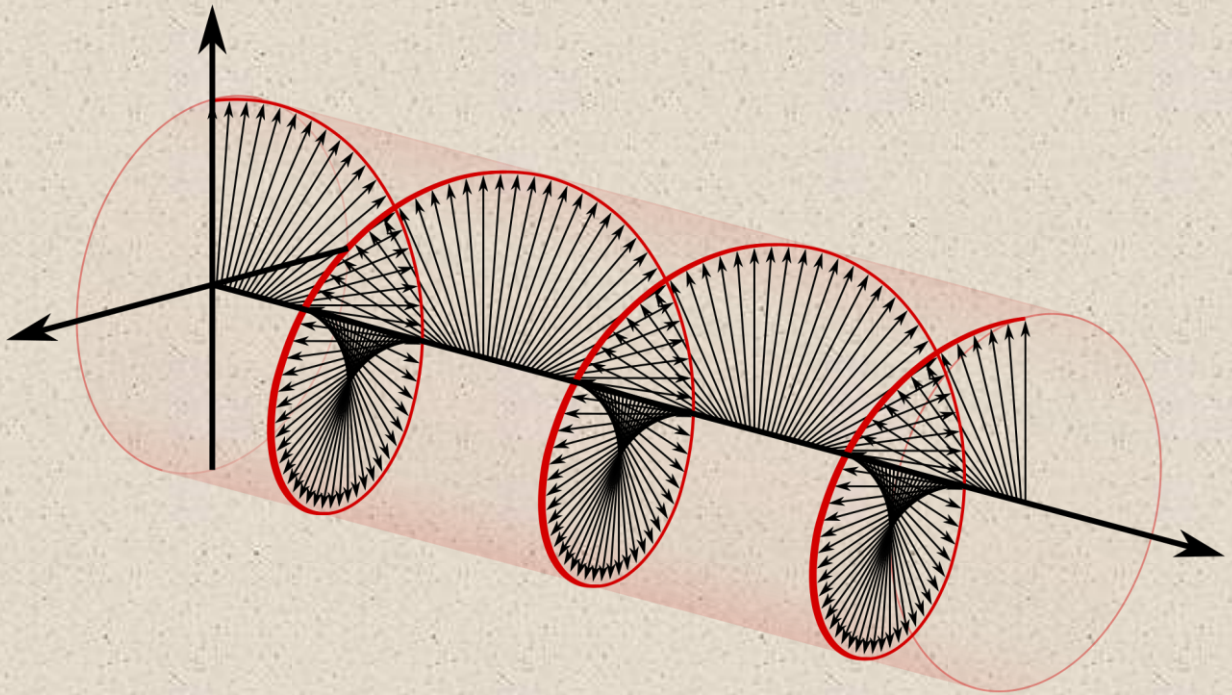


В.Г. Колобродов

ХВИЛЬОВА ОПТИКА

ЧАСТИНА 2. ДИФРАКЦІЯ І ПОЛЯРИЗАЦІЯ СВІТЛА



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ХВИЛЬОВА ОПТИКА
ЧАСТИНА 2. ДИСПЕРСІЯ І ПОЛЯРИЗАЦІЯ СВІТЛА

Підручник
для студентів
спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані
системи»
спеціалізації «Комп'ютерно інтегровані оптико-електронні системи та
технології»
та спеціальності 152 «Метрологія та інформаційно-вимірвальна
техніка»
спеціалізації «Фотоніка та оптоінформатика»

*«Затверджено Вченою радою
НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського»
(Протокол № _____ 2018)»*

КИЇВ
НТУУ «КПІ ІМ. І. СІКОРСЬКОГО»

2018

Хвильова оптика. Частина 2. Дифракція і поляризація світла: Підручник для студентів спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані системи» спеціалізації «Комп'ютерно інтегровані оптико-електронні системи та технології» та спеціальності 152 «Метрологія та інформаційно-вимірвальна техніка» спеціалізації «Фотоніка та оптоінформатика» [Текст] / Автор : В. Г. Колобродов. – Київ : НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського», 2018.–230 с.

Викладено основні відомості з оптики, що вивчаються у вищих навчальних закладах, і в повному вигляді розглянуто фізичний зміст таких оптичних явищ як скалярна теорія дифракції, оптична голографія, поляризація світла, оптично анізотропні середовища і розсіювання світла. Складні теоретичні положення оптичних явищ викладено в доступній формі для студентів технічних спеціальностей. Для практичного засвоєння теоретичного матеріалу значну увагу приділено прикладам розв'язання задач.

Навчальне електронне мережне видання

ХВИЛЬОВА ОПТИКА

ЧАСТИНА 2. ДИФРАКЦІЯ І ПОЛЯРИЗАЦІЯ СВІТЛА

Підручник

для студентів

спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані системи»

спеціалізації «Комп'ютерно інтегровані оптико-електронні системи та технології»

та спеціальності 152 «Метрологія та інформаційно-вимірвальна техніка»

спеціалізації «Фотоніка та оптоінформатика»

Автор: *Колобродов Валентин Георгійович, д-р техн. наук, професор*

Рецензенти: *Коваленко Валерій Фадейович, д-р фіз.-мат. наук, професор
(Київський національний університет імені Тараса Шевченка)*

*Черняк Сергій Іванович, д-р техн. наук,
(КП спеціального приладобудування «Арсенал»)*

Відповідальний редактор: *Микитенко Володимир Іванович, канд. техн. наук,
доцент*

За редакцією автора

ЗМІСТ

Вступ	7
Розділ 6. Основи скалярної теорії дифракції	9
6.1. Загальні положення теорії дифракції.....	9
6.2. Принцип Гюйгенса–Френеля	10
6.3. Зонна пластинка Френеля.....	15
6.4. Теорія дифракції Кірхгофа.....	18
6.4.1. Інтегральна теорема Гельмгольца–Кірхгофа.....	18
6.4.2. Дифракція на плоскому екрані.....	20
6.5. Дифракція Френеля.....	23
6.6. Дифракція Фраунгофера.....	26
6.7. Приклади розрахунку дифракції Фраунгофера.....	27
6.7.1. Прямокутний отвір.....	27
6.7.2. Щілина.....	29
6.7.3. Круглий отвір.....	31
6.7.4. Синусоїдальна дифракційна ґратка.....	35
6.8. Дифракційна ґратка.....	38
6.8.1. Теоретичні основи роботи дифракційної ґратки.....	38
6.8.2. Основні характеристики дифракційної ґратки.....	42
6.9. Типи дифракційних ґраток.....	45
6.10. Дифракція світла при похилому падінні променів.....	46
6.11. Дифракція на неперервних періодичних структурах.....	47
6.12. Дифракція на ультразвукових хвилях.....	49
6.13. Основи спектроскопії.....	50
6.14. Роздільна здатність об'єктива.....	52
6.15. Роздільна здатність мікроскопа.....	53

6.16. Приклади розрахунку дифракційних картин.....	57
6.17. Задачі для самостійного розв'язання	78
Розділ 7. Оптична голографія.....	97
7.1. Фізичні основи голографії	97
7.1.1. Запис голограми	98
7.1.2. Відновлення об'єктної хвилі.....	100
7.2. Історія розвитку голографії.....	101
7.3. Голограма Габора	102
7.4. Голограма Лейта і Упатнієкса	104
7.4.1. Запис голограми	105
7.4.2. Відновлення об'єктної хвилі	107
7.4.3. Узагальнення на випадок неколімованих референтної і поновлювальної хвиль.....	108
7.4.4. Застосування метода Лейта – Упатнієкса до тривимірної фотографії.....	111
7.4.5. Експериментальні труднощі отримання голографічних зображень.....	113
7.5. Безлінзова фур'є – голограма.....	114
7.6. Властивості голографічних зображень.....	116
7.6.1. Дифракційна ефективність голограм.....	116
7.6.2. Геометричне збільшення зображення.....	117
7.6.3. Просторова характеристика зображення.....	118
7.7. Товста голограма.....	118
7.8. Відбиваюча голограма.....	121
7.9. Типи голограм.....	123
7.10. Застосування голографії.....	127
7.11. Приклади розрахунку голограм.....	131
7.11. Задачі для самостійного розв'язування.....	137

Розділ 8. Поляризація світла	140
8.1. Лінійно поляризоване світло. Закон Малюса.....	140
8.2. Поляризація світла при відбиванні та заломленні на межі двох діелектриків.....	142
8.3. Подвійне променезаломлення.....	145
8.4. Поляризаційні прилади.....	146
8.4.1. Поляризаційні пристрої.....	147
8.4.2. Двояко заломлюючі призми.....	148
8.5. Еліптично поляризоване світло.....	150
8.6. Компенсатори.....	155
8.7. Інтерференція поляризованого світла.....	156
8.8. Математичне представлення різних видів поляризації.....	159
8.9. Приклади розрахунку поляризації світла.....	163
3.8. Задачі для самостійного розв'язування.....	173
Розділ 9. Оптично анізотропні середовища	185
9.1. Розповсюдження світла в анізотропних середовищах.....	185
9.2. Рівняння хвильових нормалей і променеве рівняння.....	186
9.3. Еліпсоїд хвильових нормалей і променевий еліпсоїд.....	187
9.4. Променева поверхня і поверхня нормалей.....	189
9.5. Фотопружність.....	193
9.6. Лінійний електрооптичний ефект Поккельса.....	194
9.7. Квадратичний електрооптичний ефект Керра.....	197
9.8. Магнітооптичні явища.....	198
9.9. Оптично активні середовища.....	200
9.10. Ефект Фарадея.....	203
9.11. Приклади розрахунку штучного подвійного променезаломлення світла, оптичної активності та ефекту Фарадея.....	206

9.12. Задачі для самостійного розв'язання.....	210
Розділ 10. Розсіювання світла.....	216
10.1. Природа процесів розсіювання.....	216
10.2. Розсіювання Релея.....	217
10.2.1. Модель елементарного розсіювача.....	217
10.2.2. Розсіювання Релея.....	219
10.2.3. Кутовий розподіл, поляризація і ослаблення світла при розсіюванні Релея.....	221
10.3. Розсіювання Мі.....	224
10.4. Розсіювання Мандельштама – Бріллюена.....	226
10.5. Комбінаційне розсіювання світла.....	227
Список літератури.....	230

ВСТУП

Підручник «Хвильова оптика» розширює курс загальної фізики і висвітлює закономірності, зумовлені хвильовою природою оптичного випромінювання і є основою для підготовки фахівців з оптоелектроніки, оптоелектроніки та оптоінформатики.

Видання розкриває фундаментальну дисципліну «Хвильова оптика» обсягом 13,5 кредитів, ґрунтується на досвіді викладання дисципліни на кафедрі «Оптичних та оптико-електронних приладів» Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» протягом тридцяти років. Робота тривала понад 10 років, за цей час видано посібник і безліч методичних вказівок до виконання практичних занять та лабораторних практикумів.

Матеріал курсу ґрунтується на підручниках і монографіях: «Основы оптики» Борна М. и Вольфа Э. [1], «Введение в Фурье-оптику» Гудмена Дж [2], «Оптика» Годжаева Н. М. [3], «Дифракційна теорія оптичних систем» Колобродова В. Г. і Тимчика Г. С. [4], «Основы оптики» Стафеева С. К., Боярского К. К., Башниной Г. Л. [5], «Оптика» Матвеева А. Н. [6], «Розв'язування задач з курсу «Загальна фізика» Коваленка В. Ф., Колобродова В. Г. [7].

Підручник складається із двох частин: у першій частині подано основні етапи розвитку оптики, електромагнітну теорію світла, відбиття та заломлення світла на основі електромагнітної теорії, основи електронної теорії дисперсії світла, інтерференція світла; у другій частині представлено оптичні явища, як скалярна теорія дифракції, оптична голографія, поляризація світла, оптично анізотропні середовища і розсіювання світла. Для засвоєння теоретичного матеріалу увагу приділено прикладам і задачам для самостійного розв'язання.

