quad (3.61)$$

$$R_{\perp} = \frac{I_{R\perp}}{I_{0\perp}} = \frac{(E_{R0\perp})^2}{(E_{0\perp})^2}, \quad (3.62)$$

Після підстановки амплітудних формул Френеля (3.51) і (3.59) відповідно до (3.61) і (3.62) отримаємо

$$R_{\parallel} = \left[\frac{\operatorname{tg}(\varepsilon_1 - \varepsilon'_2)}{\operatorname{tg}(\varepsilon_1 + \varepsilon'_2)} \right]^2, \quad (3.63)$$

$$R_{\perp} = \left[\frac{\sin(\varepsilon_1 - \varepsilon'_2)}{\sin(\varepsilon_1 + \varepsilon'_2)} \right]^2. \quad (3.64)$$

Ці формули використовуються для розрахунку *часткових енергетичних коефіцієнтів відбиття*.

Часткові енергетичні коефіцієнти пропускання T_{\parallel} і T_{\perp} зручніше визначати через розраховані значення R_{\parallel} і R_{\perp} , використовуючи закон збереження енергії при відсутності поглинання світла на межі діелектриків:

$$I_{0\parallel} = I_{R\parallel} + I_{D\parallel} \text{ і } I_{0\perp} = I_{R\perp} + I_{D\perp}. \quad (3.65)$$

Звідки з урахуванням (3.61) і (3.62) маємо

$$T_{\parallel} = \frac{I_{D\parallel}}{I_{0\parallel}} = 1 - R_{\parallel} \text{ і } T_{\perp} = \frac{I_{D\perp}}{I_{0\perp}} = 1 - R_{\perp}. \quad (3.66)$$

Загальний коефіцієнт відбиття природнього світла, що падає на межу двох діелектриків під кутом ε_1 , визначається в результаті синтезу двох часткових задач. Із співвідношень (3.42) для природнього світла маємо

$$I_n = I_{\parallel} + I_{\perp} \text{ і } I_n = 2I_{\parallel} = 2I_{\perp}, \quad (3.66)$$

або

$$I_0 = I_{0p} + I_{0s} \text{ і } I_0 = 2I_{0p} = 2I_{0s}, \quad (3.66')$$

де I_{0p} та I_{0s} – інтенсивності “р” та “s” компонент природнього світла, що падає на межу поділу двох діелектриків.

Загальний коефіцієнт відбивання природнього світла визначається за формулою

$$R = \frac{I_R}{I_n}. \quad (3.67)$$

Інтенсивність відбитого світла I_R складається із інтенсивностей двох некогерентних складових $I_{R\parallel}$ і $I_{R\perp}$:

$$I_R = I_{R\parallel} + I_{R\perp}. \quad (3.68)$$

Аналогічне співвідношення має місце і для заломленої хвилі

$$I_D = I_{D\parallel} + I_{D\perp}. \quad (3.69)$$

Підставимо (3.69) до (3.67) і врахуємо (3.66). Тоді отримаємо формулу

$$R = \frac{I_{R\parallel} + I_{R\perp}}{I_n} = \frac{I_{R\parallel}}{I_n} + \frac{I_{R\perp}}{I_n} = \frac{I_{R\parallel}}{2I_{\parallel}} + \frac{I_{R\perp}}{2I_{\perp}}, \quad (3.70)$$

яка з врахуванням (3.61) і (3.62) матиме вигляд

$$R = \frac{1}{2}(R_{\parallel} + R_{\perp}) = \frac{1}{2}(R_p + R_s). \quad (3.71)$$

Таким чином, загальний коефіцієнт відбиття для природнього світла дорівнює половині суми часткових коефіцієнтів для паралельної і перпендикулярної складових.

Після підстановки (3.63) і (3.64) до (3.71) отримаємо формулу Френеля для загального коефіцієнта відбиття

$$R = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{\operatorname{tg}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2')}{\operatorname{tg}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2')} \right]^2 + \left[\frac{\sin(\varepsilon_1 - \varepsilon_2')}{\sin(\varepsilon_1 + \varepsilon_2')} \right]^2 \right\}. \quad (3.72)$$

Енергетичний коефіцієнт пропускання світла межею двох прозорих діелектриків зазвичай розраховують через R за формулою

$$T = 1 - R. \quad (3.73)$$

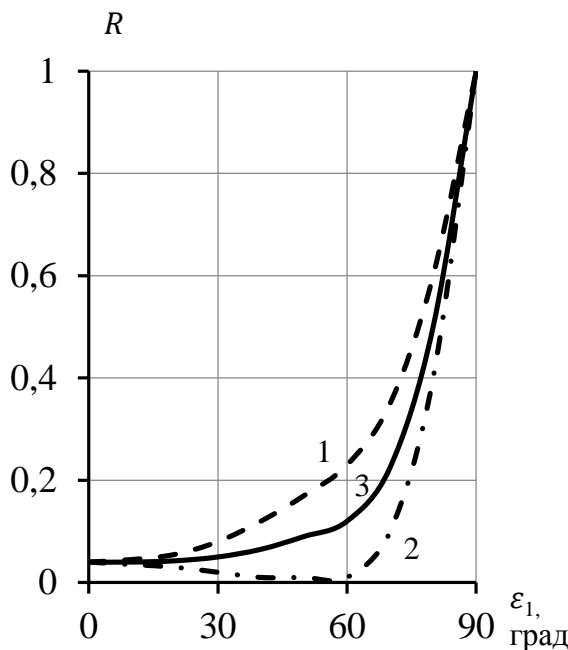


Рис. 3.9. Залежність коефіцієнтів відбиття від кута падіння ε_1 :
1 - R_{\perp} ; 2 - R_{\parallel} ; 3 - R

Таким чином, формула (3.72) являється основною для розрахунку енергетичних коефіцієнтів відбиття і пропускання для природнього світла при куті падання, відмінному від нуля. Із цієї формули просто отримати формули Френеля при нормальному падінні світла, коли $\varepsilon_1 \rightarrow 0$:

$$R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2. \quad (3.74)$$

Графіки залежностей $R_{\parallel}(\varepsilon_1)$, $R_{\perp}(\varepsilon_1)$ і $R(\varepsilon_1)$, наведені на рис. 3.9 для межі «повітря – скло» ($n_1 = 1$; $n_2 = 1,52$).

Аналіз графіків свідчить про те, що

1. Часткові і загальні коефіцієнти відбиття прогресивно зростають із збільшенням кута падіння ε_1 і досягають 1 (100%), коли $\varepsilon_1 = 90^\circ$.

2. Загальний коефіцієнт відбиття можна розраховувати за спрощеною формулою (3.65) в діапазоні кутів падіння від 0° до 30° .
3. Коли промінь проходить в зворотному напрямку із діелектрика n_2 в діелектрик n_1 , то кути ε_1 і ε'_2 по своїм значенням змінюють один одного, а значення коефіцієнтів R_{\parallel} , R_{\perp} і R , як видно із формул (3.63), (3.64) і (3.72) залишаються незмінними, тобто $R_{12} = R_{21}$.
4. При падінні променя під *кутом Брюстера* $\varepsilon_1 = \varepsilon_B$, частковий коефіцієнт R_{\parallel} становиться рівним нулю і паралельна складова у відбитій хвилі відсутня. **Відбита хвиля в цьому випадку буде плоскополяризованою в площині, перпендикулярній до площини падіння. Заломлена хвиля буде частково поляризованою з найбільшою ступеню поляризації.** Як видно із формули (3.63) $R_{\parallel} = 0$, коли $\varepsilon_1 + \varepsilon'_2 = 90^\circ$, тобто коли відбитий і заломлений промені взаємно перпендикулярні (рис. 3.10). В цьому випадку із закону заломлення маємо

$$\frac{\sin \varepsilon_B}{\sin \varepsilon'_2} = \frac{\sin \varepsilon_B}{\sin(90^\circ - \varepsilon_B)} = \operatorname{tg} \varepsilon_B = \frac{n_2}{n_1}. \quad (3.75)$$

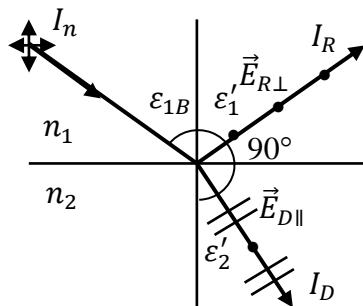


Рис. 3.10. Визначення Кута Брюстера

Кут Брюстера ε_B , або кут повної поляризації, залежить від напрямку розповсюдження світла. Так для межі «повітря–скло» ($n_1 = 1$; $n_2 = 1,52$) $\varepsilon_{B1} = 56^\circ 40'$, а для межі «скло–повітря» ($n_1 = 1,52$; $n_2 = 1$) $\varepsilon_{B2} = 33^\circ 20'$. Крім того, $\varepsilon_{B1} + \varepsilon_{B2} = 90^\circ$.

3.6. Особливості відбивання світлової хвилі від поверхні металів

Метали відрізняються від діелектриків наявністю в них вільних електронів, щільність яких може досягати 10^{22} в 1 см^3 . Тому при розгляді проходження світла через метали і відбивання від них необхідно враховувати їх

провідність σ . Рівняння Максвелла (2.2) і (2.3) з врахуванням щільності струму провідності

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (3.76)$$

мають вигляд:

$$\text{rot} \vec{E} = -\mu_0 \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \quad (3.77)$$

$$\text{rot} \vec{H} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E}. \quad (3.78)$$

Розв'язками системи рівнянь (3.77) і (3.78) є хвильові рівняння для векторів \vec{E} і \vec{H} , які аналогічно (2.38) і (2.39) мають вигляд:

$$\Delta \vec{E} = \mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad (3.79)$$

$$\Delta \vec{H} = \mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} + \frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (3.80)$$

Вважаючи, що розв'язком хвильових рівнянь (3.79) і (3.80) будуть гармонічні хвилі $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j\omega t}$ і $\vec{H} = \vec{H}_0 e^{j\omega t}$, а $\mu = 1$, рівняння (3.79) і (3.80) можна привести до вигляду

$$\Delta \vec{E} = \frac{\varepsilon_c}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}; \quad (3.79)$$

$$\Delta \vec{H} = \frac{\varepsilon_c}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}, \quad (3.80)$$

який співпадає з хвильовим рівнянням для діелектриків за умови, що дійсна діелектрична проникність ε повинна бути замінена комплексною проникністю

$$\varepsilon_c = \varepsilon - j \frac{\sigma}{\omega}. \quad (3.81)$$

Це означає, що металооптика співпадає з оптикою діелектриків при заміні дійсного параметра $\varepsilon = n^2$ комплексним параметром $\varepsilon_c = n_c^2$, n_c – комплексний показник заломлення.

Визначимо формулу для комплексного показника заломлення таким чином, щоб його дійсна частина співпадала із звичайним показником заломлення, тобто

$$n_c = n(1 - j\kappa_c). \quad (3.82)$$

Встановимо зв'язок між оптичними параметрами метала n і κ_c і його електричними параметрами ε і σ із виразу

$$\varepsilon_c = n_c^2 = n^2 - j2n^2\kappa_c - n^2\kappa_c^2. \quad (3.83)$$

Із порівняння співвідношень (3.81) і (3.83) маємо

$$n^2(1 - \kappa_c^2) = \varepsilon_c \text{ і } n^2\kappa_c = \frac{2\sigma}{\omega}. \quad (3.84)$$

Параметр κ_c залежить від частоти світла ω і характеризує поглинання світла.

Аналіз рівнянь (3.79) і (3.80) свідчить про те, що при падінні світла на межу «діелектрик – метал» виконуються закони відбивання і заломлення. Чим більша електропровідність метала σ , тим сильніше відбувається відбивання світла від його поверхні. Світло, яке падає на поверхню ідеального провідника, для якого $\sigma \rightarrow \infty$, повністю відбивається. Відбивання вважають «металевим», коли параметр $n\kappa_c > 1$. Тому такі метали, як срібло і алюміній, для яких $n\kappa_c$ при довжині хвилі 589,3 нм відповідно дорівнює 3,44 і 5,23 широко використовують для виготовлення оптичних дзеркал.

При падінні природнього світла на поверхню метала під кутом, близьким до нуля, енергетичні коефіцієнти відбиття і пропускання визначаються за формулами

$$R = \frac{(n-1)^2 + (n\kappa_c)^2}{(n+1)^2 + (n\kappa_c)^2}; \quad (3.85)$$

$$T = \frac{4n}{(n+1)^2 + (n\kappa_c)^2}. \quad (3.86)$$

Формула (3.85) є аналогом формули Френеля (3.23) для діелектриків. Коефіцієнти R і T залежать від частоти ω .

Оскільки показник заломлення металів n_c являється комплексною величиною, то амплітуди відбитої і заломленої хвиль також будуть комплексними. Це призводить до того, що при падінні на метал плоскополяризованої хвилі між векторами падаючої \vec{E} , відбитої \vec{E}_R і заломленої \vec{E}_D хвиль виникає різниця фаз. Ця різниця фаз має різні значення для

паралельної \vec{E}_{\parallel} і перпендикулярної \vec{E}_{\perp} складових природнього світла. В результаті складання двох взаємно перпендикулярних коливань $\vec{E}_{R\parallel}$ і $\vec{E}_{R\perp}$ з відмінною від нуля різницею фаз між ними виникає еліптично поляризоване світло. Характер поляризації обох хвиль, в свою чергу, визначається параметром nk_c і умовою падіння світла. Таке явище лежить в основі поляризаційного дослідження поверхонь металів і називається *еліпсометрією*.

2.13. Приклади розрахунку коефіцієнтів відбиття і заломлення світла на межі двох діелектриків. Формули Френеля

Приклад 3.1. Визначте коефіцієнти відбиття та заломлення при нормальному падінні світла на межу діелектриків: а) “повітря–вода”; б) “повітря – скло БК10 ($n_2 = 1,5688$)”; “скло К8 ($n_1 = 1,5183$) – скло ТФ10 ($n_2 = 1,8138$)”.

Розв’язання. Використаємо формули (3.23) і (3.24):

$$\text{а) } R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 = \left(\frac{1 - 1,33}{1 + 1,33} \right)^2 = 0,02; \quad T = 1 - R = 1 - 0,02 = 0,98;$$

$$\text{б) } R = \left(\frac{1 - 1,5688}{1 + 1,5688} \right)^2 = 0,049; \quad T = 1 - 0,049 = 0,951;$$

$$\text{в) } R = \left(\frac{1,5163 - 1,8138}{1,5163 + 1,8138} \right)^2 = 0,008; \quad T = 1 - 0,008 = 0,992.$$

Приклад 3.2. Промінь світла падає на межу “скло ТФ1 ($n_1 = 1,6522$) – вода” під кутом 45° . Визначте коефіцієнти відбиття для “р” та “s” компонентів та повний коефіцієнт відбиття для природнього світла.

Розв’язання. Часткові коефіцієнти відбиття розраховуються за формулою (3.72). Кут заломлення ε'_2 знайдемо із закону заломлення (1.9)

$$\varepsilon'_2 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \varepsilon_1\right) = \arcsin\left(\frac{1,6522}{1,33} \sin 45^\circ\right) = 61,5^\circ.$$

Тоді часткові коефіцієнти будуть дорівнювати:

$$R_p = \frac{\operatorname{tg}^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2')}{\operatorname{tg}^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2')} = \frac{\operatorname{tg}^2(45^\circ - 61,5^\circ)}{\operatorname{tg}^2(45^\circ + 61,5^\circ)} = 0,0076;$$

$$R_s = \frac{\sin^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2')}{\sin^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2')} = \frac{\sin^2(45^\circ - 61,5^\circ)}{\sin^2(45^\circ + 61,5^\circ)} = 0,0872.$$

Повний коефіцієнт відбиття розраховуємо за формулою (3.72)

$$R = \frac{1}{2}(R_p + R_s) = \frac{1}{2}(0,0076 + 0,0872) = 0,0474.$$

Приклад 3.3. На поверхню води під кутом Брюстера падає промінь плоскополяризованого світла. Площина коливань світлового вектора складає кут 45° з площиною падіння. Знайти коефіцієнт відбиття.

Розв'язання. В загальному випадку коефіцієнт відбиття R визначається за формулою (3.67). Для випадку, який відповідає умові прикладу (кут падіння дорівнює куту Брюстера), коли “р”-компонента відбитого світла відсутня, коефіцієнт відбиття дорівнює

$$R = \frac{I_{Rs}}{I_0}. \quad (3.87)$$

Щоб скористатись формулами Френеля з урахуванням кута α - азимута падаючого світла, який пов'язує амплітуди “повної” падаючої хвилі (E_0) та її s-компоненти (E_{0s}) (див. рис. 3.11) через співвідношення $E_{0s} = E_0 \cdot \sin \alpha$, або $I_{0s} = I_0 \cdot \sin^2 \alpha$.

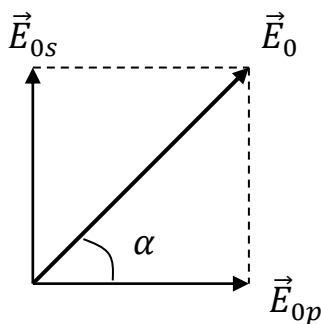


Рис. 3.11. До прикладу 3.3

Тоді запишемо робочу формулу (3.87) у вигляді:

$$R = \frac{I_{Rs}}{I_{0s}} \cdot \sin^2 \alpha. \quad (3.88)$$

Скористаємось (3.72):

$$R = \frac{I_{Rs}}{I_{0s}} \sin^2 \alpha = \frac{\sin^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2')}{\sin^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2')} \sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha (\sin \varepsilon_1 \cdot \cos \varepsilon_2' - \cos \varepsilon_1 \cdot \sin \varepsilon_2')^2}{(\sin \varepsilon_1 \cdot \cos \varepsilon_2' + \cos \varepsilon_1 \cdot \sin \varepsilon_2')^2} =$$

$$= \frac{\sin^2 \alpha (\sin^2 \varepsilon_1 - \sin^2 \varepsilon_2')^2}{(\sin^2 \varepsilon_1 + \sin^2 \varepsilon_2')^2} = \sin^2 \alpha \left[\frac{\sin^2 \varepsilon_2' \left(\frac{\sin^2 \varepsilon_1}{\sin^2 \varepsilon_2'} - 1 \right)}{\sin^2 \varepsilon_2' \left(\frac{\sin^2 \varepsilon_1}{\sin^2 \varepsilon_2'} + 1 \right)} \right]^2 = \sin^2 \alpha \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^2.$$

Для значень величин, які наведені в умові цього прикладу,

$$R = \left[\frac{(1,33)^2 - 1}{(1,33)^2 + 1} \right]^2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,038.$$

Приклад 3.4. Вузкий пучок природного світла падає під кутом Брюстера на поверхню товстої плоско паралельної прозорої пластинки. При цьому від верхньої поверхні відбивається $R = 0,08$ світлового променя. Знайдіть інтенсивності променів 1,2,3,4 (рис.3.12).

Розв'язання. Перед тим, як приступити до розв'язку цього прикладу,

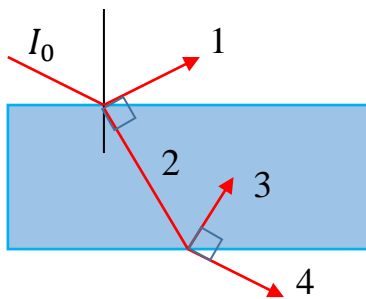


Рис. 3.12. До прикладу 3.4

покажемо, що для променя 2, який падає на другу грань пластинки, виконується умова Брюстера (якщо вона виконується для променя 0, який падає на першу грань пластинки). За умовою прикладу: $\text{tg } \varepsilon_{1B} = \frac{n_2}{n_1}$, де n_1 та n_2 –

показники заломлення середовища, з якого промінь падає на пластинку, та самої пластинки відповідно.

Якщо скористатись законом Снелліуса $n_1 \sin \varepsilon_{1Bp} = n_2 \sin \varepsilon_{2Bp}$ і об'єднати його із законом Брюстера для першої межі розділу:

$$\operatorname{tg} \varepsilon_{1Bp} \equiv \frac{\sin \varepsilon_{1B}}{\cos \varepsilon_{1B}} = \frac{\frac{n_2}{n_1} \sin \varepsilon_{2Bp}}{\cos \varepsilon_{1Bp}} = \frac{n_2}{n_1}, \text{ то можна прийти до висновку, що}$$

$$\frac{\sin \varepsilon_{2B}}{\cos \varepsilon_{1B}} = 1 \Rightarrow \sin \varepsilon_{2B} = \cos \varepsilon_{1B}. \text{ Останнє свідчить про те, що } \varepsilon_{2B} + \varepsilon_{1B} = \pi/2 -$$

падаючий на межу промінь та заломлений промінь складають прямий кут, а це і є необхідною і достатньою умовою закону Брюстера.

Падаючий промінь природного світла замінюється його енергетичним еквівалентом – двома лінійно поляризованими у взаємно перпендикулярних площинах променями. Один промінь поляризований у площині падіння ($I_{\parallel} = I_p$), а другий – у площині, яка перпендикулярна до площини падіння ($I_{\perp} = I_s$). Інтенсивність обох променів однакова і дорівнює половині інтенсивності падаючого променя природного світла: $I_p = I_s = I_0/2$. Тому будемо розв’язувати приклад, розбивши його на дві частини: для “*p*”- та “*s*”-компонентів.

Для *p*- компоненти (рис. 3.13,а). Через те, що промінь падає на поверхню платівки під кутом Брюстера, “*p*”- компонента променя не відбивається (коефіцієнт відбиття для “*p*”- компоненти $R_p = 0$), а тільки за заломлюються. Тобто інтенсивність “*p*”- компоненти променя і $I_{1p} = 0$.

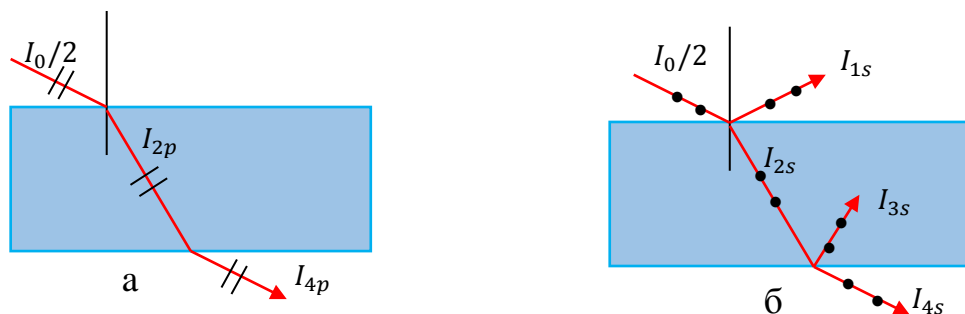


Рис. 3.13. До прикладу 3.4

З умови прикладу – пластинка прозора, світло при поширенні в ній не поглинається. Якщо немає відбиття і немає поглинання, то інтенсивність променя буде однаковою для всього шляху поширення: $I_{2p} = I_{4p} = \frac{I_0}{2}$.

Для “s”-компоненти (рис. 3.13,б). Інтенсивність “s”-компоненти променя 1: $I_{1s} = \frac{I_0}{2} R_s$. Скористаємось тим, що при виконанні умови Брюстера, коефіцієнт відбиття для “s”-компоненти $R_s = 2R$, де R – коефіцієнт відбиття для природного світла. Тоді $I_{1s} = \frac{I_0}{2} 2R = I_0 R$.

Інтенсивність “s”-компоненти променя 2: $I_{2s} = \frac{I_0}{2} T_s$. Коефіцієнт пропускання T розраховують через R за формулою (3.73). Тоді $I_{2s} = \frac{I_0}{2} (1 - R_s) = \frac{I_0}{2} (1 - 2R)$.

Інтенсивність “s”-компоненти променя 3:

$$I_{3s} = I_{2s} 2R = \frac{I_0}{2} (1 - 2R) 2R = I_0 R (1 - 2R).$$

Інтенсивність “s”-компоненти променя 4:

$$I_{4s} = I_{2s} - I_{3s} = \frac{I_0}{2} (1 - 2R) - I_0 R (1 - 2R) = \frac{I_0}{2} (1 - 2R)(1 - 2R) = \frac{I_0}{2} (1 - 2R)^2.$$

Таким чином, інтенсивність променя 1: $I_1 = I_{1s} + I_{1p} = I_0 R$;

інтенсивність променя 2: $I_2 = I_{2s} + I_{2p} = I_0 (1 - R)$;

інтенсивність променя 3: $I_3 = I_{3s} + I_{3p} = I_0 (1 - 2R) R$;

інтенсивність променя 4: $I_4 = I_{4s} + I_{4p} = I_0 (1 + 2R^2 - 2R)$.

Приклад 3.5. Об’єктив складається із двоопуклої ($n_1 = 1,52$) та вгнуто-плоскої ($n_2 = 1,6$) лінз з однаковими радіусами сферичних поверхонь, які розділені повітряним проміжком. Визначте коефіцієнт пропускання об’єктива.

Як зміняться втрати на відбивання об'єктиву, якщо між лінзами відсутній повітряний проміжок (має місце оптичний контакт)?

Розв'язання. Об'єktiv має чотири заломлюючі поверхні. Коефіцієнт пропускання такого об'єктива згідно формули (3.28) визначається таким співвідношенням:

$$T_{os} = (1 - R_1)^2(1 - R_2)^2.$$

де $R_1 = \left(\frac{1 - n_1}{1 + n_1}\right)^2 = \left(\frac{1 - 1,52}{1 + 1,52}\right)^2 = 0,0426$ – коефіцієнт відбиття на одній поверхні

першої лінзи; $R_2 = \left(\frac{1 - n_2}{1 + n_2}\right)^2 = \left(\frac{1 - 1,6}{1 + 1,6}\right)^2 = 0,0532$ – коефіцієнт відбиття на одній

поверхні другої лінзи. Тоді $T_{os} = (1 - 0,0426)^2(1 - 0,0532)^2 = 0,8217$. Втрати на відбиття в об'єктиві $R_{os} = 1 - T_{os} = 0,1783$.

Якщо між лінзами існує оптичний контакт, то такий об'єktiv має три заломлюючі поверхні, а його коефіцієнт пропускання визначається за формулою

$$T'_{os} = (1 - R_1)(1 - R_{12})(1 - R_2).$$

де $R_{12} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 = \left(\frac{1,52 - 1,6}{1,52 + 1,6}\right)^2 = 0,0006$ – коефіцієнт відбиття на межі двох

лінз. Тоді $T'_{os} = (1 - 0,0426)(1 - 0,0006)(1 - 0,0532) = 0,9059$.

Таким чином, втрати на відбивання у такого об'єктива будуть меншими на величину $\Delta T = T'_{os} - T_{os} = 0,9059 - 0,8217 = 0,0842$.

2.14. Задачі для самостійного розв'язування

Задача 3.1. Визначте коефіцієнт відбиття на поверхні діаманта ($n = 2,41$) при нормальному падінню на неї променя світла. Як зміниться здатність відбивання діаманта, який знаходиться у воді?

Відповідь: $R = 0,1709$; $R' = 0,0834$.

Задача 3.2. Промінь природного світла падає на межу двох діелектриків (n_1, n_2) під кутом ε_1 . Користуючись загальною формулою Френеля (3.72), виразіть коефіцієнт відбиття при нормальному падінні через показник заломлення.

Вказівка: Скористайтесь законом заломлення (3.2) і наближеннями для малих кутів $\sin(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2) \approx \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2$ і $\operatorname{tg}(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2) \approx \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2$.

Відповідь:
$$R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2.$$

Задача 3.3. Виведіть формули для “ p ” та “ s ” компонент і повного коефіцієнтів відбиття на межі двох діелектриків при падінні на неї під кутом ε_1 лінійно поляризованого променя, площина поляризації якого нахилена на кут α до площини падіння.

Відповідь:
$$R_p = \frac{\operatorname{tg}^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2')}{\operatorname{tg}^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2')}; \quad R_s = \frac{\sin^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2')}{\sin^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2')}; \quad R = R_p \cos^2 \alpha + R_s \sin^2 \alpha.$$

Задача 3.4. Визначте коефіцієнт пропускання природного світла при падінні під кутом 45° на межу: а) “повітря – скло К8 ($n_1 = 1,5183$)”; б) “вода – скло К8”; в) “скло К8 – вода”; г) “скло К8 – повітря”.

Відповідь: а) 0,9472; б) 0,9930; в) 0,9877; г) 0, так як $\varepsilon_1 > \varepsilon_{нев}$.

Задача 3.5. Показник заломлення скла Ф1 дорівнює 1,6169. Визначте: а) граничний кут падіння на межі “скло – повітря”; б) кути повної поляризації на межах “повітря – скло” і “скло – повітря”; в) коефіцієнти відбиття світла на межах з умови “б”.

Відповідь: а) $38^\circ 12'$; б) $58^\circ 16'$; $31^\circ 44'$; в) $R_{12} = R_{21} = 0,0997$.

Задача 3.6. Під яким кутом повинен падати промінь світла із повітря на воду, яка налита у скляний посуд, щоб відбитий від дна посудини промінь був повністю поляризованим?

Відповідь: $\varepsilon_1 = 84^\circ 22'$.

Задача 3.7. Визначте коефіцієнт пропускання світла лінзою із скла БК8 ($n = 1,5480$) і втрати на відбивання. Поглинанням світла у склі знехтувати.

Відповідь: $T_l = 0,91$; $R_l = 0,09$.

Задача 3.8. Промінь світла падає нормально на бічну грань рівнобедреної прямокутної скляної призми ($n = 1,5$), відбивається від її основи і виходить через другу бічну грань. Визначте втрати світла на відбивання у призмі.

Відповідь: $R_p = 0,078$.

Задача 3.9. Визначте коефіцієнт пропускання у процентах на межі “повітря – скло” ($n = 1,5$) при нормальному падінні променя природного світла, а також при падінні під кутом $56,3^\circ$ променя: а) природного світла; б) лінійно поляризованого у площині, що перпендикулярна до площини падіння; в) лінійно поляризованого у площині падіння.

Відповідь: 96%; а) 92,6%; б) 85,2%; в) 100%.

Задача 3.10. При якому куті заломлення призми, яка виготовлена із скла Ф9 ($n=1,618$), зелений монохроматичний промінь світла, що лінійно поляризований у площині головного перерізу призми, пройде через неї без втрат на відбивання.

Відповідь: $63^\circ 26'$.

Задача 3.11. Перевірте за допомогою формул Френеля для умов нормального падіння, що інтенсивність світлової хвилі, яка падає на межу двох діелектриків, дорівнює сумі інтенсивностей відбитої і заломленої хвиль.

Задача 3.12. Розрахуйте коефіцієнт відбиття природного світла, яке падає на скло марки К8 з показником заломлення $n = 1,518$ під кутом $\varepsilon_1 = 30^\circ$. На скільки зміниться коефіцієнт відбиття при нормальному паданні природного світла?

Відповідь: $R(\varepsilon_1 = 30^\circ) = 0,086$; $R(\varepsilon_1 = 0^\circ) = 0,042$; $\Delta R = 0,044$

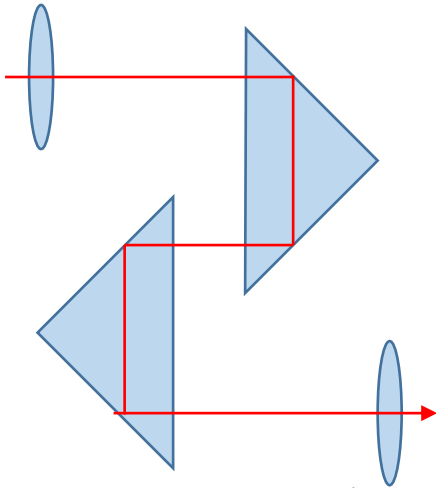


Рис. 3.14. До задачі 3.13

Задача 3.13. Скільки процентів енергії світла втрачається на відбивання у зоровій трубі призматичного бінокля (рис. 3.14), якщо: а) усі елементи схеми виготовлені із одного скла ($n = 1,5$); б) призми виготовлені із скла Ф1 ($n = 1,6169$), а лінзи – із скла К8 ($n = 1,5183$)?

Відповідь: а) 27,86%; б) 33,10%.

Задача 3.14. Визначте швидкість розповсюдження світла у склі, якщо кут повної поляризації при відбиванні дорівнює $\varepsilon_B = 58^\circ$. Світло розповсюджується із повітря у скло.

Відповідь:
$$v = c \frac{n_1}{n_2} = \frac{c}{\operatorname{tg} \varepsilon_B} = 1,875 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Задача 3.15. Граничний кут повного внутрішнього відбивання на межі “скло–повітря” $\varepsilon_{\text{повн}} = 42^\circ$. Знайдіть кут падіння променя із повітря на поверхню скла, при якому відбитий промінь повністю поляризується.

Відповідь:
$$\varepsilon_B = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sin \varepsilon_{\text{повн}}} \right) = 56^\circ 13'$$

Задача 3.16. Промінь природного світла проходить через рідину, яка налита у скляну посудину ($n_2 = 1,5$), і відбивається від її дна під кутом Брюстера $43^\circ 37'$. Визначте: а) показник заломлення рідини; б) під яким кутом повинен

падати на дно посудини промінь світла, що розповсюджується із рідини, щоб настало повне внутрішнє відбивання?

Відповідь: а) $n = 1,57$; б) $\varepsilon_{\text{нов}} = 72^{\circ}22'$.

*Задача 3.17**. Природне світло падає під кутом Брюстера на поверхню скла. Визначте коефіцієнт відбиття заломленого світла.

Відповідь: $R = \frac{1}{2} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^2 = 0,074$.

*Задача 3.18**. На межу двох діелектриків падає промінь лінійно поляризованого світла, площина поляризації якого нахилена під кутом α до площини падіння. Виразіть через кут α коефіцієнт відбиття на межі.

Вказівка: Скористайтесь прикладом 3.3.

Відповідь: $R = R_{\parallel} \cos^2 \alpha + R_{\perp} \sin^2 \alpha$.

РОЗДІЛ 4

ОСНОВИ ЕЛЕКТРОННОЇ ТЕОРІЇ ДИСПЕРСІЇ СВІТЛА

4.1. Поняття дисперсії світла

Дисперсією світла називається залежність оптичних характеристик середовища від довжини хвилі λ або частоти ω світла, яке проходить через середовище. Зазвичай під дисперсією світла розуміють дисперсія показника заломлення світла в середовищі

$$n = n(\lambda) \text{ або } n = n(\omega). \quad (4.1)$$

Оскільки обидва параметра λ і ω світлової хвилі взаємно обернено пропорційні

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}, \quad (4.2)$$

то функції $n(\lambda)$ і $n(\omega)$ по різному залежать від своїх аргументів. Якщо, зазвичай, функція $n(\lambda)$ спадаюча, то функція $n(\omega)$ зростаюча. По різному ці функції проявляються в різних середовищах: в одних сильніше, а в других слабкіше.

Дисперсійні властивості оптичних матеріалів характеризуються:

- *середньою дисперсією показника заломлення середовища*

$$\frac{\Delta n}{\Delta \lambda} = \frac{n_{F'} - n_{C'}}{\lambda_{F'} - \lambda_{C'}} = \frac{n_{F'} - n_{C'}}{480 - 643,8} = -\frac{n_{F'} - n_{C'}}{163,8}, \frac{1}{\text{нм}}; \quad (4.3)$$

- *відносною дисперсією*

$$\frac{n_{F'} - n_{C'}}{n_D - 1}; \quad (4.4)$$

- *оберненою відносною дисперсією (коефіцієнтом дисперсії, або числом Аббе)*

$$v = \frac{n_D - 1}{n_{F'} - n_{C'}}. \quad (4.5)$$

Через дисперсію середовища виражаються основні характеристики дисперсійних призм (рис. 4.1):

- *кутова дисперсія* визначає зміну мінімального кута відхилення $d\sigma_0$ при зміні довжини хвилі $d\lambda$

$$D_a = \frac{d\sigma_0}{d\lambda}. \quad (4.6)$$

- *лінійна дисперсія* визначає просторове положення спектральної лінії

$$D_l = \frac{dl}{d\lambda} = f \cdot D_a, \quad (4.7)$$

де dl – відстань між зображеннями спектральних ліній з довжинами хвиль λ і $\lambda + d\lambda$, які створює об'єктив з фокусною відстанню f .

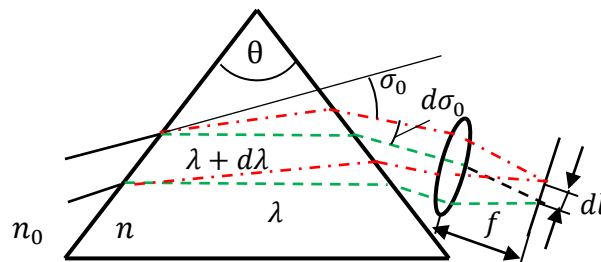


Рис. 4.1. Дисперсійні властивості призми

Під мінімальним кутом відхилення σ_0 розуміють кут відхилення променя призмою від початкового напрямку, коли всередині призми промінь проходить перпендикулярно до бісектриси кута заломлення θ .

Мінімальний кут відхилення розраховується за формулою

$$\sigma_0 = 2 \arcsin \left(\frac{n}{n_0} \sin \frac{\theta}{2} \right) - \theta, \quad (4.8)$$

де θ – кут заломлення призми; n – показник заломлення матеріалу призми; n_0 – показник заломлення середовища, в якому знаходиться призма.

Після підстановки (4.8) до (4.6), коли $n_0 = 1$ маємо

$$D_a = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}} \frac{dn}{d\lambda}. \quad (4.9)$$

Залежність показника заломлення від довжини хвилі $n(\lambda)$ для кожного оптичного матеріалу визначають експериментальним шляхом. За допомогою призми, виготовленій із досліджуваного матеріалу або полії призми, що заповнена досліджуваною рідиною (газом), вимірюють значення мінімального

кута відхилення $\sigma_{0i}(\lambda_i)$ для різних довжин хвиль λ_i (наприклад, для ліній Фраунгофера). Потім розраховують значення показника заломлення n_i , що відповідає цим довжинам хвиль за формулою

$$n_i = \frac{\sin\left\{\frac{1}{2}[\theta + \sigma_{0i}(\lambda_i)]\right\}}{\sin\frac{\theta}{2}}. \quad (4.10)$$

Зазвичай показник заломлення монотонно зменшується із збільшенням довжини хвилі або зростає із збільшенням частоти світла. Така дисперсія, коли

$$\frac{dn}{d\lambda} < 0 \text{ або } \frac{dn}{d\omega} > 0 \quad (4.11)$$

називається *нормальною дисперсією*.

Дисперсія, коли

$$\frac{dn}{d\lambda} > 0 \text{ або } \frac{dn}{d\omega} < 0 \quad (4.12)$$

називається *аномальною дисперсією*.

Нормальна дисперсія спостерігається в широких областях спектру вдалині від лінії поглинання матеріалом світла з довжиною хвилі λ_0 . У вузьких областях спектру, в межах лінії поглинання, спостерігається аномальна дисперсія.

Для апроксимації експериментальних точок $n_i(\lambda_i)$ нормальної дисперсії застосовують апроксимаційні формули:

- *формула Коші*

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \dots; \quad (4.13)$$

- *формула Гартмана*

$$n(\lambda) = n_0 + \frac{C_0}{\lambda - \lambda_0}, \quad (4.14)$$

де A, B, C, n_0, C_0 – постійні коефіцієнти, які визначаються для кожного середовища по експериментальним точкам $n_i(\lambda_i)$. Зазвичай, в формулі Коші обмежуються першими двома членами. Тоді дисперсію середовища можна виразити формулою

$$\frac{dn}{d\lambda} = -\frac{2B}{\lambda^3}. \quad (4.15)$$

4.2. Електронна теорія дисперсії світла

Дисперсія світла, як залежність показника заломлення середовища від довжини (або частоти) хвилі світла, не знайшла пояснення в електромагнітній теорії Максвелла. Ця теорія давала лише співвідношення між показником заломлення n і діелектричною проникністю ε

$$n^2 = \varepsilon. \quad (4.16)$$

Класична електронна теорія дисперсії світла, яка була вперше запропонована фізиком Г. Лоренцем, заснована на взаємодії світлового вектора \vec{E} електромагнітної хвилі з електронами атомів з урахуванням їх гальмування. Згідно цієї теорії діелектрик розглядається як сукупність осциляторів, які здійснюють вимушені коливання під дією змінного електричного поля \vec{E} .

В рамках цієї теорії удалося встановити залежність показника заломлення $n(\omega)$ діелектрика від частоти ω падаючого на нього світла і пояснити умови виникнення нормальної і аномальної дисперсії.

Розглянемо основи електронної теорії дисперсії. В якості моделі діелектрика будемо розглядати модель розрідженого газу, в якій не враховуються взаємодія між атомами, а атоми розглядаються як гармонічні осцилятори, що здійснюють вимушені коливання під дією монохроматичної світлової хвилі з круговою частотою ω . Визначимо дисперсійну залежність $n(\omega)$ для такої моделі діелектрика.

Скористаємося відомою формулою з курсу «Фізика», яка визначає зв'язок між вектором електричної індукції \vec{D} електромагнітного поля в середовищі з вектором поляризації цього середовища \vec{P}

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (4.17)$$

де \vec{E} – напруженість електричного поля світлової хвилі.

Підставимо до (4.17) матеріальне рівняння (2.6)

$$\varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (4.18)$$

Із останнього співвідношення знаходимо діелектричну проникність, яку з урахуванням формули (1.1), представимо у вигляді

$$\varepsilon = n^2 = 1 + \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0 \vec{E}}. \quad (4.19)$$

Визначимо формулу для вектора поляризації середовища \vec{P} у відповідності до прийнятої моделі. Нехай концентрація хаотично розташованих в об'ємі атомів N , кожен із яких має оптичний електрон з масою m і зарядом e . Монохроматична хвиля

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{j\omega t}, \quad (4.20)$$

яка проходить через середовище, діє на електрон з силою Кулона

$$\vec{F}_1(t) = e\vec{E} \quad (4.21)$$

і відхиляє його із стану рівноваги на величину $\vec{r}(t)$. При цьому кожен атом набуває дипольного моменту

$$\vec{p} = e\vec{r}. \quad (4.22)$$

Дипольні моменти усіх атомів будуть направлені паралельно і середовище (одиниця його об'єму) набуває момент поляризації

$$\vec{P} = N\vec{p} = Ne\vec{r}. \quad (4.23)$$

Підставимо цей вираз до формули (4.19)

$$n^2 = 1 + Ne \frac{\vec{r}}{\varepsilon_0 \vec{E}}. \quad (4.24)$$

Знайдемо закон $r(t)$ для відхилення електрона із стану рівноваги. Для цього розглянемо сили, які діють на електрон, і складемо рівняння його руху. Крім зовнішньої відхиляючої сили \vec{F}_1 на електрон діє пружна сила, яка намагається повернути його в стан рівноваги. Ця сила направлена в протилежного напрямку до відхилення $r(t)$:

$$\vec{F}_2(t) = -b\vec{r}(t), \quad (4.25)$$

де b – коефіцієнт пружності.

При відсутності відхиляючої сили \vec{F}_1 електрон, який виведений із стану рівноваги, здійснював би під дією пружної сили коливання з частотою

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{b}{m}}. \quad (4.26)$$

Ця частота називається *власною частотою випромінювання*, яка співпадає з частотою поглинання середовища.

Під дією сил \vec{F}_1 і \vec{F}_2 електрон здійснює вимушені коливання з частотою ω світлової хвилі. Електрон, що коливається, випромінює вторинну світлову хвилю і втрачає при цьому енергію. Втрату енергії електрона на випромінювання Г. Лоренц запропонував моделювати дією на електрон гальмівної сили, яка пропорційна його швидкості і направлена в протилежному напрямку до швидкості

$$\vec{F}_3(t) = -g \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}. \quad (4.27)$$

Тоді рівняння руху електрона згідно закону Ньютона можна записати у вигляді

$$m \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3. \quad (4.28)$$

Після підстановки (4.21), (4.25) і (4.27) до (4.28) маємо

$$m \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} = e\vec{E} - b\vec{r} - g \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}. \quad (4.29)$$

З урахуванням (4.26) рівняння (4.29) представимо у вигляді

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \omega_0^2 \vec{r} = \frac{e}{m} \vec{E}, \quad (4.30)$$

де $\gamma = b/m$ – коефіцієнт затухання.

Оскільки електрон здійснює коливання з частотою ω зовнішнього електричного поля світлової хвилі (4.20), будемо шукати розв'язок рівняння (4.30) також у вигляді гармонічної функції

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 e^{j\omega t}. \quad (4.31)$$

Після підстановки функції (4.31) і її похідних

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = j\omega \vec{r} \quad \text{і} \quad \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} = (j\omega)^2 \vec{r}$$

до рівняння (4.30), отримаємо

$$\vec{r}(-\omega^2 + j\gamma\omega + \omega_0^2) = \frac{e}{m}\vec{E}. \quad (4.32)$$

Звідки

$$\vec{r} = \frac{e}{m} \frac{\vec{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\gamma\omega}. \quad (4.33)$$

Як видно із формули (4.33), вектора \vec{r} і \vec{E} колінеарні.

Після підстановки (4.33) до (4.24) отримаємо дисперсійну формулу Г. Лоренца для газу з однотипними атомами

$$n^2 = 1 + \frac{e^2}{m\epsilon_0} \frac{N}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\gamma\omega}. \quad (4.34)$$

Ця формула наочно підтверджує наявність залежності показника заломлення n середовища від частоти ω світлової хвилі, яка розповсюджується в середовищі, тобто наявність дисперсії. Графік функції (4.34) наведено на рис. 4.2.

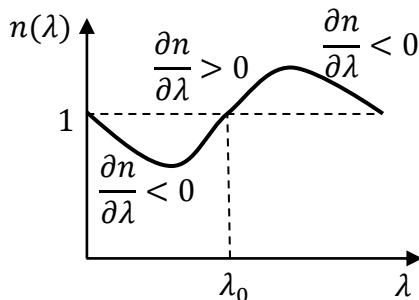


Рис. 4.2. Графік дисперсійної формули Г. Лоренца

Дослідження функції (4.34) свідчить про наявність нормальної і аномальної дисперсії. Дійсно, вдалині від лінії поглинання ω_0 , коли $\omega \ll \omega_0$, або $\omega \gg \omega_0$, спостерігається нормальна дисперсія так як $\frac{\partial n}{\partial \omega} > 0$ або $\frac{\partial n}{\partial \lambda} < 0$. В межах лінії поглинання $\omega \approx \omega_0$ і $\frac{\partial n}{\partial \omega} < 0$ або $\frac{\partial n}{\partial \lambda} > 0$, тобто

спостерігається аномальна дисперсія.

Формула (4.34) характеризує дисперсійну залежність показника заломлення для газів, що мають низький тиск, коли враховується тільки зовнішнє поле \vec{E} і не враховується взаємодія атомів або молекул. У випадку газу при нормальному або високому тиску врахування взаємного впливу атомів, які поляризовані дією світлової хвилі, здійснюється за допомогою поля Лоренца

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{1}{3}\vec{P}. \quad (4.35)$$

Якщо в рівняння руху електрона (4.30) замість зовнішнього поля \vec{E} ввести поле \vec{E}' , то дисперсійна формула (4.34) для газу з однією частотою поглинання ω_0 без врахування поглинання ($\gamma = 0$) набуває вигляду

$$\frac{n^2-1}{n^2+1} = \frac{e^2}{3m\varepsilon_0} \frac{N}{\omega_0^2-\omega^2}. \quad (4.36)$$

Ця формула була отримана майже одночасно двома вченими Г. Лоренцом і Л. Лоренцом незалежно один від одного і тому називається *формулою Лоренца – Лоренца*. Вона визначає нормальну дисперсію за межами лінії поглинання газу, що знаходиться у звичайних умовах.

4.3. Поглинання світла

Розглянемо дисперсійну формулу Лоренца (4.34), яка являє собою квадрат комплексного показника заломлення

$$n_c^2 = 1 + \frac{e^2}{m\varepsilon_0} \frac{N}{(\omega_0^2-\omega^2)+j\gamma\omega}. \quad (4.37)$$

Для газів, що мають низький тиск, показник заломлення $n_c(\omega)$ близький до одиниці. Тому розкладемо функцію в степеневий ряд і обмежимося двома членами ряду

$$n_c(\omega) = 1 + \frac{e^2}{2m\varepsilon_0} \frac{N}{(\omega_0^2-\omega^2)+j\gamma\omega}. \quad (4.38)$$

Представимо комплексний показник заломлення (4.38) у вигляді

$$n_c = n - jk, \quad (4.39)$$

де n і k – дійсні величини.

Введемо поняття *комплексного хвильового числа*

$$k_c = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c} n_c \quad (4.40)$$

і запишемо рівняння плоскої монохроматичної хвилі, яка розповсюджується уздовж осі x

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - k_c x)} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \frac{\omega}{c} n_c x)}. \quad (4.41)$$

Перетворимо фазу хвилі (4.41) з урахуванням (4.39)

$$j\varphi(x, t) = j \left[\omega t - \frac{\omega}{c} (n - j\kappa)x \right] = j\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) - \frac{\omega}{c} \kappa x.$$

Тоді амплітуда поля (4.41) матиме вигляд

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{-\frac{\omega}{c} \kappa x} e^{j\omega \left(t - \frac{x}{v} \right)} = \vec{A}(x) e^{j\omega \left(t - \frac{x}{v} \right)}, \quad (4.42)$$

де $\vec{A}(x)$ – змінна амплітуда поля,

$$\vec{A}(x) = \vec{E}_0 e^{-\frac{\omega}{c} \kappa x}. \quad (4.43)$$

Таким чином, амплітуда плоскої хвилі, що розповсюджується в середовищі з комплексним показником заломлення (4.39), зменшується з пройденою відстанню по експоненціальному закону (4.43), а її інтенсивність змінюється згідно (2.60) як

$$I(x) = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 A(x)^2 = I(0) e^{-2\frac{\omega}{c} \kappa x}. \quad (4.44)$$

Величина κ , що характеризує зменшення інтенсивності світла в середовищі в результаті поглинання, називається *головним показником поглинання*.

Знайдемо вирази для дійсного показника заломлення n і головного показника поглинання κ , порівнюючи формули (4.38) і (4.39)

$$\begin{aligned} n_c(\omega) &= 1 + \frac{e^2}{2m\varepsilon_0} \frac{N}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\gamma\omega} = 1 + \frac{e^2}{2m\varepsilon_0} \frac{N}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\gamma\omega} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - j\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2) - j\gamma\omega} = \\ &= 1 + \frac{e^2 N}{2m\varepsilon_0} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} - j \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} = n - j\kappa. \end{aligned}$$

Із останньої рівності маємо

$$n(\omega) = 1 + \frac{e^2 N}{2m\varepsilon_0} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}, \quad (4.45)$$

$$\kappa(\omega) = \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}. \quad (4.46)$$

Графіки функцій $n(\omega)$ і $\kappa(\omega)$ наведені на рис. 4.3. Дисперсійна функція $n(\omega)$ має дві області нормальної дисперсії ab cd і одну область аномальної дисперсії bc , яка співпадає із

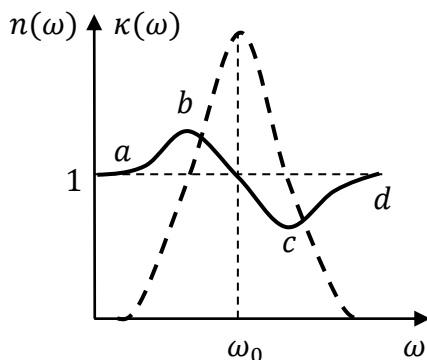


Рис. 4.3. Дисперсійна залежність показника заломлення $n(\omega)$ і головного показника поглинання $\kappa(\omega)$

смугою поглинання, що співпадає з частотою ω_0 власних коливань електрона.

4.3. Закон поглинання світла Бугера-Ламберта

При проходженні електромагнітної світлової хвилі через прозору речовину частина її енергії втрачається на збудження коливань електронів. Частина цієї енергії знову повертається за рахунок випромінювання вторинних хвиль збудженими електронами, а інша частина переходить в інші види енергії (наприклад, в теплову енергію). Тому при проходженні через середовище амплітуда світлової хвилі і інтенсивність світла зменшуються, тобто відбувається поглинання світла. При цьому вимушені коливання електронів, а отже і поглинання світла, становиться особливо сильним, коли частота світлової хвилі ω близька до власної резонансної частоти коливань електрона ω_0 . Явище поглинання описується закономірністю (4.44).

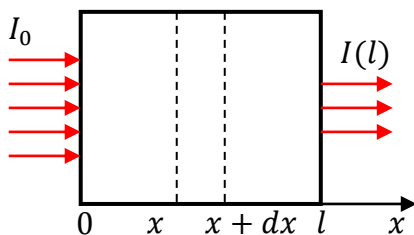


Рис. 4.4. Отримання закону Бугера-Ламберта

Наведемо отримання закону поглинання світла, який вперше в 1729 році отримав Бугер. Нехай на поверхню прозорого однорідного середовища товщиною l нормально падає паралельний пучок світла з інтенсивністю $I(0)$ (рис. 4.4). Визначимо інтенсивність світла на виході середовища. Для цього оберемо вісь x в напрямку розповсюдження світла і виділимо в середовищі тонкий шар товщиною dx .

Бугером експериментальний шляхом було встановлено, що зменшення інтенсивності світла на шляху dx пропорційно величині цього шляху і величині самої інтенсивності

$$dI = -\alpha I dx, \quad (4.47)$$

де α – показник поглинання, що не залежить від інтенсивності світла і має розмірність $1/\text{м}$. Знак мінус в (4.47) показує, що із збільшенням товщини шару

dx інтенсивність світла, яке через шар зменшується. Вираз (4.47) інколи називають *диференціальним законом поглинання Бугера*.

Розв'яжемо диференціальне рівняння (4.47), представивши його у вигляді

$$\frac{dI}{I} = -\alpha dx. \quad (4.48)$$

Інтегруючи це рівняння, отримаємо

$$\int_{I_0}^{I(l)} \frac{dI}{I} = -\alpha \int_0^l dx \Rightarrow \ln I(l) - \ln I_0 = -\alpha l \Rightarrow I(l) = I_0 e^{-\alpha l}. \quad (4.49)$$

Цей вираз називається *закон поглинання світла Бугера-Ламберта*.

Згідно цього закону інтенсивність світла зменшується в поглинаючому

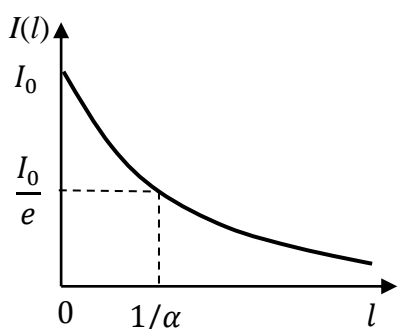


Рис. 4.5. Закон поглинання світла Бугера-Ламберта

середовищі експоненціально (рис. 4.5). Якщо $l = 1/\alpha$, то інтенсивність на виході $I(l)$ зменшується в $e = 2,73$ порівняно з вхідною інтенсивністю I_0 . Таким чином, показник поглинання є величина, що обернена до товщини шару, при проходженні якого інтенсивність світла зменшується в e разів.

При малих значеннях показника поглинання α справедливе наближення $e^{-\alpha} \approx 1 - \alpha$. У цьому випадку формула (4.49) запишеться у вигляді

$$I(l) = I_0(1 - \alpha)^l. \quad (4.49')$$

Показник поглинання залежить від частоти (або довжини хвилі) світла. Із порівнянь (4.44) і (4.49) маємо:

$$\alpha = 2 \frac{\omega}{c} \kappa = \frac{4\pi}{\lambda}. \quad (4.50)$$

Звідси випливає, що показник поглинання світла носить селективний характер, чим пояснюється виникнення кольорового світла при проходженні білого світла через середовище.

Речовина, що не поглинає світло всіх довжин хвиль видимого діапазону, називається *абсолютно прозорою*. Закон поглинання світла поглинаючих розчинів в прозорому розчиннику був встановлений Бугером і Беєром

незалежно один від одного. Ними було встановлено, що показник поглинання світла розчином визначається за формулою

$$\alpha = \alpha_0 C, \quad (4.51)$$

де C – концентрація розчину; α_0 – показник поглинання при одиничній концентрації розчину.

Тому закон поглинання світла розчином

$$I(l) = I_0 e^{-\alpha_0 C l} \quad (4.52)$$

носить назву *закону Бугера-Бєєра*.

Спектри поглинання, які графічно представлені залежністю $\alpha(\lambda)$, являються важливою оптичною характеристикою різних середовищ і матеріалів. В газах і парах металів при малому тиску атоми розташовані на значних відстанях один від одного, а тому спектр поглинання являє собою сукупність вузьких спектральних ліній, які мають довжини хвиль, що відповідають власним частотам коливань електронів атомів (рис. 4.6,а). При підвищенні тиску спектральні лінії розширюються і перетворюються в смугасті спектри, а при високому тиску смугасті спектри перетворюються в неперервні спектри, характерні для рідин і твердих речовин (рис. 4.6,б).

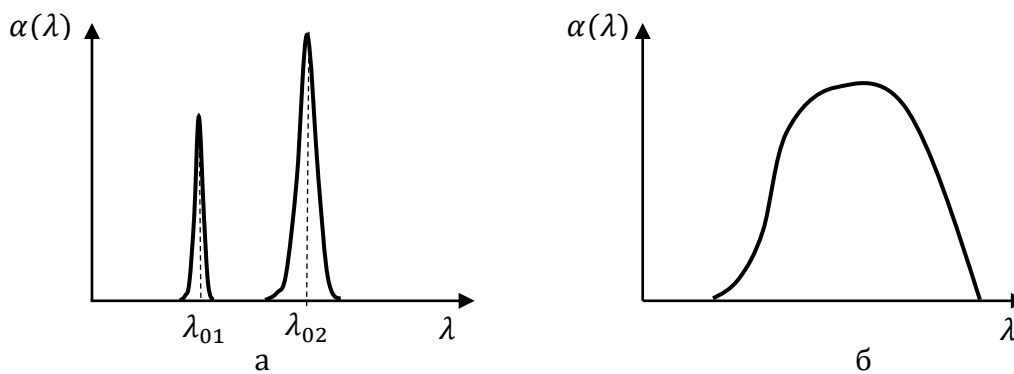


Рис. 4.6. Спектри поглинання: а – лінійчаті; б – неперервні

Метали також сильно поглинають світло і мають показник поглинання порядку 10^4 см^{-1} , тоді як показник поглинання скла не перевищує 10^{-2} см^{-1} . Це пояснюється наявністю в металах вільних електронів, які поглинають енергію світлової хвилі і перетворюють її в теплову енергію.

Повний коефіцієнт пропускання оптичної системи, яка складається із окремих оптичних елементів, з урахуванням втрат на відбивання, поглинання і розсіювання світла розраховується за формулою

$$T_{\Sigma} = \prod_{i=1}^M (1 - R_i) \prod_{k=1}^N (1 - \alpha_k)^{l_k}, \quad (4.53)$$

де M – число поверхонь оптичних елементів, що заломлюють світло; N – число оптичних елементів, через які проходить світло; R_i – коефіцієнт відбиття i -ої поверхні; α_k – показник ослаблення світла k -тим елементом, який одночасно враховує поглинання і розсіювання світла склом; l_k – товщина k -го елемента вздовж оптичної системи.

4.4. Приклади розрахунку дисперсії і поглинання світла

Приклад 4.1. Показник заломлення прозорої речовини для деякого спектрального діапазону описується двочленною дисперсійною формулою Коші $n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$. Визначте: а) дисперсію показника заломлення речовини; б) фазову швидкість світла; в) групову швидкість світла.

Розв'язання. а). Дисперсія показника заломлення речовини визначається за формулою

$$\frac{dn}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \left(A + \frac{B}{\lambda^2} \right) = -\frac{2B}{\lambda^3}. \quad (4.54)$$

б). Фазова швидкість у речовині

$$v = \frac{c}{n} = \frac{c}{A + B/\lambda^2} = c \frac{\lambda^2}{A\lambda^2 + B}. \quad (4.55)$$

в). Групова швидкість світла у речовині визначається за формулою Релея (2.81):

$$u = v - \frac{2\pi}{\lambda} \frac{dv}{\frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}.$$

$$\text{де } \frac{dv}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \left(c \frac{\lambda^2}{A\lambda^2 + B} \right) = c \frac{2B\lambda}{(A\lambda^2 + B)^2}.$$

Тоді

$$u = c \frac{\lambda^2}{A\lambda^2 + B} - c \frac{2B\lambda^2}{(A\lambda^2 + B)^2} = c\lambda^2 \frac{A\lambda^2 - B}{(A\lambda^2 + B)^2}. \quad (4.56)$$

Приклад 4.2. Для рівносторонньої призми із скла ТК12 експериментально визначені мінімальні кути відхилення $43^\circ 57' 39''$, $43^\circ 32' 2''$ і $43^\circ 7' 5''$ для променів трьох довжин хвиль $\lambda_{F'}$, λ_e і $\lambda_{C'}$, $\lambda_{F'}$ = 0,480 мкм, λ_e = 0,546 мкм і $\lambda_{C'}$ = 0,6438 мкм. Визначте: а) показники заломлення $n(\lambda)$; б) середню дисперсію показника заломлення скла; в) середню кутову дисперсію призми; г) коефіцієнти двочленної формули Коші; д) фазову і групову швидкості світла у склі ТК12 для λ_e .

Розв'язання. а) Показники заломлення розраховуємо за формулою (4.10)

$$n(\lambda_{F'}) = \frac{\sin\left\{\frac{1}{2}[60^\circ + 43^\circ 57' 39'']\right\}}{\sin 30^\circ} = 1,5756; \quad n(\lambda_e) = 1,5710; \quad n(\lambda_{C'}) = 1,5665.$$

б) Середню дисперсію показника заломлення скла розрахуємо за формулою (4.3)

$$\frac{\Delta n}{\Delta \lambda} = -\frac{n_{F'} - n_{C'}}{0,1638} = -0,055 \frac{1}{\text{мкм}}.$$

в) Кутова дисперсія призми визначається за формулою (4.9) як

$$D_a = \frac{2\sin 30^\circ}{\sqrt{1 - 1,571^2 \sin^2 30^\circ}} (-0,055) = -0,0898 \frac{\text{рад}}{\text{мкм}}.$$

г) Для визначення коефіцієнтів A і B двочленної формули Коші (4.13) складемо систему рівнянь для крайніх значень довжини хвилі $\lambda_{F'}$ і $\lambda_{C'}$:

$$\begin{cases} 1,5756 = A + B \frac{1}{0,480^2}; \\ 1,5665 = A + B \frac{1}{0,6438^2}. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є $A = 1,5551$ і $B = 0,0047$ мкм². Тоді дисперсійна формула Коші для скла ТК12 має вигляд: $n(\lambda) = 1,5551 + \frac{0,0047}{\lambda^2}$.

д) Фазову швидкість монохроматичного світла для λ_e у склі ТК12 розрахуємо за формулою

$$v = \frac{c}{n} = c \frac{\lambda^2}{A\lambda^2 + B} = 3 \cdot 10^8 \cdot \frac{0,546^2}{1,5551 \cdot 0,546^2 + 0,0047} = 1,91 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Групову швидкість розрахуємо за формулою (2.81), яку запишемо у вигляді

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} = c\lambda^2 \frac{A\lambda^2 - B}{(A\lambda^2 + B)^2} = 3 \cdot 10^8 \cdot 0,546^2 \frac{1,5551 \cdot 0,546^2 - 0,0047}{(1,5551 \cdot 0,546^2 + 0,0047)^2} = 1,87 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

У середовищі з нормальною дисперсією ($dn/d\lambda < 0$) групова швидкість світла завжди менша фазової швидкості.

Приклад 4.3. Показник заломлення повітря при нормальних умовах ($t_1=0^\circ\text{C}$, $p_1 = 760$ мм рт. ст.) для жовтої лінії натрію дорівнює 1,0002918. Визначте показник заломлення повітря для цієї довжини хвилі при температурі $t_2 = 30^\circ\text{C}$ і тиску $p_2 = 3 \cdot 10^6$ Па.

Розв'язання. Для розрахунку показника заломлення скористаємося формулою Лоренца (4.34). Будемо вважати, що із зміною температури і тиску змінюється тільки концентрація атомів N . Тоді із формули (4.34) легко отримати відношення

$$\frac{n_1^2 - 1}{n_2^2 - 1} = \frac{N_1}{N_2}.$$

Концентрація атомів N пропорційна густині повітря ρ , тобто

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}. \quad (4.57)$$

Із рівняння Клапейрона-Менделєєва для двох станів повітря маємо:

$$\frac{p_1}{\rho_1 T_1} = \frac{p_2}{\rho_2 T_2}. \quad (4.58)$$

Тоді $\frac{n_1^2 - 1}{n_2^2 - 1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1}$. Звідки

$$n_2 = \sqrt{1 + (n_1^2 - 1) \frac{p_2 T_1}{p_1 T_2}}. \quad (4.59)$$

Після підстановки вихідних даних отримаємо:

$$n_2 = \sqrt{1 + (1,0002918 - 1) \frac{3 \cdot 10^6 \cdot 273}{1,01 \cdot 10^3 \cdot 303}} = 1,00777.$$

Приклад 4.4. Призма виготовлена із флінта з показником заломлення $n = 1.70$. Дисперсія цього матеріалу $\frac{dn}{d\lambda} = -956 \text{ см}^{-1}$. На який кут будуть розведені цією призмою дві жовті лінії з довжинами хвиль $\lambda_1 = 589,0 \text{ нм}$ та $\lambda_2 = 589,6 \text{ нм}$.