Автор висловлює подяку рецензентам д-ру фіз.-мат. наук, професору Коваленку В. Ф. і д-ру техн. наук Черняку С. І. за доброзичливу критику і слушні рекомендації щодо удосконалення підручника.

Для бакалаврів спеціальностей 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані системи» (спеціалізація «Комп'ютерно інтегровані оптико-електронні системи та технології») і 152 «Метрологія та інформаційно-вимірвальна техніка» (спеціалізація «Фотоніка та оптоінформатика»), а також фізичних, оптичних та радіотехнічних спеціальностей, буде корисним аспірантам і науково-інженерним працівникам оптичного та оптико-електронного приладобудування.

РОЗДІЛ 6

ОСНОВИ СКАЛЯРНОЇ ТЕОРІЇ ДИФРАКЦІЇ

6.1. Загальні положення теорії дифракції

Дифракція світла у вузькому розумінні – явище огинання променями світла контуру непрозорих тіл і, як наслідок, проникнення світла в область геометричної тіні. У широкому розумінні дифракція – це будь-яке відхилення, що виникає під час поширення хвиль, яке не можна пояснити законами геометричної оптики [8].

Явища дифракції відіграють важливу роль в аналізі оптичних систем і обмежують характеристики цих систем. Розв'язання дифракційних задач є найбільш складним в оптиці. Щоб отримати точний розв'язок задачі з дифракції світла, потрібно розв'язати хвильове рівняння (2.23) за відповідних граничних умов [9]. Через математичні труднощі такі задачі розв'язані лише для двовимірних предметів дуже простої форми. Для розв'язання практичних дифракційних задач використовують наближені методи, які ґрунтуються на принципі Гюйгенса–Френеля.

Дифракційний аналіз оптичних систем дає змогу об'єднати геометричну оптику і теорію лінійних систем та розглядати оптичні системи як фільтри просторових частот. За допомогою теорії дифракції можна встановити взаємозв'язок між розподілом електромагнітного поля у площині предметів і розподілом поля в довільній площині оптичної системи.

Векторний характер електромагнітного поля враховується лише в достатньо складній *векторній теорії дифракції* [1].

У межах скалярної теорії дифракції не враховують взаємозв'язок векторів електричного \vec{E} і магнітного \vec{H} полів за допомогою рівнянь Максвелла, а розглядають лише скалярну амплітуду $V(x, y, z, t)$ однієї з поперечних

компонентів електромагнітного поля. Скалярна теорія дифракції дає задовільні результати, якщо виконуються дві умови:

- отвір в екрані (розмір хвильового фронту) великий порівняно з довжиною хвилі;
- дифракцію хвиль спостерігають на достатній відстані від екрану.

Далі в цьому розділі розглядатимемо когерентне монохроматичне випромінювання.

6.2. Принцип Гюйгенса–Френеля

На практиці під час розрахунку дифракційних картин через математичні труднощі застосовують здебільшого наближені методи, в основу яких покладено принцип Гюйгенса–Френеля.

Згідно з принципом Гюйгенса–Френеля кожену точку хвильового фронту можна вважати центром вторинних сферичних хвиль, а положення хвильового фронту в наступний момент часу є дотична поверхня до вторинних хвиль. Вторинні хвилі інтерферують між собою.

Перед тим, як досліджувати дифракційні явища за допомогою принципу Гюйгенса–Френеля, перевіримо можливість застосування цього принципу до поширення світла у вакуумі між двома точками P_0P (рис. 6.1).

Нехай у точці P_0 розміщене точкове джерело когерентного випромінювання з довжиною хвилі λ , яке утворює у певний момент часу сферичний хвильовий фронт S із радіусом r_0 (рис. 6.1). Згідно з рівнянням (2.51) таке джерело випромінювання утворює в точці P амплітуду поля [9]

$$V(P) = \frac{V_0}{P_0P} \exp(jk \cdot P_0P), \quad (6.1)$$

де P_0P – відстань від точки P_0 до точки P ; V_0 – амплітуда поля, коли $P_0P = 1$; $k = 2\pi/\lambda$ – хвильове число.

Визначимо амплітуду поля в точці P , користуючись принципом Гюйгенса–Френеля. Амплітуда поля в точці Q на поверхні хвильового фронту S дорівнює

$$V(Q) = \frac{V_0}{r_0} \exp(jkr_0). \quad (6.2)$$

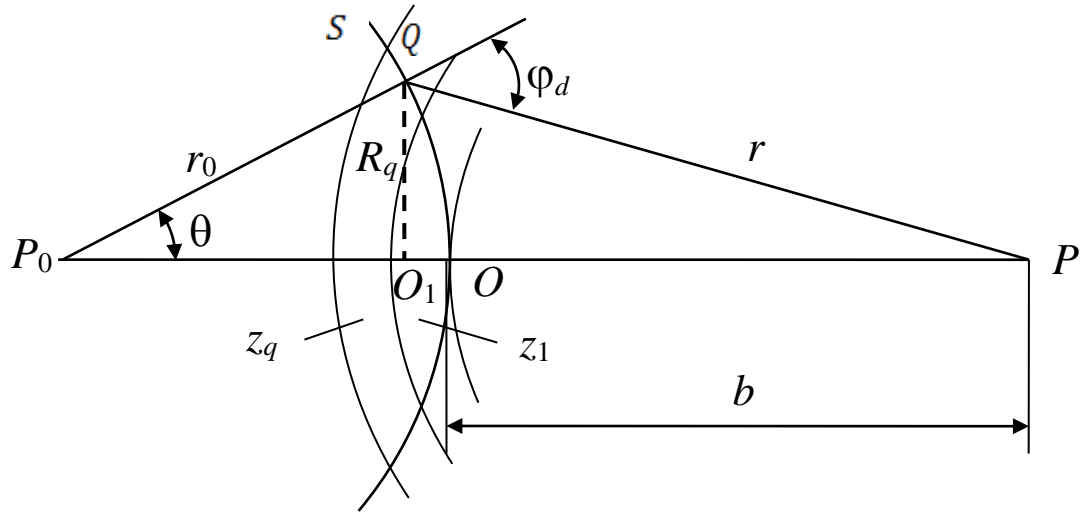


Рис. 6.1. Побудова зон Френеля

Згідно з принципом Гюйгенса точка Q є джерелом вторинної сферичної хвилі, яка створює в точці P поле з амплітудою

$$dV(P) = \frac{dV(Q)}{r} \exp(jkr) = K_F(\varphi_d) V(Q) dS \frac{\exp(jkr)}{r}, \quad (6.3)$$

де $dV(Q)$ – амплітуда вторинної сферичної хвилі в точці Q ; $K_F(\varphi_d)$ – коефіцієнт нахилу, який запропонував Френель, що враховує зменшення амплітуди вторинної хвилі залежно від напрямку поширення; φ_d – кут між нормаллю до фронту S і напрямком QP , який називають *кутом дифракції*; dS – елемент поверхні хвильового фронту навколо точки Q . Згідно з Френелем вважатимемо, що коефіцієнт K_F має максимальне значення, коли $\varphi_d = 0$, і $K_F = 0$, коли $\varphi_d = \pi/2$.

Згідно з принципом Френеля у точці P відбувається інтерференція вторинних сферичних хвиль від кожної точки хвильового фронту S . Тоді, з урахуванням виразів (6.3) і (6.2), маємо:

$$V(P) = \iint_S dV(P) = \frac{V_0}{r_0} \exp(jkr_0) \iint_S \frac{\exp(jkr)}{r} K_F(\varphi_d) dS. \quad (6.4)$$

Для розрахунку інтеграла (6.4) скористаємося зонами Френеля. Для утворення таких зон побудуємо концентричні сфери із центром у точці P із радіусами $b, b + \lambda/2, b + \lambda, \dots, b + \lambda q/2, \dots$, де $b = OP$; O – точка перетину відрізка P_0P із хвильовою поверхнею S (рис. 6.1). Сфери ділять фронт S на ряд зон – $z_1, z_2, \dots, z_q, \dots$, які називають зонами Френеля.

Для розрахунку елемента хвильової поверхні dS скористаємося рис. 6.2. Будемо розглядати dS у вигляді прямокутника, який має сторони $d\xi$ та $d\eta$. Із рис. 6.1 і 6.2 маємо, що $d\xi = r_0 d\theta$, а $d\eta = R_q d\chi = r_0 \sin\theta d\chi$, де R_q – радіус q -ї зони Френеля; χ – полярний кут, який змінюється у межах від 0 до 2π , тоді

$$dS = r_0^2 \sin\theta d\theta d\chi. \quad (6.5)$$

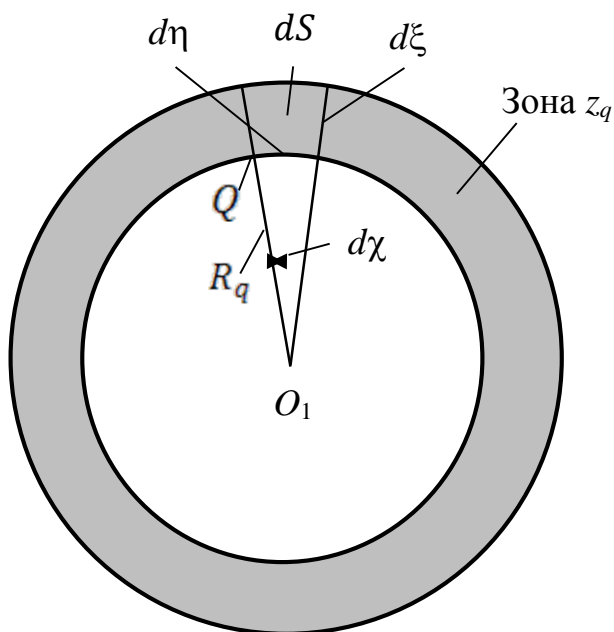


Рис. 6.2. До визначення елемента площі dS q -ї зони Френеля

Із трикутника P_0QP за теоремою косинусів маємо (рис. 6.1):

$$r^2 = r_0^2 + (r_0 + b)^2 - 2r_0(r_0 + b)\cos\theta. \quad (6.6)$$

Візьмемо диференціал від правої і лівої частин рівняння (6.6):

$$2rdr = 2r_0(r_0 + b)\sin\theta d\theta,$$

звідси

$$r_0\sin\theta d\theta = \frac{rdr}{(r_0+b)}. \quad (6.7)$$

Підставимо рівняння (6.7) у вираз (6.5):

$$dS = \frac{r_0}{(r_0+b)} r dr d\chi. \quad (6.8)$$

Нехай відрізки r_0 і b великі порівняно з довжиною хвилі λ , тоді можна вважати, що в будь-якій зоні Френеля z_q значення коефіцієнта K_F сталі і дорівнює K_{Fq} . З урахуванням виразу (6.8) зона Френеля z_q створює в точці P амплітуду поля

$$\begin{aligned} V_q(P) &= \iint_{S_q} dV(P) = \frac{V_0}{r_0+b} \exp(jkr_0) K_{Fq} \int_0^{2\pi} \int_{b+(q-1)\lambda/2}^{b+q\lambda/2} \exp(jkr) d\chi dr = \\ &= 2\pi \frac{V_0 \exp(jkr_0)}{r_0+b} K_{Fq} \frac{1}{jk} \exp(jkr) \Big|_{b+(q-1)\lambda/2}^{b+q\lambda/2} = 2\pi \frac{V_0 \exp[jk(r_0+b)]}{r_0+b} K_{Fq} \times \\ &\quad \times \frac{1}{jk} \exp\left(jk \frac{q\lambda}{2}\right) \left[1 - \exp\left(-jk \frac{\lambda}{2}\right)\right]. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Оскільки $k\lambda = 2\pi$, останні три співмножники дають

$$\begin{aligned} &\frac{1}{jk} \exp\left(jk \frac{q\lambda}{2}\right) \left[1 - \exp\left(-jk \frac{\lambda}{2}\right)\right] = \\ &= -\frac{j\lambda}{2\pi} \exp(j\pi q) [1 - \exp(-j\pi)] = \frac{j\lambda}{\pi} (-1)^{q+1}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Після підставлення формули (6.10) у вираз (6.9) маємо

$$V_q(P) = 2j\lambda \frac{V_0 \exp[jk(r_0+b)]}{r_0+b} (-1)^{q+1} K_{Fq}. \quad (6.11)$$

Результуючу амплітуду в точці P знайдемо, підставивши вираз (6.11) в інтеграл (6.4), який представимо у вигляді суми:

$$V(P) = \sum_{q=1}^N V_q = 2j\lambda \frac{V_0 \exp[jk(r_0+b)]}{r_0+b} \sum_{q=1}^N (-1)^{q+1} K_{Fq}. \quad (6.12)$$

Аналіз формули (6.12) свідчить про те, що результуюча амплітуда в точці P – це сума амплітуд V_q , знаки яких послідовно змінюються, тобто

$$V(P) = V_1 - V_2 + V_3 - V_4 \pm V_N, \quad (6.13)$$

де знак $\langle + \rangle$ відповідає непарному значенню $N = 2n + 1$, а знак $\langle - \rangle$ – парному значенню $N = 2n$.