Розв'язання. Скористаємось формулою (4.10), яка визначає показник заломлення призми

$$n_i = \frac{\sin \frac{\theta + \sigma_0}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}. \quad (4.60)$$

Диференціювання (4.60) по куту σ_0 дає такий результат

$$\frac{dn}{d\sigma_0} = \frac{1}{2} \frac{\cos \frac{\theta + \sigma_0}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

Кутова дисперсія визначається за формулою

$$D_a = \frac{d\sigma_0}{d\lambda} = \frac{d\sigma_0}{dn} \frac{dn}{d\lambda} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta + \sigma_0}{2}} \frac{dn}{d\lambda}. \quad (4.61)$$

З рис.4.7 видно, що $\frac{\theta + \sigma_0}{2} = \varepsilon_1$. Тоді

$$\cos \frac{\theta + \sigma_0}{2} = \cos \varepsilon_1 = \sqrt{1 - \sin^2 \varepsilon_1} = \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}. \quad (4.62)$$

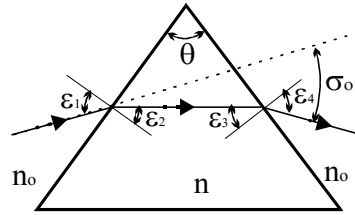


Рис.4.7. До прикладу 4.4

Після підстановки (4.62) до (4.61) маємо:

$$D_a = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}} \frac{dn}{d\lambda}. \quad (4.63)$$

Із формули кутової дисперсії призми (4.6) визначаємо зміну мінімального кута відхилення $\Delta \sigma_0$ при зміні довжини хвилі $\Delta \lambda$: $\Delta \sigma_0 = D_a \Delta \lambda$. Тоді

$$\Delta \sigma_0 = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}} \frac{dn}{d\lambda} \Delta \lambda. \quad (4.64)$$

Підставляючи в (4.64) значення величин із умови прикладу, отримуємо:

$$\Delta \sigma = \frac{2 \cdot 0,5 \cdot 2}{\sqrt{4 - 1,7^2}} \cdot 956 \cdot 6 \cdot 10^{-4} \approx 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ рад} \approx 0,5'.$$

Приклад 4.5. Визначте частину втрат світла на відбивання та поглинання в об'єктиві, який складається із трьох лінз. Параметри лінза (показники заломлення n_k , товщини d_k вздовж оптичної осі і показники поглинання α_k) наведені в табл. 4.1. Дві останні лінзи мають між собою оптичний контакт.

До прикладу 4.5

Таблиця 4.1.

k	Марка скла	n_k	d_k , мм	α_k , см^{-1}
1	К8	1,5183	12,6	0,0035
2	БФ8	1,5857	8,5	0,0045
3	ТФ7	1,7343	5,2	0,0080

Розв'язання. Скористаємося формулою (4.53) для повного коефіцієнта пропускання оптичної системи

$$T_{\Sigma} = T_R T_{\kappa}, \quad (4.65)$$

де T_R і T_{κ} - коефіцієнти пропускання оптичної системи за рахунок втрат на відбивання і поглинання світла відповідно.

$$T_R = (1 - R_{01})^2 (1 - R_{02}) (1 - R_{23}) (1 - R_{30}),$$

$$\text{де } R_{01} = \left(\frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1} \right)^2 = \left(\frac{1 - 1,5183}{1 + 1,5183} \right)^2 = 0,0424;$$

$$R_{02} = 0,0513; R_{23} = 0,002; R_{30} = 0,0721.$$

$$\text{Тоді } T_R = (1 - 0,0421)^2 (1 - 0,0513) (1 - 0,002) (1 - 0,0721) = 0,8056.$$

Визначимо коефіцієнт

$$T_{\kappa} = (1 - \kappa_1)^{d_1} (1 - \kappa_2)^{d_2} (1 - \kappa_3)^{d_3} = (1 - 0,035)^{1,26} (1 - 0,0045)^{0,85} (1 - 0,008)^{0,52} = 0,9877.$$

Повний коефіцієнт пропускання об'єктива $T_{\Sigma} = 0,8056 \cdot 0,9877 = 0,7957$, частина втрат на відбивання і поглинання складає

$$R_{\Sigma} = 1 - T_{\Sigma} = 1 - 0,7957 = 0,2356.$$

Приклад 4.6. Монохроматичне світло проходить через середовище товщиною 10 см, показник поглинання якого змінюється по закону $\alpha(x) = 0,8 + 120x^2 \text{ м}^{-1}$, де товщина середовища вимірюється в метрах. Визначте коефіцієнт пропускання такого середовища без втрат на відбивання.

Розв'язання. Визначимо інтенсивність світла на виході середовища, використовуючи диференціальний закон поглинання Бугера (4.47)

$$dI = -\alpha I dx.$$

Звідси отримуємо диференціальне рівняння

$$\frac{dI}{I} = -(0,8 + 120x^2) dx.$$

Інтегруємо ліву і праву частини цього рівняння

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = - \int_0^{0,1} (0,8 + 120x^2) dx.$$

Після інтегрування маємо:

$$\ln I|_{I_0}^I = - \left(0,8x + 120 \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{0,1}; \quad \ln I - \ln I_0 = - \left(0,8 + 120 \frac{0,001}{3} \right); \quad \ln \frac{I}{I_0} = -0,84.$$

$$\text{Звідки } T = \frac{I}{I_0} = e^{-0,84} = 0,432.$$

2.14. Задачі для самостійного розв'язування

Задача 4.1. На поверхню скла ЛКЗ під кутом $\varepsilon_1 = 45^\circ$ падає промінь світла. Виміряні кути заломлення для різних довжин хвиль наведені в табл. 4.1. Побудуйте графік дисперсії скла ЛКЗ і розрахуйте значення показника заломлення і середньої дисперсії показника заломлення скла для жовтої лінії натрію ($\lambda_D = 589,3$ нм).

Таблиця 4.2

До задачі 4.1

λ , нм	$\lambda_h = 404,6$	$\lambda_g = 435,8$	$\lambda_F = 486,1$	$\lambda_C = 656,2$	$\lambda_{A'} = 766,5$
ε_2'	$28^\circ 8'$	$28^\circ 12'$	$28^\circ 17'$	$28^\circ 26'$	$28^\circ 27'$

Відповідь: $n_D = 1,487$; $\Delta n / \Delta \lambda = - 4,11 \cdot 10^{-5} \text{ нм}^{-1}$.

Задача 4.2. Дисперсійна формула Коші для скла Ф1 у видимій області спектру має вигляд $n = 1,5878 + 0,0087 \frac{1}{\lambda^2}$, де довжина хвилі λ вимірюється в мкм. Визначте для зеленої лінії ртуті ($\lambda_e = 0,546$ мкм): а) показник заломлення скла; б) дисперсію показника заломлення скла; в) фазову швидкість монохроматичного світла; г) групову швидкість світла для групи хвиль з центром $\lambda_e = 0,546$ мкм.

Відповідь: а) $n_e = 1,6169$; б) $\Delta n / \Delta \lambda = - 0,1069 \text{ мкм}^{-1}$; в) $v_e = 1,85 \cdot 10^8 \text{ м/с}$;

г) $u_e = 1,79 \cdot 10^8$ м/с.

Задача 4.3. Із скла марки Ф1, дисперсійна формула якого приведена в задачі 4.2, зроблена призма. Визначте кутову дисперсію цієї призми при $\lambda_e = 0,546$ мкм для кутів заломлення: а) 60° ; б) 30° ; в) 20° .

Відповідь: а) – 0,1816 рад/мкм; б) – 0,0609 рад/мкм; в) – 0,0386 рад/мкм.

Задача 4.4. В результаті експерименту для скла марки ТФ10 отримані показники заломлення для трьох довжин хвиль:

$\lambda_1 = 0,480$ мкм,	$n_1 = 1,832$;
$\lambda_1 = 0,546$ мкм,	$n_2 = 1,814$;
$\lambda_1 = 0,6438$ мкм,	$n_3 = 1,798$.

Визначте коефіцієнти: а) двочленної формули Коші (для λ_1 і λ_3); б) тричленної формули Коші. Перевірте за двочленною формулою Коші значення показника заломлення n_2 .

Відповідь: а) $A = 1,7567$; $B = 0,0171$ мкм²;

б) $A = 1,7581$; $B = 0,0162$ мкм²; $C = 1,346 \cdot 10^{-4}$ мкм⁴.

Задача 4.5. Дисперсія скла, із якого виготовлена рівностороння призма, задана формулою Коші $n = 1,7567 + 0,0171 \frac{1}{\lambda^2}$. Визначте мінімальні кути відхилення призмою монохроматичних променів світла для довжин хвиль: а) 6438 Å; б) 5461 Å; в) 4800 Å.

Відповідь: а) $68^\circ 03'$; б) $70^\circ 11'$; в) $72^\circ 33'$.

Задача 4.6. Пари бензолу при нормальних умовах для зеленої лінії ртуті ($\lambda_e = 0,546$ мкм) мають показник заломлення $n_0 = 1,001812$. Визначте показник заломлення парів бензолу при температурі 400°C і тиску 60,6 мм рт. ст.

Вказівка. Скористайтесь прикладом 4.3.

Відповідь: $n = 1,000058$.

Задача 4.7. На скільки процентів зменшиться інтенсивність світла при проходженні ним віконного скла ($n = 1,52$; $\kappa = 123 \cdot 10^{-4}$ см⁻¹) товщиною 4 мм:

а) за рахунок відбивання; б) за рахунок поглинання світла; в) за рахунок обох факторів? У скільки разів зменшення інтенсивності за рахунок відбивання перевищує зменшення інтенсивності за рахунок поглинання світла?

Відповідь: а) 8,34%; б) 0,49%; в) 8,79%; г) в 17 разів.

Задача 4.8. При якій товщині скла попередньої задачі втрати на поглинання дорівнюватимуть втратам на відбивання?

Відповідь: 378 мм.

Задача 4.9. Скільки процентів енергії втрачається у трубці бінокля (рис. 3.13), якщо усі її елементи виготовлені із одного скла ($n = 1,5$; $\alpha = 0,007 \text{ см}^{-1}$)? Розміри катетів обох призм однакові і дорівнюють 30 мм, а товщини лінз відповідно дорівнюють 15 мм і 9,5 мм.

Відповідь: 30,57%.

Задача 4.10. Телевізійна оглядова система спостерігає об'єкт, який знаходиться на відстані $R = 10$ км. Показник поглинання світла в атмосфері $\alpha_A = 0,05 \text{ км}^{-1}$. Об'єktiv системи складається із двох склеєних лінз товщиною $d_1 = 5$ мм і $d_2 = 3$ мм, які виготовлені із скла БФ8 ($n_1 = 1,5857$; $\alpha_1 = 0,0045 \text{ см}^{-1}$) і ТФ7 ($n_2 = 1,7343$; $\alpha_2 = 0,0080 \text{ см}^{-1}$). Визначте величину втрат при проходженні світла від об'єкта до фотоприймача.

Відповідь:

$$R_{\Sigma} = 1 - (1 - \kappa_A)^R \left[1 - \left(\frac{1 - n_1}{1 + n_1} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{n_2 - 1}{n_2 + 1} \right)^2 \right] \times \\ \times (1 - \kappa_1)^{d_1} (1 - \kappa_2)^{d_2} = 0,476.$$

Задача 4.11. Маємо прозору пластину товщиною $d = 10$ см. Для деякої довжини хвилі показник поглинання пластини змінюється лінійно від значень $\alpha_1 = 0,8 \text{ м}^{-1}$ біля першої поверхні до $\alpha_2 = 1,2 \text{ м}^{-1}$ біля другої поверхні. Визначте ослаблення (в процентах) за рахунок поглинання інтенсивності монохроматичного світла при проходженні пластини.

Вказівка. Скористайтесь прикладом 4.6.

Відповідь: $R_{\Sigma} = 1 - \exp\left(-\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} d\right) = 9,5\%$.

Розділ 5

ІНТЕРФЕРЕНЦІЯ СВІТЛА

5.1. Поняття інтерференції світла

Інтерференція світла – це додавання (суперпозиція, накладання) двох або декількох хвиль, в результаті якого відбувається просторовий перерозподіл енергії світла. Інтерференцію можна розглядати як зміну щільності потоку енергії, яка обумовлена суперпозицією електромагнітних хвиль [8].

Деякі явища, що обумовлені інтерференцією світла, спостерігались ще Ньютоном в 17 столітті, однак він не зміг їх пояснити з точки зору його корпускулярної теорії світла. Вперше явище інтерференції, як хвильовий процес, було пояснено на початку 19 століття французьким вченим О.Ж. Френелем і англійським вченим Юнгом Т.

В основі інтерференції лежить *принцип суперпозиції*, згідно якого результуюча амплітуда поля \vec{E}_Σ дорівнює векторній сумі амплітуд \vec{E}_1 і \vec{E}_2 двох хвиль, тобто

$$\vec{E}_\Sigma = \vec{E}_1 + \vec{E}_2. \quad (5.1)$$

Принцип суперпозиції являється результатом того, що світлові хвилі описуються однорідними лінійними рівняннями Максвелла. Рівняння (5.1) лежить в основі *лінійної оптики*. Інтерференція світла залежить від поляризації і когерентності світлових хвиль.

5.2. Інтенсивність світла при суперпозиції двох монохроматичних хвиль

Нехай в деякій точці простору зустрічаються дві монохроматичні хвилі з однакової частотою ω , різними амплітудами \vec{E}_{01} , \vec{E}_{02} і початковими фазами φ_{01} , φ_{02} , в яких вектора \vec{E}_1 і \vec{E}_2 орієнтовані в одному напрямку

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} \exp[-j(\omega t + \varphi_{01})] \text{ і } \vec{E}_2 = \vec{E}_{02} \exp[-j(\omega t + \varphi_{02})]. \quad (5.2)$$

Знайдемо результуючу амплітуду поля при інтерференції таких хвиль шляхом підстановки (5.2) до (5.1).

$$\begin{aligned}\vec{E}_\Sigma &= \vec{E}_{01} \exp[-j(\omega t + \varphi_{01})] + \vec{E}_{02} \exp[-j(\omega t + \varphi_{02})] = \\ &= \vec{E}_{0\Sigma} \exp[-j(\omega t + \varphi_{0\Sigma})].\end{aligned}\quad (5.3)$$

Результуючу амплітуду $E_{0\Sigma}$ і фазу $\varphi_{0\Sigma}$ знайдемо за двома способами: векторний спосіб і метод складання комплексних амплітуд.

1. *Векторний спосіб.* Представимо світлові хвилі \vec{E}_1 і \vec{E}_2 у вигляді векторів довжиною E_{01} і E_{02} , орієнтація яких визначається початковими фазами φ_{01} і φ_{02} (рис. 5.1). Із трикутника OBC за теоремою косинусів маємо

$$\begin{aligned}OC^2 &= OB^2 + BC^2 - 2OB \cdot BC \cdot \cos\beta, \text{ або} \\ E_{0\Sigma}^2 &= E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02}\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}).\end{aligned}\quad (5.4)$$

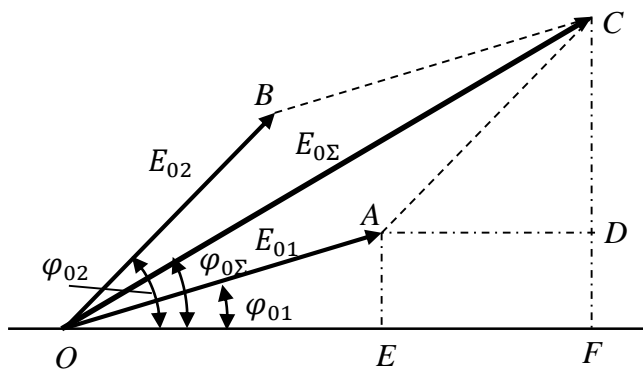


Рис. 5.1. Векторний спосіб складання хвиль

Для визначення початкової фази $\varphi_{0\Sigma}$ розглянемо трикутник OCF .

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\varphi_{0\Sigma} &= \frac{CF}{OF} = \frac{CD+DF}{OE+EF} = \\ &= \frac{E_{01}\sin\varphi_{01} + E_{02}\sin\varphi_{02}}{E_{01}\cos\varphi_{01} + E_{02}\cos\varphi_{02}}.\end{aligned}\quad (5.5)$$

2. *Метод складання комплексних амплітуд.* Визначимо квадрат результуючої амплітуди (5.1) з урахуванням (5.2)

$$E_\Sigma^2 = |E_1 + E_2|^2 = |E_1|^2 + |E_2|^2 + E_1E_2^* + E_1^*E_2, \quad (5.6)$$

де

$$\begin{aligned}|E_1|^2 &= E_1E_1^* = E_{01} \exp[-j(\omega t + \varphi_{01})]E_{01} \exp[j(\omega t + \varphi_{01})] = \\ &= E_{01}^2; \quad |E_2|^2 = E_{02}^2;\end{aligned}\quad (5.7)$$

$$\begin{aligned}E_1E_2^* &= E_{01} \exp[-j(\omega t + \varphi_{01})]E_{02} \exp[j(\omega t + \varphi_{02})] = \\ &= E_{01}E_{02} \exp[j(\varphi_{02} - \varphi_{01})]; \quad E_1^*E_2 = E_{01}E_{02} \exp[-j(\varphi_{02} - \varphi_{01})].\end{aligned}\quad (5.8)$$

Для подальших перетворень використаємо формулу Ейлера

$$2\cos x = e^{jx} + e^{-jx}. \quad (5.9)$$

Тоді

$$\begin{aligned} E_1 E_2^* + E_1^* E_2 &= E_{01} E_{02} \{ \exp[j(\varphi_{02} - \varphi_{01})] + \exp[-j(\varphi_{02} - \varphi_{01})] \} = \\ &= 2\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Після підстановки (5.7) і (5.10) до (5.6) маємо

$$E_{0\Sigma}^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02}\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}). \quad (5.11)$$

Для визначення результуючої інтенсивності при складанні двох хвиль використаємо формулу (2.60) $I = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2$. Тоді

$$I_\Sigma = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}) \rangle, \quad (5.12)$$

де $\langle \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}) \rangle$ – середнє значення за час спостереження (інтегрування) T_i ,

$$\langle \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}) \rangle = \frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}) dt. \quad (5.13)$$

Розглянемо два випадки для формули (5.12).

1. Різниця фаз між двома хвилями, що які приймають участь в інтерференції, не змінюється в часі, тобто

$$\Delta\varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01} = \text{const}. \quad (5.14)$$

Випромінювання, для якого виконується умова (5.14), називається *когерентним*. Очевидно, що когерентне випромінювання повинно бути монохроматичним. Однак не всяке монохроматичне випромінювання буде когерентним.

Для когерентного випромінювання вираз (5.13) має вигляд

$$\langle \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}) \rangle = \frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}) dt = \frac{1}{T_i} \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}) T_i. \quad (5.15)$$

Після підстановки (5.15) до (5.12), отримаємо значення інтенсивності при інтерференції двох когерентних хвиль

$$I_\Sigma = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi, \quad (5.16)$$

Із (5.16) видно, результуюча інтенсивність залежить від різниці фаз $\Delta\varphi$ і змінюється від мінімального значення

$$I_{\Sigma\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}, \text{ коли } \cos \Delta\varphi = -1, \quad (5.17)$$

до максимального значення

$$I_{\Sigma\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}, \text{ коли } \cos \Delta\varphi = 1. \quad (5.18)$$

Це означає, що інтенсивність (5.16) являє собою набір темних і світлих смуг, які називаються *інтерференційною картиною*.

Вид інтерференційної картини (5.16) визначається складовою $2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi$, яка називається *інтерференційним членом*.

2. Різниця фаз між двома хвилями, що які приймають участь в інтерференції, змінюється в часі з рівною ймовірністю в межах від 0 до 2π . Таке випромінювання називається *некогерентним*. Для некогерентного випромінювання інтеграл (5.13) буде дорівнювати нулю, тобто

$$\langle \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}) \rangle = 0. \quad (5.19)$$

Після підстановки (5.19) до (5.12) отримаємо

$$I_{\Sigma} = I_1 + I_2. \quad (5.20)$$

Це означає, що **некогерентне випромінювання не створює інтерференційну картину, а результуюча інтенсивність дорівнює сумі інтенсивностей двох хвиль.**

5.3. Інтерференція двох хвиль, коливання яких відбувається в одному напрямку

Розглянемо два когерентних точкових джерела випромінювання S_1 і S_2 , які утворюють на екрані інтерференційну картину (рис. 5.2). Кожне джерело

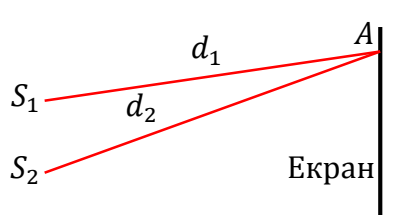


Рис. 5.2. Інтерференція двох хвиль

створює в точці A на екрані амплітуди світлових хвиль E_1 і E_2 , які лінійно поляризовані в площині, перпендикулярній до площини малюнка. В цьому випадку векторний характер світлового поля можна не враховувати. Тоді

$$E_1(A) = E_{01} \cos(\omega t - kd_1 + \varphi_{01}); \quad (5.21)$$

$$E_2(A) = E_{02} \cos(\omega t - kd_2 + \varphi_{02}), \quad (5.22)$$

де $k = 2\pi/\lambda$ – хвильове число.

Нехай $E_{01} = E_{02} = E_0$. В цьому випадку результуюча амплітуда в точні A дорівнює

$$\begin{aligned} E_{\Sigma} &= E_1 + E_2 = E_0 \cos(\omega t - kd_1 + \varphi_{01}) + E_0 \cos(\omega t - kd_2 + \varphi_{02}) = \\ &= 2E_0 \cos[0,5k(d_2 - d_1) - 0,5(\varphi_{02} - \varphi_{01})] \times \\ &\quad \times \cos[\omega t - 0,5k(d_1 + d_2) + 0,5(\varphi_{02} + \varphi_{01})]. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Із формули (5.23) видно, що результуюча постійна амплітуда дорівнює

$$E_{\Sigma 0} = 2E_0 \cos[0,5k(d_2 - d_1) - 0,5(\varphi_{02} - \varphi_{01})]. \quad (5.24)$$

Визначимо інтенсивність інтерференційної картини в точні A , коли $\varphi_{02} - \varphi_{01} = 0$.

$$I_{\Sigma} = 4I_0 \cos^2 \left[\frac{\pi}{\lambda} (d_2 - d_1) \right]. \quad (5.25)$$

Із формули (5.25) видно, що інтенсивність в інтерференційній картині залежить від різниці ходу $\Delta d = d_2 - d_1$.

Максимальна інтенсивність $I_{\Sigma max} = 4I_0$ спостерігається, коли

$$\frac{\pi}{\lambda} (d_2 - d_1) = m\pi \Rightarrow \Delta d = m\lambda, \quad (5.26)$$

де m – порядок інтерференції. Формула (5.26) називається *умовою максимумів*, при якій різниця ходу між двома хвилями, що інтерферують, дорівнює цілому числу довжин хвиль. Тоді різниця фаз між цими хвилями дорівнює

$$\Delta\varphi = k\Delta d = \frac{2\pi}{\lambda} m\lambda = 2\pi m. \quad (5.27)$$

Це означає, що в максимумах інтенсивності дві хвилі складуються в фазі.

Мінімальна інтенсивність $I_{\Sigma min} = 0$ спостерігається, коли

$$\frac{\pi}{\lambda} (d_2 - d_1) = \frac{\pi}{2} + m\pi \Rightarrow \Delta d = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}. \quad (5.28)$$

Формула (5.28) називається *умовою мінімумів*, при якій різниця ходу між двома хвилями, що інтерферують, дорівнює непарному числу половин довжин хвиль.

Тоді різниця фаз між цими хвилями дорівнює

$$\Delta\varphi = k\Delta d = \frac{2\pi}{\lambda} (2m + 1) \frac{\lambda}{2} = 2\pi \left(m + \frac{1}{2} \right). \quad (5.29)$$

Це означає, що в мінімумах інтенсивності дві хвилі складуються в протилежних фазах.

Для кожного положення точки A на екрані буде своя різниця ходу, що призводить до формування світлих і темних смуг, які називаються *інтерференційною картиною*.

Якщо світлові хвилі \vec{E}_1 і \vec{E}_2 поляризовані у різних площинах, то інтенсивність в інтерференційній картині визначається як

$$I_{\Sigma} = I_1 + I_2 + \frac{1}{2} c \varepsilon_0 \langle (\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02}) \rangle, \quad (5.30)$$

де $(\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02})$ – скалярний добуток векторів \vec{E}_{01} і \vec{E}_{02} .

5.4. Інтерферометр Юнга. Ширина інтерференційних смуг

Інтерферометр Юнга являє собою дві вузькі паралельні щілини, які розташовані на малій відстані одна від одної, а інтерференція спостерігається на екрані, що паралельний площині, де розташовані щілини (рис. 5.3).

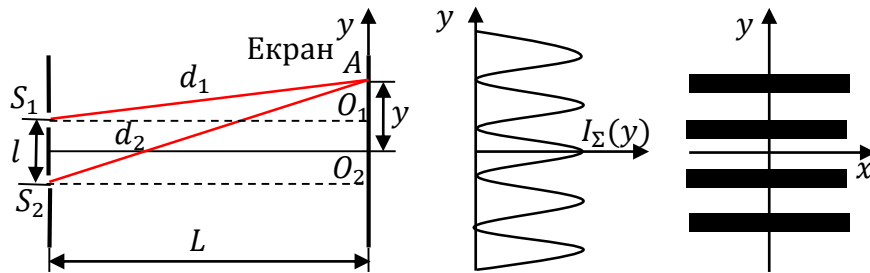


Рис. 5.3. Інтерферометр Юнга

Інтенсивність світла на екрані в такому інтерферометрі визначається за формулою (5.25) і залежить від різниці ходу $\Delta d = d_2 - d_1$. Визначимо цю різницю, використовуючи рис. 5.3 і вважаючи, що відстань між щілинами l набагато менша за відстань між щілинами і екраном L , тобто $l \ll L$.

Із трикутника $S_1 O_1 A$ маємо

$$S_1 A^2 = S_1 O_1^2 + O_1 A^2, \text{ або } d_1^2 = L^2 + \left(y - \frac{l}{2}\right)^2. \quad (5.31)$$

Із трикутника $S_2 O_2 A$ маємо

$$S_2 A^2 = S_2 O_2^2 + O_2 A^2, \text{ або } d_2^2 = L^2 + \left(y + \frac{l}{2}\right)^2. \quad (5.32)$$

Віднімемо (5.31) із (5.32)

$$d_2^2 - d_1^2 = (d_2 - d_1)(d_2 + d_1) = \Delta d \cdot 2L = 2ly.$$

Звідки

$$\Delta d = \frac{l}{L}y. \quad (5.33)$$

Використовуючи (5.26), (5.28) і (5.33) визначимо положення світлих і темних смуг в інтерференційній картині.

$$\Delta d = \frac{l}{L}y_{m,max} = m\lambda \Rightarrow y_{m,max} = \frac{L}{l}m\lambda. \quad (5.34)$$

$$\Delta d = \frac{l}{L}y_{m,min} = (2m + 1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow y_{m,min} = \frac{L}{l}\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda. \quad (5.35)$$

Шириною смуги Δy називається відстань між сусідніми максимумами або мінімумами інтенсивності в інтерференційній картині. Із формул (5.34) і (5.36) визначаємо ширину смуги

$$\Delta y = y_{m+1,max} - y_{m,max} = y_{m+1,min} - y_{m,min} = \frac{L}{l}\lambda. \quad (5.36)$$

Наприклад, якщо $L = 2$ м, $l = 1$ мм, $\lambda = 0,5$ мкм, то $\Delta y = 1$ мм.

Аналіз формули (5.36) показує, що

1. Із зменшенням відстані l між щілинами ширина інтерференційних смуг збільшується.
2. Ширина смуг інтерференційної картини не залежить від порядку інтерференції m .

Якість сприйняття інтерференційної картини залежить від її контрасту

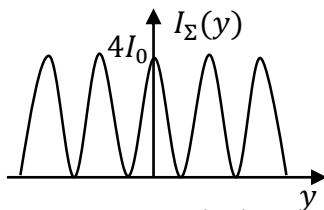


Рис. 5.4. Розподіл інтенсивності в інтерферометрі Юнга

$$C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}. \quad (5.37)$$

Якщо інтенсивність темних смуг

$I_{min} = 0$, то $C = 1$ (100%). Якщо $I_{min} = I_{max}$, то $C = 0$.

Для визначення розподілу

інтенсивності в інтерференційній картині підставимо (5.33) до (5.25)

$$I_{\Sigma}(y) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi l}{\lambda L}y\right). \quad (5.38)$$

На рис. 5.4 наведено графік функції (5.38), яка визначає розподіл інтенсивності в інтерферометрі Юнга.

5.5. Вплив немонохроматичності світла на інтерференцію

Із формули (5.34) видно, що положення головних максимумів залежить від довжини хвилі. Із збільшення довжини хвилі максимум зміщується від центра інтерференційної картини. Якщо в інтерферометрі використовується немонохроматичне світло, то кожна його монохроматична складова утворює свою інтерференційну картину. Ці інтерференційні картини накладаються одна на одну, що призводить до погіршення контрасту результуючої картини (рис. 5.5).

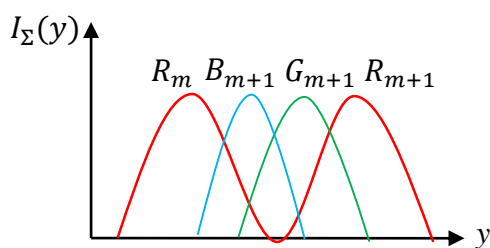


Рис. 5.5. Інтерференційна картина в немонохроматичному світлі

Визначимо максимальний спектральний діапазон $\Delta\lambda$ немонохроматичного світла, при якому ще є можливість спостерігати інтерференційну картину. Будемо вважати, що інтерференційні смуги спостерігаються роздільно, коли положення головного m -го максимуму (точка R_m) для довжини хвилі $\lambda + \Delta\lambda$ співпадає с $m + 1$ -м головним максимумом (точка B_{m+1}) для довжини хвилі λ . Математично цю умову можна записати у вигляді

$$y_{m,max}(\lambda + \Delta\lambda) = y_{m+1,max}(\lambda). \quad (5.39)$$

Після підстановки (5.34) до рівняння (5.39) маємо

$$\frac{L}{l} m(\lambda + \Delta\lambda) = \frac{L}{l} (m + 1)\lambda \Rightarrow m(\lambda + \Delta\lambda) = (m + 1)\lambda.$$

Звідки

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}. \quad (5.40)$$

Із формули (5.40) видно, що із збільшенням порядку m інтерференції робочий спектральний діапазон $\Delta\lambda$ інтерферометра зменшується.

5.6. Когерентність випромінювання

5.6.1. Визначення когерентності

Когерентність випромінювання можна визначити як здатність випромінювання формувати стабільну інтерференційну картину. Випромінювання називають *когерентним*, якщо різниця фаз у двох довільних точках залишається незмінною за час спостереження. Якщо в будь-який момент часу різниця фаз залишається незмінною у двох довільних точках простору, то таке випромінювання називають *просторово когерентним*. Якщо дві світлові хвилі, зміщені у часі, складаються в одній точці і при цьому різниця фаз між ними залишається незмінною, то такому випромінюванню властива *часова когерентність*.

Більш строге математичне визначення когерентності можна дати на основі кореляційної функції випромінювання. Простіша із них описує часову когерентність і визначає кореляцію Γ_{11} між комплексними амплітудами поля $V(\vec{r}_1, t)$ та $V(\vec{r}_1, t + \tau)$ в одній і тій самій точці $P(\vec{r}_1)$, але розділеними у часі інтервалом τ :

$$\Gamma_{11}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T V(\vec{r}_1, t + \tau) V^*(\vec{r}_1, t) dt. \quad (5.41)$$

Під комплексною амплітудою поля $V(\vec{r}_1, t)$ в теорії когерентності електромагнітного поля розуміють напруженість електричного поля світлової хвилі.

Функція (5.41) являє собою автокореляційну функцію амплітуди поля $V(\vec{r}_1, t)$ або середнє значення добутку $V(\vec{r}_1, t + \tau) V^*(\vec{r}_1, t)$, тобто

$$\Gamma_{11}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau) = \langle V(\vec{r}_1, t + \tau) V^*(\vec{r}_1, t) \rangle. \quad (5.42)$$

Знайдемо нормовану автокореляційну функцію, використовуючи (5.42):

$$\gamma_{11}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau) = \frac{\Gamma_{11}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau)}{\langle V(\vec{r}_1, t) V^*(\vec{r}_1, t) \rangle} = \frac{\Gamma_{11}}{I(\vec{r}_1)}, \quad (5.43)$$

де $I(\vec{r}_1)$ – інтенсивність випромінювання в точці $P(\vec{r}_1)$.

Можна побачити, що функція (5.43) має такі властивості:

- $\gamma_{11}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, 0) = 1$;
- $|\gamma_{11}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau)| \leq 1$;
- $\gamma_{11}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, -\tau) = \gamma_{11}^*(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau)$.

Функцію $\gamma_{11}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau)$ називають *комплексною мірою часової когерентності*.

Модуль цієї функції $|\gamma_{11}|$ називають *мірою часової когерентності*. Очевидно Γ_{11} , а відповідно і γ_{11} , являють собою міру кореляції, яка спостерігається між комплексними амплітудами в одній і тій самій точці простору для двох моментів часу, роз'єднаних інтервалом τ . Якщо часової когерентності зовсім немає, то $\gamma_{11} = 0$. Для випадку повної когерентності, наприклад для нескінченно довгої гармонічної хвилі

$$V(\vec{r}_1, t) = V_0(\vec{r}_1) \exp(-j2\pi vt),$$

$|\gamma_{11}(\tau)| = 1$ для будь-яких значень часового зміщення τ . Функцію $|\gamma_{11}(\tau)|$ подано на рис. 5.6,а. Із графіка функції $|\gamma_{11}(\tau)|$ можна знайти *час когерентності* τ_c , за якого величина $|\gamma_{11}(\tau)|$ зменшується вдвоє, тобто $|\gamma_{11}(\tau_c)| = 0,5$. Для повністю когерентної хвилі $\tau_c = \infty$, а для повністю некогерентної хвилі $\tau_c = 0$.

Аналогічно можна визначити кореляційну функцію світлового поля між двома різними точками $P(\vec{r}_1)$ і $P(\vec{r}_2)$ в один і той самий момент часу:

$$\Gamma_{12_{12}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, 0) = \langle V(\vec{r}_1, t) V^*(\vec{r}_2, t) \rangle. \quad (5.44)$$

Відповідна нормована функція із врахуванням (5.44) має вигляд

$$\gamma_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, 0) = \frac{\Gamma_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, 0)}{\sqrt{\Gamma_{11}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, 0) \Gamma_{22}(\vec{r}_2, \vec{r}_2, 0)}}. \quad (5.45)$$

Функцію (5.45) називають *комплексною мірою просторової когерентності*. Модуль цієї функції $|\gamma_{12}|$ називають *мірою просторової когерентності*. Ця функція має властивості, аналогічні функції γ_{11} . Функцію $|\gamma_{12}|$ зображено на рис. 5.6,б. Якщо координата \vec{r}_1 фіксована, то на деякій характерній довжині $d_c = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ величина $\gamma_{12}(d_c) = 0$. Параметр d_c називають *довжиною просторової когерентності* хвилі у точці $P(\vec{r}_1)$.

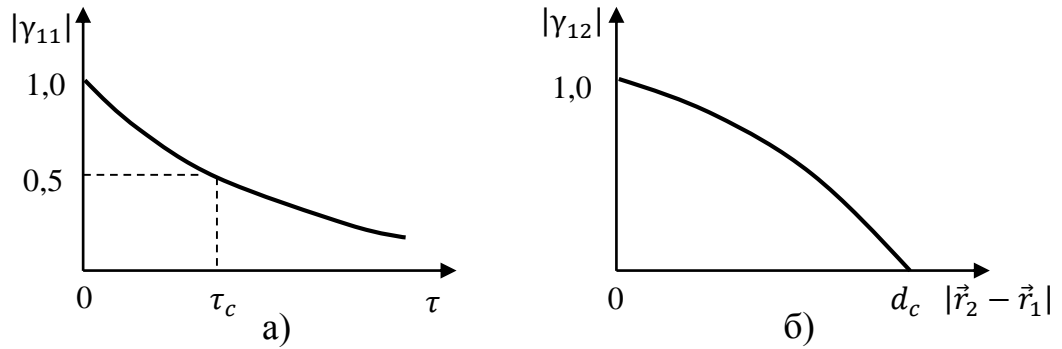


Рис. 5.6. Можливі залежності: а – міра часової когерентності $|\gamma_{11}|$; б – міра просторової когерентності $|\gamma_{12}|$

Поняття просторової і часової когерентності можна об'єднати за допомогою функції взаємної когерентності, яку визначають таким чином:

$$\Gamma_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau) = \langle V(\vec{r}_1, t + \tau) V^*(\vec{r}_2, t) \rangle, \quad (5.46)$$

яку можна подати також у нормованому вигляді:

$$\gamma_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau) = \frac{\Gamma_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, 0) \Gamma_{22}(\vec{r}_2, \vec{r}_2, 0)}}. \quad (5.47)$$

Ця функція, яку називають *комплексною мірою когерентності*, визначає когерентність між двома різними точками хвилі у різні моменти часу.

Поняття часової когерентності тісно пов'язане з монохроматичністю випромінювання. Наприклад, чим більша міра когерентності хвилі, тим більша її монохроматичність. Іншими словами, час когерентності τ_c обернено пропорційний ширині $\Delta\nu$ смуги частот випромінювання, тобто $\tau_c \sim 1/\Delta\nu$.

5.6.2. Вимірювання міри когерентності випромінювання

Найбільш простим способом вимірювання міри просторової когерентності між двома точками світлової хвилі є метод, в якому використовується інтерферометр Юнга (рис. 5.7). Інтерферометр складається з екрана 1, який має отвори (щілини) з координатами x_1 та x_2 , та екрана 2, на якому випромінювання, що пройшло через отвори, утворює інтерференційну картину. Інтерференційні смуги на екрані 2 будуть тим чіткішими, чим краще зберігаються у фазі дві

амплітуди $V(x_1, \tau_1 = d_1/c)$ і $V(x_2, \tau_2 = d_2/c)$, де d_1 і d_2 – відстані від отворів x_1 та x_2 до точки P на екрані 2; c – швидкість світла.

Отже, контрастність інтерференційних смуг визначає міру когерентності між точками x_1 і x_2 . Визначимо контрастність смуг $C(P)$ у точці P таким чином:

$$C(P) = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}, \quad (5.48)$$

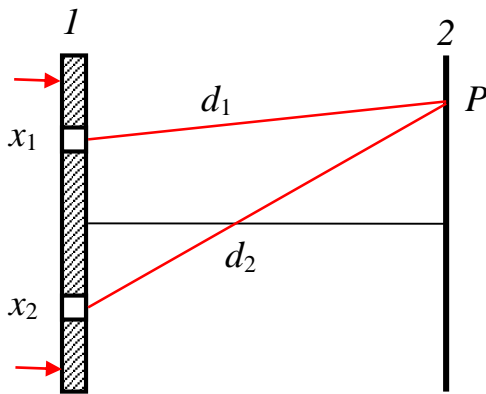


Рис. 5.7. Схема інтерферометра Юнга для вимірювання ступеня просторової когерентності

де I_{max} та I_{min} – максимальна і мінімальна інтенсивності в околі точки P .

Якщо обидва отвори x_1 і x_2 створюють однакову освітленість у точці P , а відповідні дві хвилі мають повну просторову і часову когерентність, то $I_{min} = 0$, а контрастність смуг $C(P) = 1$. У випадку, коли випромінювання в точках x_1 та x_2 повністю некогерентне, то $I_{max} = I_{min}$, смуги зникають, а контрастність смуг $C(P) = 0$.

Розрахуємо контрастність смуг для частково когерентного випромінювання. Визначимо інтенсивність поля в точці P як $I(P) = \langle |V(P)|^2 \rangle$, де $V(P)$ – світлове поле, яке утворене випромінюванням, що поширюється із точок x_1 та x_2 , тобто

$$V(P) = V(x_1, \tau_1 = d_1/c) + V(x_2, \tau_2 = d_2/c). \quad (5.49)$$

Тоді з урахуванням виразів (5.6) і (5.9) матимемо:

$$\begin{aligned} I(P) &= \langle |V(x_1, \tau_1 = d_1/c) + V(x_2, \tau_2 = d_2/c)|^2 \rangle = \\ &= \langle |V(x_1, \tau_1 = d_1/c)|^2 \rangle + \langle |V(x_2, \tau_2 = d_2/c)|^2 \rangle + \\ &\quad + \langle V(x_1, \tau_1 = d_1/c)V^*(x_2, \tau_2 = d_2/c) \rangle + \\ &\quad + \langle V^*(x_1, \tau_1 = d_1/c)V(x_2, \tau_2 = d_2/c) \rangle = \\ &= I(x_1) + I(x_2) + \Gamma_{12}^*[x_1, x_2, (d_1 - d_2)/c] + \Gamma_{12}[x_1, x_2, (d_1 - d_2)/c]. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Комплексну функцію Γ_{12} подамо у вигляді $\Gamma_{12} = |\Gamma_{12}|e^{j\varphi_{12}}$. Тоді

$$\Gamma_{12}^* + \Gamma_{12} = |\Gamma_{12}|e^{-j\varphi_{12}} + |\Gamma_{12}|e^{j\varphi_{12}} = 2|\Gamma_{12}|\cos\varphi_{12}. \quad (5.51)$$

З урахуванням виразів (5.47), (5.50) та (5.51) інтенсивність в околі точки P має значення

$$I_{max} = I(x_1) + I(x_2) + 2\sqrt{I(x_1)I(x_2)}|\gamma_{12}(x_1, x_2, \tau)|; \quad (5.52)$$

$$I_{min} = I(x_1) + I(x_2) - 2\sqrt{I(x_1)I(x_2)}|\gamma_{12}(x_1, x_2, \tau)|. \quad (5.53)$$

Після підстановки інтенсивностей (4.52) і (4.53) до формули (4.48) маємо:

$$C(P) = \frac{2\sqrt{I(x_1)I(x_2)}}{I(x_1)+I(x_2)}|\gamma_{12}(x_1, x_2, \tau)|. \quad (5.54)$$

Якщо $I(x_1) = I(x_2)$, то $C(P) = |\gamma_{12}(x_1, x_2, \tau)|$. При цьому, коли $d_1 = d_2$, тобто $\tau = 0$, вираз (5.54) визначає міру просторової когерентності між точками x_1 та x_2 .

Часову когерентність найбільш просто можна виміряти за допомогою інтерферометра Майкельсона (рис. 5.8).

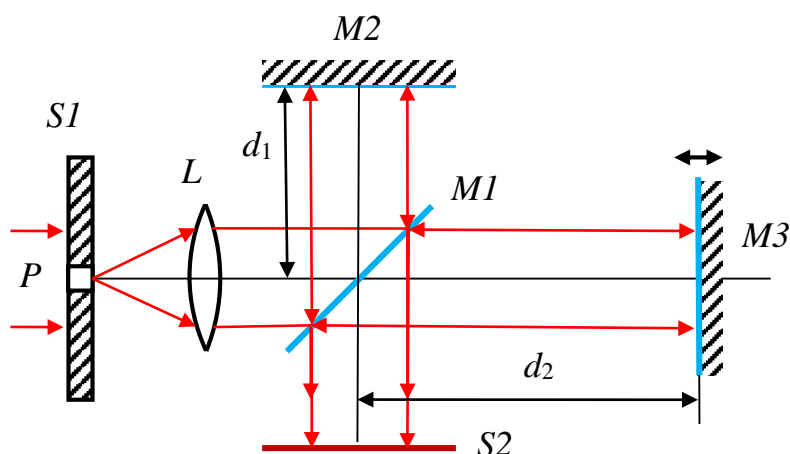


Рис. 5.8. Інтерферометр Майкельсона для вимірювання ступеня часової когерентності у точці P

Схема установки складається з екрана $S1$ з невеликим отвором у точці P , яка збігається з переднім фокусом лінзи L . Лінза перетворює сферичну хвилю у плоску. Ця хвиля, проходячи через напівпрозору пластину $M1$, розділяється на два паралельних пучка, які після відбивання від дзеркал $M2$ і $M3$ за допомогою пластини $M1$ знову поширюються в одному напрямку. На екрані $S2$ буде спостерігатись інтерференційна картина у вигляді концентричних кілець. Очевидно, що така інтерференція спостерігатиметься тільки доти, поки різниця

$2(d_1 - d_2)$ не збільшиться настільки, що обидва пучки стануть некорельованими по фазі. Як і з інтерферометром Юнга, можна вважати, що контрастність інтерференційної картини

$$C(P) = |\gamma_{11}(P, P, \tau)|, \quad (5.55)$$

де $\tau = 2(d_1 - d_2)/c$.

Отже, вимірювання контрастності інтерференційних кілець (5.55) дає змогу отримати міру часової когерентності випромінювання у точці P . Можна також знайти довжину часової когерентності $d_{ct} = c\tau_c$, для якої $C(P) = |\gamma_{11}(P, P, \tau_c)| = 0,5$.

5.2.3. Некогерентне випромінювання

Якщо амплітуда і фаза світлового поля у довільних точках простору в певний момент часу змінюються за статистично незалежними законами, то таке випромінювання називають *некогерентним*. Реальні джерела випромінювання, крім лазерів, є некогерентними, а їх комплексна міра когерентності $\gamma_{11}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau)$ близька до нуля. Некогерентне випромінювання не може бути строго монохроматичним.

Для повністю некогерентного випромінювання з $\Gamma_{12} = 0$ інтенсивність двох світлових хвиль у точці P згідно з (5.10) становить

$$I(P) = I(\vec{r}_1) + I(\vec{r}_2). \quad (5.56)$$

5.7. Отримання когерентних пучків в оптиці

Лазерне випромінювання має високу ступінь когерентності.

Для отримання когерентних пучків в оптиці використовують два методи.

1. Метод ділення хвильового фронту.
2. Метод ділення амплітуди.

В усіх методах пучок світла розділяється на два пучки, які потім суміщають.

5.7.1. Метод ділення хвильового фронту

5.7.1.1. Метод Юнга

Цей метод використовується в інтерферометрі Юнга (рис. 5.9). Випромінювання від протяжного джерела S проходить через малий отвір (щілину) S_1 в непрозорому екрані 1, в результаті чого утворюється сферична хвиля. Екран 2 з двома отворами S_2 і S'_2 пропускає випромінювання від одного хвильового фронту. Джерела випромінювання S_2 і S'_2 будуть когерентними, так як вони утворені із одного хвильового фронту.

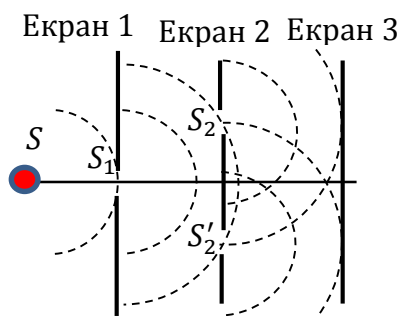


Рис. 5.9. Метод Юнга

Згідно принципу Гюйгенса ці джерела утворюють дві сферичні хвилі, які в місцях перетину їх хвильових фронтів утворюють інтерференційну картину. Ця картина спостерігається на екрані 3. Джерела випромінювання S_2 і S'_2 називаються *віртуальними когерентними джерелами*.

При переміщенні екрана 3 уздовж оптичної осі на ньому завжди буде спостерігатись інтерференційна картина, якщо хвильові фронти джерел S_2 і S'_2 перетинаються. **Тому така інтерференційна картина називається нелокалізованою.**

5.7.1.2. Біпризма Френеля

Ця біпризма являє собою дві склеєні призми з малим кутом заломлення (рис. 5.10). Світло від точкового джерела

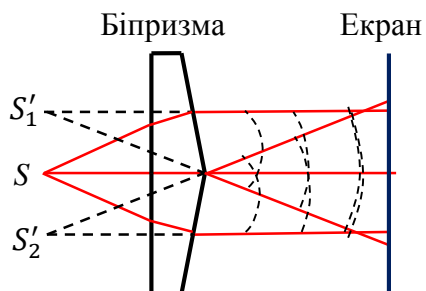


Рис. 5.10. Біпризма Френеля

випромінювання S після проходження двох призм формує два уявних когерентних джерела S'_1 і S'_2 . Ці джерела утворюють за призмою дві сферичні хвилі, які в місцях

перетину їх хвильових фронтів формують нелокалізовану інтерференційну картину.

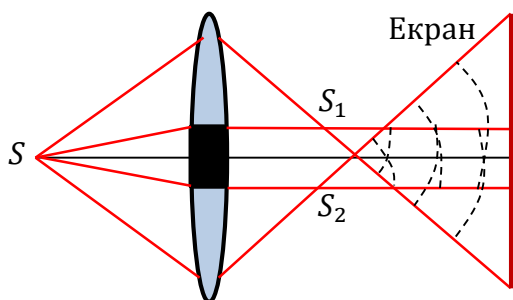


Рис. 5.11. Білінза Бійє

5.7.1.3. Білінза Бійє

Така лінза складається із двох половинок звичайної додатної лінзи, які розділені непрозорим екраном (рис. 5.11). Кожна половинка формує два дійсних зображення S_1 і S_2 точкового джерела світла S . Джерела S_1 і S_2 утворюють сферичні

хвилі, які формують інтерференційну картину в місцях перетину їх хвильових фронтів.

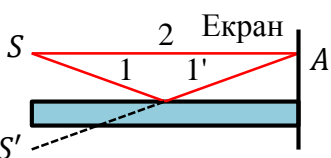


Рис. 5.12. Дзеркало Ллойда

5.7.1.4. Дзеркало Ллойд

Промінь 1 від точкового джерела світла S , яке знаходиться поблизу дзеркала, після відбивання потрапляє в точку A на екрані

(рис. 5.12). Когерентний промінь 2 від джерела S також надходить до точки A . Уявний 1' і дійсний 2 промені формують на екрані інтерференційну картинку.

5.7.1.5. Метод Лінніка

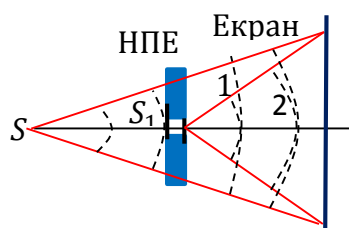


Рис. 5.13. Метод Лінніка

Випромінювання від точкового джерела світла S формує першу сферичну хвилю, яка проходить через напівпрозорий екран НПЕ з малим отвором S_1 (рис. 5.13). Цей отвір утворює другу сферичну хвилю, яка інтерферує з першою хвилею, в

результаті чого на екрані формується інтерференційна картина у вигляді концентричних кілець.

На відміну від інших методів метод Лінніка формує два когерентних джерела S і S_1 , які розташовані уздовж оптичної осі.

5.7.2. Метод ділення амплітуди

5.7.2.1. Смуги рівного нахилу (інтерференція від плоскопаралельної пластинки)

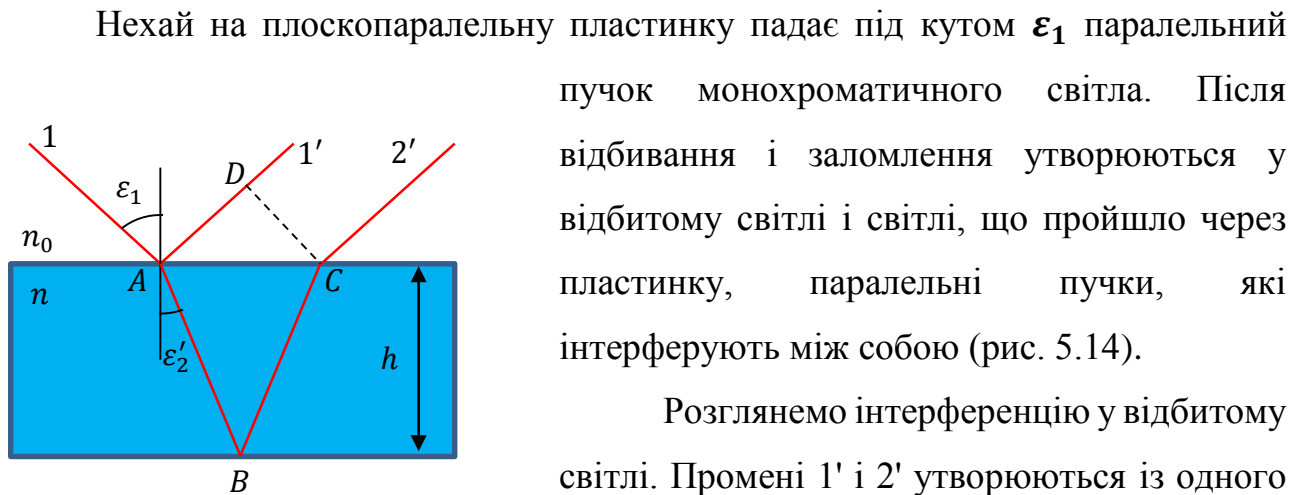


Рис. 5.14. Інтерференція від плоскопаралельної пластинки

Нехай на плоскопаралельну пластинку падає під кутом ε_1 паралельний пучок монохроматичного світла. Після відбивання і заломлення утворюються у відбитому світлі і світлі, що пройшло через пластинку, паралельні пучки, які інтерферують між собою (рис. 5.14).

Розглянемо інтерференцію у відбитому світлі. Промені $1'$ і $2'$ утворюються із одного променя 1 і тому будуть когерентними. Для спостереження інтерференції паралельних променів $1'$ і $2'$ необхідно сфокусувати око на нескінченність.

Вигляд інтерференційної картини залежить від різниці ходу Δd між променями $1'$ і $2'$. Визначимо цю різницю ходу, використовуючи рис. 5.14.

$$\Delta d = (AB + BC)n - ADn_0 \pm \frac{\lambda}{2}, \quad (5.56)$$

де n і n_0 – показники заломлення пластинки і оточуючого середовища відповідно.

Зміна різниці ходу на $\pm\lambda/2$ відбувається в результаті відбивання світла від більш щільного оптичного середовища. Якщо пластинка знаходиться в повітрі

($n_0 = 1$), то промінь 1' втрачає $\lambda/2$ в точці A і тому в формулі (5.56) буде знак «+».

Із рис. 5.14 маємо

$$AB = BC = \frac{h}{\cos \varepsilon'_2}; \quad AD = AC \sin \varepsilon_1 = 2htg \varepsilon'_2 \sin \varepsilon_1, \quad (5.57)$$

де h – товщина пластинки; ε'_2 – кут заломлення.

Використовуючи закон заломлення $n_0 \sin \varepsilon_1 = n \sin \varepsilon'_2$ і співвідношення (5.57), різниця ходу (5.56) матиме вигляд

$$\begin{aligned} \Delta d &= \frac{2h}{\cos \varepsilon'_2} n - 2htg \varepsilon'_2 \sin \varepsilon_1 n_0 \pm \frac{\lambda}{2} = \frac{2hn}{\cos \varepsilon'_2} n \left(1 - \frac{n_0}{n} \sin \varepsilon'_2 \sin \varepsilon_1 \right) \pm \frac{\lambda}{2} \\ &= \frac{2hn}{\cos \varepsilon'_2} (1 - \sin^2 \varepsilon'_2) \pm \frac{\lambda}{2} = 2hncos \varepsilon'_2 \pm \frac{\lambda}{2}. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Запишемо різницю ходу (5.58) в залежності від кута падіння ε_1 , використовуючи співвідношення

$$\cos \varepsilon'_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \varepsilon'_2} = \sqrt{1 - \frac{n_0^2}{n^2} \sin^2 \varepsilon_1}.$$

Тоді

$$\Delta d = 2hn \sqrt{1 - \frac{n_0^2}{n^2} \sin^2 \varepsilon_1} \pm \frac{\lambda}{2} = 2h \sqrt{n^2 - n_0^2 \sin^2 \varepsilon_1} \pm \frac{\lambda}{2}. \quad (5.59)$$

Для утворення світлої смуги в інтерференційній картині необхідно виконання умови максимумів (5.26), тобто

$$\Delta d = 2h \sqrt{n^2 - n_0^2 \sin^2 \varepsilon_1} \pm \frac{\lambda}{2} = m\lambda. \quad (5.60)$$

Для плоскопаралельної пластинки параметри h, n, n_0 є постійними величинами. Тому певній смугі m відповідає свій кут падіння ε_{1m} . В зв'язку з цим така інтерференційна картина називається *смугами рівного нахилу*.

Аналіз співвідношення (5.60) показує, що

1. Промені 1' і 2', які інтерферують, являються паралельними і тому інтерференційна картина спостерігається в нескінченності, або в задній фокальній площині додатної лінзи.

2. Співвідношення (5.60) буде виконуватись для різних довжин хвилі при певних кутах падіння $\varepsilon_{1m}(\lambda)$. Це означає, що кожній довжині хвилі відповідає своя інтерференційна картина, а пучок білого світла утворює кольорові інтерференційні смуги. Наприклад, такі смуги утворюються мильною плівкою, або масляною плівкою на поверхні води.

3. Визначимо кутову відстань $\Delta\varepsilon'_2$ між сусідніми смугами, використовуючи (5.58).

$$2hncos\varepsilon'_{2,m} \pm \frac{\lambda}{2} = m\lambda, \quad (5.61)$$

$$2hncos\varepsilon'_{2,m+1} \pm \frac{\lambda}{2} = (m+1)\lambda. \quad (5.62)$$

Після віднімання (5.61) із (5.62) маємо

$$2hn(\cos\varepsilon'_{2,m+1} - \cos\varepsilon'_{2,m}) = \lambda. \quad (5.63)$$

Використаємо степеневий ряд в рівнянні (5.63).

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \dots$$

Тоді

$$2hn\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon'^2_{2,m+1} - 1 + \frac{1}{2}\varepsilon'^2_{2,m}\right) = hn(\varepsilon'_{2,m} - \varepsilon'_{2,m+1})(\varepsilon'_{2,m} + \varepsilon'_{2,m+1}) = \lambda. \quad (5.64)$$

Звідки

$$\Delta\varepsilon'_2 = \varepsilon'_{2,m} - \varepsilon'_{2,m+1} = \frac{\lambda}{2\varepsilon'_{2,m}hn}. \quad (5.65)$$

Із формули (5.65) видно, що із збільшенням товщини пластини h відстань між смугами $\Delta\varepsilon'_2$ зменшується і при достатньо великих значення h смуги розрізнити неможливо.

4. Аналогічно можна розглянути інтерференцію в світлі, що проходить через пластинку. При цьому необхідно врахувати зміну оптичної довжини шляху одного із променів на $\pm\lambda/2$, що призводить до утворення інтерференційної картини, яка доповнює інтерференційну картину у відбитому світлі. Іншими

словами, світлій смузі в світлі, що проходить через пластинку, відповідає темна

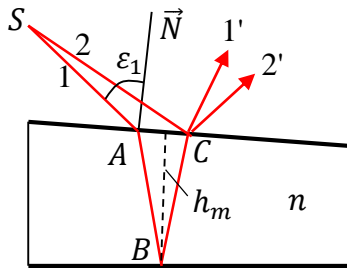


Рис. 5.15. Смуги
рівної товщини

смуга у відбитому світлі і навпаки.

5. Інтерференційна картина у відбитому світлі краще сприймається при малому коефіцієнті відбиття поверхні пластини, а в світлі, що проходить через пластинку, при високому коефіцієнті відбиття.

5.7.2.2. Смуги рівної товщини

(інтерференція від пластинки змінної товщини)

Нехай на пластинку у вигляді клина падає під кутом ϵ_1 пучок монохроматичного світла. Після відбивання і заломлення утворюються у відбитому світлі і світлі, що пройшло через пластинку, промені, які інтерферують між собою (рис. 5.15).

Розглянемо інтерференцію у відбитому світлі. Промінь 1 після заломлення і відбивання утворює промінь 1', який виходить із пластинки в точці C. В пучку променів від віддаленого джерела випромінювання S знайдеться когерентний промінь 2, який потрапляє в точку C. Після відбивання він утворює промінь 2', який інтерферує з променем 1'. В зв'язку з цим інтерференційна картина утворюється на поверхні пластинки, а для її спостереження необхідно око сфокусувати на поверхню пластинки. Тому така інтерференція називається *локалізованою*.

Різниця ходу між променями 1' і 2' визначається формулою (5.59), а положення світлої смуги – формулою (5.60). Для віддаленого джерела випромінювання кут падіння $\epsilon_1 = \text{const}$, а тому кожній смузі відповідає своя товщина пластинки h_m , а сама інтерференційна картина називається *смугами рівної товщини*. Наприклад, для клина інтерференційні смуги будуть

паралельними ребру клина. Смуги рівної товщини можна спостерігати на поверхні вертикально розташованої мильної плівки.

5.8. Кільця Ньютона

Розглянемо інтерференцію світла в повітряному проміжку, який утворений плоско випуклою лінзою і плоскопаралельною пластинкою (рис. 5.16). Такий проміжок має постійну товщину на колі, центр якого знаходиться в точці дотику сферичної поверхні лінзи і поверхні пластини. Така інтерференція вперше була досліджена І. Ньютоном, а тому інтерференційна картина називається *кільцями Ньютона*.

Розглянемо процес формування кілець Ньютона у відбитому світлі, використовуючи схему, що зображена на рис. 5.16. На плоску поверхню лінзи нормально падає паралельний пучок променів. Промінь 1 заломлюється на поверхнях лінзи, відбивається в точці *A* від поверхні пластини, заломлюється в точці *B* на поверхні лінзи і утворює промінь 1'. Промінь 2 паралельного пучка заломлюється на плоскій поверхні лінзи, відбивається від її сферичної поверхні і утворює промінь 2'. Когерентні промені 1' і 2' утворюють інтерференційну картину (смуги рівної товщини) на сферичній поверхні лінзи у вигляді концентричних світлих і темних смуг.

Різниця ходу між цими променями згідно (5.58) дорівнює

$$\Delta d = 2hnc\cos\varepsilon'_2 \pm \frac{\lambda}{2}, \quad (5.66)$$

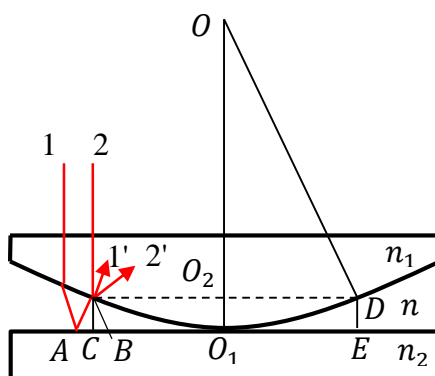


Рис. 5.16. Схема для дослідження кілець Ньютона

де $h = BC$ – товщина повітряного проміжку в точці *C*; n – показник заломлення середовища між сферичною поверхнею лінзи і пластинки (для повітряного проміжку $n = 1$); $\pm\lambda/2$ – зміна довжини оптичного шляху одного із променів в результаті відбивання від оптично

більш щільного середовища, яка залежить від співвідношення показників заломлення n_1, n, n_2 .

Для повітряного проміжку і великого радіусу $R = OO_1$ поверхні лінзи формула (5.66) матиме вигляд

$$\Delta d = 2h + \frac{\lambda}{2}, \quad (5.67)$$

де $+\lambda/2$ виникає в результаті відбивання променя 1 в точці A .

Визначимо радіуси світлих і темних кілець Ньютона, використовуючи умови максимумів (5.26) і мінімумів (5.28).

Для світлих кілець маємо

$$\Delta d = 2h + \frac{\lambda}{2} = m\lambda. \quad (5.68)$$

Товщину повітряного проміжку $h = BC$ визначимо із трикутника DO_2O (рис. 5.16)

$$O_2O^2 = OD^2 - O_2D^2,$$

$O_2O^2 = (OO_1 - O_2O_1)^2 = (R - h)^2$; $O_2D = r$ – радіус кільця. Тоді

$$(R - h)^2 = R^2 - r^2 \Rightarrow -R2h + h^2 = -r^2.$$

Звідки для малих значень h маємо

$$h \approx \frac{r^2}{2R}. \quad (5.69)$$

Для визначення радіуса світлих кілець $r_{m,l}$ підставимо (5.69) до (5.68)

$$\frac{r_{m,l}^2}{R} + \frac{\lambda}{2} = m\lambda.$$

Звідки

$$r_{m,l} = \sqrt{\lambda R \left(m + \frac{1}{2} \right)}. \quad (5.70)$$

Для темних кілець маємо

$$\Delta d = 2h + \frac{\lambda}{2} = \left(m + \frac{1}{2} \right) \lambda. \quad (5.71)$$

Для визначення радіуса темних кілець $r_{m,d}$ підставимо (5.69) до (5.71)

$$\frac{r_{m,d}^2}{R} + \frac{\lambda}{2} = \left(m + \frac{1}{2} \right) \lambda.$$

Звідки

$$r_{m,d} = \sqrt{\lambda R m}. \quad (5.72)$$

Аналогічно можна розглянути процес формування кілець Ньютон у світлі, що проходить через повітряний проміжок. При цьому радіуси світлих кілець розраховуються за формулою (5.72), а радіуси темних кілець – за формулою (5.71). Це означає, кільця Ньютон у відбитому світлі і світлі, що проходить доповнюють один одного.

Зробимо ряд зауважень:

1. Кільця Ньютон в білому світлі являють собою набір кольорових кілець, які для кожного порядку інтерференції m починаються з фіолетового кольору і закінчуються червоним кольором.

2. Із збільшенням номеру кільця (порядку інтерференції m) радіус кільця зростає згідно залежності $r_m \sim \sqrt{m}$.

3. В точці дотику сферичної поверхні лінзи і пластини товщина повітряного проміжку h дорівнює нулю, а відбитий від поверхні пластини промінь втрачає $\lambda/2$, тобто згідно формули (5.67) різниця ходу променів 1' і 2' дорівнює $\Delta d = 0,5\lambda$, що відповідає умові мінімумів (5.71). Це означає, що у відбитому світлі в центрі кілець Ньютон буде темний кружок, а світлі, що пройшло – світлий кружок.

4. Визначимо відстань Δr між сусідніми кільцями, використовуючи формулу (5.72)

$$\begin{aligned} r_{m+1,d}^2 - r_{m,d}^2 &= \lambda R(m+1) - \lambda Rm = \lambda R; \\ (r_{m,d} - r_{m,d})(r_{m,d} + r_{m,d}) &= \Delta r 2r_{m,d} = 2\Delta r \sqrt{\lambda R m} = \lambda R. \end{aligned}$$

Звідки

$$\Delta r = \sqrt{\frac{\lambda R}{4m}}. \quad (5.73)$$

Із формули (5.73) видно, що відстань між кільцями зменшується із збільшення номеру кільця m .

5. Метод кілець Ньютона використовується для визначення за формулою (5.72) довжини хвилі λ або радіусу поверхні лінзи R .

5.9. Стоячі світлові хвилі. Дослід Вінера

Нехай на дзеркальну поверхню нормально падає паралельний пучок монохроматичного світла. В результаті відбивання утворюється паралельний пучок когерентних променів, які інтерферують з падаючими променями (рис. 5.17).

Визначимо розподіл інтенсивності світла в утвореній інтерференції. Будемо вважати, що поглинання світла відсутнє, а дзеркальна поверхня повністю відбиває світло.

Запишемо рівняння для падаючої і відбитої плоских монохроматичних хвиль.

$$E_i = E_0 \cos(2\pi vt - kx); \quad (5.74)$$

$$E_r = E_0 \cos(2\pi vt + kx + \pi). \quad (5.75)$$

В формулі (5.75) складова $+kx$ виникає в результаті зміни напрямку розповсюдження відбитої хвилі, а зміні фази на π обумовлена відбиванням хвилі від дзеркальної поверхні.