Для розрахунку суми (6.13) скористаємося методом Шустера. Вважатимемо, що $V_{q-1} > V_q > V_{q+1}$ і $V_{q-1} \approx V_q \approx V_{q+1}$. Для непарного значення N подамо ряд (6.13) у вигляді

$$V(P) = \frac{1}{2}V_1 + \left(\frac{1}{2}V_1 - V_2 + \frac{1}{2}V_3\right) + \left(\frac{1}{2}V_3 - V_4 + \frac{1}{2}V_5\right) + \dots + \left(\frac{1}{2}V_{N-2} - V_{N-1} + \frac{1}{2}V_N\right) + \frac{1}{2}V_N.$$

Оскільки $V_q \approx (V_{q-1} + V_{q+1})/2$, то $V(P) = \frac{1}{2}V_1 + \frac{1}{2}V_N$.

Аналогічно можна розрахувати амплітуду $V(P)$ для парного значення N :

$$V(P) = \frac{1}{2}V_1 + \left(\frac{1}{2}V_1 - V_2 + \frac{1}{2}V_3\right) + \dots + \left(\frac{1}{2}V_{N-3} - V_{N-2} + \frac{1}{2}V_{N-1}\right) + \frac{1}{2}V_{N-1} - V_N = \frac{1}{2}V_1 - \frac{1}{2}V_N.$$

Отже, результуючу амплітуду в точці P знаходять за співвідношенням

$$V(P) = \frac{1}{2}V_1 \pm \frac{1}{2}V_N. \quad (6.14)$$

Для останньої зони, яку видно з точки P , QP стає дотичною до хвильового фронту, тобто $\varphi_{dN} = \pi/2$, а $K_{FN} = 0$. У цьому випадку співвідношення (6.14) матиме вигляд

$$V(P) = \frac{1}{2}V_1 = j\lambda \frac{V_0 \exp[jk(r_0 + b)]}{r_0 + b} K_{F1}. \quad (6.15)$$

Вираз (6.15) свідчить про те, що *результуюча амплітуда в точці P , сформованій всім хвильовим фронтом, дорівнює половині амплітуди, яку формує в цій точці перша зона Френеля.*

Співвідношення (6.15) збігається з виразом (6.1) для амплітуди сферичної хвилі, коли $P_0P = r_0 + b$, а $j\lambda K_{F1} = 1$, тобто якщо

$$K_{F1} = \frac{1}{j\lambda} = \frac{\exp(-\frac{j\pi}{2})}{\lambda}. \quad (6.16)$$

Множник $\exp(-j\pi/2)$ у виразі (6.16) вказує на зміну фази вторинних хвиль відносно первинної хвилі на чверть періоду. Множник $1/\lambda$ свідчить про те, що амплітуда вторинних хвиль зменшується у $1/\lambda$ разів. Отже, можна дійти висновку, що за цих умов відносно амплітуди і фази вторинних хвиль принцип Гюйгенса–Френеля правильно описує поширення сферичних хвиль у вакуумі. Однак наведені вище додаткові припущення потрібно розглядати як зручний спосіб інтерпретації математичних виразів. Інакше кажучи, ці припущення не мають будь-якого фізичного змісту.

6.3. Зонна пластинка Френеля

Принцип Гюйгенса–Френеля і метод зон Френеля, які було розглянуто в п. 6.2, дають змогу зробити такі висновки:

1. Якщо хвильовий фронт повністю відкритий, результуюча амплітуда в точці P дорівнює половині амплітуди, яку формує у цій точці перша зона Френеля, тобто $V(P) = V_0 = V_1/2$.

2. Якщо хвильовий фронт повністю відкритий, результуюча інтенсивність у точці P $I(P) = |V_0|^2 = I_0$ дорівнює $1/4$ інтенсивності $I_1 = |V_1(P)|^2$, яку формує у цій точці перша зона Френеля, оскільки $V_0 = V_1/2$, тобто $I_0 = I_1/4$.

3. Розмістимо перпендикулярно до відрізка P_0P непрозорий екран із круглим отвором, центр якого збігається з точкою O (рис. 6.1). У цьому випадку результуюча амплітуда в точці P буде формуватися лише зонами Френеля, розміщеними в отворі. Якщо в отворі розміщується за певних умов лише перша зона Френеля, то інтенсивність у точці P буде у чотири рази більшою за інтенсивність для випадку, коли екрана немає, тобто $I_1 = 4I_0$ оскільки $V_1 = 2V_0$.

4. З наступним збільшенням розміру отвору інтенсивність у точці P буде зменшуватися, оскільки перші два члени V_1 та V_2 у виразі (6.13) мають різні знаки. Більше того, якщо в отворі розміщені лише дві зони Френеля, то

результуюча амплітуда згідно з виразом (6.13) становитиме $V(P) = V_1 - V_2 \approx 0$, тобто у точці P буде майже повна темнота. Надалі зі збільшенням розмірів отвору спостерігається періодична зміна інтенсивності у точці P . Такий самий результат можна отримати і тоді, коли розміри отвору і положення джерела випромінювання залишаються незмінними, а точка спостереження P переміщується до екрана.

5. Якщо в точці O розмістити непрозорий екран, який затуляє лише першу зону Френеля, то результуюча амплітуда згідно з виразом (6.13) становитиме

$$V(P) = -V_2 + V_3 - V_4 + \dots = -\frac{1}{2}V_1 + \left(\frac{1}{2}V_1 - V_2 + \frac{1}{2}V_3\right) + \dots = -\frac{1}{2}V_1. \quad (6.17)$$

Вираз (6.17) означає, що в центрі геометричної тіні диска інтенсивність світла $I(P) = |V_1/2|^2 = I_0$, яку називають *плямою Пуассона*, буде такою самою, як у випадку, коли диска немає.

6. Якщо затулити всі парні (або непарні) зони Френеля, то результуюча амплітуда

$$V(P) = V_1 + V_3 + V_5 + \dots \quad (6.18)$$

Це означає, що інтенсивність у точці суттєво збільшується порівняно з тією, яка була без екрана. Тобто такий екран, який називають *зонною пластинкою Френеля*, веде себе подібно лінзі, що фокусує світло.

7. Якщо змінити фази всіх парних (або непарних) зон на протилежні, то

$$V(P) = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + \dots \quad (6.19)$$

При цьому інтенсивність у точці P (фокусі пластинки Френеля) ще збільшиться.

Співвідношення (6.18) і (6.19) використовують під час проектування зонних пластинок Френеля.

Розрахуємо радіус q -ї зони Френеля, використовуючи рис. 6.1. Із трикутників P_0QO_1 і PQO_1 маємо:

$$QO_1^2 = R_q^2 = r_0^2 - (r_0 - \Delta_q)^2 = r^2 - (b + \Delta_q)^2, \quad (6.20)$$

де $\Delta_q = O_1O$; $r = b + \lambda q/2$.

Звідси

$$2r_0\Delta_q = r^2 - b^2 - 2b\Delta_q \approx b\lambda q - 2b\Delta_q \Rightarrow \Delta_q = \frac{b\lambda q}{2(r_0+b)}.$$

Підставимо значення Δ_q у формулу (6.20):

$$R_q^2 = r_0^2 - (r_0 - \Delta_q)^2 \approx 2r_0\Delta_q = \frac{r_0b\lambda q}{r_0+b}.$$

Звідси

$$R_q = \sqrt{\frac{r_0b}{r_0+b}} \lambda q. \quad (6.21)$$

Визначимо розміри радіуса R_q і кількість q зон Френеля, які розміщуються в отворі екрана діаметром D . Нехай екран перебуває на відстані a та a' від джерела світла P_0 і точки спостереження P відповідно (рис. 6.3). Із точок P_0 і P як із центрів опишемо сфери, які проходять через краї отвору AB . Із трикутника P_0AO маємо

$$AO^2 = \frac{D^2}{4} = P_0A^2 - P_0O^2 = (a + OF)^2 - a^2 \approx 2aOF.$$

Аналогічно із трикутника PAO маємо

$$\frac{D^2}{4} \approx 2a'EO,$$

звідси

$$EF = EO + OF = \frac{D^2}{8} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} \right).$$

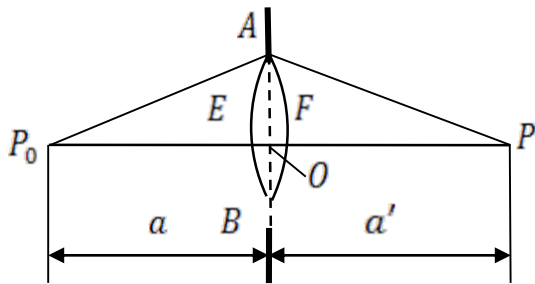


Рис. 6.3. Визначення кількості зон Френеля

Кількість зон q знайдемо діленням відрізка EF на $\lambda/2$:

$$q = \frac{D^2}{4\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} \right). \quad (6.22)$$

Із формули (6.22) маємо

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{4q\lambda}{D^2} = \frac{1}{f_q}. \quad (6.23)$$

Вираз (6.23) – це формула лінзи, де f_q – фокусна відстань зонної пластинки Френеля,

$$f_q = \frac{D^2}{4q\lambda}. \quad (6.24)$$

Якщо q – ціле число, то D буде діаметром, а $R_q = D/2$ – радіусом q -ї зони Френеля, точніше її зовнішнього краю. Із виразу (6.23) маємо

$$R_q = \sqrt{\frac{aa'}{a+a'}} q\lambda. \quad (6.25)$$

Отримані вирази 6.21 і 6.25 співвідносяться між собою.

Наприклад, якщо $a = a' = 1$ м, $\lambda = 0,6$ мкм, то $R_1 = 0,55$ мм, $R_2 = 0,77$ мм, $R_3 = 0,955$ мм.

6.4. Теорія дифракції Кірхгофа

6.4.1. Інтегральна теорема Гельмгольца–Кірхгофа

Інтегральна теорема Гельмгольца–Кірхгофа виражає розв’язок однорідного диференціального рівняння Гельмгольца (2.55) у довільній точці P_0 через значення цього розв’язку та його першої похідної на довільній замкнутій поверхні S , з точкою P_0 всередині (рис. 6.4).