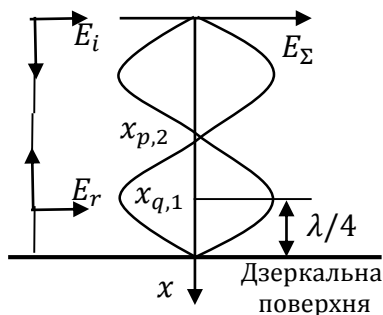


Рис.5.17. Формування стоячих хвиль

Результуюча амплітуда при інтерференції дорівнює

$$\begin{aligned} E_{\Sigma} &= E_i + E_r = \\ &= E_0 \cos(2\pi vt - kx) + E_0 \cos(2\pi vt + kx + \pi) = \\ &= 2E_0 \cos(kx + \pi/2) \cos(2\pi vt + \pi/2). \end{aligned} \quad (5.76)$$

Із аналізу функції (5.76) видно, що

1. Фаза $\varphi(x, t) = 2\pi vt + \pi/2$ результуючої амплітуди не залежить від просторової координати x , тобто влюбій точці x фаза змінюється одночасно, тому такі хвилі називаються *стоячими* так як вони не переносять світлову енергію.

2. Амплітуда стоячої хвилі $E_{\Sigma 0} = 2E_0 \cos(kx + \pi/2)$ залежить від координати x (рис 5.17). Знайдемо координати точок, де $E_{\Sigma 0} = 0$.

$$\cos(kx + \pi/2) = 0; \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + m\pi; \Rightarrow x_{p,m} = \frac{\lambda}{2} m. \quad (5.77)$$

Координати $x_{p,m}$ називаються *вузлами* стоячої хвилі.

Знайдемо координати точок, де $|E_{\Sigma 0}| = 2E_0$.

$$\cos(kx + \pi/2) = \pm 1; \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} x + \frac{\pi}{2} = m\pi; \Rightarrow x_{q,m} = \frac{\lambda}{2} \left(m - \frac{1}{2} \right). \quad (5.78)$$

Координати $x_{q,m}$ називаються *пучностями* стоячої хвилі.

3. Із формули (5.77) видно, що перший вузол знаходиться на поверхні дзеркала, а відстань між сусідніми вузлами становить $\lambda/2$.

4. Із формули (5.78) видно, що перша пучність розташована на відстані $\lambda/4$ від дзеркальної поверхні.

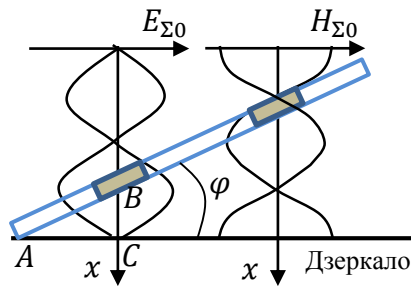


Рис. 5.19. Дослід Вінера

В результаті інтерференції падаючої хвилі і хвилі, що відбилась від дзеркала, в шарі утворюються стоячі хвилі, які згідно (5.77) мають перший вузол електричного поля $E_{\Sigma 0}$ на поверхні дзеркала, а згідно (5.78) його перша пучність розташована на відстані $\lambda/4$ від дзеркальної поверхні (рис.5.18). Для магнітного поля $H_{\Sigma 0}$ перша пучність розташована на поверхні дзеркала, а перший вузол – на відстані $\lambda/2$ від дзеркальної поверхні.

Використовуючи ці властивості стоячих хвиль, Вінер експериментально з'ясував, яке із полів світлової хвилі (електричне чи магнітне) впливає на

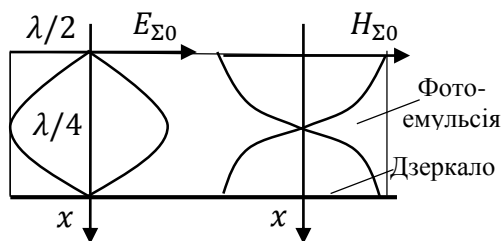


Рис.5.18. Стоячі електричні і магнітні хвилі

світлочутливе середовище. Для цього скляну пластину наносився тонкий шар фоточутливого матеріалу, а сама пластинка розташовувалась під малим кутом φ до дзеркальної поверхні. На дзеркальну поверхню нормально падає монохроматичний пучок світла, який після відбивання утворює стоячі хвилі для електричного і магнітного полів (рис. 5.19). Після експозиції і обробки фотопластинки на її поверхні утворюються темні смуги, які відповідають положенню точок пучності стоячих хвиль.

З'ясувалось, що перша інтерференційна смуга була розташована на відстані $\lambda/4$ від поверхні дзеркала. Це свідчить про те, що на середовище діє

Останній факт був використаний Вінером в досліді, який дозволив встановити, яке із двох полів (електричне \vec{E} чи магнітне \vec{H}) світлової хвилі впливають на середовище.

Для цього на дзеркальну поверхню наносився товстий шар фоточутливого матеріалу, на поверхню якого нормально падає паралельний

пучок монохроматичного світла. В результаті інтерференції падаючої хвилі і хвилі, що відбилась від дзеркала, в шарі утворюються стоячі хвилі, які згідно (5.77) мають перший вузол електричного поля $E_{\Sigma 0}$ на поверхні дзеркала, а згідно (5.78) його перша пучність розташована на відстані $\lambda/4$ від дзеркальної поверхні (рис.5.18). Для магнітного поля $H_{\Sigma 0}$ перша пучність розташована на поверхні дзеркала, а перший вузол – на відстані $\lambda/2$ від дзеркальної поверхні.

Використовуючи ці властивості стоячих хвиль, Вінер експериментально з'ясував, яке із полів світлової хвилі (електричне чи магнітне) впливає на

світлочутливе середовище. Для цього скляну пластину наносився тонкий шар фоточутливого матеріалу, а сама пластинка розташовувалась під малим кутом φ до дзеркальної поверхні. На дзеркальну поверхню нормально падає монохроматичний пучок світла, який після

відбивання утворює стоячі хвилі для електричного і магнітного полів (рис. 5.19). Після експозиції і обробки фотопластинки на її поверхні утворюються темні смуги, які відповідають положенню точок пучності стоячих хвиль.

електричне поле світлової хвилі, а тому вектор напруженості електричного поля \vec{E} іноді називають *світловим вектором*.

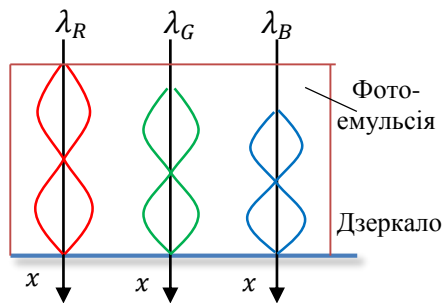


Рис. 5.20. Кольорова фотографія Ліппмана

Для підвищення точності вимірювань кут між фотопластиною і дзеркалом обирався достатньо малим $\varphi \approx 1'$. Тоді відстань до першої смуги для довжини хвилі 0,5 мкм буде дорівнювати

$$AB = \frac{BC}{\sin \varphi} = \frac{\lambda}{4 \sin \varphi} \approx 1 \text{ мм.}$$

Стоячі хвилі були використані в методі кольорової фотографії, який був запропонований Ліппманом в 1891 році. Сучасна кольорова фотографія не ґрунтується на цьому методі, однак він лежить в основі товстої кольорової голограми Денисюка.

Розглянемо принцип створення кольорової фотографії Ліппмана. Нехай на товстий фоточутливий шар, що нанесений на дзеркальну поверхню, нормально падає плоска монохроматична хвиля з довжиною λ . В результаті інтерференції падаючої і відбитої хвиль в шарі утворюються стоячі хвилі, в яких відстань між пучностями становить $\lambda/2$. Після експонування і обробки фотопластинки в середині фотошару утворюються дзеркальні площини, які знаходяться в місцях пучностей хвиль.

Якщо на такий шар падає біле світло, то в результаті інтерференції хвиль, відбитих від дзеркальних площин, утворюється результуюча інтенсивність. Максимум цієї інтенсивності визначається різницею ході променів, відбитих від сусідніх площин, яка становить $\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} = \lambda$, що відповідає умові максимумів. Це означає, при освітленні фотопластинки білим світлом відбивається тільки та монохроматична складова, яка використовувалась при експозиції (фотографуванню).

Якщо на фоточутливий шар сфокусувати кольорове зображення, то в середині шару після експозиції і обробки фотопластинки утворюється система

дзеркальних площин, яка відповідає довжинам хвиль λ_i кольорового зображення (рис. 5.20). При освітленні такої фотопластинки (фотографії) білим світлом в результаті інтерференції будуть відбиватись тільки ті його кольорові складові, довжина хвиль яких λ_i відповідає кольору при фотографуванні, тобто буде спостерігатися кольорове зображення.

5.10. Двопроменеві інтерферометри

Інтерферометр – це вимірювальний прилад, який заснований на інтерференції світла. Положення інтерференційних смуг залежить від різниці оптичного шляху променів, які приймають участь в інтерференції, тобто

$$\Delta d = n_1 l_1 - n_2 l_2. \quad (5.79)$$

де n_i – показники заломлення середовищ, в яких розповсюджуються відповідні промені; l_i – геометрична довжина шляху цих променів. Зміна одного із параметрів n_i або l_i призводить до зміни параметрів інтерференційної картини. Наприклад, якщо зміна різниці ходу Δd становить λ , то інтерференційна картина зміщується на одну смугу.

Якщо в оптичних приладах при формуванні інтерференційної картини приймають участь два променя, то такі інтерферометри називають *двопроменевими*. Інтерферометри застосовуються для вимірювання абсолютних і відносних довжин і показників заломлення, стану оптичних поверхонь, в лазерних далекомірах і гіроскопах і т.п.

5.10.1. Інтерферометр Жамена

Інтерферометр складається із двох товстих скляних пластинок, одна із поверхонь яких є дзеркальною. Пластини встановлені паралельно одна одній (рис. 5.21). На поверхню першої пластини $A_1 B_1$ під кутом 45° падає промінь, який після відбивання і заломлення утворює два паралельні промені 1 і 2. Після проходження другої пластини ці промені утворюють чотири променя 1, 2, 3, 4. Промені 2 і 3 являються когерентними, співпадають між собою,

розповсюджуються в одному напрямку і утворюють інтерференційну картину. Промені 1 і 4 екрануються.

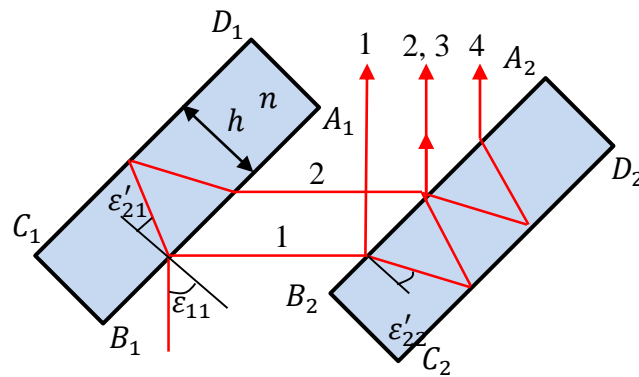


Рис. 5.21.Схема інтерферометра Жамена

Різниця ходу між променями 2 і 3 згідно (5.58) дорівнює

$$\Delta d = 2hn(\cos\varepsilon'_{21} - \cos\varepsilon'_{22}), \quad (5.80)$$

де h і n – товщина і показник заломлення пластинок відповідно; ε'_{21} і ε'_{22} – кути заломлення на відповідних пластинах.

Світлі смуги спостерігаються при виконанні умови $\Delta d = m\lambda$. Якщо поверхні пластин A_1B_1 і A_2B_2 утворюють малий кут φ , то інтерференційні смуги будуть паралельними ребру клина, утвореного цими поверхнями. Із зменшенням кута φ відстань між смугами зменшується. Якщо $\varphi = 0$, то $\Delta d = 0$, інтерференційна картина являє собою рівномірний фон.

Інтерферометр Жамена використовують для високоточного вимірювання показників заломлення газів. Для цього на шляху променів 1 і 2 розташовують

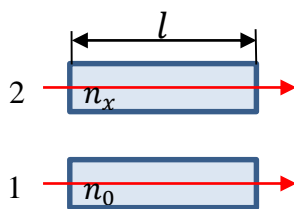


Рис. 5.22. Вимірювання показника заломлення газу

дві кювети (скляні трубки) однакової довжини l , заповнені газом з відомим показником заломлення n_0 і невідомим n_x (рис. 5. 22). При цьому виникає додаткова різниця ходу між променями, яка призводить до зміщення

інтерференційної картини на m_m смуг (число m_m може бути не цілим), тобто

$$\Delta d = n_0 l - n_x l = m_m \lambda.$$

Звідки

$$n_x = n_0 - \frac{m_m \lambda}{l}. \quad (5.81)$$

Наприклад, якщо $l = 10$ см, $\lambda = 0,5$ мкм, $m_m = 0,1$, то

$$\Delta n = n_0 - n_x = 5 \cdot 10^{-7}.$$

5.10.2. Інтерферометр Маха–Цендера

Інтерферометр Жамена має ряд недоліків:

1. Мала відстань між променями 1 і 2, що визиває певні труднощі при вимірюваннях.
2. Для збільшення цієї відстані необхідно збільшувати товщину пластин, що ускладнює прилад.
3. Неможливість використовувати ультрафіолетове випромінювання, яке поглинається склом пластин.

Цих недоліків немає в *інтерферометрі Маха–Цендера*, який іноді називають інтерферометром Рождественського.

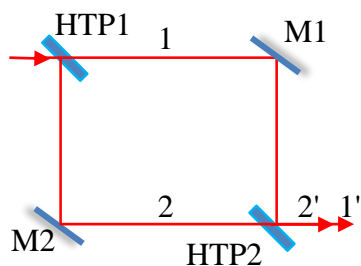


Рис. 5.23. Схема інтерферометра Маха–Цендера

Схема цього інтерферометра наведена на рис. 5.23. Вхідний промінь за допомогою напівпрозорої пластинки НТР1 ділиться на два променя 1 і 2, які після відбиття від дзеркал М1, М2 і напівпрозорої пластинки НТР2 утворюють два когерентних променя 1' і 2', що

інтерферують між собою. Переміщенням дзеркал і пластинок можна змінювати відстань між променями 1 і 2.

5.10.3. Інтерферометр Майкельсона

Схема цього інтерферометра наведена на рис. 5.24. Вхідний промінь за допомогою напівпрозорої пластинки НТР ділиться на два променя 1 і 2, які після

відбивання від дзеркал M1, M2 і напівпрозорої пластинки НТР утворюють два когерентних променя 1' і 2', що інтерферують між собою.

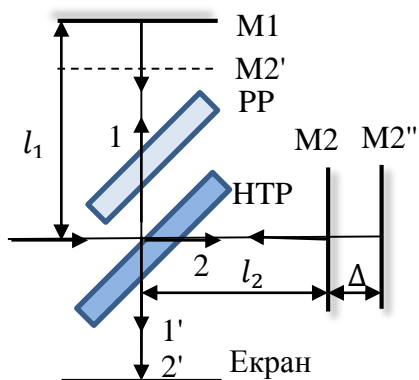


Рис. 5.24. Схема Інтерферометра Майкельсона

Якщо дзеркала M1, M2 перпендикулярні одне до одного, то інтерференційна картина являє собою смуги рівного нахилу у вигляді концентричних кілець, які утворюються в повітряному проміжку між дзеркалом M1 і зображенням дзеркала M2'. Різниця ходу між променями 1' і 2' дорівнює

$$\Delta d = 2(l_1 - l_2), \quad (5.82)$$

де l_1 і l_2 – відстані між напівпрозорою пластинкою НТР і дзеркалами M1 і M2 відповідно.

Якщо дзеркала M1, M2 не перпендикулярні одне до одного, то інтерференційна картина являє собою смуги рівної товщини у вигляді смуг, що

паралельні ребру клина, який утворюються в повітряному проміжку між дзеркалом M1 і зображенням дзеркала M2'.

Промінь 1 проходить через напівпрозору пластику НТР один раз, а промінь 2 – три рази. Для компенсації цього на шляху променя 1 розташовують плоскопаралельну пластинку РР, яка має товщину пластинки НТР (рис. 5.24).

Якщо зміщувати одно із дзеркал інтерферометра на величину Δ , то інтерференційна картина зміститься на m_m смуг (число може бути не цілим). При цьому виникає додаткова різниця ходу, яку представимо у вигляді

$$\Delta d = 2\Delta = m_m \lambda. \quad (5.83)$$

Звідки

$$\Delta = m_m \frac{\lambda}{2}. \quad (5.84)$$

Вимірюючи число зміщених смуг, можна визначити величину зміщення дзеркала M2. Наприклад, якщо $\lambda = 0,5$ мкм, а $m_m = 0,01$, то $\Delta = 2,5$ нм.

В інтерферометрі Майкельсона можна використовувати біле світло. В цьому випадку кожна монохроматична складова білого світла утворює свою кольорову інтерференційну картину, причому ці картини спостерігаються лише при невеликій різниці ходу в декілька довжин хвиль (мала довжина когерентності білого світла). При нульовій різниці ходу променів інтерференція для кожної довжини хвилі відбувається з однаковим підсиленням і тому в центрі картини спостерігається біла пляма.

При різниці ходу променів $\Delta d = \lambda/2$ хвилі в результаті інтерференції хвилі гасяться. Тому навколо білої плями утворюється темна кільцева область. За темною кільцевою областю інтерференційні кругові смуги різних довжин хвиль починають перекриватися. В результаті утворюються кольорові кільця. Далі максимуми і мінімуми інтенсивності кілець різних порядків перекриваються і інтерференційна картина зникає.

Інтерференція в білому світлі дозволяє з великою точністю визначити рівність оптичних довжин шляхів променів, які утворюють інтерференційну

картину, що дає змогу виконувати високоточні вимірювання і юстування оптичних систем.

5.10.4. Фур'є – спектрометр

Інтерферометр Майкельсона служить основою для фур'є–спектрометра, призначеного для вимірювання спектрального складу випромінювання. Одно із дзеркал інтерферометра переміщується із постійною швидкістю v (рис. 5.25). При цьому різниця ходу (5.82) між променями 1' і 2', які утворюють в площині приймача випромінювання інтерференційну картину, змінюється в часі.

$$\Delta d = 2(l_1 - l_2) = 2vt. \quad (5.85)$$

Визначимо результуючу інтенсивність світла в інтерференційній картині згідно (5.16) за умови рівності інтенсивності променів 1' і 2', коли $I_1 = I_2 = I_0$

$$I_{\Sigma} = 2I_0(1 + \cos \Delta\varphi), \quad (5.86)$$

де $\Delta\varphi$ – різниця фаз між променями 1' і 2',

$$\Delta\varphi = k\Delta d = \frac{4\pi}{\lambda} vt.$$

Тоді

$$I_{\Sigma} = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{4\pi}{\lambda} vt \right). \quad (5.87)$$

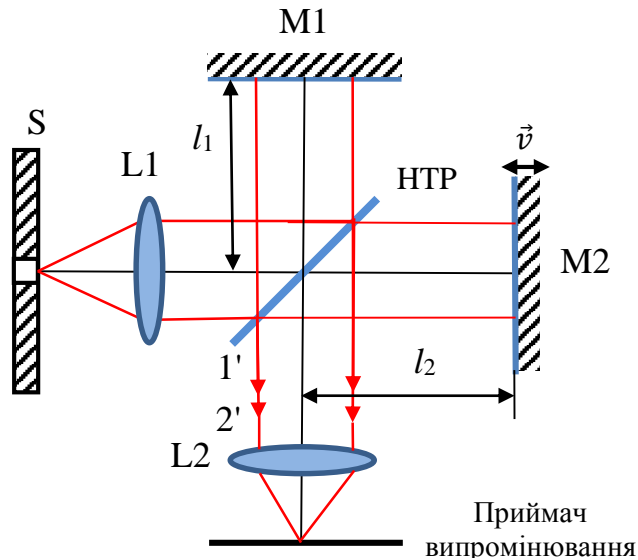


Рис. 5.25. Схема фур'є-спектрометра

Формула (5.87) показує, що інтенсивність інтерференційної картини змінюється по гармонічному закону з частотою

$$\Omega_{\Sigma} = \frac{4\pi}{2\pi c} v = \frac{2v}{c} \omega. \quad (5.88)$$

Із співвідношення (5.88) видно, що частота Ω_{Σ} зміни інтенсивності картини лінійно залежить від частоти ω оптичного випромінювання, яке надходить до інтерферометра. Іншими словами, відбувається перетворення спектру випромінювання в спектр зміни інтерференційної картини, а тому такий прилад називається *фур'є-спектрометром*.

Співвідношення (5.88) можна пояснити ефектом Доплера, згідно якого рухоме дзеркало M2 формує в площині приймача випромінювання світлову хвилю 2' з частотою зміщення

$$\Omega_D = \frac{2v}{c} \omega, \quad (5.89)$$

яка співпадає з частотою Ω_{Σ} .

Якщо на вхід спектрометра надходить світло із спектром $I_0(\omega)$, то кожна із його монохроматичних складових формує свою інтерференційну картину. При цьому результуючий електричний сигнал на виході приймача випромінювання визначається як

$$\begin{aligned}
u_s(t) &\sim \int_0^{\infty} 2I_0(\omega)(1 + \cos \Omega_{\Sigma}t)d\omega = \\
&= 2 \int_0^{\infty} I_0(\omega)d\omega + 2 \int_0^{\infty} I_0(\omega) \cos \frac{2v\omega}{c} t d\omega \sim \mathcal{F}^{-1}\{I_0(\omega)\}, \quad (5.90)
\end{aligned}$$

де $\mathcal{F}^{-1}\{ \}$ – оператор оберненого перетворення Фур'є.

Сигнал $u_s(t)$ з приймача випромінювання надходить до спектроаналізатора, який визначає спектр цього сигналу $\tilde{u}_s(\Omega_{\Sigma})$ у вигляді перетворення Фур'є.

$$\tilde{u}_s(\Omega_{\Sigma}) = \mathcal{F}\{u_s(t)\} \sim \mathcal{F}\{\mathcal{F}^{-1}\{I_0(\omega)\}\} = I_0(\omega). \quad (5.91)$$

Із співвідношення (5.91) видно, що спектр електричного сигналу $\tilde{u}_s(\Omega_{\Sigma})$ пропорційний спектру оптичного випромінювання $I_0(\omega)$, тобто вимірюючи спектр $\tilde{u}_s(\Omega_{\Sigma})$ можна виміряти спектральний склад світла.

Фуре – спектрометр має такі переваги:

1. Можливість одночасного вимірювання всього спектрального складу оптичного випромінювання.
2. Приймач випромінювання реєструє весь потік світла від інтерференційної картини, що дозволяє використовувати малі потоки випромінювання.
3. Такі спектрометри використовуються, в більшості випадків, в інфрачервоній області спектру, де приймачі випромінювання мають малу чутливість.

5.10.5. Інтерферометр Тваймана – Грина

Такий інтерферометр використовується для контролю якості оптичних елементів. Схема інтерферометра для дослідження якості призми Р наведена на рис. 5.25.

Паралельний пучок монохроматичного світла від джерела S ділиться напівпрозорою пластинкою НТР на два пучки. Після відбивання від дзеркал М1 і М2 ці пучки об'єднуються за допомогою пластинки НТР і утворюють когерентні промені 1' і 2', які в результаті інтерференції формують на вхідній

апертурі лінзи L2 рівномірну освітленість. В цьому випадку в площині приймача випромінювання утворюється точкове зображення.

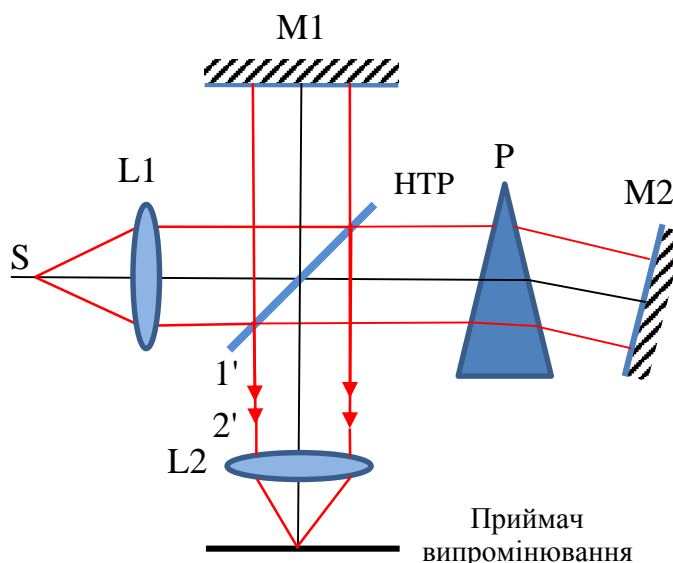


Рис. 5.25. Схема інтерферометра Тваймана – Грина для перевірки якості призми Р

Якщо перед дзеркалом M2 встановлена призма Р і різниця ходу між променями 1' і 2' зберігається по всьому перетину призми, то в площині приймача випромінювання також буде точкове зображення. **Якщо призма має дефекти у вигляді нерівномірності граней призми або показника заломлення, то на приймачі буде спостерігатися інтерференційна картина, параметри якої відповідають дефектам призми.**

Перевірку якості лінз можна також виконати за допомогою інтерферометра Тваймана – Грина, схема якого наведена на рис. 5.26. На відміну від інтерферометра, схема якого наведена на рис. 5.25, в цьому інтерферометрі дзеркало M2 має сферичну поверхню, центр якої співпадає фокусом F досліджуваної лінзи L3.

Інтерферометр Тваймана – Грина дозволяє контролювати дефекти оптичних елементів з надзвичайною точністю (до $0,01\lambda$).

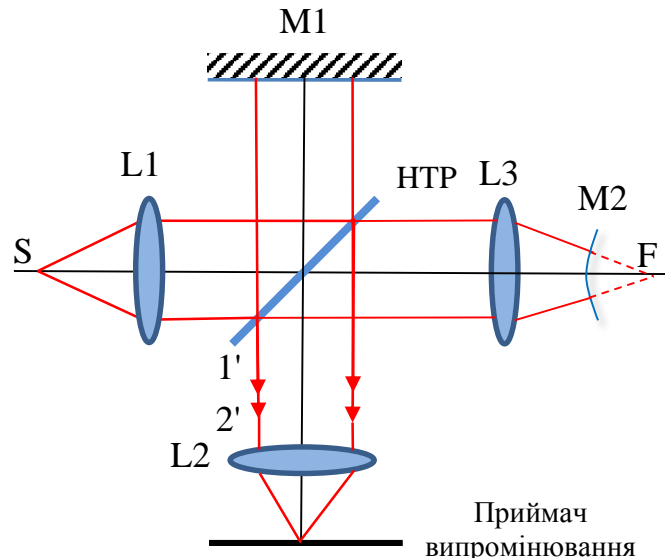


Рис. 5.26. Схема інтерферометра Тваймана – Грина для перевірки якості лінзи L3

5.10.6. Зірковий інтерферометр Майкельсона

Зірковий інтерферометр Майкельсона призначений для вимірювання малих кутів між зірками, які неможливо спостерігати окремо за допомогою телескопа. Схема такого інтерферометра наведена на рис. 5.27.

Промені 1 і 2 від зірки відбиваються від дзеркал і надходять до об'єктива, який формує інтерференційну картину в фокальній площині. Кутова відстань

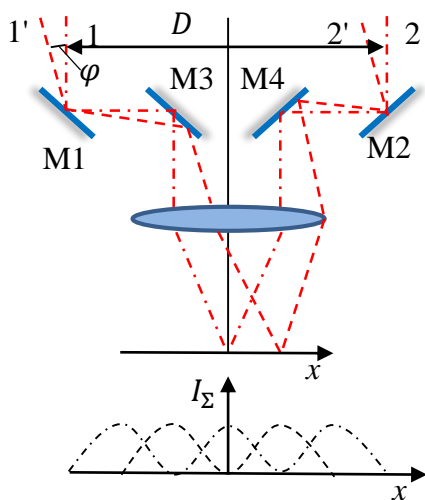


Рис. 5.27. Схема зіркового інтерферометра Майкельсона

між сусідніми максимумами становить $\theta = \lambda/D$, де D – відстань між дзеркалами M1 і M2.

Нехай на вхід інтерферометра надходять промені 1' і 2' від другої зірки, яка знаходиться на кутівій відстані φ від першої зірки. Промені 1' і 2' також формують в фокальній площині об'єктива свою інтерференційну картину, яка зміщена на кут φ . Змінюючи відстань D між дзеркалами M1 і M2, добиваються найгіршого контрасту

розподілу інтенсивності I_x в результуючій інтерференційній картині від двох

зірок. Це відбудеться в тому випадку, коли максимум інтенсивності в дифракційній картині від однієї зірки співпаде з мінімумом інтенсивності від іншої зірки, тобто справедлива рівність $\varphi = 0,5\theta$.

Звідки

$$\varphi = \frac{\lambda}{2D}. \quad (5.92)$$

Наприклад, якщо $\lambda = 0,5$ мкм, а $D = 5$ м, то $\varphi = 0,3$ кутових секунди.

5.11. Лазерний гіроскоп

Лазерний (квантовий, кільцевий) гіроскоп призначений для вимірювання кутової швидкості обертання об'єкта, на якому він розташований.

Гіроскоп складається із системи дзеркал M1, M2, M3, які утворюють кільцевий інтерферометр (рис. 5.28). Між дзеркалами M1 і M2 знаходиться активний АЕ, який здатний підсилювати світлову хвилю, що проходить через нього. В результаті квантових переходів в активному елементу виникають дві

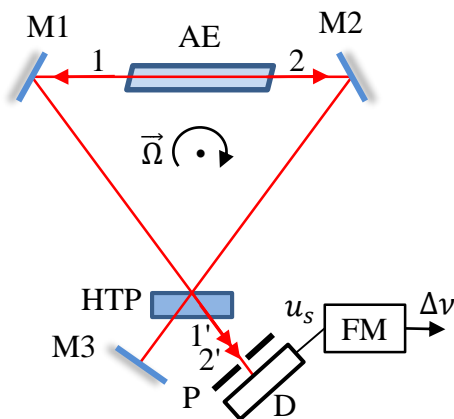


Рис. 5.28. Схема лазерного гіроскопа

хвилі 1 і 2, які розповсюджуються назустріч одна одній. За допомогою напівпрозорої пластинки НТР і дзеркала M3 формуються дві хвилі 1' і 2', які розповсюджуються в одному напрямку і утворюють інтерференційну картину в площині діафрагми Р.

В замкнутому контурі, утвореному дзеркалами M1, M2 і напівпрозорою пластинкою НТР, розповсюджуються дві хвилі, які підсилюються активним елементом.

Підсилення відбувається в тому випадку, коли уздовж периметра контуру розміщується ціле число довжин хвиль λ для виконання умови максимуму, тобто

$$P = m\lambda; \Rightarrow \lambda = \frac{P}{m}; \Rightarrow \nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{mc}{P}. \quad (5.93)$$

Якщо гіроскоп нерухомий, то обидві хвилі мають однакову частоту ν_0 , а тому інтерференційна картина в площині діафрагми Р буде нерухомою. Якщо гіроскоп обертається, то шлях проходження контуру однієї хвилі стане більшим за периметр, а другої меншим. Тому умова (5.93) буде виконуватись для різних частот хвиль

$$\nu_{1,2} = \nu_0 \pm \frac{\nu_0 S_g \Omega}{c P} \cos\theta, \quad (5.94)$$

де S_g – площа контуру; θ – кут між площею контуру і вектором кутової швидкості $\vec{\Omega}$.

Виникнення хвиль з частотами ν_1 і ν_2 можна пояснити ефектом Доплера.

При інтерференції хвиль з частотами ν_1 і ν_2 в площині діафрагми виникає інтерференційна картина, яка змінюється з частотою

$$\Delta\nu = \nu_1 - \nu_2 = k_g F \cos\theta, \quad (5.95)$$

де $F = \Omega/2\pi$ – частота обертання гіроскопа; k_g – постійна гіроскопа,

$$k_g = \frac{8\pi S_g}{\lambda P}. \quad (5.96)$$

Виникнення в кільцевому інтерферометрі хвиль з частотами ν_1 і ν_2 , які формують змінну (рухома) інтерференційну картину, називається *ефектом Саньяка*.

Формула (5.95) називається *основним рівнянням лазерного гіроскопа*.

За діафрагмою встановлено приймач випромінювання, що перетворює змінну інтенсивність інтерференційної картини в електричний сигнал u_s , амплітуда якого змінюється з частотою $\Delta\nu$. Ця частота вимірюється частотоміром.

Розглянемо приклад визначення параметрів лазерного гіроскопа, контур якого являє собою квадрат зі стороною 25 см, а довжина хвилі $\lambda = 0,628$ мкм. Тоді $k_g = 2,5 \cdot 10^6$. Якщо гіроскоп встановлено на поверхні Землі на широті $\theta = 60^\circ$, а кутова швидкість обертання Землі $\Omega = 15$ градусів/годину, то $\Delta\nu = 17$

Гц. Точність визначення кутової швидкості лазерного гіроскопа становить 10^{-3} градусів/годину.

Головна перевага лазерного гіроскопа полягає у відсутності рухомих елементів, які присутні в традиційних механічних гіроскопах.