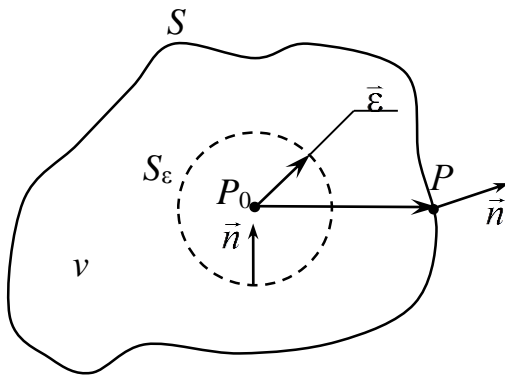


Рис. 6.4. Виведення інтегральної теореми Гельмгольца–Кірхгофа

Розглянемо строго монохроматичне випромінювання у точці $P(\vec{r})$, яке задовольняє рівняння Гельмгольца (2.55):

$$\Delta V(\vec{r}) + k^2 V(\vec{r}) = 0. \quad (6.26)$$

Для розв’язання цього рівняння використаємо *теорему Гріна*: нехай V і G – дві довільні комплексні функції координат, а S – замкнена поверхня, яка обмежує об’єм v . Якщо функції V та G та їх

перші й другі похідні однозначні і неперервні всередині об’єму v і на поверхні S , то справджується співвідношення

$$\iiint_v (G\Delta V - V\Delta G)dv = \iint_S \left(G \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS, \quad (6.27)$$

де $\partial/\partial n$ – часткова похідна на поверхні S , яка береться у напрямку зовнішньої нормалі \vec{n} до цієї поверхні. Допоміжну функцію $G(P)$ називають *функцією Гріна*.

Як функцію Гріна оберемо функцію, яка описує сферичну хвилю одиничної амплітуди, що поширюється з точки P_0 . Згідно з рівнянням (2.51) така функція має вигляд [9]

$$G(\vec{r}) = \frac{\exp(jkr)}{r}, \quad (6.28)$$

де $\vec{r} = \overrightarrow{P_0P}$ – вектор, напрямлений з точки P_0 у довільну точку P , розміщену на поверхні S .

Щоб можна було застосувати теорему Гріна (6.27), слід вилучити точку P_0 , в якій функція $G(\vec{r} = 0)$ має розрив. Для цього побудуємо сферу з центром у точці P_0 , яка має радіус ε і площу S_ε . Застосуємо тепер теорему Гріна до об'єму v' , обмеженого поверхнями S і S_ε . Зовнішня нормаль \vec{n} напрямлена всередину на поверхні S_ε (рис. 6.4).

Функція Гріна (6.28) описує амплітуду монохроматичної хвилі і тому задовольняє рівняння Гельмгольца (6.26), тобто

$$\Delta G(\vec{r}) + k^2 G(\vec{r}) = 0. \quad (6.29)$$

Помножимо вираз (6.26) на G , а вираз (6.29) на V і віднімемо вираз (6.29) від виразу (6.26):

$$G\Delta V + k^2 GV - V\Delta G - k^2 VG = 0. \quad (6.30)$$

Підставимо рівняння (6.30) в теорему Гріна (6.27):

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{S+S_\varepsilon} \left(G \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS = \\ &= \iint_S \left(G \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS + \iint_{S_\varepsilon} \left(G \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS, \end{aligned} \quad (6.31)$$

Де

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\exp(jkr)}{r} \left(jk - \frac{1}{r} \right) \cos(\vec{r} \wedge \vec{n}), \quad (6.32)$$

де $(\vec{r} \wedge \vec{n})$ – кут між вектором \vec{r} і зовнішньою нормаллю \vec{n} ; $\vec{r} = \overline{P_0 P}$.

Розглянемо інтеграл (6.31) на поверхні S_ε :

$$I = \iint_{S_\varepsilon} \left(G \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS, \quad (6.33)$$

для якого функція Гріна (6.28) та її похідна (6.32) мають вигляд

$$G(\varepsilon) = \frac{\exp(jk\varepsilon)}{\varepsilon}; \quad (6.34)$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\exp(jk\varepsilon)}{\varepsilon} \left(jk - \frac{1}{\varepsilon} \right) (-1). \quad (6.35)$$

Перейдемо у виразі (6.33) від інтегрування по сферичній поверхні S_ε до інтегрування по тілесному куту $d\Omega = dS/\varepsilon^2$.

З урахуванням функцій (6.34) і (6.35) інтеграл (6.33) матиме вигляд

$$I = \iint_{4\pi} \left[\frac{\exp(jk\varepsilon)}{\varepsilon} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\exp(jk\varepsilon)}{\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} - jk \right) \right] \varepsilon^2 d\Omega. \quad (6.36)$$

Якщо радіус ε наближається до нуля, то через неперервність функції V у точці P_0 інтеграл (6.36) набуває вигляду

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{4\pi} \left[\frac{\exp(jk\varepsilon)}{\varepsilon} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\exp(jk\varepsilon)}{\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} - jk \right) \right] \varepsilon^2 d\Omega = -V(P_0)4\pi. \quad (6.37)$$

Із співвідношень (6.31) і (6.37) маємо

$$V(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(G \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS. \quad (6.38)$$

Інтегральна теорема Гельмгольца–Кірхгофа (6.38) відіграє важливу роль у скалярній теорії дифракції, оскільки дає змогу виразити поле в точці P_0 через значення цього поля на замкненій поверхні S , яка оточує цю точку.

6.4.2. Дифракція на плоскому екрані

Розглянемо найбільш важливий для практики випадок, коли дифракція світла відбувається на отворі в нескінченному непрозорому плоскому екрані. Щоб знайти поле в будь-якій точці P_0 за екраном, скористаємося теоремою

Гельмгольца–Кірхгофа (6.38). Замкнену поверхню S подамо у вигляді плоскої поверхні S_1 і сферичної поверхні S_2 , як зображено на рис. 6.5,

$$V(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1+S_2} \left(G \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS. \quad (6.39)$$

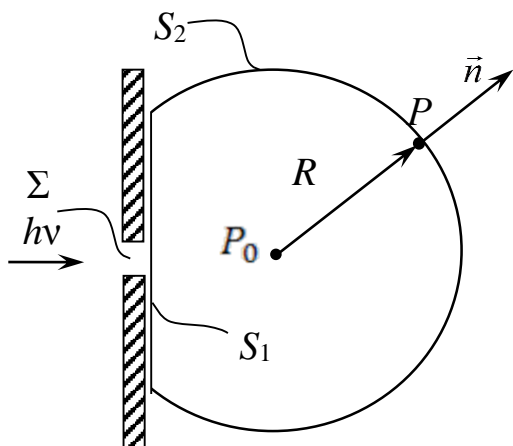


Рис. 6.5. До виведення формули (6.44)

Розглянемо спочатку інтеграл (6.39) на сферичній поверхні S_2 радіусом R із центром у точці P_0 . Для цієї поверхні функція Гріна (6.28) та її похідна (6.32) мають вигляд

$$G(R) = \frac{\exp(jkR)}{R}; \quad (6.40)$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} \approx \frac{\exp(jkR)}{R} (jk). \quad (6.41)$$

У формулі (6.41) зроблено наближення, що для великих значень R виконується умова

$$\frac{1}{R} \ll k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Підставивши функції (6.40) і (6.41) до інтеграла (6.39), маємо:

$$\iint_{S_2} \left[\frac{\exp(jkR)}{R} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\exp(jkR)}{R} jk \right] dS = \iint_{\Omega} \frac{\exp(jkR)}{R} \left[\frac{\partial V}{\partial n} - Vjk \right] R^2 d\Omega, \quad (6.42)$$

де Ω — тілесний кут з вершиною у точці P_0 , утворений сферичною поверхнею S_2 .

Розглянемо інтеграл (6.42), коли $R \rightarrow \infty$. Цей інтеграл буде дорівнювати нулю, якщо виконується умова Зоммерфельда:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{\partial V}{\partial n} - Vjk \right] R = 0. \quad (6.43)$$

Фізично умова (6.43) виконується. Справді, якщо світло з'явилося в момент часу t_0 , то за час $t - t_0$ воно поширилося на відстань $c(t - t_0)$, де c — швидкість світла. Тому, якщо обрати радіус сфери S_2 $R \gg c(t - t_0)$, то $V(P) = 0$ і $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$.

Отже, якщо виконується умова Зоммерфельда (6.43), амплітуду світла у точці P_0 визначають за виразом

$$V(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \left(G \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS. \quad (6.44)$$

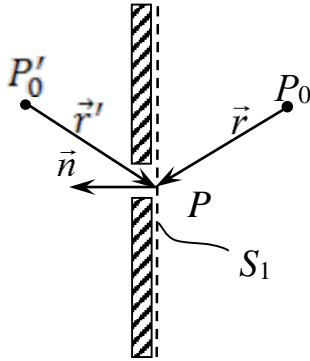


Рис. 6.6. До вибору функції Гріна у разі дифракції на плоскому екрані

Для обчислення інтеграла (6.44) оберемо нову функцію Гріна, яка описує поле, утворене двома точковими джерелами одиничної амплітуди, розміщеними в точках P_0 і P_0' симетрично відносно екрана (рис. 6.6). Джерела світла випромінюють із різницею фаз π . У цьому разі функція Гріна та її похідна матимуть вигляд

$$G(P) = \frac{\exp(jkr)}{r} - \frac{\exp(jkr')}{r'}; \quad (6.45)$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\exp(jkr)}{r} jk \cos(\vec{r} \wedge \vec{n}) - \frac{\exp(jkr')}{r'} jk \cos(\vec{r}' \wedge \vec{n}), \quad (6.46)$$

де \vec{n} – зовнішня нормаль до поверхні S_1 ; $\vec{r}' = \overrightarrow{P_0'P}$ (рис. 6.6).

У виразі (6.46) зроблено припущення, що $k \gg 1/r$.

На поверхні S_1 для симетричних точок P_0 і P_0' маємо $r' = r$ і $\cos(\vec{r}' \wedge \vec{n}) = -\cos(\vec{r} \wedge \vec{n})$. Тому на поверхні S_1 співвідношення (6.45) і (6.46) мають вигляд

$$G(P) = 0; \quad \frac{\partial G}{\partial n} = 2 \frac{\exp(jkr)}{r} jk \cos(\vec{r} \wedge \vec{n}). \quad (6.47)$$

Підставимо співвідношення (6.47) в інтеграл (6.44):

$$V(P_0) = \frac{1}{j\lambda} \iint_{S_1} V(P) \frac{\exp(jkr)}{r} \cos(\vec{r} \wedge \vec{n}) dS. \quad (6.48)$$

Для спрощення виразу (6.48) скористаємося граничними умовами Кірхгофа, згідно з якими:

1. У межах отвору Σ в екрані розподіл поля $V(P)$ має таке саме значення, як і у випадку, коли екрана не було.

2. За межами отвору Σ поле на поверхні S_1 дорівнює нулю, тобто $V(P) = 0$.

За таких умов інтегрування за поверхнею S_1 у виразі (6.48) можна замінити інтегруванням за площею отвору Σ . При цьому вираз (6.48) набуде вигляду

$$V(P_0) = \frac{1}{j\lambda} \iint_{\Sigma} V(P) \frac{\exp(jkr)}{r} \cos(\vec{r} \wedge \vec{n}) dS. \quad (6.49)$$

Вираз (6.49) називають *формулою дифракції Релея–Зоммерфельда* на плоскому екрані. Згідно з цією формулою амплітуду поля $V(P_0)$ у точці P_0 можна визначити за допомогою інтеграла суперпозиції, якщо відомий розподіл поля $V(P)$ у площині отвору Σ . Формула (6.49) справедлива, якщо $r \gg \lambda/2\pi$.

6.5. Дифракція Френеля

Вираз (6.49) є найбільш загальною формулою у скалярній теорії дифракції. На практиці найчастіше площина екрана xu з отвором Σ паралельна площині спостереження x_0y_0 (рис. 6.7).