5.12. Багатопротенева інтерференція

Якщо на плоскопаралельну пластинку падає промінь, то в результаті багатократних відбивань в середині пластинки з поверхонь пластинки виходить багато паралельних когерентних променів, які утворюють інтерференційні картини в світлі, що пройшло через пластинку і відбилось від неї (рис. 5.29). Така інтерференція називається *багатопротеневою*.

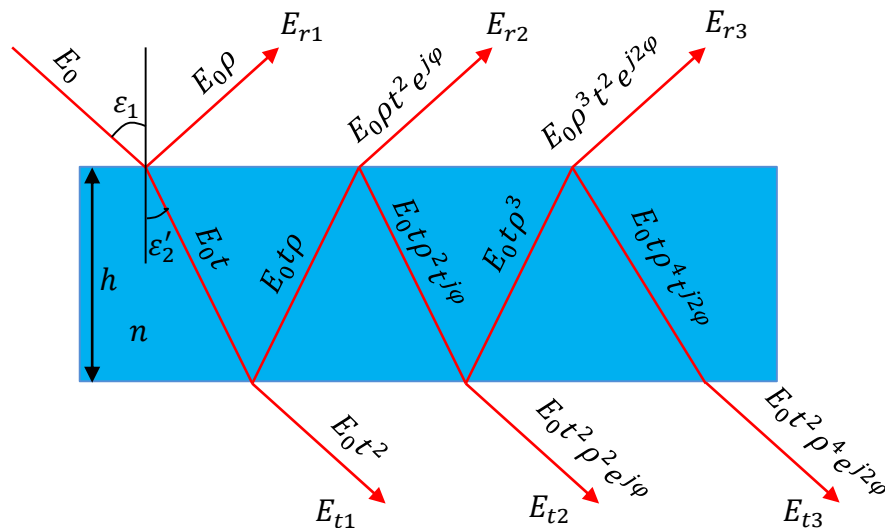


Рис. 5.29. Схема формування багатопротеневої інтерференції

5.12.1. Інтерференція променів, що відбилися від пластинки, або пройшли через неї. Формули Ері

Нехай на плоскопаралельну пластинку під кутом ϵ_1 падає монохроматичний промінь з амплітудою E_0 і довжиною хвилі λ (рис. 5.29). Визначимо амплітуди променів, що відбилися від пластинки E_{ri} , і які пройшли через пластинку E_{ti} .

Різниця ходу між сусідніми променями визначається за формулою (5.58)

$$\Delta d = 2hncos\varepsilon'_2 \pm \frac{\lambda}{2}, \quad (5.97)$$

де h і n – товщина і показник заломлення пластинки відповідно; ε'_2 – кут заломлення.

В формулі (5.97) складова $\pm\lambda/2$ призводить до зміщення інтерференційної картини на половину смуги і не впливає на розподіл інтенсивності в картині. Тому в подальшому не будемо враховувати цю складову.

Різниця фаз між сусідніми променями

$$\varphi = \frac{4\pi}{\lambda} hncos\varepsilon'_2. \quad (5.98)$$

Визначимо амплітуди променів, що відбилися від пластинки E_{ri} , і які пройшли через пластинку E_{ti} , якщо поверхні пластинки мають амплітудні коефіцієнти відбиття ρ і пропускання t . З урахуванням різниці фаз (5.98) маємо:

- Для відбитого від пластинки світла:

$$E_{r1} = E_0\rho; E_{r2} = E_0t^2\rho^2e^{j\varphi}; E_{r3} = E_0t^2\rho^3e^{j2\varphi}; E_{r4} = E_0t^2\rho^5e^{j3\varphi}; \dots \quad (5.99)$$

- Для світла, що пройшло через пластинку:

$$E_{t1} = E_0t^2; E_{t2} = E_0t^2\rho^2e^{j\varphi}; E_{t3} = E_0t^2\rho^4e^{j2\varphi}; E_{t4} = E_0t^2\rho^6e^{j3\varphi}; \dots \quad (5.100)$$

Результуюча амплітуда в інтерференційній картині для світла, що пройшло через пластинку, з урахуванням (5.100) дорівнює

$$E_{t\Sigma} = \sum_{i=1}^N E_{ti} = E_0t^2(1 + \rho^2e^{j\varphi} + \rho^4e^{j2\varphi} + \dots). \quad (5.101)$$

В дужках останнього виразу знаходиться сума геометричної прогресії із знаменником $\rho^2e^{j\varphi}$. Якщо число променів N , які приймають участь в інтерференції, достатньо велике, то сума такої прогресії $1/(1 - \rho^2e^{j\varphi})$. Тоді амплітуда поля (5.100) буде описуватися функцією

$$E_{t\Sigma} = \frac{E_0t^2}{1 - \rho^2e^{j\varphi}} = \frac{E_0T}{1 - Re^{j\varphi}}, \quad (5.102)$$

де $T = t^2$ і $R = \rho^2$ – енергетичні коефіцієнти пропускання і відбивання поверхні пластинки відповідно.

Інтенсивність інтерференційної картини визначається як

$$I_t = |E_{t\Sigma}E_{t\Sigma}^*|^2 = \frac{E_0T}{(1 - Re^{j\varphi})} \frac{E_0T}{(1 - Re^{-j\varphi})} = \frac{I_0T^2}{1 + R^2 - Re^{j\varphi} - Re^{-j\varphi}}. \quad (5.103)$$

Використовуючи формулу Ейлера $e^{j\varphi} + e^{-j\varphi} = 2\cos\varphi$, а також співвідношення $T = 1 - R$ і $1 - \cos\varphi = 2\sin^2(\varphi/2)$, інтенсивність (5.103) матиме вигляд

$$I_t = I_0 \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R\sin^2(\varphi/2)}, \quad (5.104)$$

де $I_0 = |E_0 E_0^*|^2$ – інтенсивність падаючого світла.

Аналогічно можна знайти розподіл інтенсивності в інтерференційній картині, яка формується відбитим світлом.

$$I_r = I_0 \frac{4R\sin^2(\varphi/2)}{(1-R)^2 + 4R\sin^2(\varphi/2)}. \quad (5.105)$$

Співвідношення (5.102) і (5.103) називаються *формулами Ері*. Ці формули описують розподіл інтенсивності в світлі, що пройшло через пластинку або відбилось від неї, при багатопроменевій інтерференції.

5.12.2. Залежність інтенсивності променів, що відбилися від пластинки, або пройшли через неї, від різниці фаз і коефіцієнта відбиття

Якщо на шляху паралельних променів, що відбилися від пластинки, або пройшли через неї, помістити додатну лінзу, то в її задній фокальній площині буде спостерігатись інтерференційна картина (рис. 5.30).

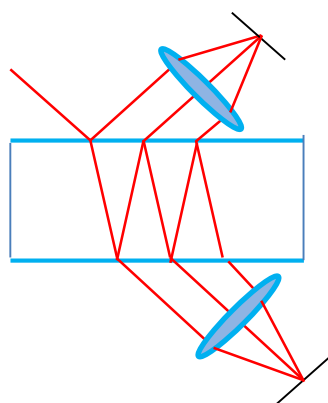


Рис. 5.30. Схема формування інтерференційних картин в задній фокальній площині лінз при багатопроменевій інтерференції

Використовуючи формули Ері (5.104) і (5.105) визначимо величину інтенсивності і положення світлих і темних інтерференційних смуг.

Для світлих смуг у світлі, що пройшло через пластинку, маємо

$$I_{t,max} = I_0, \text{ коли } \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0; \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = m\pi; \Rightarrow \varphi_{t,max} = 2m\pi. \quad (5.106)$$

Для темних смуг у світлі, що пройшло через пластинку, маємо

$$I_{t,min} = I_0 \left(\frac{1-R}{1+R} \right)^2, \text{ коли } \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) = 1; \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{2} + m\pi; \Rightarrow$$

$$\varphi_{t,min} = (2m + 1)\pi. \quad (5.107)$$

Для світлих смуг у світлі, що відбилось від пластинки, маємо

$$I_{r,max} = I_0 \frac{4R}{(1+R)^2}, \text{ коли } \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) = 0; \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = m\pi; \Rightarrow$$

$$\varphi_{r,max} = 2m\pi. \quad (5.108)$$

Для темних смуг у світлі, що відбилось від пластинки, маємо

$$I_{r,min} = 0, \text{ коли } \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) = 0; \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = m\pi; \Rightarrow \varphi_{r,min} = 2m\pi. \quad (5.109)$$

На рис. 5.31 наведено графіки залежності інтенсивності променів, що

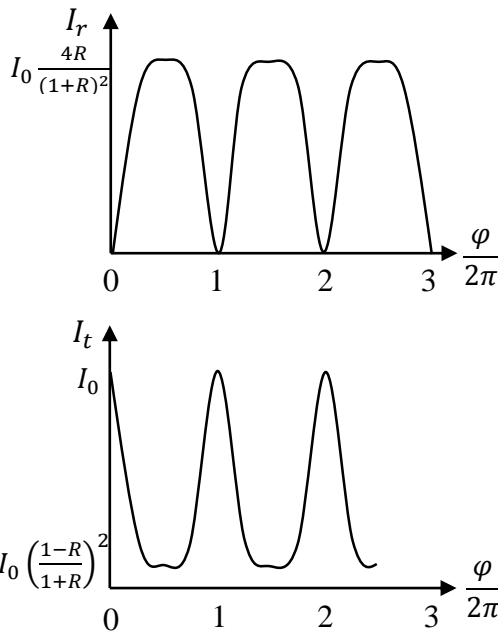


Рис. 5.31. Залежність інтенсивності променів, що відбилися від пластинки I_r , або пройшли через неї I_t , від нормованої різни $\varphi/2\pi$

відбилися від пластинки, або пройшли через неї, від різниці фаз φ .

Аналіз формул Ері (5.104) і (5.105) і їх графіків показує, що

1. В світлі, що пройшло через пластинку, спостерігаються вузькі світлі смуги на фоні з інтенсивністю $I_0 \left(\frac{1-R}{1+R} \right)^2$.

2. В світлі, що відбилося від пластинки, спостерігаються широкі світлі смуги на темному фоні з інтенсивністю рівною нулю.

3. Сума інтенсивностей в світлі, що пройшло через пластинку і відбилось від неї, дорівнює $I_r + I_t = I_0$. Це означає, що інтерференційні картини в світлі, що пройшло через пластинку і відбилось від неї, доповнюють одна одну.

4. Положення світлих смуг в світлі, що пройшло через пластинку, відповідає цілому числу порядку інтерференції m , а темних смуг – напівцілому числу $m = 0,5; 1,5; 2,5, \dots$. У відбитому світлі навпаки.

Ширина світлих смуг в світлі, що пройшло через пластинку, залежить від

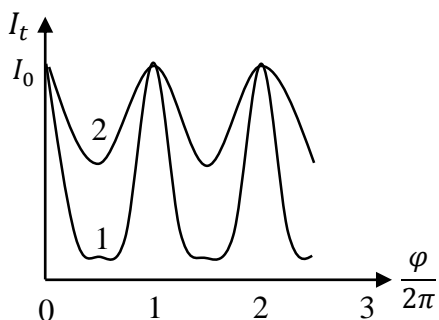


Рис. 5.32. Залежність інтерференційної картини від коефіцієнта відбиття поверхні пласти:

1 – $R = 0,9$; 2 – $R = 0,5$

коефіцієнта відбиття R поверхні пластинки (рис. 5.32). Із збільшенням коефіцієнта R смуги звужуються, а фон зменшується.

Інтерференційна картина Ері характеризується трьома параметрами: різкістю, відністю і контрастом смуг.

Розглянемо окремо ці параметри в світлі, що пройшло через

пластинку (рис. 5.33).

1. *Різкість* визначається шириною смуги на рівні 0,5 максимального значення інтенсивності. Чисельно вона розраховується за

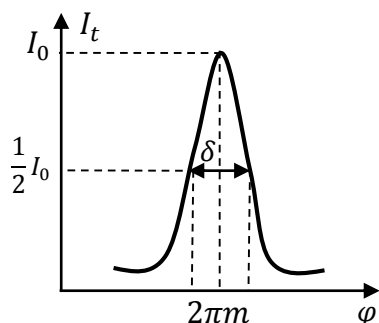


Рис. 5.33. Визначення параметрів інтерференційної картини

формулою

$$F = \frac{\Delta}{\delta}, \quad (5.110)$$

де $\Delta = 2\pi$ – відстань між сусідніми максимумами; δ – напівширина максимуму, яку визначимо із умови $I_t(2\pi t + 0,5\delta) = 0,5I_0$.

Використовуючи формулу Ері (5.104) ця умова запишеться у вигляді

$$I_t = I_0 \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R \sin^2[(2\pi t + 0,5\delta)/2]} = \frac{1}{2} I_0.$$

$$\frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R \sin^2(\delta/4)} = \frac{1}{2}; \Rightarrow \frac{1}{2}(1-R)^2 \approx \frac{1}{8} R \delta^2 \Rightarrow \delta = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}.$$

Тоді формула (5.110) матиме вигляд

$$R = \frac{2\pi}{\frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}. \quad (5.111)$$

Аналіз формули (5.111) показує, що різкість смуг залежить тільки від коефіцієнта відбиття R поверхні пластинки. Із збільшенням R різкість смуг зростає. Наприклад, коли $R = 0,9$, то $F = 30$.

2. *Видність* інтерференційних смуг визначається за формулою

$$V = \frac{I_{t,max} - I_{t,min}}{I_{t,max} + I_{t,min}}. \quad (5.112)$$

Після підстановки (5.106) і (5.107) до (5.112) маємо

$$V = \frac{I_0 - I_0 \left(\frac{1-R}{1+R}\right)^2}{I_0 + I_0 \left(\frac{1-R}{1+R}\right)^2} = \frac{(1+R)^2 - (1-R)^2}{(1+R)^2 + (1-R)^2} = \frac{2R}{1+R^2}. \quad (5.113)$$

3. *Контраст* інтерференційних смуг визначається за формулою

$$C = \frac{I_{t,max}}{I_{t,min}}. \quad (5.114)$$

Після підстановки (5.106) і (5.107) до (5.112) маємо

$$C = \frac{I_0}{I_0 \left(\frac{1-R}{1+R}\right)^2} = \left(\frac{1+R}{1-R}\right)^2. \quad (5.115)$$

5.13. Багатопробієві інтерферометри

5.13.1. Інтерферометр Фабрі–Перо

Інтерферометр Фабрі–Перо складається із двох паралельних скляних пластинок, які мають внутрішні дзеркальні поверхні (рис. 5.34). Для зменшення впливу відбитих променів від зовнішніх поверхонь пластини виготовлені у вигляді клина. Якщо на першу пластину падає промінь, то в результаті багатократних відбивань від дзеркальних поверхонь в повітряному проміжку на

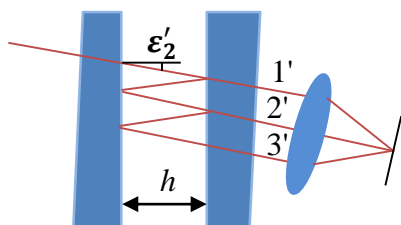


Рис. 5.34. Схема інтерферометра Фабрі–Перо

виході другої пластини утворюється паралельний пучок когерентних променів $1', 2', 3' \dots$, які інтерферують між собою. Промені $1', 2', 3' \dots$, формують в задній фокальній площині лінзи інтерференційну картину рівного нахилу у вигляді концентричних кілець.

Різниця ходу між сусідніми променями 1' і 2' згідно (5.58) дорівнює

$$\Delta d = 2h \cos \varepsilon'_2. \quad (5.117)$$

Світлим смугам відповідає умова максимумів (5.26)

$$\Delta d = 2h \cos \varepsilon'_2 = m\lambda. \quad (5.118)$$

Тоді порядок інтерференції визначається за формулою

$$m = \frac{2h \cos \varepsilon'_2}{\lambda}. \quad (5.119)$$

Аналіз формули (5.119) показує, що

1. Максимальний порядок інтерференції буде при нормальному падінні променя на вхід інтерферометра, коли $\varepsilon'_2 = 0$. В цьому випадку формула (5.119) матиме вигляд

$$m = \frac{2h}{\lambda}. \quad (5.120)$$

2. При віддаленні від центра інтерференційної картини кут заломлення ε'_2 збільшується, а порядок інтерференції m зменшується.

Визначимо ширину інтерференційних смуг (кутову відстань між сусідніми смугами) шляхом диференціювання співвідношення (5.118)

$$-2h \sin \varepsilon'_2 |\Delta \varepsilon'_2| = (\Delta m) \lambda.$$

Звідки

$$|\Delta \varepsilon'_2| = \frac{\lambda}{2h \sin \varepsilon'_2}. \quad (5.121)$$

Із формули (5.121) видно, що із зменшенням відстані між пластинами інтерферометра ширина інтерференційних смуг збільшується. Це явище використовується в тонких плівках, що наносять на поверхні оптичних елементів (лінз) для збільшення їх коефіцієнта пропускання.

Якщо на інтерферометр падає біле світло, то кожна його монохроматична складова утворює свою кольорову інтерференційну картину, що погіршує видимість результуючої картини.

Визначимо максимальний спектральний діапазон від λ до $\lambda + \Delta\lambda$, при якому інтерференційні смуги спостерігаються роздільно. Умовою роздільного

спостереження є співпадіння m -го максимуму для довжини хвилі $\lambda + \Delta\lambda$ з $m + 1$ -м максимумом для довжини хвилі λ .

Із умови максимумів (5.118) маємо

$$2h\cos\varepsilon'_2 = m(\lambda + \Delta\lambda) = (m + 1)\lambda.$$

Звідки

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}. \quad (5.122)$$

Ширина спектра $\Delta\lambda$ називається *робочим спектральним діапазоном* інтерферометра, або *областю вільної дисперсії*. Із збільшенням порядку інтерференції m ширина спектру $\Delta\lambda$ зменшується.

Представимо формулу (5.122) в залежності від товщини повітряного проміжку h інтерферометра шляхом підстановки (5.120) до (5.122)

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2h}. \quad (5.123)$$

Із формули (5.123) видно, що із зменшенням товщини h робочий спектральний діапазон $\Delta\lambda$ розширюється, що використовується для просвітлення оптичних елементів.

5.13.2. Інтерферометр (пластинка) Люммера – Герке

Інтерферометр Люммера – Герке являє собою скляну пластинку товщиною 10 – 20 мм і довжиною 20 – 30 сантиметрів (рис. 5.34).

На похилу грань пластинки нормально падає промінь, який потрапляє на поверхню пластинки під кутом ε_1 , близьким до кута повного внутрішнього

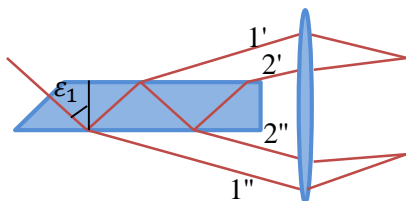


Рис. 5.34. Схема інтерферометра Люммера-Герке

відбивання $\varepsilon_{\text{ПВО}}$, тобто $\varepsilon_1 < \varepsilon_{\text{ПВО}}$. При цьому значна частина світлової енергії розповсюджується в середині пластинки, а незначна частина енергії виходить із пластинки у вигляді паралельних когерентних променів $1', 2', \dots$ і $1'', 2'', \dots$ з кутом заломлення близьким до

90°. Ці промені формують в фокальній площині лінзи дві інтерференційні картини.

5.14. Застосування інтерференції

Форма інтерференційних смуг залежить від різниці ходу між променями, які інтерферують. В свою чергу оптична довжина шляху залежить від геометричної довжини і показника заломлення середовища, в якому розповсюджуються промені. Вимірюючи параметри інтерференційної картини, можна визначити стан об'єкта дослідження.

5.14.1. Дослідження стану оптичних поверхонь

Поверхні оптичних елементів виготовляють з великою точністю, яка становить близько $\lambda/4$. Для контролю стану таких поверхонь використовується явище інтерференції, при якому вимірюється відхилення реальної поверхні від еталонної.

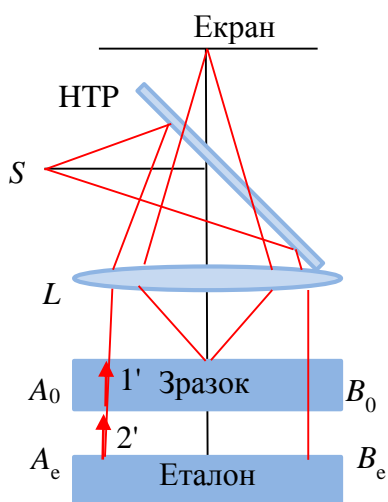


Рис.5.35. Схема для дослідження оптичних поверхонь

На рис. 5.35 наведена схема для контролю поверхні плоскопаралельної пластинки. Промені від монохроматичного джерела випромінювання S , яке розташоване в фокусі об'єктива L , нормально падають на повітряний зазор між досліджуваною поверхнею A_0B_0 і еталонною поверхнею A_eB_e . В результаті відбивання світла від цих поверхонь утворюються когерентні промені $1'$ і $2'$, які в результаті інтерференції утворюють смуги рівного нахилу або смуги рівної товщини.

Об'єктив формує зображення інтерференційної картини на екрані.

Якщо поверхні A_0B_0 і A_eB_e утворюють повітряний клин, то на екрані утворюються світлі смуги паралельно ребру клина (рис. 5.36,а). Якщо поверхня

A_0B_0 має дефекти у вигляді ямок (рис. 5.36,б) або горбів (рис. 5.36,в), то в цих місцях поверхні товщина повітряного зазору між поверхнями A_0B_0 і A_eB_e змінюється. Зміна товщини зазору відносно поверхні A_0B_0 на $\lambda/2$ призводить до зміщення інтерференційної картини на одну смугу.

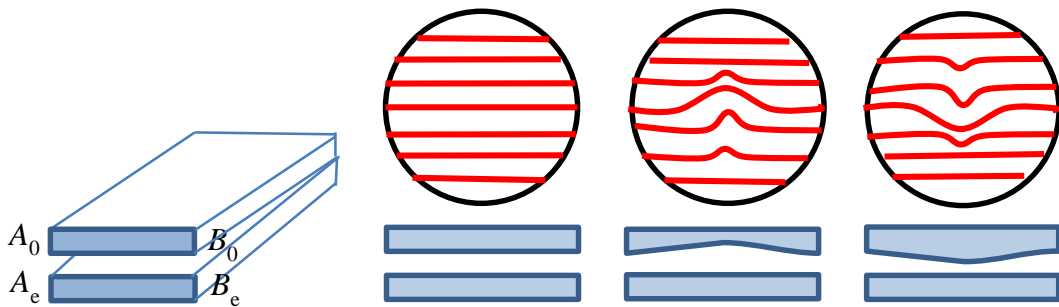


Рис. 5.36. Вимірювання дефектів плоскої поверхні A_0B_0

5.14.2. Вимірювання малих кутів між поверхнями прозорих пластин

Інтерференційні методи дозволяють вимірювати з великою точністю малий кут α між поверхнями A_1B_1 і A_2B_2 прозорої пластинки за допомогою схеми, що наведена на рис. 5.37.

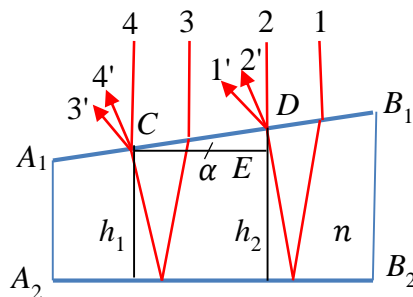


Рис. 5.37. Схема вимірювання малих кутів між поверхнями прозорої пластинки

На поверхню A_1B_1 пластини падає паралельний пучок променів 1–4 монохроматичного світла. Після відбивання і заломлення утворюються когерентні промені 1'–4', які формують на поверхні A_1B_1 інтерференційну картину у вигляді паралельних смуг рівної товщини.

Нехай промені 1',2' і 3',4' утворюють в точках C і D дві сусідні смуги, для яких виконується умова максимумів (5.26).

Різниця ходу між променями 1',2' і 3',4' в цих точках згідно (5.59) дорівнює

$$\Delta d_{1'2'} = 2h_2n - \frac{\lambda}{2} = (m + 1)\lambda; \quad (5.124)$$

$$\Delta d_{3'4'} = 2h_1n - \frac{\lambda}{2} = m\lambda. \quad (5.125)$$

де n – показник заломлення матеріалу пластинки.

Зменшення різниці ходу на $\lambda/2$ в (5.124) і (5.125) обумовлено тим, що промені 2' і 4' втрачають $\lambda/2$ в точках C і D .

Віднімемо (5.123) із (5.122).

$$2n(h_1 - h_2) = \lambda. \quad (5.126)$$

Із трикутника CDE маємо

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{DE}{CE}; \Rightarrow \alpha = \frac{h_2 - h_1}{l},$$

де l – відстань між сусідніми смугами.

Враховуючи (5.126) маємо

$$\alpha = \frac{\lambda}{2nl}. \quad (5.127)$$

Наприклад, якщо $l = 2,5$ мм, $\lambda = 0,5$ мкм, $n = 1,5$, то $\alpha \approx 14$ кутових секунд.

5. 14.3. Вимірювання малих змін довжини об'єктів при їх нагріванні

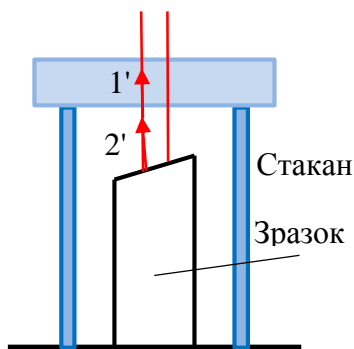


Рис. 5.38. Схема інтерференційного дилатометра

Збільшення розмірів тіла збільшення розмірів тіла на δl при зміні його температури на δT характеризується коефіцієнтом лінійного температурного розширення, який визначається за формулою

$$\beta_T = \frac{\Delta l}{l} \frac{1}{\Delta T}. \quad (5.128)$$

Для вимірювання коефіцієнта використовують інтерференційний дилатометр,

схема якого наведена на рис. 5.38. Досліджуваний зразок у вигляді стержня розміщують всередині стакана, виготовленого із кварцу. Кварц має малий коефіцієнт температурного розширення і тому мало змінює свої розміри при нагріванні. Стакан накривається плоскопаралельною скляною пластинкою, яка утворює повітряний клин з торцем стержня. На пластинку нормально падає паралельний пучок променів монохроматичного світла, які після від відбивання від поверхні пластинки і торця стержня утворюють когерентні промені 1' і 2'. Ці промені в результаті інтерференції утворюють смуги рівної товщини.

Якщо збільшити температуру стержня довжиною l на ΔT , то в результаті збільшення його довжини на Δl інтерференційна картина зміститься на певну кількість смуг. Зміщення на одну смугу відповідає збільшенню Δl на $\lambda/2$. За формулою (5.128) розраховують коефіцієнт β_T .

5.15. Просвітлення оптичних елементів

При проходженні світла через межу двох діелектриків завжди частина світлової енергії втрачається за рахунок відбивання, яку часто називають френелівськими втратами, так як вони розраховуються за формулами Френеля. На межі «повітря – скло» такі втрати становлять 3–5%. Тому при проходженні світла через багатокомпонентну систему втрати на відбивання будуть значними.

Для зменшення таких втрат на поверхню оптичної деталі наносять тонкі плівки, які створюють багатопроменеву інтерференцію, завдяки якій значно

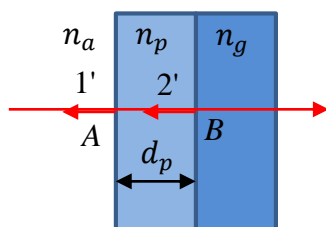


Рис. 5.39. Фізичні основи роботи просвітлюючих плівок

зменшуються втрати на відбивання. Процес нанесення таких плівок називається *просвітленням оптики*.

Розглянемо фізичні основи роботи просвітлюючих плівок і отримаємо формули для розрахунку параметрів одношарової плівки (рис. 5.39). На поверхню плівки нормально падає монохроматичний промінь, відбивається в точці A на межі «повітря – плівка»,

утворюючи промінь 1', і в точці B на межі «плівка – скло», утворюючи промінь 2'. Промені 1, 2' являються когерентними і утворюють інтерференційну картину. Для зменшення енергії відбитого світла різниця ходу між променями 2' і 1' повинна задовольняти умові мінімумів

$$\Delta d_{2'1'} = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}. \quad (5.129)$$

Розглянемо випадок, коли показники заломлення повітря n_a , плівки n_p і скла n_g задовольняють умові $n_a < n_p < n_g$. Тоді промінь 1' втрачає $\lambda/2$ в точці A , а промінь 2' – в точці B . В результаті цього різниця ходу між цими променями (5.129) дорівнює

$$\Delta d_{2'1'} = 2d_p n_p = m\lambda + \lambda/2.$$

Звідки товщина просвітляючої плівки

$$d_p = \frac{1}{2n_p} \left(m\lambda + \frac{\lambda}{2} \right). \quad (5.130)$$

Для $m = 0$ маємо

$$d_p = \frac{\lambda}{4n_p}. \quad (5.131)$$

Відбивання променів буде повністю відсутнє, якщо виконуються дві умови:

1. Різниця фаз між променями 2' і 1' дорівнює π , а різниця ходу $\Delta d_{2'1'} = \lambda/2$.
2. Хвилі 2' і 1' повинні мати однакові амплітуди, тобто амплітудні коефіцієнти відбиття на межах «повітря – плівка» r_{ap} і «плівка – скло» r_{pg} повинні бути рівними.

Перша умова виконується, коли товщина плівки визначається за формулою (5.131).

Для виконання другої умови скористаємося амплітудною формулою Френеля (3.20).

$$r_{ap} = \frac{n_a - n_p}{n_a + n_p} = r_{pg} = \frac{n_p - n_g}{n_p + n_g}.$$

Після ряду перетворювань отримаємо значення показника заломлення просвітляючої плівки.

$$(n_a - n_p)(n_p + n_g) = (n_p - n_g)(n_a + n_p).$$

Звідки

$$n_p = \sqrt{n_a n_g}. \quad (5.132)$$

Особливості просвітляючих покриттів.

1. Якщо виконуються умови (5.131) і (5.132), то пропускання просвітленої оптики буде максимальним тільки для певної довжини хвилі λ_0 , яка задовольняє умову (5.131). Для інших довжин хвиль пропускання значно погіршується. Зазвичай для видимої області спектру $\lambda_0 = 0,5$ мкм (зелений колір), де зорова система людини має найбільшу чутливість. Тому відбите від просвітляючого покриття біле світло має червоно-фіолетовий (пурпурний) колір.

2. Для розширення робочого спектрального діапазону використовують багатошарові покриття.

3. При просвітленні оптики виникають значні труднощі у виборі матеріалу покриття, показник заломлення n_p якого повинен задовольняти умові (5.132).

За допомогою просвітляючих покриттів можна збільшити коефіцієнт відбиття, тобто створити інтерференційне дзеркало. Для цього обирають матеріал покриття, показник заломлення якого задовольняє умовам (5.131), (5.132) і $n_a < n_p > n_g$. В цьому випадку промінь 2' не втрачає в точці B $\lambda/2$, а різниця ходу між променями 1' і 2' буде дорівнювати $\Delta d_{2'1'} = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{2} = 0$, що відповідає умові максимуму, тобто відбитий промінь буде підсилюватись.

Одношарове покриття забезпечує коефіцієнт відбиття $R \approx 0,3$. Для збільшення коефіцієнта відбиття використовують багатошарові покриття.

5.16. Теоретичні основи просвітляючих покриттів

5.16.1. Відбивання і проходження електромагнітної хвилі через багатошарову систему

При математичному моделюванні багатошарових просвітляючих покриттів вважають (рис. 5.40), що [10]

1. Покриття являється плоскопаралельною пластинкою нескінченних розмірів.
2. Кожне покриття характеризується товщиною d_i і показником заломлення n_i .
3. На покриття нормально падає плоска монохроматична хвиля.
4. На межі двох покриттів виконуються граничні умови

$$E_{\tau,i-1} = E_{\tau,i} \quad H_{\tau,i-1} = H_{\tau,i}. \quad (5.133)$$

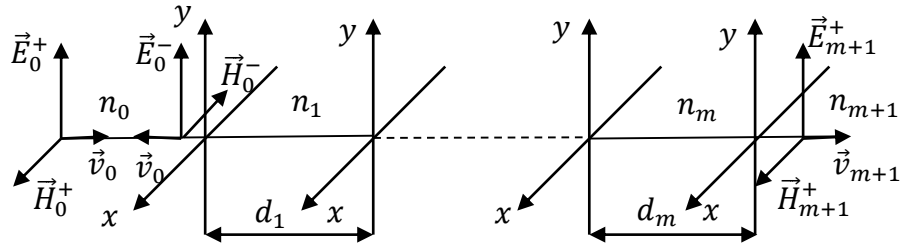


Рис. 5.40. Модель багатошарової оптичної системи

Визначимо амплітудні коефіцієнти пропускання і відбиття багатошарової системи як:

$$t = \frac{E_{m+1}^+}{E_0^+}; \quad (5.134)$$

$$r = \frac{E_0^-}{E_0^+}, \quad (5.135)$$

де E_0^+ – амплітуда електричного поля хвилі, яка падає на першу поверхню системи; E_{m+1}^+ – амплітуда електричного поля хвилі, яка пройшла через систему; E_0^- – амплітуда електричного поля хвилі, яка відбилась від першої поверхні системи.