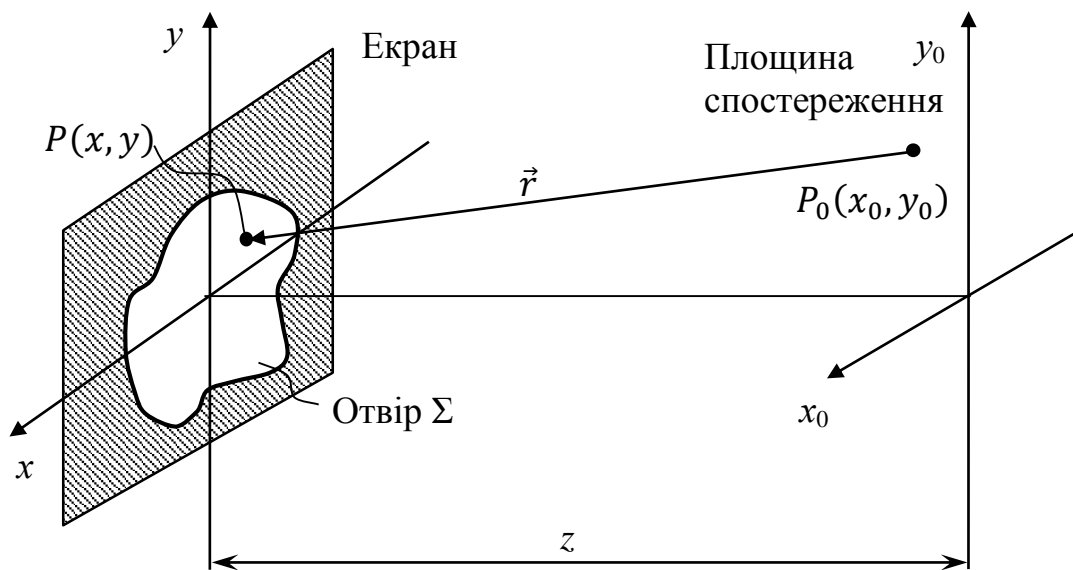


Рис. 6.7. Схема дифракції Френеля

Згідно з граничними умовами Кірхгофа амплітуда поля $V(P) = V(x, y)$ визначена всередині отвору Σ , а за його межами дорівнює нулю, що дає змогу розглядати інтеграл (6.49) у нескінченних межах, тобто

$$V(x_0, y_0) = \iint_{-\infty}^{\infty} V(x, y) h(x, y; x_0, y_0) dx dy, \quad (6.50)$$

де $h(x, y; x_0, y_0)$ — вагова функція дифракції Релея–Зоммерфельда,

$$h(x, y; x_0, y_0) = \frac{1}{j\lambda} \frac{\exp(jkr)}{r} \cos(\vec{r} \wedge \vec{n}); \quad (6.51)$$

$$r = P_0P = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + z^2} = z \sqrt{1 + \frac{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}{z^2}}. \quad (6.52)$$

Щоб спростити обчислення інтеграла (6.50), Френель запропонував такі наближення:

1. Розмір отвору в екрані набагато менший за відстань z між площинами xu та x_0y_0 .

2. Дифракція спостерігається біля центра системи координат x_0y_0 , розміри якої набагато менші за відстань z .

За таких наближень можна вважати, що $r = P_0P \approx z$, а $\cos(\vec{r} \wedge \vec{n}) \approx 1$. Слід також зазначити, що в показнику експоненти у виразі (6.51) не можна замінити r на z , оскільки при цьому виникає значна фазова похибка. Наприклад, якщо $r = z + \Delta z$, то $kr = kz + k\Delta z$. За $\Delta z = 1$ мм і $\lambda = 0,5$ мкм, тоді $k\Delta z = 400 \pi$ рад.

Цю похибку можна зменшити, якщо подати вираз (6.52) у вигляді степеневого ряду та обмежитися двома членами ряду. Скористаємось розкладом функції $\sqrt{1+t}$ у ряд з довідника [10]:

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 - \frac{5}{128}t^4 + \dots, \quad (6.53)$$

тоді

$$r \approx z \left[1 + \frac{1}{2} \frac{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}{z^2} \right]. \quad (6.54)$$

Наближення Френеля (6.54) виконується, якщо $\frac{1}{8}t^2 \ll 1$ або

$$kz \frac{1}{8} \left[\frac{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}{z^2} \right]^2 \ll 1 \text{ радіан,}$$

звідси

$$z \gg \left\{ \frac{\pi}{4\lambda} \left[\frac{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}{z^2} \right]^2 \right\}^{1/3}. \quad (6.55)$$

Простір за екраном, який задовольняє умову (6.55), називають *областю дифракції Френеля*. Наприклад, якщо $\lambda = 0,5$ мкм, а максимальні розміри отвору в екрані та області спостереження становлять 1 см, то $z \gg 40$ см.

Підставимо наближення (6.54) у вираз (6.51), тоді інтеграл (6.50) матиме вигляд

$$V(x_0, y_0) = \iint_{-\infty}^{\infty} V(x, y) \frac{1}{j\lambda z} \exp \left\{ jkz \left[1 + \frac{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}{2z^2} \right] \right\} dx dy =$$

$$= \frac{1}{j\lambda z} \exp(jkz) \iint_{-\infty}^{\infty} V(x, y) \exp \left\{ j \frac{\pi}{\lambda z} [(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2] \right\} dx dy. \quad (6.56)$$

Вираз (6.56) називають *рівнянням дифракції Френеля*. Множник $\exp(jkz)$ визначає постійний фазовий зсув, який не впливає на розподіл поля $V_0(x_0, y_0) = V(x_0, y_0)$. Тому надалі його не враховуватимемо.

Співвідношення (6.56) являє собою інтеграл згортки, який можна подати у вигляді

$$V_0(x_0, y_0) = V(x_0, y_0) * h_F(x_0, y_0), \quad (6.56')$$

де $h_F(x_0, y_0)$ – імпульсний відгук дифракції Френеля,

$$h_F(x_0, y_0) = \frac{1}{j\lambda z} \exp \left[j \frac{\pi}{\lambda z} (x_0^2 + y_0^2) \right]. \quad (6.57)$$

Застосуємо теорему згортки до інтеграла (6.56). Тоді просторовий спектр розподілу амплітуди поля у площині спостереження

$$\tilde{V}_0(v_x, v_y) = \tilde{V}(v_x, v_y) H_F(v_x, v_y), \quad (6.58)$$

де $\tilde{V}(v_x, v_y) = F\{V(x_0, y_0)\}$; $F\{\}$ – оператор двовимірного перетворення Фур'є,

$$F\{V_0(x_0, y_0)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} V_0(x_0, y_0) \exp[-j2\pi(v_x x_0 + v_y y_0)] dx_0 dy_0; \quad (6.59)$$

$H_F(v_x, v_y)$ – передавальна функція дифракції Френеля,

$$H_F(v_x, v_y) = F\{h_F(x_0, y_0)\} = \exp[-j\pi\lambda z(v_x^2 + v_y^2)]; \quad (6.60)$$

v_x, v_y – просторові частоти,

$$v_x = \frac{x_0}{\lambda z}; \quad v_y = \frac{y_0}{\lambda z}. \quad (6.61)$$

6.6. Дифракція Фраунгофера

Подамо рівняння дифракції Френеля (6.56) у вигляді

$$V(x_0, y_0) = \frac{1}{j\lambda z} \exp \left[j \frac{\pi}{\lambda z} (x_0^2 + y_0^2) \right] \times \\ \times \iint_{-\infty}^{\infty} V(x, y) \exp \left[j \frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2) \right] \exp \left[-j \frac{2\pi}{\lambda z} (x_0 x + y_0 y) \right] dx dy. \quad (6.62)$$

Щоб спростити обчислення інтеграла (6.62) збільшуватимемо відстань z між екраном і площиною спостереження доти, поки не буде виконуватися умова

$$\exp \left[j \frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2) \right] \rightarrow 1, \text{ або } \frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2) \ll 1. \quad (6.63)$$

Із нерівності (6.63) маємо

$$z \gg \frac{\pi}{\lambda} (x^2 + y^2). \quad (6.64)$$

Частину простору за екраном, для якого виконується умова (6.64), називають *областю дифракції Фраунгофера*. Для визначених у п. 6.5 параметрів $z \gg 160$ м.

З урахуванням наближення Фраунгофера (6.64) амплітуда поля у точці P_0

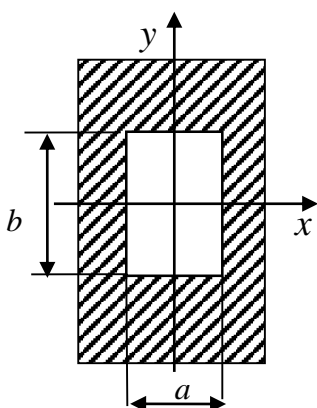
$$V(x_0, y_0) = \frac{1}{j\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} V(x, y) \exp \left[-j \frac{2\pi}{\lambda z} (x_0 x + y_0 y) \right] dx dy. \quad (6.65)$$

Вираз (2.65) називають *рівнянням дифракції Фраунгофера*. Цей вираз являє собою з точністю до множника $1/j\lambda z$ двовимірне перетворення Фур'є (6.59) від розподілу поля $V(x, y)$ у площині отвору для просторових частот (6.61).

6.7. Приклади розрахунку дифракції Фраунгофера

6.7.1. Прямокутний отвір

Розглянемо дифракцію Фраунгофера на отворі прямокутної форми розміром $a \times b$ (рис. 6.8). Амплітудний коефіцієнт пропускання такого отвору



$$t(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ коли } |x| \leq \frac{a}{2}; |y| \leq \frac{b}{2} \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases} \quad (6.66)$$

Нехай на екран нормально падає плоска монохроматична хвиля одиничної амплітуди $V_0 = 1$. Тоді амплітуда поля безпосередньо за екраном

$$V(x, y) = V_0 t(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ коли } |x| \leq \frac{a}{2}; |y| \leq \frac{b}{2} \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases} \quad (6.67)$$

Рис. 6.8. Екран із прямокутним отвором

Щоб знайти амплітуду поля у площині спостереження, підставимо функцію (6.67) у рівняння (6.65):

$$\begin{aligned} V(x_0, y_0) &= \frac{1}{j\lambda z} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \exp \left[-j \frac{2\pi}{\lambda z} (x_0 x + y_0 y) \right] dx dy = \\ &= \frac{1}{j\lambda z} \int_{-a/2}^{a/2} \exp \left(-j \frac{2\pi}{\lambda z} x_0 x \right) dx \int_{-b/2}^{b/2} \exp \left(-j \frac{2\pi}{\lambda z} y_0 y \right) dy = \frac{1}{j\lambda z} I(x_0) I(y_0). \end{aligned} \quad (6.68)$$

Обчислимо інтеграли у виразі (6.68):

$$\begin{aligned} I(x_0) &= \frac{1}{-j \frac{2\pi}{\lambda z} x_0} \exp \left(-j \frac{2\pi}{\lambda z} x_0 x \right) \Big|_{-a/2}^{a/2} = \\ &= \frac{1}{-j \frac{2\pi}{\lambda z} x_0} \left[\exp \left(-j \frac{\pi}{\lambda z} x_0 a \right) - \exp \left(j \frac{\pi}{\lambda z} x_0 a \right) \right] = a \frac{\sin \left(\frac{\pi a}{\lambda z} x_0 \right)}{\frac{\pi a}{\lambda z} x_0}. \end{aligned} \quad (6.69)$$

Аналогічно

$$I(y_0) = b \frac{\sin \left(\frac{\pi b}{\lambda z} y_0 \right)}{\frac{\pi b}{\lambda z} y_0}. \quad (6.70)$$

Тоді, з урахуванням інтегралів (6.69) і (6.70), маємо:

$$V(x_0, y_0) = \frac{ab}{j\lambda z} \frac{\sin \left(\frac{\pi a}{\lambda z} x_0 \right)}{\frac{\pi a}{\lambda z} x_0} \frac{\sin \left(\frac{\pi b}{\lambda z} y_0 \right)}{\frac{\pi b}{\lambda z} y_0} = \frac{ab}{j\lambda z} \operatorname{sinc} \left(\frac{a}{\lambda z} x_0 \right) \operatorname{sinc} \left(\frac{b}{\lambda z} y_0 \right), \quad (6.71)$$

де $\operatorname{sinc}(x) = \sin(\pi x) / \pi x$ – sinc-функція.

Приймачі оптичного випромінювання реєструють не амплітуду поля $V(x_0, y_0)$, а його інтенсивність: $I(x_0, y_0) = |V|^2 = V \cdot V^*$. Тоді

$$I(x_0, y_0) = |V(x_0, y_0)|^2 = \left(\frac{ab}{\lambda z}\right)^2 \left[\text{sinc}\left(\frac{a}{\lambda z} x_0\right) \text{sinc}\left(\frac{b}{\lambda z} y_0\right) \right]^2. \quad (6.72)$$

Визначимо інтенсивність у центрі дифракційної картини, коли $x_0 = y_0 = 0$, використовуючи границю $\sin x/x = 1$, коли $x \rightarrow 0$. Із виразу (6.72) маємо $I(0,0) = (ab/\lambda z)^2$.

Одновимірний розподіл нормованої інтенсивності $I_n(x_0, 0) = I(x_0, 0)/I(0,0)$ подано на рис. 6.9. З аналізу функції (6.72) видно, що інтенсивність поля дорівнює нулю в точках з координатами

$$\left(\frac{m\lambda z}{a}, y_0\right) \text{ та } \left(x_0, \frac{n\lambda z}{b}\right), \quad (6.73)$$

де m, n – цілі числа.

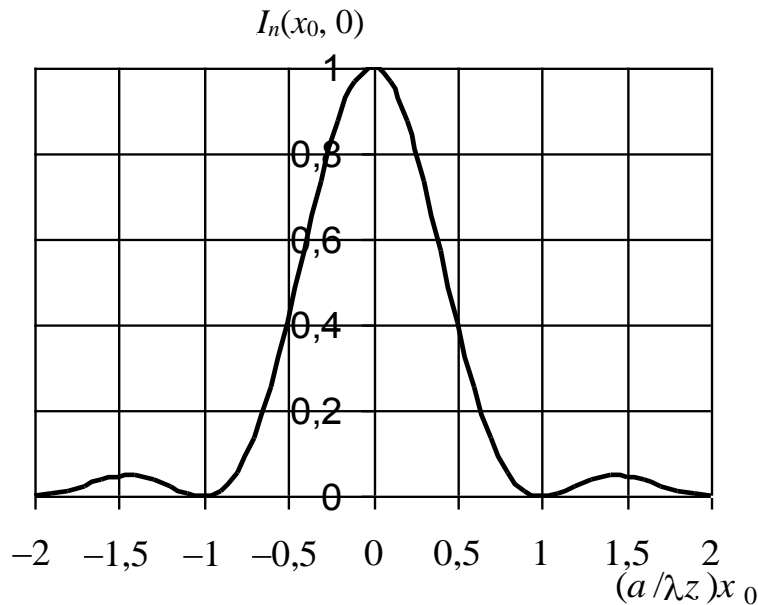


Рис. 6.9. Одновимірний розподіл інтенсивності світла під час дифракції Фраунгофера на прямокутному отворі

Розподіл поля під час дифракції на плоскому екрані можна розглядати як функцію кута дифракції (рис. 6.10):

$$\sin\varphi_d = \frac{x_0}{r} \approx \varphi_d \approx \frac{x_0}{z}. \quad (6.74)$$

Визначимо, наприклад, кутове положення першого дифракційного мінімуму. Із рис. 6.10, функції (6.72) і виразу (6.74) знаходимо, що

$$\varphi_{d1,min} = \frac{\lambda}{a}. \quad (6.75)$$

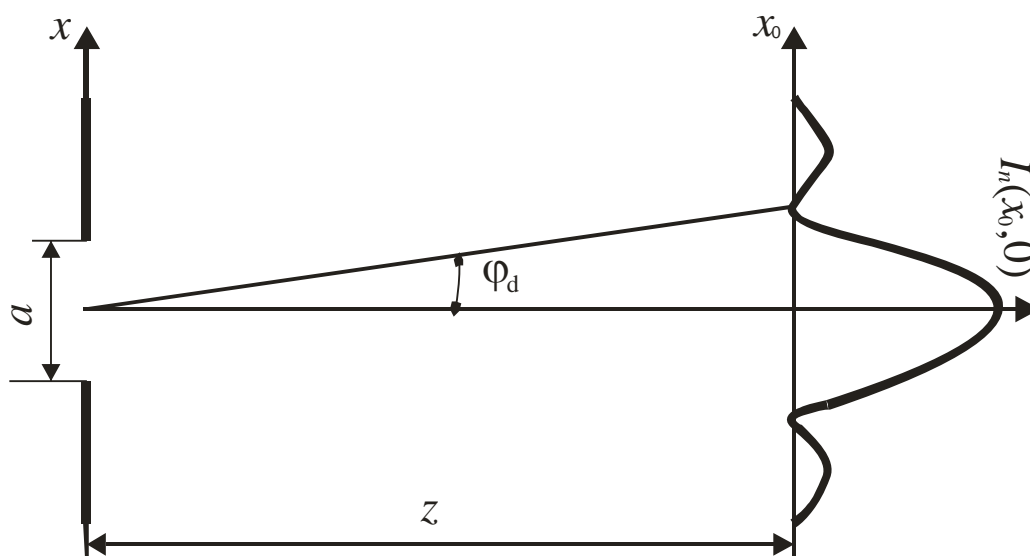


Рис. 6.10. Одновимірний розподіл інтенсивності світла вздовж осі x_0 під час дифракції Фраунгофера на прямокутному отворі

6.7.2. Щілина

Будемо розглядати щілину, як прямокутний отвір розміром $a \times b$, коли $a \gg b$ (рис. 6.8). За цих умов розподіл амплітуди поля в площині спостереження $x_0 y_0$ для параксильної області описується рівнянням (6.71), а відстань між сусідніми мінімумами визначається із співвідношення (6.73). Це означає, що для щілини, коли $a \gg b$, максимуми уздовж координати x_0 зливаються, а сама дифракційна картина являє собою смуги, паралельні осі x_0 .

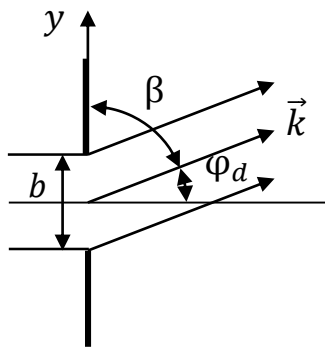
Визначимо розподіл амплітуди поля для довільних кутів дифракції φ_d . Для цього розглянемо рівняння плоскої хвилі для одновимірного випадку. Скалярна амплітуда такої хвилі описується рівнянням [9]

$$V(y) = V_0 \exp\left(-j \frac{2\pi}{\lambda} y \cos\beta\right), \quad (6.76)$$

де β – кут між напрямком розповсюдження плоскої хвилі і віссю \vec{y} , який дорівнює $\beta = 90^\circ - \varphi_d$ (рис. 6.11). Тому рівняння дифракції Фраунгофера на щілині можна розглядати як одновимірне перетворення Фур'є

$$V(y_0) = V(\varphi_d) = \frac{ab}{j\lambda z} F\{V(y)\}, \quad (6.76')$$

де $V(y)$ – розподіл амплітуди поля за щілиною; $F\{ \ }$ – оператор перетворення Фур'є (6.59) для кутової просторової частоти



$$v_y = \frac{\cos\beta}{\lambda} = \frac{\sin\varphi_d}{\lambda}. \quad (6.77)$$

Просторовий спектр розподілу амплітуди поля за щілиною згідно (6.71) для просторової частоти (6.77) дорівнює

$$V(\varphi_d) = F\{V(y)\} = \frac{ab}{j\lambda z} \frac{\sin\left(\pi b \frac{\sin\varphi_d}{\lambda}\right)}{\pi b \frac{\sin\varphi_d}{\lambda}}. \quad (6.78)$$

Рис. 6.11. Схема дифракції Фраунгофера на щілині

Дифракція Фраунгофера, як було обґрунтовано в п. 6.8, спостерігається на великій

відстані від екрана, тобто промені, які після дифракції під кутом φ_d , розповсюджуються у вигляді паралельного пучка і утворюють в результаті інтерференції дифракційну картину в нескінченності. Щоб утворити дифракційну картину на кінцевій відстані необхідно звести паралельні промені в точку за допомогою додатної лінзи.

Визначимо положення дифракційних мінімумів і максимумів при дифракції світла на щілині, яка описується формулою (6.78). Для цього необхідно розв'язати два рівняння:

- Для знаходження мінімумів

$$\frac{\sin\left(\pi b \frac{\sin\varphi_d}{\lambda}\right)}{\pi b \frac{\sin\varphi_d}{\lambda}} = 0.$$

Звідки

$$\pi b \frac{\sin\varphi_{d,min,m}}{\lambda} = m\pi \Rightarrow \varphi_{d,min,m} = \arcsin\left(m \frac{\lambda}{b}\right). \quad (6.79)$$

Для малих кутів дифракції

$$\varphi_{d,min,m} = m \frac{\lambda}{b}, \quad (6.80)$$

що співпадає з формулою (6.75).

Лінійне положення m -го мінімуму в фокальній площині лінзи з фокусною відстанню f визначається за формулою

$$y_{0,min,m} = f \cdot \operatorname{tg} \varphi_{d,min,m}. \quad (6.81)$$

- Для знаходження максимумів

$$\frac{d}{d\varphi_d} \left[\frac{\sin\left(\pi b \frac{\sin\varphi_d}{\lambda}\right)}{\pi b \frac{\sin\varphi_d}{\lambda}} \right] = 0. \quad (6.82)$$

Звідки $\operatorname{tg}\left(\pi b \frac{\sin\varphi_d}{\lambda}\right) = \pi b \frac{\sin\varphi_d}{\lambda}$. Розв'язок цього трансцендентного рівняння дозволяє отримати кут дифракції $\varphi_{d,max,m}$.

6.7.3. Круглий отвір

Розглянемо дифракцію Фраунгофера на круглому отворі, який має радіус R (рис. 6.12). Амплітудний коефіцієнт пропускання такого отвору

$$t(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{коли } 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (6.83)$$

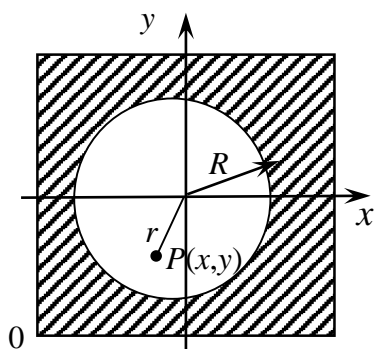


Рис. 6.12. Екран із круглим отвором

Нехай на екран нормально падає плоска монохроматична хвиля одиничної амплітуди $V_0 = 1$. Тоді для функції (6.83) амплітуда поля безпосередньо за екраном

$$V(x, y) = V_0 t(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{коли } 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (6.84)$$

Оскільки вираз (6.84) є вісесиметричною функцією, запишемо його і рівняння дифракції Фраунгофера (6.65) у полярній системі координат, використовуючи перетворення Фур'є–Бесселя:

$$F\{V(x, y)\} = B\{V(r)\} = 2\pi \int_0^\infty V(r) J_0(2\pi r \rho) r dr, \quad (6.85)$$

де $B\{\}$ – оператор перетворення Фур'є–Бесселя; J_0 – функція Бесселя нульового порядку; r – радіус точки $P(x, y)$ у полярній системі координат (рис. 6.12), $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; ρ – радіус просторової частоти в полярній системі координат, $\rho = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, з урахуванням виразу (6.61) маємо

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{x_0}{\lambda z}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{\lambda z}\right)^2} = \frac{1}{\lambda z} \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \frac{r_0}{\lambda z}. \quad (6.86)$$

Тоді рівняння дифракції Фраунгофера (6.65) у полярній системі координат з урахуванням виразів (6.85) і (6.86) матиме вигляд

$$V(x_0, y_0) = V(r_0) = \frac{2\pi}{j\lambda z} \int_0^\infty V(r) J_0\left(2\pi \frac{r_0}{\lambda z} r\right) r dr, \quad (6.87)$$

де $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$;

$$V(x, y) = V(r) = \begin{cases} 1, & \text{коли } 0 \leq r \leq R; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (6.88)$$

Підставимо функцію (6.88) у рівняння (6.87):

$$V(r_0) = \frac{2\pi}{j\lambda z} \int_0^R 1 \cdot J_0\left(2\pi \frac{r_0}{\lambda z} r\right) r dr. \quad (6.89)$$

Для обчислення виразу (6.89) скористаємося табличним інтегралом із довідника [10]:

$$\int_0^z x J_0(x) dx = z J_1(z), \quad (6.90)$$

де J_0 і J_1 – функції Бесселя нульового і першого порядку.