Розглянемо процес проходження світлової хвилі через i -й шар (рис. 5.41). Промені, які відбилися від лівої і правої поверхні шару являються когерентними і інтерферують між собою. Різниця ходу між цими променями дорівнює

$$\Delta d_i = 2n_i d_i, \quad (5.136)$$

а різниця фаз –

$$2\Phi_i = k \cdot \Delta d_i = \frac{4\pi}{\lambda} n_i d_i. \quad (5.137)$$

Параметр

$$\Phi_i = \frac{2\pi}{\lambda} n_i d_i. \quad (5.138)$$

називається *фазовою товщиною* i -го шару.

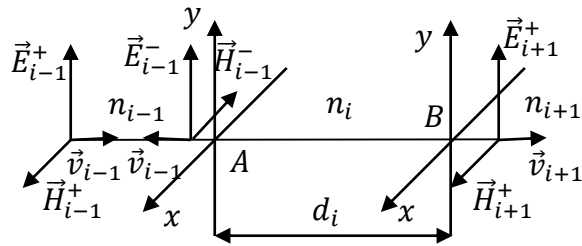


Рис. 5.41. Проходження електромагнітної хвилі через i -й шар

При проходженні хвилі від точки A до точки B виникає фазовий зсув Φ_i .

Тоді амплітуди відповідних хвиль пов'язані співвідношеннями

$$E_{i-1}^+ = E_i^+ e^{j\Phi_i} \quad \text{і} \quad E_{i-1}^- = E_i^- e^{-j\Phi_i}. \quad (5.139)$$

Аналогічні співвідношення справедливі і для напруженості магнітного поля світлової хвилі

$$H_{i-1}^+ = H_i^+ e^{j\Phi_i} \quad \text{і} \quad H_{i-1}^- = H_i^- e^{-j\Phi_i}. \quad (5.140)$$

Запишемо граничні умови (5.133) на межі $i-1$ -го і i -го шарів

$$E_{i-1}^+ + E_{i-1}^- = E_i^+ e^{j\Phi_i} + E_i^- e^{-j\Phi_i}; \quad (5.141)$$

$$H_{i-1}^+ + H_{i-1}^- = H_i^+ e^{j\Phi_i} + H_i^- e^{-j\Phi_i}. \quad (5.142)$$

Між амплітудами напруженості електричного поля E і напруженості магнітного поля H існує зв'язок (рис. 5.41)

$$H^+ = nE^+ \quad \text{і} \quad H^- = -nE^-. \quad (5.143)$$

Підставимо (5.143) до (5.142)

$$n_{i-1}E_{i-1}^+ - n_{i-1}E_{i-1}^- = n_i E_i^+ e^{j\Phi_i} - n_i E_i^- e^{-j\Phi_i}. \quad (5.144)$$

Визначимо результуючі амплітуди поля в i -м шару з врахуванням (5.143)

$$E_i = E_i^+ + E_i^-; \quad (5.145)$$

$$H_i = H_i^+ + H_i^- = n_i(E_i^+ - E_i^-). \quad (5.146)$$

Із системи рівнянь (5.145) і (5.146) маємо

$$E_i^+ = \frac{1}{2}(E_i + n_i^{-1}H_i); \quad E_i^- = \frac{1}{2}(E_i - n_i^{-1}H_i). \quad (5.147)$$

Підставимо ці значення в (5.141) і (5.142)

$$\begin{aligned}
E_{i-1}^+ + E_{i-1}^- = E_{i-1} &= \frac{1}{2}(E_i + n_i^{-1}H_i)e^{j\Phi_i} + \frac{1}{2}(E_i - n_i^{-1}H_i)e^{-j\Phi_i} = \\
&= \frac{1}{2}E_i(e^{j\Phi_i} + e^{-j\Phi_i}) + \frac{1}{2}H_in_i^{-1}(e^{j\Phi_i} - e^{-j\Phi_i}).
\end{aligned}$$

Використаємо формули Ейлера

$$e^{j\Phi_i} + e^{-j\Phi_i} = 2\cos\Phi_i, \quad e^{j\Phi_i} - e^{-j\Phi_i} = 2j\sin\Phi_i. \quad (5.148)$$

Тоді

$$E_{i-1} = E_i\cos\Phi_i + jH_in_i^{-1}\sin\Phi_i. \quad (5.149)$$

Аналогічно

$$\begin{aligned}
H_{i-1}^+ + H_{i-1}^- = H_{i-1} &= \frac{1}{2}n_i(E_i + n_i^{-1}H_i)e^{j\Phi_i} - \frac{1}{2}n_i(E_i - n_i^{-1}H_i)e^{-j\Phi_i} = \\
&= \frac{1}{2}n_iE_i(e^{j\Phi_i} - e^{-j\Phi_i}) + \frac{1}{2}H_i(e^{j\Phi_i} + e^{-j\Phi_i}) = jE_i\sin\Phi_i + H_i\cos\Phi_i. \quad (5.150)
\end{aligned}$$

Рекурентні вирази для розрахунку амплітуд напруженості електричного і магнітного полів (5.149) і (5.150) можна записати у вигляді еквівалентного матричного рівняння

$$\begin{pmatrix} E_{i-1} \\ H_{i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Phi_i & jn_i^{-1}\sin\Phi_i \\ jn_i\sin\Phi_i & \cos\Phi_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_i \\ H_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_i \\ H_i \end{pmatrix} = B_i \begin{pmatrix} E_i \\ H_i \end{pmatrix}. \quad (5.151)$$

Матриця B_i являє собою квадратичну матрицю розміром 2×2 з комплексними елементами і називається *характеристичною матрицею*, або *матрицею інтерференції* i -го шару. Детермінант цієї матриці дорівнює одиниці. Застосуємо співвідношення (5.151) для усіх шарів покриття, починаючи з m -го шару:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} E_{m-1} \\ H_{m-1} \end{pmatrix} &= B_m \begin{pmatrix} E_m \\ H_m \end{pmatrix}; \\
\begin{pmatrix} E_{m-2} \\ H_{m-2} \end{pmatrix} &= B_{m-1} \begin{pmatrix} E_{m-1} \\ H_{m-1} \end{pmatrix}; \\
&\dots\dots\dots \\
\begin{pmatrix} E_0 \\ H_0 \end{pmatrix} &= B_1 \begin{pmatrix} E_1 \\ H_1 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \quad (5.152)$$

Оскільки в m -ому середовищі відсутня відбита хвиля, то $E_{m+1}^- = 0$. При цьому величину E_{m+1}^+ зручно обрати рівною одиниці. Тоді із (5.143) маємо

$H_{m+1}^+ = n_{m+1}$. З урахуванням граничних умов амплітуди m -ого шару будуть дорівнювати: $E_m = 1$ і $H_m = n_{m+1}$.

Вилучаючи значення амплітуд полів на усіх межах внутрішніх шарів послідовною підстановкою, запишемо вирази, які пов'язують амплітуди електричного і магнітного полів на нульовій і m -ій межах:

$$\begin{pmatrix} E_0 \\ H_0 \end{pmatrix} = B_1 B_2 \dots B_m \begin{pmatrix} E_m \\ H_m \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 1 \\ n_{m+1} \end{pmatrix}. \quad (5.153)$$

Матриця B називається *характеристичною матрицею* інтерференційної системи. Із виразу (5.153) маємо, що для визначання характеристичної матриці системи необхідно перемножити матриці окремих шарів у послідовності, що співпадає з напрямком розповсюдження світлової хвилі. Детермінант цієї матриці дорівнює одиниці, так як рівні одиниці детермінанти матриць окремих шарів. Ця обставина служить для контролю правильності розрахунків.

Визначимо амплітудні коефіцієнти відбиття r і пропускання t , які визначаються за формулами (5.135) і (5.134) відповідно, для багат шарової системи з характеристичною матрицею (5.153)

$$\begin{pmatrix} E_0 \\ H_0 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 1 \\ n_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ n_{m+1} \end{pmatrix}. \quad (5.154)$$

Із системи рівнянь (5.154) знаходимо, що

$$E_0 = b_{11} + n_{m+1} b_{12}; \quad H_0 = b_{21} + n_{m+1} b_{22}. \quad (5.155)$$

Із системи рівнянь (5.147) маємо

$$E_0^+ = \frac{1}{2}(E_0 + n_0^{-1} H_0) = \frac{1}{2}(b_{11} + n_{m+1} b_{12} + n_0^{-1} b_{21} + n_0^{-1} n_{m+1} b_{22}); \quad (5.156)$$

$$E_0^- = \frac{1}{2}(E_0 - n_0^{-1} H_0) = \frac{1}{2}(b_{11} + n_{m+1} b_{12} - n_0^{-1} b_{21} - n_0^{-1} n_{m+1} b_{22}). \quad (5.157)$$

Тоді амплітудні коефіцієнти відбиття і пропускання будуть визначатись за формулами

$$r = \frac{E_0^-}{E_0^+} = \frac{b_{11} + n_{m+1} b_{12} - n_0^{-1} b_{21} - n_0^{-1} n_{m+1} b_{22}}{b_{11} + n_{m+1} b_{12} + n_0^{-1} b_{21} + n_0^{-1} n_{m+1} b_{22}}; \quad (5.158)$$

$$t = \frac{E_{m+1}^+}{E_0^+} = \frac{2}{b_{11} + n_{m+1} b_{12} + n_0^{-1} b_{21} + n_0^{-1} n_{m+1} b_{22}}. \quad (5.159)$$

Із рівнянь (5.151) і (5.153) видно, що шарова система описується матрицею, елементи якої не залежать від оптичних параметрів оточуючих середовищ. Крім того, зміна фазової товщини Φ_i впливає тільки на матрицю i -го шару, а зміна показника заломлення n_i – на матриці B_i і B_{i+1} . При цьому добутки $\prod_{j=1}^{i-1} B_j$ і $\prod_{j=i+2}^m B_j$ залишаються незмінними. Ці властивості є дуже корисними при вивченні варіацій параметрів шару на характеристики покриття, а також при розв’язанні різних конструкторських задач, так як дозволяють значно скоротити об’єм розрахунків. Другою корисною властивістю, яка широко використовується на практиці, є асоціативність матричного добутку, згідно якого на має значення, як згруповано повний добуток матриць окремих шарів покриття.

5.16.2. Одношарові просвітляючі покриття для фіксованої довжини хвилі

Задача зменшення коефіцієнта відбиття на межі двох різних оптично прозорих середовищ на фіксованій довжині хвилі є найбільш простою в оптиці просвітляючих покриттів. Практично усі відомі матеріали можна просвітлити, використовуючи одно- або двошарові покриття. Під терміном «просвітлення» в даному випадку розуміється можливість отримання для деякої заданої довжини хвилі λ_0 коефіцієнт відбиття, теоретично близьким до нуля. Вимога узгодження двох середовищ з різними показниками заломлення тільки в одній точці спектрального діапазону, а також невелике число шарів, які необхідні для розв’язку цієї задачі, призводить до достатньо простим математичним виразам, які можна проаналізувати аналітично.

Розглянемо прозору плівку з показником заломлення n_1 , яку нанесену на прозорий матеріал з показником заломлення n_2 . Якщо світлова хвиля, що розповсюджується із середовища з показником заломлення n_0 , нормально падає на плівку, характеристична матриця (5.148) такої одношарової системи буде мати вигляд

$$\begin{pmatrix} E_0 \\ H_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Phi_1 & jn_1^{-1}\sin\Phi_1 \\ jn_1\sin\Phi_1 & \cos\Phi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ H_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ H_1 \end{pmatrix}, \quad (5.160)$$

де $b_{11} = \cos\Phi_1$, $b_{12} = jn_1^{-1}\sin\Phi_1$, $b_{21} = jn_1\sin\Phi_1$, $b_{22} = \cos\Phi_1$.

Тоді амплітудний коефіцієнт відбиття (5.158) буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} r &= \frac{\cos\Phi_1 + n_2 j n_1^{-1} \sin\Phi_1 - n_0^{-1} j n_1 \sin\Phi_1 - n_0^{-1} n_2 \cos\Phi_1}{\cos\Phi_1 + n_2 j n_1^{-1} \sin\Phi_1 + n_0^{-1} j n_1 \sin\Phi_1 + n_0^{-1} n_2 \cos\Phi_1} \\ &= \frac{(n_0 - n_2) \cos\Phi_1 + j(n_0 n_2 n_1^{-1} - n_1) \sin\Phi_1}{(n_0 + n_2) \cos\Phi_1 + j(n_0 n_2 n_1^{-1} + n_1) \sin\Phi_1}. \end{aligned} \quad (5.161)$$

Оскільки знаменник у функції (5.161) не може бути нескінченністю, то для того щоб коефіцієнт відбиття мав нульове значення, необхідно прирівняти до нуля дійсну і уявну частини чисельника. Тоді отримаємо систему рівнянь

$$(n_0 - n_2) \cos\Phi_1 = 0; \quad (n_0 n_2 n_1^{-1} - n_1) \sin\Phi_1 = 0. \quad (5.162)$$

Ця система рівнянь має два розв'язки. Перший розв'язок:

$n_0 - n_2 = 0$ і $\sin\Phi_1 = 0$, або $n_0 = n_2$ при $\Phi_1 = m\pi$, де $m = 0, 1, 2, \dots$, очевидно не має практичного значення.

Більш важливим є другий розв'язок:

$$\cos\Phi_1 = 0 \text{ і } n_0 n_2 n_1^{-1} - n_1 = 0, \text{ або } n_1^2 = n_0 n_2 \text{ при } \Phi_1 = (2m + 1) \frac{\pi}{2}. \quad (5.163)$$

Зазвичай на практиці обирають $m = 0$. Тоді із формули (5.138) знаходимо товщину шару

$$d_1 = \frac{\lambda_0}{4n_1}. \quad (5.164)$$

Із системи рівнянь (5.163) знаходимо показник заломлення просвітляючого покриття

$$n_1 = \sqrt{n_0 n_2}. \quad (5.165)$$

Енергетичний коефіцієнт відбиття визначається згідно (5.158) за формулою

$$R = |r|^2 = r \cdot r^* = \frac{(n_0 - n_2)^2 \cos^2\Phi_1 + (n_0 n_2 n_1^{-1} - n_1)^2 \sin^2\Phi_1}{(n_0 + n_2)^2 \cos^2\Phi_1 + (n_0 n_2 n_1^{-1} + n_1)^2 \sin^2\Phi_1}. \quad (5.166)$$

5.17. Приклади розрахунку інтерференційних картин

Приклад 5.1. Напишіть вираз для результуючої світлової хвилі, яка є результатом складання двох монохроматичних однаково направлених світлових хвиль з однаковими періодами $T = 8 \cdot 10^{-15}$ с і амплітудою $E_0 = 0,02$ В·м⁻¹. Різниця фаз між цими хвилями дорівнює $\varphi_{02} - \varphi_{01} = 45^\circ$, а початкова фаза однієї із них дорівнює нулю.

Розв'язання. Згідно принципу суперпозиції, результуюча хвиля повинна мати таку ж частоту

$$\omega = \omega_1 = \omega_2 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{8 \cdot 10^{-15}} = 2\pi \cdot 1,25 \cdot 10^{16} \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Результуючу амплітуду визначимо за формулою (5.4):

$$E_{0\Sigma}^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}) = 2E_0^2 [1 + \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})].$$

$$\text{Звідки } E_\Sigma = 0,02 \sqrt{2[1 + \cos 45^\circ]} = 0,037 \text{ В/м.}$$

Початкову фазу визначимо за формулою (5.5):

$$\text{tg} \varphi_{0\Sigma} = \frac{E_{01} \sin \varphi_{01} + E_{02} \sin \varphi_{02}}{E_{01} \cos \varphi_{01} + E_{02} \cos \varphi_{02}},$$

де $E_{01} = E_{02} = 0,02$ В·м⁻¹; $\varphi_{01} = 0^\circ$; $\varphi_{02} = 45^\circ$. Тоді

$$\text{tg} \varphi_{0\Sigma} = \frac{\sin 45^\circ}{\cos 0^\circ + \cos 45^\circ} = 0,413.$$

Звідки $\varphi_{0\Sigma} = \text{arctg} 0,413 = 22,5^\circ = \pi/8$ рад.

Тоді результуюча світлова хвиля запишеться у вигляді:

$$E_\Sigma = E_{\Sigma 0} \cos(\omega t + \varphi_{0\Sigma}) = 0,037 \cos \left[\frac{\pi}{4} \left(10^{15} t + \frac{1}{2} \right) \right].$$

Приклад 5.2. Порівняйте когерентні властивості теплових джерел світла та лазерів: визначте, при якій оптичній різниці ходу Δ буде спостерігатись інтерференційна картина від: а) червоної лінії кадмію з шириною лінії $\Delta\lambda = 0,01$ Å і довжиною хвилі $\lambda = 6300$ Å; б) лазера з $\lambda = 6300$ Å та $\Delta\nu = 10$ Гц

Розв'язання. а) Для кадмієвої лампи:

Порівняємо $\Delta\nu$ або $\Delta\lambda$ цього джерела світла: з аналогічними величинами для лазера. Із величини $\Delta\lambda = 0,01$ Å = 10^{-12} м знайдемо величину $\Delta\nu$:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow |d\nu| = \frac{c}{\lambda^2} d\lambda .$$

$$d\nu = \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-12}}{(0.63 \cdot 10^{-6})^2} \text{ Гц} \approx 0.8 \text{ ГГц} .$$

Величина $d\nu$ для кадмієвої лампи майже в 10^9 раз більше, ніж в лазері.

Максимальний порядок інтерференції m_{\max} характеризує ступінь когерентності джерела і дорівнює:

$$m_{\max} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{6,3 \cdot 10^3}{10^{-2}} = 6,3 \cdot 10^5 . \quad (5.167)$$

Величина m_{\max} пов'язана з максимальною оптичною різницею ходу:

$$\Delta_{\max} = m_{\max} \lambda = 0,63 \cdot 10^5 \cdot 6,3 \cdot 10^5 \text{ см} \approx 40 \text{ см} = L_k . \quad (5.168)$$

$$\text{Час когерентності } \tau_k = \frac{L_k}{c} = \frac{0,4 \text{ м} \cdot \text{с}}{3 \cdot 10^8 \text{ м}} \approx 10^{-9} \text{ с} .$$

б) Для лазера:

Встановимо зв'язок між шириною лінії, що виражена в лінійних $\Delta\lambda$ і частотних $\Delta\nu$ величинах.

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \Delta\nu = -\frac{c}{\lambda^2} \Delta\lambda \Rightarrow |\Delta\lambda| = \frac{\lambda^2}{c} \Delta\nu = \frac{0,63^2 \cdot 10^{-12} \cdot 10}{3 \cdot 10^8} = 1,3 \cdot 10^{-10} \text{ \AA} .$$

Величина $\Delta\lambda$ для лазера майже в 10^8 разів менша за цю величину для кадмієвої лампи.

Максимальний порядок інтерференції m_{\max} згідно (5.167) дорівнює:

$$m_{\max} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{6,3 \cdot 10^3}{1,3 \cdot 10^{-10}} = 5 \cdot 10^{13} .$$

Довжину когерентності визначимо за формулою (5.168)

$$L_k = m_{\max} \lambda = 5 \cdot 10^{13} \cdot 6,3 \cdot 10^{-5} \text{ см} \approx 30000 \text{ км} .$$

$$\text{Час когерентності } \tau_k = \frac{L_k}{c} = \frac{3 \cdot 10^7 \text{ м} \cdot \text{с}}{3 \cdot 10^8 \text{ м}} \approx 0,1 \text{ с} .$$

Приклад 5.3. Виведіть зв'язок між різницею фаз коливань та оптичною різницею ходу.

Розв'язання. Нехай в деякій точці, в якій фаза коливань дорівнює ωt , відбулось розділення хвилі на дві когерентних хвилі. До точки спостереження Р інтерференційної картини одна хвиля проходить в середовищі із показником заломлення n_1 шлях l_1 , а друга хвиля - в середовищі із показником заломлення n_2 шлях l_2 . Тоді в точці Р перша хвиля збудить коливання $E_{01} \cos \left[\omega \left(t - \frac{l_1}{v_1} \right) \right]$, друга - $E_{02} \cos \left[\omega \left(t - \frac{l_2}{v_2} \right) \right]$, де $v_1 = c/n_1$; $v_2 = c/n_2$ - відповідно фазові швидкості першої і другої хвиль.

Різниця фаз коливань, які збуджуються цими двома хвилями в точці спостереження, дорівнює

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \omega \left(t - \frac{l_2}{v_2} \right) - \omega \left(t - \frac{l_1}{v_1} \right) = \omega \left(\frac{l_2}{v_2} - \frac{l_1}{v_1} \right). \quad (5.169)$$

Із врахуванням того, що $\omega = kc = \frac{2\pi}{\lambda_0} v n$, де k - хвильове число; c - швидкість світла у вакуумі; λ_0 - довжина хвилі у вакуумі, вираз (5.169) буде мати вигляд:

$$\Delta\varphi = \omega \left(\frac{l_2}{v_2} - \frac{l_1}{v_1} \right) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (l_2 n_2 - l_1 n_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta = k\Delta.$$

Приклад 5.4. Два когерентних світлових променя з оптичною різницею ходу $\Delta = 2\lambda_0$, де λ_0 - довжина хвилі світла у вакуумі, інтерферують в деякій точці. Максимум чи мінімум спостерігається у цій точці?

Розв'язання. Згідно до умови (5.26) маємо $\Delta = m\lambda_0 = 2\lambda_0$, що відповідає максимуму амплітуди в цій точці, коли $m = 2$.

Приклад 5.5. В двопроменевому інтерферометрі використовується жовтогаряча лінія ртуті, яка складається із двох компонент з $\lambda_1 = 576,97$ нм та

$\lambda_2 = 579,03$ н. При якому найменшому порядку інтерференції чіткість (контраст) інтерференційної картини буде найгіршою ?

Розв'язання. Розподіл інтенсивностей світла в двох інтерференційних картинах, які отримані від двох джерел світла з різними довжинами хвиль λ_1 та λ_2 , показаний на рис.5.42.



Рис. 5.42 . До прикладу 5.5

Через залежність ширини інтерференційної смуги від λ в інтерференційних картинах спостерігається просторовий зсув однієї картини відносно другої, який поступово збільшується. По мірі збільшення цього зсуву видність сумарної інтерференційної картини, яка отримується в результаті суперпозиції двох первинних картин, погіршується і при деякому порядку m інтерференції відбувається збіжність максимуму однієї інтерференційної картини з мінімумом іншої картина. Це місце на сумарній картині буде мати найгіршу (“нульову”) видність. На рис.5.42 це місце відмічене вертикальною рисою. Формально умова збіжності максимуму однієї інтерференційної картини з мінімумом іншої картина записується як

$$m\lambda_2 = (m + \frac{1}{2})\lambda_1. \quad (5.170)$$

З рівності (5.170) маємо:

$$m(\lambda_2 - \lambda_1) = \lambda_1 / 2 \Rightarrow m = \frac{\lambda_1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} \Rightarrow m = \frac{577}{2(579 - 577)} \approx 140.$$

Приклад 5.6. Відстань між двома щілинами в інтерференцій схемі Юнга дорівнює 1 мм, відстань від щілин до екрана 3 м, відстань між максимумами сусідніх інтерференційних смуг на екрані дорівнює 1,5 мм. Визначте: а) довжину хвилі світлофільтра, який розміщений перед щілинами; б) відстань від

нульового до шостого максимуму; в) оптичну різницю ходу та різницю фаз променів у середині третьої світлої смуги; г) в який бік і наскільки міліметрів зміститься інтерференційна картина, якщо одну із щілин перекрити скляною пластинкою ($n = 1,5$) товщиною 6 мкм.

Розв'язання. Скористаємось схемою інтерферометра Юнга, що наведена на рис. 5.3. Тоді:

а) Для визначення довжини хвилі у схемі інтерферометра Юнга скористаємося формулою (5.36) для ширини смуги, з якої маємо

$$\lambda = \Delta y \frac{l}{L} = 1,5 \frac{1}{3000} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ мм} = 0,5 \text{ мкм.}$$

б) За формулою (5.34) знаходимо відстань від нульового до шостого максимуму

$$y_{6,max} = \frac{L}{l} 6\lambda = \frac{3000}{1} 6 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} = 9 \text{ мм.}$$

в) Оптичну різницю ходу визначаємо з умови максимуму при $m = 3$: $\Delta d = 3\lambda_0 = 3 \cdot 0,5 = 1,5 \text{ мкм}$, а різницю фаз – за формулою (5.27)

$$\Delta\varphi = k\Delta d = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta d = \frac{2\pi}{0,5} 1,5 = 6\pi = 18,84 \text{ рад.}$$

г) Якщо перекрити одну із щілин скляною пластинкою товщиною h , то оптична довжина ходу променя, що виходить із цієї щілини, додатково збільшиться на величину $\delta = (n - 1)h = (1,5 - 1)6 = 3 \text{ мкм}$. Зміна різниці ходу на λ рівнозначна зміщенню інтерференційної картини на одну смугу. Тому зміна оптичної довжини ходу одного променя на $\delta = k\lambda$ призводить до зміщення інтерференційної картини на k смуг, тобто $k = \delta/\lambda = 3/0,5 = 6$. Таким чином, нульовий максимум, який займав центральне положення на екрані, при розміщенні пластинки зміститься в положення, що займав раніше максимум шостого порядку. Зміщення відбувається в бік перекритої щілини, оскільки збільшення оптичного шляху одного з променів має компенсуватися збільшенням геометричного шляху другого променя в новому положенні нульового максимуму.

Приклад 5.7. Паралельний пучок білого світла падає під кутом 45° на водяну плівку ($n_1 = 1,33$), яка розлита на поверхні скла ($n_2 = 1,61$). При якій мінімальній товщині плівки відбите світло матиме червоний колір ($\lambda_1 = 700$ нм)? Який колір має при цьому світло, яке пройшло крізь скло?

Розв'язання. Скористаємося загальною формулою для оптичної різниці ходу інтерферуючих променів (5.60). Якщо виконується умова $n_0 < n_1 < n_2$, то для променів, що відбиваються, формула (5.60) матиме вигляд

$$\Delta d = 2h\sqrt{n^2 - n_0^2 \sin^2 \varepsilon_1}.$$

Для інтерференційного підсилення світла з довжиною хвилі λ_1 має виконуватись умова максимумів

$$2h\sqrt{n^2 - n_0^2 \sin^2 \varepsilon_1} = m\lambda_1. \quad (5.171)$$

Звідки

$$h = \frac{m\lambda_1}{2\sqrt{n_1^2 - n_0^2 \sin^2 \varepsilon_1}}.$$

Мінімальна товщина плівки буде при $m = 1$. Для даних із умови прикладу:

$$h_{min} = \frac{0,7}{2\sqrt{1,33^2 - \sin^2 45^\circ}} = 0,311 \text{ мкм}.$$

Для променів, що пройшли крізь скло, формула (5.170) матиме вигляд:

$$2h\sqrt{n^2 - n_0^2 \sin^2 \varepsilon_1} + \frac{\lambda_2}{2} = m\lambda_2. \quad (5.172)$$

Звідки

$$\lambda_2 = \frac{2h\sqrt{n_1^2 - n_0^2 \sin^2 \varepsilon_1}}{m - 0,5}.$$

При $m = 2$ і $h = 0,311$ мкм маємо: $\lambda_2 = \frac{1,5}{2 \cdot 0,311 \sqrt{1,33^2 - \sin^2 45^\circ}} = 0,467$ мкм,

тобто, світло, що пройшло крізь скло, має синій колір.

Приклад 5.8. Мильна плівка ($n_1 = 1,33$), що розташована вертикально, утворює клин унаслідок стікання рідини. На плівку нормально падає пучок променів білого світла. При спостереженні інтерференційної картини у світлі, що відбивається, через зелений світлофільтр ($\lambda = 5461 \text{ \AA}$) виміряна відстань між

п'ятьма смугами дорівнює 2 см. Визначте кут клину в кутових секундах. Як зміниться ширина інтерференційної смуги, якщо спостереження вести через червоний світлофільтр ($\lambda = 7209 \text{ \AA}$)?

Розв'язання. Кут клину визначаємо із формули (5.127):

$$\alpha = \frac{\lambda}{2nl},$$

де $l = 20/5 = 4 \text{ мм}$ – відстань між сусідніми смугами. Тоді

$$\alpha = \frac{5461 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 1,33 \cdot 4} = 5,13 \cdot 10^{-5} \text{ рад} = 10,6 \text{ кут. с.}$$

Примітка. $1 \text{ рад} = 2,06 \cdot 10^5 \text{ кут. с.}$

Із формули (5.127) маємо пропорцію

$$\frac{l_r}{l_g} = \frac{\lambda_r}{\lambda_g} = \frac{7209}{5561} = 1,32,$$

тобто ширина інтерференційної смуги збільшиться в 1,32 рази.

Приклад 5.9. Кільця Ньютона спостерігаються в монохроматичному світлі. Радіуси сусідніх темних кілець дорівнюють 4,0 і 4,38 мм відповідно. Радіус кривизни лінзи дорівнює 6,4 м. Знайдіть довжину хвилі та порядковий номер кілець, якщо в центрі спостерігається темна пляма.

Розв'язання. Оскільки в центрі інтерференційної картини з кілець Ньютона міститься темна пляма, то спостереження відбувається у світлі, що відбилося. Скористаємося формулою (5.72) для радіусів темних кілець у світлі, що відбивається. Визначимо довжину хвилі світла, користуючись виразами для радіусів двох сусідніх кілець:

$$\begin{aligned} r_{m+1,d}^2 - r_{m,d}^2 &= \lambda R(m+1) - \lambda Rm = \lambda R; \Rightarrow \\ \lambda &= \frac{r_{m+1,d}^2 - r_{m,d}^2}{R} = \frac{4,38^2 - 4^2}{6,4 \cdot 10^3} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ мм} = 0,5 \text{ мкм}. \end{aligned}$$

Номер кільця визначаємо із формули (5.72):

$$m = \frac{r_{m,d}^2}{\lambda R} = \frac{4^2}{0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 6,4 \cdot 10^3} = 5.$$

Приклад 5.10. При спостереженні кілець Ньютона в синьому світлі ($\lambda_b = 450 \text{ нм}$), що відбивається, радіус третього світлого кільця дорівнює 1,06

мм. Після заміни синього світлофільтра червоним радіус п'ятого світлого кільця став рівним 1,77 мм. Визначте: а) радіус кривизни лінзи; б) довжину хвилі червоного світла; в) показник заломлення рідини, якою був заповнений потім повітряний проміжок між лінзою та пластиною, якщо радіус п'ятого кільця в червоному світлі став рівним 1,6 мм.

Розв'язання: а) Із формули (5.70) для радіуса світлих кілець у світлі, що відбивається, маємо:

$$R = \frac{2r_{m,l}^2}{\lambda_b(2m-1)} = \frac{2 \cdot 1,77^2}{0,45 \cdot 10^{-3}(2 \cdot 3 - 1)} = 10^3 \text{ мм} = 1 \text{ м.}$$

б) Із формули (5.70) визначаємо довжину хвилі червоного світлофільтра:

$$\lambda_b = \frac{2r_{m,l}^2}{R(2m-1)} = \frac{2 \cdot 1,77^2}{10^3(2 \cdot 5 - 1)} = 0,7 \cdot 10^{-3} \text{ мм} = 700 \text{ нм.}$$

в) Показник заломлення рідини визначаємо із формули (5.72) для радіуса темного кільця у світлі, що відбивається. Для випадку, коли проміжок між лінзою та пластиною заломлений рідиною з показником заломлення n_2 , ця формула має вигляд:

$$r_{m,d} = \sqrt{\frac{\lambda R m}{n_2}}. \quad (5.173)$$

Звідки

$$n_2 = \frac{\lambda R m}{r_{m,d}^2} = \frac{0,7 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 \cdot 5}{1,6^2} = 1,36.$$

Такий показник заломлення має етиловий спирт.

Приклад 5.11. Дослід проводиться на інтерферометрі Майкельсона з світлом, яке складається із випромінювання двох близько розташованих спектральних ліній. Для зміщення інтерференційної картини на 100 смуг від її початкового положення, яке спостерігається при рівних плечах приладу, необхідно перемістити рухоме дзеркало на $d_1 = 2,9 \cdot 10^{-3}$ см. При подальшому переміщенні дзеркала на $d_2 = 14,4 \cdot 10^{-3}$ см від його початкового положення інтерференційна картина зникає. Знайдіть різницю довжин хвиль спектральних ліній світла, що використовується в досліді.

Розв'язання. Інтерферометр Майкельсона відноситься до приладів, робота яких заснована на використанні *двопроменевої інтерференції*. Його схема наведена на рис.5.24.

Почнемо з умови, пов'язаної з розмиттям інтерференційної картини.

В разі, коли спектральний склад випромінювання містить дві близько розташовані спектральні лінії, видність інтерференційної картини, яку дає інтерферометр Майкельсона, в залежності від величини оптичної різниці ходу між двома променями буде змінюватись.

Перше розмиття інтерференційної картини буде спостерігатись у разі збіжності максимуму інтерференційної картини, яка утворюється від першою спектральною лінією з довжиною хвилі λ_1 , з мінімумом інтерференційної картини від другої спектральною лінією з довжиною хвилі λ_2 . Умова такої збіжності записується у вигляді рівностей:

$$\Delta_2 = 2d_2 = m_2\lambda_1 = (m_2 + 1/2)\lambda_2. \quad (5.174)$$

З (5.174) знаходимо, що розмиття інтерференційної картини відбувається в порядку інтерференції з числом m_2 :

$$m_2 = \frac{2d_2}{\lambda_1}. \quad (5.175)$$

(Хоча для подальшого розв'язку цей результат не буде потрібен, знайдемо величину m_2 : $m_2 = \frac{2 \cdot 14.4 \cdot 10^{-3}}{0.58 \cdot 10^{-4}} \approx 500$. Нагадаємо, що число m_2 показує, скільки разів в оптичну різницю ходу вміщується довжина хвилі випромінювання λ_1).