Замінімо змінні:

$$2\pi \frac{r_0}{\lambda z} r = x, \quad r = \frac{\lambda z}{2\pi r_0} x, \quad dr = \frac{\lambda z}{2\pi r_0} dx. \quad (6.91)$$

Тоді інтеграл (6.89), з урахуванням (6.90) і (6.91), набуде вигляду

$$V(r_0) = \frac{2\pi}{j\lambda z} \int_0^{2\pi \frac{r_0 R}{\lambda z}} J_0(x) \frac{\lambda z}{2\pi r_0} x \frac{\lambda z}{2\pi r_0} dx = \frac{2\pi}{j\lambda z} \left(\frac{\lambda z}{2\pi r_0}\right)^2 2\pi \frac{r_0}{\lambda z} R J_1\left(2\pi \frac{r_0}{\lambda z} R\right) =$$

$$= \frac{2\pi}{j} \frac{R}{2\pi r_0} \left[2 \frac{J_1\left(2\pi \frac{r_0 R}{\lambda z}\right)}{2\pi \frac{r_0 R}{\lambda z}} \right] \frac{2\pi R}{2\lambda z} r_0 = \frac{\pi R^2}{j\lambda z} \left[2 \frac{J_1\left(2\pi \frac{r_0 R}{\lambda z}\right)}{2\pi \frac{r_0 R}{\lambda z}} \right]. \quad (6.92)$$

Розподіл інтенсивності під час дифракції на круглому отворі можна описати виразом

$$I(r_0) = |V(r_0)|^2 = \left(\frac{\pi R^2}{\lambda z}\right)^2 \left[2 \frac{J_1\left(2\pi \frac{R}{\lambda z} r_0\right)}{2\pi \frac{R}{\lambda z} r_0} \right]^2, \quad (6.93)$$

де $V(r_0)$ – функція (6.92).

Розподіл інтенсивності (6.93) називають *картиною Ейрі*. Інтенсивність у центрі картини Ейрі знайдемо з виразу (6.93), використовуючи границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2J_1(x)}{x} = 1. \quad (6.94)$$

Тоді, з урахуванням (6.94),

$$I(r_0 = 0) = \left(\frac{\pi R^2}{\lambda z}\right)^2. \quad (6.95)$$

Нормований розподіл інтенсивності (6.93) з урахуванням інтенсивності (6.95) матиме вигляд

$$I_n(r_0) = \frac{I(r_0)}{I(0)} = \left[2 \frac{J_1\left(2\pi \frac{R}{\lambda z} r_0\right)}{2\pi \frac{R}{\lambda z} r_0} \right]^2. \quad (6.96)$$

Дифракційна картина Ейрі являє собою яскравий *кружок Ейрі*, навколо якого розміщені світлі кільця невеликої інтенсивності. Положення мінімумів можна знайти із розв'язку рівняння $J_1(2\pi R r_0 / \lambda z) = 0$, а положення максимумів – із рівняння

$$\frac{d}{dr_0} \left[2 \frac{J_1\left(2\pi \frac{R}{\lambda z} r_0\right)}{2\pi \frac{R}{\lambda z} r_0} \right] = 0. \quad (6.97)$$

Щоб розв'язати рівняння (6.97), скористаємося співвідношенням 9.1.30 з довідника [10], яке можна подати у вигляді

$$\frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x). \quad (6.98)$$

Тоді рівняння (6.97) набуває вигляду $J_2(2\pi R r_0 / \lambda z) = 0$.

Значення нормованої інтенсивності у послідовних максимумах і мінімумах картини Ейрі наведено у табл. 6.1, а графік функції (6.96) зображено на рис. 6.13.

Визначимо радіус кружка Ейрі, використовуючи дані табл. 6.1:

$$r_E = r_{0,min,1} = 1,22 \frac{\lambda z}{2R}. \quad (6.99)$$

Кутовий розмір кружка Ейрі

$$\varphi_E = \frac{r_E}{z} = 1,22 \frac{\lambda}{2R}. \quad (6.100)$$

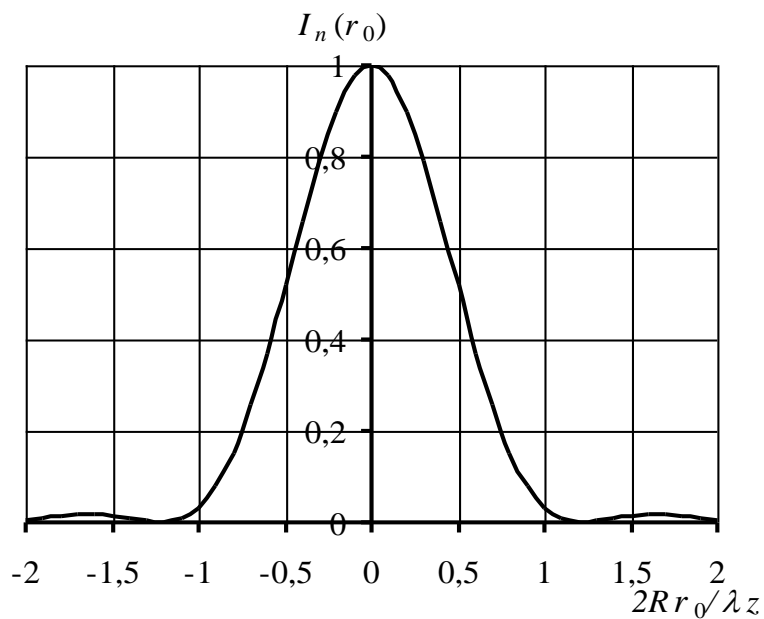


Рис. 6.13. Одновимірний розподіл інтенсивності світла за дифракції Фраунгофера на круглому отворі

Таблиця 6.1

**Екстремальні значення нормованої інтенсивності
у дифракційній картині Ейрі**

$2Rr_0/\lambda z$	0	1,22	1,64	2,33	2,68	3,24
$\left[2 \frac{J_1(2\pi Rr_0/\lambda z)}{2\pi Rr_0/\lambda z} \right]^2$	1	0	0,018	0	0,004	0

Радіус кружка Ейрі (6.99) або (6.100) визначає дифракційну межу просторового розділення оптичної системи, яка формує зображення.

Визначимо частку світлової енергії, що міститься в центрі дифракційної картини Ейрі, обмеженої колом із радіусом R_0 :

$$L(R_0) = \frac{\Phi(R_0)}{\Phi(\infty)} = \frac{2\pi \int_0^{R_0} I(r_0)r_0 dr_0}{\pi R^2}, \quad (6.101)$$

де $\Phi(R_0)$ – потік світла, що перебуває в межах кола з радіусом R_0 ; $\Phi(\infty) = I_0 S_\Sigma = \pi R^2$ – повний потік світла, що проходить через круглий отвір площею S_Σ і формує всю дифракційну картину Ейрі.

Підставимо вираз (6.93) у рівняння (6.101):

$$L(R_0) = \frac{2\pi}{\pi R^2} \left(\frac{\pi R^2}{\lambda z}\right)^2 \int_0^{R_0} \left[2 \frac{J_1\left(2\pi \frac{R}{\lambda z} r_0\right)}{2\pi \frac{R}{\lambda z} r_0}\right]^2 r_0 dr_0. \quad (6.102)$$

Обчисливши інтеграл у виразі (6.102), отримаємо такий результат (див. приклад 6.4):

$$L(R_0) = 1 - J_0^2\left(2\pi \frac{R}{\lambda z} R_0\right) - J_1^2\left(2\pi \frac{R}{\lambda z} R_0\right). \quad (6.103)$$

Співвідношення (6.103) називають *формулою Релея*. Для темних кілець $J_1 = 0$, і тому частина повного потоку за межами темного кільця дорівнює J_0^2 . Для кружка Ейрі

$$L(r_E) = 1 - J_0^2\left(2\pi \frac{R}{\lambda z} 1,22 \frac{\lambda z}{2R}\right) = 1 - J_0^2(1,22\pi) = 0,838.$$

Це означає, що в межах кружка Ейрі зосереджено 83,8 % усієї світлової енергії.

6.7.4. Синусоїдальна дифракційна ґратка

Розглянемо дифракцію Фраунгофера на косинусоїдальній дифракційній ґратці, амплітудний коефіцієнт пропускання якої описують функцією (рис. 6.14)

$$t(x, y) = \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos(2\pi\nu_0 x)\right] \times \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{b}\right), \quad (6.104)$$

де ν_0 – просторова частота ґратки; $a \times b$ – розмір ґратки; t – глибина модуляції;

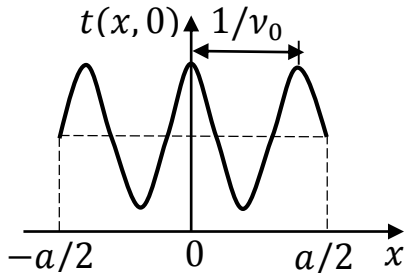


Рис. 6.14. Амплітудний коефіцієнт пропускання косинусоїдальної дифракційної ґратки

$\text{rect}(x)$ – прямокутна rect -функція,

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1, & \text{коли } |x| \leq 1/2; \\ 0 & \text{в інших випадках} \end{cases} \quad (6.105)$$

Нехай на таку ґратку нормально падає плоска монохроматична хвиля одиничної амплітуди $V_0 = 1$. Тоді амплітуда поля безпосередньо за ґраткою

$$V(x, y) = V_0 t(x, y) = \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos(2\pi\nu_0 x) \right] \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{b}\right). \quad (6.106)$$

Підставимо функцію (6.106) у рівняння дифракції Фраунгофера (6.65) і подамо його у вигляді

$$\begin{aligned} V(x_0, y_0) &= \frac{1}{j\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} t(x, y) \exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda z}(x_0 x + y_0 y)\right] dx dy = \\ &= \frac{1}{j\lambda z} F\left\{\left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos(2\pi\nu_0 x)\right] \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{b}\right)\right\}, \end{aligned} \quad (6.107)$$

де $F\{\}$ – оператор двовимірного перетворення Фур'є для просторових частот (6.61).

Застосуємо теорему згортки $F\{f_1(x) \cdot f_2(x)\} = F\{f_1(x)\} * F\{f_2(x)\}$ до рівняння (6.107):

$$V(x_0, y_0) = \frac{1}{j\lambda z} F\left\{\left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos(2\pi\nu_0 x)\right]\right\} ** F\left\{\text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{b}\right)\right\}, \quad (6.108)$$

де $**$ – оператор двовимірної згортки.