З (5.174) маємо

$$(m_2 + 1/2)\lambda_2 = m_2\lambda_1 \Rightarrow m_2(\lambda_1 - \lambda_2) = \lambda_2 / 2 \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda_2}{2m_2}. \quad (5.176)$$

Підставимо (5.175) до (5.176):

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_1\lambda_2}{4d_2} \approx \frac{\lambda_m^2}{4d_2}, \quad (5.177)$$

де $\lambda_m = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$. Заміна добутку $\lambda_1\lambda_2$ на значення λ_m в (5.177) припустима в силу того, що спектральні лінії відстоять одна від одної близько.

Тепер необхідно знайти значення λ_m . Перейдемо до умови, пов'язаної з переміщенням інтерференційної картини на $m_1 = 100$ смуг. Цьому переміщенню відповідає різниця ходу $\Delta_1 = 2d_1$, де $d_1 = 2,9 \cdot 10^{-3}$ см. Умова інтерференційного максимуму для цього випадку має вигляд:

$$\Delta_1 = 2d_1 = m_1\lambda_m \quad \Rightarrow \quad \lambda_m = \frac{2d_1}{m_1}. \quad (5.178)$$

Підставивши (5.178) до (5.177), отримуємо:

$$\Delta\lambda = \frac{4d_1^2}{m_1^2 \cdot 4d_2} = \frac{(2,9)^2 \cdot 10^{-6}}{14,4 \cdot 10^{-3} \cdot 10^4} \text{ см} = 5,83 \text{ \AA}.$$

Приклад 5.12. Знайдіть для еталона Фабрі-Перо, товщина якого $d = 2,5$ см: а) максимальний порядок інтерференції світла із довжиною хвилі $\lambda = 0,5$ мкм; б) дисперсійну область $\Delta\lambda$, якщо дослідження проводити поблизу $\lambda = 0,5$ мкм.

Розв'язання. а) Максимальний порядок інтерференційної картини m_{\max} визначається тим, що, коли простір між пластинами заповнений повітрям, у формулі для визначення оптичної різниці ходу $\Delta = 2d \cos \varepsilon'_2 = m\lambda$ величина тригонометричної функції $\cos \varphi \leq 1$. Тоді

$$m_{\max} = \frac{2d}{\lambda}.$$

Для даних з умови цього прикладу $m_{\max} = \frac{2 \cdot 2,5 \cdot 10^4}{0,5} = 10^5$.

б) Дисперсійна область $\Delta\lambda$, якою характеризується спектральний прилад, в тому числі, і інтерферометр Фабрі-Перо, це – певної ширини спектральний діапазон $\Delta\lambda$, в межах якого ще не перекриваються спектри сусідніх порядків.

Визначимо чому він дорівнює:

Перекриття спектрів сусідніх (m -го з $(m+1)$ -м) порядків означає, що під одним кутом θ спостерігаються (накладаються) два максимуми. Умова цього є:

$$2d \cos \varepsilon'_2 = (m+1)\lambda \text{ та } 2d \cos \varepsilon'_2 = (\lambda + \Delta\lambda)m. \quad (5.179)$$

Прирівнюючи праві частини виразів з (5.179), маємо:

$$(m+1)\lambda = m(\lambda + \Delta\lambda) \Rightarrow \lambda = m \cdot \Delta\lambda \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}.$$

Таким чином, якщо при роботі із спектральним приладом є намагання працювати з найвищим порядком інтерференції (при цьому отримується максимальна роздільна здатність), дисперсійна область

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m_{\max}}. \quad (5.180)$$

Як бачимо, величина дисперсійної області обернено пропорційно залежить від максимального значення інтерференційного порядку. Чим більше значення m_{\max} , тим менше величина $\Delta\lambda$. Вимоги розширення дисперсійної області та підвищення роздільної здатності суперечать одна одній. Через те, що в інтерферометрі Фабрі-Перо використовують, як правило, спектри високих порядків, величина $\Delta\lambda$ для цього типу інтерферометра мала. Для інтерферометра Фабрі-Перо, для якого, як ми визначили, $m_{\max} = 10^5$, величина $\Delta\lambda$ має значення

$$\Delta\lambda = \frac{0,5 \text{ мкм}}{10^5} = 0,05 \text{ \AA}.$$

Примітка: Продовжуючи розгляд (5.179), отримаємо величину дисперсійної області через діапазон частот:

$$\Delta\nu = \frac{\Delta\lambda \cdot c}{\lambda^2} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \cdot \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{m\lambda} = \frac{c}{2d}. \quad (5.180)$$

Як видно з (5.180), дисперсійна область, що виражена через частоту, є величина стала, однозначно пов'язана лише з товщиною d інтерферометра. Тому інтерферометри Фабрі-Перо часто називають *еталонам Фабрі-Перо*.

Приклад 5.13. Визначте показник заломлення і найменшу товщину просвітляючого покриття для лінзи із скла марки Ф6 ($n_2 = 1,6$), яка працює у видимій області спектру. На скільки процентів знизяться втрати світла у лінзі за рахунок відбиття після просвітлення? (Середня довжина хвилі видимого діапазону $\bar{\lambda} = 0,55$ мкм).

Розв'язання. Показник заломлення матеріалу просвітляючого покриття визначається за формулою (5.132): $n_1 = \sqrt{1,6} = 1,265$, а його мінімальна товщина – за формулою (5.131) при умові, що $m = 0$ і $\cos \varepsilon_2' = 1$:

$$d_{\min} = \frac{1}{n_1} \frac{\lambda_o}{4} = \frac{0,55}{1,265 \cdot 4} = 0,11 \text{ мкм.}$$

Коефіцієнт пропускання лінзи до просвітлення визначається за формулою (3.26):

$$T_l = (1 - R_{02})^2 = \left[1 - \left(\frac{n_0 - n_2}{n_0 + n_2} \right)^2 \right]^2 = \left[1 - \left(\frac{1 - 1,6}{1 + 1,6} \right)^2 \right]^2 = 0,8964.$$

При цьому втрати на відбиття складають $R_l = 1 - T_l = 0,1036$.

Коефіцієнт пропускання лінзи після просвітлення дорівнює

$$\begin{aligned} T_l' &= (1 - R_{01})^2 (1 - R_{12})^2 = \left[1 - \left(\frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1} \right)^2 \right]^2 = \left[1 - \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \right]^2 = \\ &= \left[1 - \left(\frac{1 - 1,265}{1 + 1,265} \right)^2 \right]^2 \left[1 - \left(\frac{1,265 - 1,6}{1,265 + 1,6} \right)^2 \right]^2 = 0,9437. \end{aligned}$$

При цьому втрати на відбиття складають $R_l' = 1 - T_l' = 0,0537$.

Втрати світла в лінзі за рахунок відбивання після просвітлення знизились на $\Delta R_l = R_l - R_l' = 0,0499$ (4,99%).

Приклад 5.14. Лінза, що виготовлена із германію ($n_2 = 4$), має одношарове просвітляюче покриття із ZnS ($n_1 = 2,1$) на двох поверхнях. Розрахуйте:

а) мінімальну товщину цього покриття для довжини хвилі 10,6 мкм; б) коефіцієнт пропускання лінзи до і після просвітлення.

Розв'язання. а) Просвітлює покриття задовольняє умові $n_0 < n_1 < n_2$. Тоді мінімальний коефіцієнт відбиття від просвітлюючого покриття (максимальний коефіцієнт пропускання) згідно формули (5.166) буде дорівнювати:

$$R_{\min} = \left(\frac{n_1^2 - n_0 n_2}{n_1^2 + n_0 n_2} \right)^2, \quad (5.181)$$

якщо виконується умова (5.160) $\Phi_1 = \frac{\pi}{2}$, де Φ_1 – фазова товщина просвітлюючого покриття,

$$\Phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} n_1 d_1. \quad (5.182)$$

Звідси $n_1 d_1 = \frac{1}{4} \lambda_0$. Тоді $d_1 = \frac{\lambda_0}{4n_1} = \frac{10,6}{4 \cdot 2,1} = 1,26$ мкм.

б) Коефіцієнт пропускання лінзи до просвітлення згідно формули (3.26) дорівнює $T_l = (1 - R)^2$, де $R = \left(\frac{n_0 - n_2}{n_0 + n_2} \right)^2 = \left(\frac{1 - 4}{1 + 4} \right)^2 = 0,36$.

$$\text{Тоді } T_l = (1 - 0,36)^2 = 0,41.$$

Коефіцієнт пропускання лінзи при наявності просвітлюючого покриття дорівнює $T'_l = (1 - R_{\min})^2$, де $R_{\min} = \left(\frac{2,1^2 - 4}{2,1^2 + 4} \right)^2 = 0,0024$.

Тоді $T'_l = (1 - 0,0024)^2 = 0,995$, тобто за рахунок просвітлення коефіцієнт пропускання лінзи для довжини хвилі 10,6 мкм збільшується в $T'_l / T_l = 2,41$ рази.

5.18. Задачі для самостійного розв'язування

Задача 7.1. Знайдіть амплітуду та початкову фазу світлової хвилі, яка отримана в результаті складання двох однаково направлених світлових хвиль, що задані виразами:

$$E_1 = 0,02 \sin \left[2\pi \left(4 \cdot 10^{14} t + \frac{1}{4} \right) \right] \frac{\text{В}}{\text{м}} \quad \text{і} \quad E_2 = 0,03 \sin \left[2\pi \left(4 \cdot 10^{14} t + \frac{1}{8} \right) \right] \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Відповідь: $E_{0\Sigma} = 0,046 \frac{\text{В}}{\text{м}}; \varphi_{0\Sigma} = 62^\circ 46'.$

Задача 5.2. Складуються дві монохроматичні хвилі рожевого кольору ($\lambda = 0,6 \text{ мкм}$), що розповсюджуються в одному напрямку. Параметри хвиль у точці складання: $E_{01} = 4 \frac{\text{В}}{\text{м}}; E_{02} = 3 \frac{\text{В}}{\text{м}}; \varphi_{01} = 0; \varphi_{02} = \frac{\pi}{2}$. Визначте параметри результуючої хвилі. Запишіть вираз для світлового вектора. Побудуйте векторну діаграму складання хвиль.

Відповідь: $E_{0\Sigma} = 5 \frac{\text{В}}{\text{м}}; \omega = \pi \cdot 10^{15} \frac{\text{рад}}{\text{с}}; \varphi_{0\Sigma} = 0,205\pi;$

$$E_\Sigma = 5 \sin \left[\pi \left(10^{15} t + 0,205 \right) \right] \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Задача 5.2. Визначте амплітуду і інтенсивність результуючої світлової хвилі, що отримана в результаті складання однаково направлених світлових когерентних хвиль: $E_m = E_0 \cos[\omega t - (m-1)\delta]$, де E_0 – амплітуда складових хвиль; m – номер складової хвилі; δ – різниця фаз між сусідніми складовими. Розгляньте два випадки: а) $m = 1, 2, 3, \dots, N$; б) $m = 1, 2, 3, \dots$.

Вказівки: 1. Скористайтесь комплексною формою представлення світлових хвиль при $x = 0$.

2. Скористайтесь формулами для суми членів скінченої та нескінченої геометричних прогресій.

3. Визначте $E_{\Sigma 0}$ множенням комплексної амплітуди на спряжену до неї амплітуду і скористайтесь формулою ейлера.

$$\text{Відповідь: а) } E_{\Sigma 0} = E_0 \frac{\sin\left(N \frac{\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}; \quad I_{\Sigma} = I_0 \left[\frac{\sin\left(N \frac{\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} \right]^2.$$

Задача 5.4. Знайдіть усі довжини хвиль видимого діапазону, які при оптичній різниці ходу 1,8 мкм променів, що інтерферують, будуть: а) максимально підсилені; б) максимально ослаблені.

Відповідь: а) 0,60 мкм; 0,45 мкм; б) 0,72 мкм; 0,51 мкм; 0,40 мкм.

Задача 5.5. Когерентні промені з довжиною хвилі $\lambda_0 = 500$ нм приходять у деяку точку з геометричною різницею ходу $\Delta l = 1$ мкм. Визначте, максимум чи мінімум спостерігається в цій точці, якщо середовище, в якому розповсюджуються промені: а) повітря ($n_1 = 1$); б) скипидар ($n_2 = 1,5$); в) скло ($n_3 = 1,75$).

$$\text{Відповідь: а) } \Delta_1 = n_1 \Delta l; \quad \frac{\Delta_1}{\lambda_0} = \frac{n_1 \Delta l}{\lambda_0} = 2 \Rightarrow \text{max};$$

$$\text{б) } \frac{\Delta_2}{\lambda_0} = \frac{n_2 \Delta l}{\lambda_0} = 3 \Rightarrow \text{max}; \quad \text{в) } \frac{\Delta_3}{\lambda_0} = \frac{n_3 \Delta l}{\lambda_0} = 3,5 \Rightarrow \text{min}.$$

Задача 5.6. В результаті накладання променів від двох когерентних джерел з довжиною хвилі $\lambda = 600$ нм на екрані спостерігається інтерференційна картина. Визначте, на скільки смуг зміститься ця інтерференційна картина, якщо на шляху одного з променів перпендикулярно до нього розмістити скляну ($n = 1,6$) платівку товщиною $d = 4$ мкм.

$$\text{Відповідь: } m = d(n - 1) / \lambda = 4.$$

Задача 5.7. В досліді Юнга на шляху одного з променів, що інтерферують, розмістили скляну пластинку. В результаті цього центральна світла смуга картини змістилась на місце, яке перед цим займала п'ята світла смуга. (Центральна смуга має "нульовий" порядок!). Промінь падає на пластинку перпендикулярно. Довжина хвилі світла 0,6 мкм. Яка товщина пластинки?

Відповідь: $d = 6 \text{ мкм}$.

Задача 5.8. Дослід Юнга характеризується довжиною когерентності 3 мкм. Джерело світла монохроматичне з $\lambda = 0,6 \text{ мкм}$. Намалюйте розподіл інтенсивності в інтерференційній картині для цього випадку.

Відповідь: Інтерференційна картина для цього випадку складається із 5-ти інтерференційних смуг.

Задача 5.9. Плоска монохроматична хвиля падає нормально на екран з двома вузькими щілинами, що розташовані один від одного на відстані 2,5 мм. На другому екрані, який розташований на відстані 100 см від першого, спостерігаються інтерференційні смуги. В який бік і на яку відстань змістяться ці смуги, якщо нижню щілину перекрити скляною пластинкою ($n = 1,5$) товщиною 10 мкм? За якої довжини хвилі нове положення нульового максимуму відповідатиме положенню, яке раніше займав десятий максимум?

Відповідь: $y = 2 \text{ мм}$; $\lambda = 500 \text{ нм}$.

Задача 5.10. У схемі з біпризмою Френеля відстань між уявними зображеннями джерел світла дорівнює 0,5 мм, а відстань до екрана – 5 м. У зеленому світлі ширина інтерференційних смуг дорівнює 5 мм. Знайдіть довжину хвилі світла зеленого кольору. Як зміниться ширина смуги при заміні зеленого світлофільтра на червоний ($\lambda = 6500 \text{ Å}$)?

Відповідь: $\lambda g = 500 \text{ нм}$; збільшиться в 1,3 рази.

Задача 5.11. Кут заломлення біпризми Френеля $\theta = 3'26''$. Між точковим джерелом монохроматичного світла з $\lambda = 5000 \text{ Å}$ та біпризмою зі скла розміщена лінза так, що ширина інтерференційних смуг виявилась не залежною від відстані екрана до біпризми. Знайдіть: а) відстань між сусідніми темними смугами; б) максимальну кількість смуг, яка може спостерігатись у цій установці, якщо відстань між біпризмою та екраном дорівнює 5 м.

Відповідь: а) $\Delta x = \frac{\lambda}{2\theta(n-1)} = 0,5 \text{ мкм}$; б) $N = \frac{4\theta^2(n-1)^2 L}{\lambda} = 30$.

Задача 5.12. Знайдіть відстань x від центра інтерференційної картини до m -тої світлої смуги в досліді з біпризмою Френеля. Відстань від джерела до біпризми – a , від біпризми до екрана – b . Показник заломлення призми – n , довжина хвилі світла – λ , кут заломлення – θ . Промені, що інтерферують, падають на екран приблизно перпендикулярно.

$$\text{Відповідь: } x = \frac{m\lambda(a+b)}{2a(n-1)\theta}$$

Задача 5.13. Інтерферометр Релея освітлюють монохроматичним світлом з довжиною хвилі 589 нм. На шляху обох променів інтерферометра поставлені прозорі кювети довжиною 2 см. Після заміни в одній з них повітря хлором інтерференційна картина змістилась на 20 смуг. Визначте показник заломлення хлору, якщо для повітря він дорівнює 1,000276.

$$\text{Відповідь: } n_{Cl} = 1,000865.$$

Задача 5.14. На шляху одного із променів інтерференційного рефрактометра (наприклад, інтерферометра Релея) розмістили трубку довжиною $l = 10$ см. При заповненні трубки аміаком інтерференційна картина змістилась на 17 смуг. Визначте показник заломлення аміаку, якщо спостереження виконується в монохроматичному світлі із довжиною хвилі $\lambda = 589$ нм,

$$\text{Відповідь: } n = 1 + m\lambda / l = 1,000377.$$

Задача 5.15. У досліді Юнга щілини першого екрана освітлюються монохроматичним світлом з довжиною хвилі $6 \cdot 10^{-7}$ м. Відстань між щілинами дорівнює 1 мм, а відстань до другого екрана – 3 м. Знайдіть положення перших трьох світлих смуг. Одну із щілин перекривають скляною пластинкою. За якої товщини скляної пластини ($n = 1,5$) інтерференційна картина зміститься на п'ять смуг?

$$\text{Відповідь: } y_1 = 1,8 \text{ мм; } y_2 = 3,6 \text{ мм; } y_3 = 5,4 \text{ мм; } d = 6 \text{ мкм.}$$

Задача 5.16. В одне із плечей інтерферометра Майкельсона, який освітлюється монохроматичним світлом ($\lambda = 589$ нм), розміщено кювету з

робочою довжиною 14 см. Після заповнення кювети аміаком інтерференційна картина змістилась в полі зору труби на 180 смуг. Визначте показник заломлення аміаку.

Відповідь: $n = 1,00038$.

Задача 5.16. Визначте довжину хвилі світла в досліді з інтерферометром Майкельсона, якщо для зміщення інтерференційної картини на 400 смуг дзеркало потрібно перемістити на відстань $l = 0,1$ мм.

Відповідь: $\lambda = 2l/m = 500$ нм.

Задача 5.18. На мильну плівку ($n = 1,33$) падає біле світло під кутом 45° . За якої найменшої товщини плівки відбиті промені будуть мати жовтий ($\lambda_y = 600$ нм) і фіолетовий ($\lambda_p = 420$ нм) кольори? Як зміниться товщина плівки, якщо її помістити між двома скляними пластинами?

Відповідь: $d_y = 133$ нм; $d_p = 93$ нм. Не зміниться.

Задача 5.19. Пучок паралельних променів ($\lambda = 0,6$ мкм) падає під кутом 30° на мильну плівку ($n = 1,33$). За якої найменшої товщини плівки: а) відбиті промені будуть максимально ослаблені, максимально підсилені інтерференцією; б) теж для променів, що проходять.

Відповідь: а) 0,24 мкм; 0,12 мкм; б) 0,12 мкм; 0,24 мкм.

Задача 5.20. Скляний клин ($n = 1,55$) з кутом при вершині $2'$ освітлюється нормально падаючим монохроматичним світлом. Визначте довжину хвилі світла, якщо інтерференційні смуги, що спостерігаються, мають ширину 0,3 мм.

Відповідь: 0,541 мкм.

Задача 5.21. Монохроматичне світло ($\lambda = 0,6$ мкм) падає під кутом 30° на тонку мильну плівку ($n = 1,33$). У світлі, що відбивається від плівки, спостерігаються інтерференційні смуги шириною 4 мм. Виведіть формулу інтерференції на клині з урахуванням кута падіння. Визначте кут між поверхнями плівки.

Відповідь: $2l_k n \alpha \cos \varepsilon'_2 = k\lambda$; 12,5".

Задача 5.22. На скляний клин з кутом при вершині 20" нормально падає монохроматичне світло ($\lambda = 0,582$ мкм). В інтерференційній картині в 1 см розміщуються п'ять смуг. Визначте показник заломлення скла.

Відповідь: $n = 1,5$.

Задача 5.23. Кільця Ньютона утворюються між лінзою з радіусом кривизни 8,6 м та пластинкою при освітленні паралельним монохроматичним пучком світла, який нормально падає на лінзу. Вимірюваннями встановлено, що діаметр четвертого темного кільця дорівнює 9 мм. Визначте довжину хвилі світла, якщо центр кільця: а) темний; б) світлий.

Відповідь: а) 0,589 мкм; б) 0,673 мкм.

Задача 5.24. Знайдіть відстань між третім і 16-тим кільцями Ньютона, якщо відстань між другим і 20-тим темними кільцями дорівнює 4,8 мм. Центр кільця – темний.

Відповідь: 3,54 мм.

Задача 5.25. Установка для спостереження кільць Ньютона освітлюється монохроматичним світлом ($\lambda = 600$ нм). Знайдіть товщину водяного шару між лінзою і скляною пластиною в тому місці, де спостерігається четверте темне кільце: а) у світлі, що відбивається; б) у світлі, що проходить.

Відповідь: а) 0,9 мкм; б) 1,58 мкм.

Задача 5.26. Установка для спостереження кільць Ньютона освітлюється світлом ртутної лампи. Яке по порядку світле кільце, утворене спектральною лінією 579,1 нм, збігається з наступним світлим кільцем, утвореним спектральною лінією 577 нм? Центр кільця – світлий.

Відповідь: $m = 275$.

Задача 5.27. Установка для спостереження кільць Ньютона освітлюється монохроматичним світлом, що відбивається. Після того як простір між лінзою та

скляною пластиною заповнили рідиною, радіуси темних кілець зменшилися в 1,25 рази. Визначте показник заломлення рідини.

Відповідь: $n = 1,56$.

*Задача 5.28**. Кільця Ньютона отримують за допомогою плоскої випуклої лінзи з радіусом кривизни R_1 , що розташована на вгнутій сферичній поверхні з радіусом кривизни $R_2 > R_1$. Кільця Ньютона спостерігаються в монохроматичному світлі, що відбивається, з довжиною хвилі λ . Визначте радіус m -го кільця: а) світлого; б) темного.

Відповідь: а) $r_{m,l} = \sqrt{\frac{R_1 R_2}{n_2(R_2 - R_1)}} (2m - 1) \frac{\lambda}{2}$; б) $r_{m,d} = \sqrt{\frac{R_1 R_2}{n_2(R_2 - R_1)}} m \lambda$.

*Задача 5.29**. Умова попередньої задачі за винятком того, що кільця Ньютона отримують між двома плоскими опуклими лінзами, які притиснуті одна до одної випуклими поверхнями з радіусами R_1 і R_2 . Розгляньте випадок, коли $R_1 = R_2 = R$.

Відповідь: а) $r_{m,l} = \sqrt{\frac{R_1 R_2}{n_2(R_2 + R_1)}} (2m - 1) \frac{\lambda}{2}$; $r_{m,l} = \sqrt{\frac{R}{n_2}} (2m - 1) \frac{\lambda}{2}$;
 б) $r_{m,d} = \sqrt{\frac{R_1 R_2}{n_2(R_2 + R_1)}} m \lambda$; $r_{m,l} = \sqrt{\frac{R}{n_2}} m \lambda$.

Задача 5.30. Лінза із крону ($n_c = 1,50$) лежить на пластині, одна половина якої виготовлена з того самого крону, а друга – із флінту ($n_f = 1,70$). Проміжок між лінзою й пластиною заповнений сірковуглецем ($n_{sc} = 1,63$). Опишіть характер кілець, які спостерігаються у світлі, що відбивається й проходить.

Відповідь: В обох випадках спостерігаються дві системи півкілець, які примикають одне до одного вздовж лінії поділу половин пластини. В одній системі центр буде темним, а в другій – світлим. У світлі, що проходить, картина буде доповненою щодо картини у світлі, що відбивається. Різниця пояснюється стрибками на половину довжини хвилі в різниці ходу між променями, що інтерферують, при переході від однієї половини до другої.

Задача 5.31. Товщина повітряного зазору еталона Фабрі-Перо дорівнює 2,5 см, коефіцієнт відбиття дзеркальних покриттів його пластин – 0,95. Визначте: а) максимальний порядок інтерференції при $\lambda = 0,5$ мкм; б) число променів, які ефективно інтерферують; в) мінімальну область вільної дисперсії при $\lambda = 0,5$ мкм; г) кут падіння, при якому порядок інтерференції буде дорівнювати 90000; д) число променів, які ефективно інтерферують, для двох варіантів еталона, що має дзеркальні покриття пластин з коефіцієнтами відбиття 0,955 і 0,982.

Відповідь: а) $m = 10^5$; б) $N_e = 61$; в) $\Delta\lambda_{\min} = 0,5 \cdot 10^{-5}$ мкм; г) $\varepsilon_1 = 25^\circ 52'$; д) 68; 173.

Задача 5.32. При освітленні еталона Фабрі-Перо пучком монохроматичного світла, що розходить, в фокальній площині лінзи виникає багатопротенева інтерференційна картина – система концентричних тонких світлих кілець. Товщина еталона дорівнює d . Визначте, як залежить від порядку інтерференції m : а) розташування кілець (по їх номеру k від центра); б) кутову ширину відстаней між кільцями.

Вказівка. Визначте знаки похідної $\frac{\partial k}{\partial m} = \frac{\partial k}{\partial \varepsilon_2} \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial m}$ і приросту $\Delta \varepsilon_2$ при $\Delta m = 1$

(k – порядковий номер кільця від центра картини).

Відповідь: а) В центрі кілець буде максимальний порядок інтерференції. Із збільшенням номеру k порядок їх інтерференції m зменшується, тобто $\frac{\partial k}{\partial m} < 0$. б)

Кутова відстань між кільцями зменшується із зменшенням порядку інтерференції, так як $\frac{\Delta \varepsilon_2}{\Delta m} > 0$.

Задача 5.33.* Інтерферометр Фабрі-Перо складається із двох плоских дзеркал з коефіцієнтом відбиття $R = 99\%$, які розташовані на відстані $d = 10$ см один від одного. На інтерферометр, який використовується як оптичний резонатор, падає плоска монохроматична хвиля. Визначте ширину Δf

резонансної кривої і частотний інтервал $\Delta\nu$ між двома сусідніми резонансами (максимумами) в МГц.

$$\text{Відповідь: } \Delta f = \frac{c(1-R)}{2\pi d\sqrt{R}} = 4,8 \text{ МГц}; \Delta\nu = \frac{c}{2d} = 1500 \text{ МГц}.$$

Задача 5.34. Пучок білого світла падає нормально до скляної пластинки товщиною $d = 0,4$ мкм. Показник заломлення скла $n = 1,5$. Які довжини хвиль λ , що лежать в межах видимого спектру (від 400 до 700 нм), підсилюються в світлі, яке відбивається?

$$\text{Відповідь: } \lambda = \frac{2nd}{m+0,5}; 480 \text{ нм}.$$

Задача 5.35. Плоска світлова хвиля з довжиною λ у вакуумі падає нормально на прозору пластинку з показником заломлення n . При яких товщинах d пластинки хвиля, що відбивається, буде мати: а) максимальну; б) мінімальну інтенсивності?

$$\text{Відповідь: а) } d = \frac{\lambda(2m+1)}{4n}; \text{ б) } d = \frac{\lambda(m+1)}{2n}.$$

Задача 5.36. Дві лінзи фотооб'єктива, які розділені повітряним проміжком, виготовлені із скла марки К8 ($n = 1,5183$) і ТФ3 ($n = 1,7232$). Визначте: а) параметри просвітлюючого покриття першої лінзи; б) коефіцієнт пропускання першої лінзи до і після просвітлення; в) теж, що і в п. "а" для другої лінзи; г) теж, що і в п. "б" для другої лінзи; д) коефіцієнт пропускання об'єктива до і після просвітлення його лінз; е) на скільки процентів знизяться втрати на відбивання в об'єктиві після просвітлення.

$$\text{Відповідь: а) } 1,2322; 0,112 \text{ мкм}; \text{ б) } 0,9171; 0,575; \text{ в) } 1,3127; 0,105 \text{ мкм}; \\ \text{ г) } 0,8639; 0,9288; \text{ д) } 0,7923; 0,8893; \text{ е) } 9,6\%.$$

Задача 5.37. Визначте показник заломлення n_p просвітлюючого покриття і його товщину для спектральної області біля довжини хвилі $\lambda = 550$ нм, при умові, що світло падає на скло ($n_g = 1,5$) у повітрі нормально.

Відповідь: $n_p = \sqrt{n_g} = 1,22$; $d = \frac{(m+0,5)\lambda}{2\sqrt{n_g}}$; $d_{min} = \frac{\lambda}{4\sqrt{n_g}} = 113$ нм.

Задача 5.38. Розрахуйте для довжини хвилі $\lambda_0 = 0,5$ мкм коефіцієнт відбиття одношарового покриття з параметрами: $n_0 = 1$; $n_1 = 1,38$ (MgF_2); $n_2 = 1,69$ (скло ТФ2); $d_1 = 0,329$ мкм.

Відповідь: $R = \frac{n_0 n_1 - n_1^2}{n_0 n_1 + n_1^2}$.

Задача 5.39. Плоско-паралельна пластинка виготовлена із германію Ge ($n_2 = 4$) і має одношарове просвітляюче покриття із матеріалу YF_3 ($n_1 = 1,5$) на двох поверхнях. Розрахуйте: а) товщину просвітляючого покриття для довжини хвилі $\lambda_0 = 10$ мкм; б) коефіцієнт пропускання пластинки до і після просвітлення; в) побудуйте графік спектрального коефіцієнта пропускання просвітленої пластинки в спектральному діапазоні 8...14 мкм без врахування дисперсії Ge і YF_3 .

Відповідь: $d_1 = \frac{\lambda}{4n_1} = 1,67$ нм; $T = \left[1 - \left(\frac{1-n_2}{1+n_2}\right)^2\right]^2 = 0,41$;

$$T' = \left[1 - \left(\frac{n_0 n_1 - n_1^2}{n_0 n_1 + n_1^2}\right)^2\right]^2 = 0,85.$$

Задача 5.40. Одношарове просвітляюче покриття має такі параметри: $n_0 = 1$; $n_1 = 1,38$ (YF_3); $n_2 = 4$ (Ge); $d_1 = 1,77$ мкм. Розрахуйте коефіцієнт відбиття такого покриття для випромінювання з довжиною хвилі 10,6 мкм. Як зміниться коефіцієнт відбиття, якщо товщина просвітляючого покриття збільшилась на 10%?

Відповідь: $R = 0,14\%$; $R' = 8,9\%$;

Задача 5.41. Визначте довжини хвиль, на яких просвітляюче покриття, параметри якого наведені в задачі 5.40, має екстремальні значення коефіцієнта відбиття. Розрахуйте мінімальне і максимальне значення коефіцієнта відбиття для цих довжин хвиль.

Відповідь:

$$\lambda_{min} = \frac{4n_1d_1}{2m+1} (10,6; 3,53; 2,12 \text{ MKM}); \quad \lambda_{max} = \frac{2n_1d_1}{m} (5,3; 2,65 \text{ MKM});$$

$$R_{min} = \left(\frac{n_0n_2 - n_1^2}{n_0n_2 + n_1^2} \right)^2 = 0,078; \quad R_{max} = \left(\frac{n_0 - n_2}{n_0 + n_2} \right)^2 = 0,36.$$

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. **Борн М.** Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. – М.: Наука, 1973. – 720 с.
2. **Ландсберг Г.С.** Оптика / Г.С. Ландсберг. – К.: Радянська школа, 1961. – 732 с.
3. **Годжаев Н.М.** Оптика Н.М. Годжаев. – М.: Высшая школа, 1977. – 432 с.
4. **Колобродов В.Г.** Дифракційна теорія оптичних систем: Підручник / В.Г. Колобродов, Г.С. Тимчик. – К.: НТУУ «КПІ», 2011. – 140 с.
5. **Стафеев С.К.** Основы оптики / С.К. Стафеев, К.К. Боярский, Г.Л. Башнина. – СПб.: Питер, 2006. – 336 с.
6. **Коваленко В.Ф.** Розв'язування задач з курсу «Загальна фізика» (Розділ «Оптика»): Навчальний посібник / В.Ф. Коваленко, В.Г. Колобродов. – К.: ВТЦ «Київський університет», 2005. – 188 с.
7. **Троицкий С.С.** Электромагнитная теория света в прикладной физической оптике / С.С. Троицкий. – КПИ, 1982. – 102 с.
8. **Физический** энциклопедический словарь / Гл. ред. А. М. Прохоров. – М.: Сов. энциклопедия, 1984. – 944 с.
9. **Кармазін В.В.** Курс загальної фізики / В.В. Кармазін, В.В. Семенець. – К.: – Кодор. – 2009. – 786 с.
10. **Яковлев П.П.** Проектирование интерференционных покрытий / П.П. Яковлев, Б.Б. Мешков. – М.: – Машиностроение. – 1987. – 185 с.