Визначимо перетворення Фур'є окремих компонентів у рівнянні (6.108):

$$\begin{aligned} F_1 &= F\left\{\left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos(2\pi\nu_0 x)\right]\right\} = \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2} \frac{1}{2} (e^{j2\pi\nu_0 x} + e^{-j2\pi\nu_0 x})\right] \exp[-j2\pi(\nu_x x + \nu_y y)] dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi\nu_y y} dy \times \end{aligned}$$

$$\times \left[\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi v_x x} dx + \frac{m}{4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(v_x - v_0)x} dx + \frac{m}{4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(v_x + v_0)x} dx \right]. \quad (6.109)$$

Скористаємося інтегральним поданням дельта-функції:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j2\pi z_0 z} dz = \delta(z_0). \quad (6.110)$$

Тоді вираз (6.109) з урахуванням інтеграла (6.110) матиме вигляд

$$F_1 = \delta(v_y) \left[\frac{1}{2} \delta(v_x) + \frac{m}{4} \delta(v_x - v_0) + \frac{m}{4} \delta(v_x + v_0) \right]. \quad (6.111)$$

Крім того, згідно (6.71)

$$F_2 = F \left\{ \text{rect} \left(\frac{x}{a} \right) \text{rect} \left(\frac{y}{b} \right) \right\} = ab \text{sinc}(av_x) \text{sinc}(bv_y). \quad (6.112)$$

Підставимо вирази (6.111) і (6.112) у рівняння (6.108):

$$V(x_0, y_0) = \frac{1}{j\lambda z} \{F_1 ** F_2\} = \frac{1}{j\lambda z} \times \\ \times \left\{ \delta(v_y) \left[\frac{1}{2} \delta(v_x) + \frac{m}{4} \delta(v_x - v_0) + \frac{m}{4} \delta(v_x + v_0) \right] ** ab \text{sinc}(av_x) \text{sinc}(bv_y) \right\}. \quad (6.113)$$

Скористаємося фільтрувальною властивістю дельта-функції:

$$f(z) * \delta(z - z_0) = f(z - z_0). \quad (6.114)$$

Тоді рівняння (6.113) з урахуванням (6.114) матиме вигляд

$$V(x_0, y_0) = \frac{ab}{j\lambda z} \text{sinc}(bv_y) \times \\ \times \left\{ \frac{1}{2} \text{sinc}(av_x) + \frac{m}{4} \text{sinc}[a(v_x - v_0)] + \frac{m}{4} \text{sinc}[a(v_x + v_0)] \right\}. \quad (6.115)$$

Отримана функція (6.115) описує розподіл амплітуди поля при дифракції Фраунгофера на амплітудній синусоїдальній дифракційній ґратці (6.104). За достатньо великої просторової частоти v_0 дифракційної ґратки sinc -функції у виразі (6.115) зміщені одна відносно одної і не перекриваються, тому амплітуда поля у центрі дифракційної картини $V(0,0) = ab/j2\lambda z$.

Нормований розподіл інтенсивності в дифракційній картині визначають так:

$$I_n(x_0, y_0) = \left| \frac{V(x_0, y_0)}{V(0,0)} \right|^2 = \text{sinc}^2 \left(b \frac{y_0}{\lambda z} \right) \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{4} \operatorname{sinc}^2 \left(a \frac{x_0}{\lambda z} \right) + \frac{m^2}{16} \operatorname{sinc}^2 \left[\frac{a}{\lambda z} (x_0 - \lambda z \nu_0) \right] + \frac{m^2}{16} \operatorname{sinc}^2 \left[\frac{a}{\lambda z} (x_0 + \lambda z \nu_0) \right] \right\}. \quad (6.116)$$

З аналізу функції (6.116) видно, що дифракційна картина має три головних максимуми – центральний і два бокових. Відстань між центральним і боковими максимумами визначається просторовою частотою дифракційної ґратки ν_0 і становить $\lambda z \nu_0$. Ширина головних максимумів пропорційна $\lambda z/a$, тому роздільна здатність дифракційної ґратки

$$R = \frac{\lambda z \nu_0}{\lambda z/a} = a \nu_0 = N_d, \quad (6.117)$$

де N_d – кількість штрихів (періодів) у дифракційній ґратці (рис. 6.14).

Графік функції (6.116), який отримано за умови, що головні максимуми не перекриваються, подано на рис. 6.15.

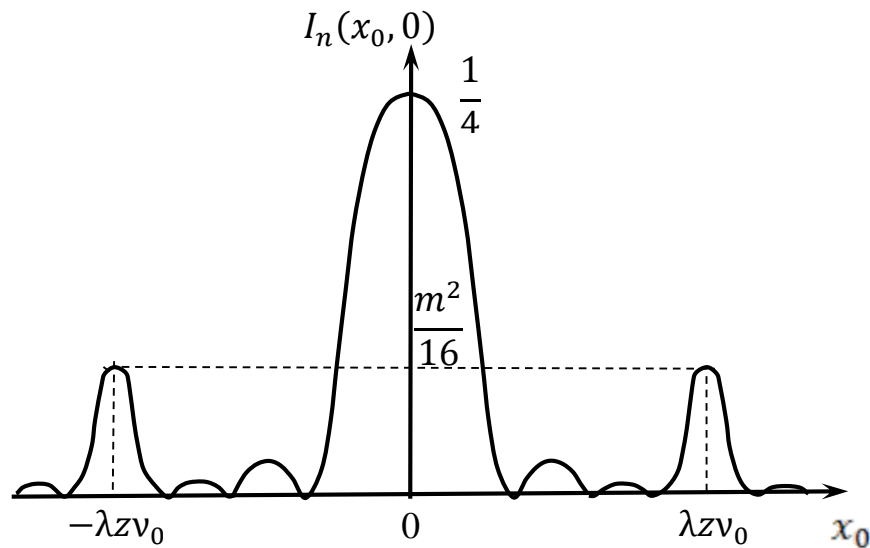


Рис. 6.15. Нормований розподіл інтенсивності для дифракції Фраунгофера на синусоїдальній дифракційній ґратці

6.8. Дифракційна ґратка

6.8.1. Теоретичні основи роботи дифракційної ґратки

Дифракційна ґратка – це оптичний елемент періодичної структури, на якій відбувається дифракція світла. Дифракційна ґратка здійснює модуляцію падаючої світлової хвилі по амплітуді або/і фазі.

Прикладом дифракційної ґратки може бути набір паралельно розташованих непрозорих штрихів шириною a і періодом d на прозорій пластині. На прозорих щілинах шириною b відбувається дифракція Фраунгофера, а дифраговані промені від кожної щілини інтерферують між собою, утворюючи інтерференційну картину в фокальній площині лінзи (рис. 6.16).

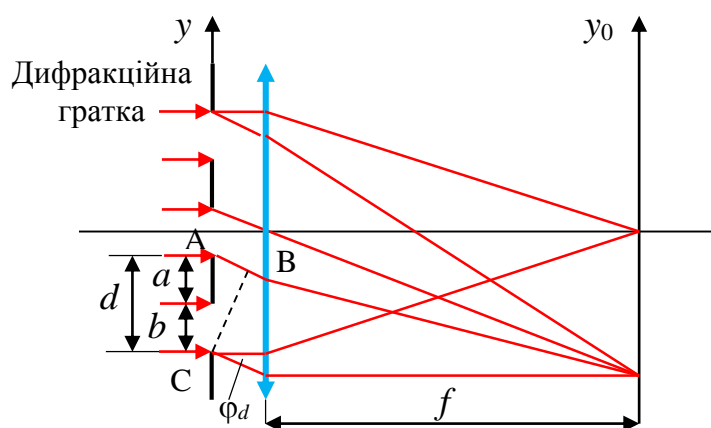


Рис. 6.16. Схема дифракційної ґратки

Розрахуємо амплітуду поля, яку формує дифракційна ґратка в площині спостереження. Для цього можна скористатись рівнянням дифракції Фраунгофера, як це було зроблено в п. 6.7.2 для щілини. Однак більш наочно і простіше провести аналіз методом складання комплексних амплітуд.

Нормовану амплітуду хвилі (6.78), яка утворюється в результаті дифракції на одній щілині у напрямку кута дифракції φ_d , подамо у такому вигляді

$$V(\varphi_d) = \frac{\sin \xi}{\xi}, \quad (6.118)$$

де $\xi = \pi b \frac{\sin \varphi_d}{\lambda}$.

Дифраговані від щілин хвилі інтерферують між собою і утворюють дифракційну картину. **Таким чином, дифракційна картина від ґратки є результат дифракції хвиль від кожної щілини і інтерференції хвиль від різних щілин.**

Розглянемо інтерференцію хвиль від щілин. Різниця ходу хвиль від двох сусідніх щілин і різниця фаз між ними дорівнює (рис. 6.16)

$$AB = \Delta = AC \sin \varphi_d = d \sin \varphi_d; \Delta \varphi = \delta = k \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi_d. \quad (6.119)$$

Нехай хвиля, яка розповсюджується під кутом дифракції φ_d від першої щілини, має амплітуду V_1 і визначається рівнянням (6.118). Тоді амплітуди хвиль від інших щілин будуть мати амплітуди $V_2 = V_1 e^{-j\delta}$, $V_3 = V_1 e^{-j2\delta}$, ..., $V_N = V_1 e^{-j(N-1)\delta}$. В результаті інтерференції цих хвиль утворюється дифракційна картина з амплітудою

$$\begin{aligned} V_d(\varphi_d) &= V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_N = \\ &= V_1 + V_1 e^{-j\delta} + V_1 e^{-j2\delta} + \dots + V_1 e^{-j(N-1)\delta} = V_1 \frac{1 - e^{-jN\delta}}{1 - e^{-j\delta}}. \end{aligned} \quad (6.120)$$

При отриманні останнього виразу використана формула для суми геометричної прогресії

$$S_N = \frac{a_1 - q a_N}{1 - q}, \quad (6.121)$$

де $a_1 = 1$; $a_N = e^{-j(N-1)\delta}$; $q = e^{-j\delta}$.

Враховуючи, що

$$S_N = \frac{1 - e^{-jN\delta}}{1 - e^{-j\delta}} = \frac{e^{-jN\delta/2} e^{jN\delta/2} - e^{-jN\delta/2}}{e^{-j\delta/2} e^{j\delta/2} - e^{-j\delta/2}} = e^{-j\frac{N-1}{2}\delta} \frac{\sin \frac{N}{2}\delta}{\sin \frac{\delta}{2}},$$

і використовуючи (6.118), отримаємо амплітуду поля в дифракційній картині

$$V_d(\varphi_d) = \frac{\sin \xi}{\xi} e^{-j\frac{N-1}{2}\delta} \frac{\sin \frac{N}{2}\delta}{\sin \frac{\delta}{2}}. \quad (6.122)$$

Інтенсивність в дифракційній картині визначається виразом

$$I_d(\varphi_d) = \left(\frac{\sin \xi}{\xi} \right)^2 \left(\frac{\sin \frac{N}{2}\delta}{\sin \frac{\delta}{2}} \right)^2. \quad (6.123)$$

Із формули (6.119) видно, що при виконанні умови

$$d \sin \varphi_d = m \lambda, \quad (6.124)$$

де $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, хвилі, що дифраговані від сусідніх щілин підсилюють одна одну. Це означає, що рівняння (6.124) визначає напрямки, в якому формуються *головні максимуми*.

За умови (6.124) маємо, що

$$\frac{\sin \frac{N}{2} \delta}{\sin \frac{\delta}{2}} = \frac{\sin \left(N \frac{\pi}{\lambda} d \sin \varphi_d \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{\lambda} d \sin \varphi_d \right)} = \frac{\sin \left(N \frac{\pi}{\lambda} m \lambda \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{\lambda} m \lambda \right)} = \frac{\sin(N\pi m)}{\sin(\pi m)} = N.$$

Тому рівняння (6.123) для головних максимумів матиме вигляд

$$I_d(\varphi_{d,m,max}) = N^2 \left(\frac{\sin \xi}{\xi} \right)^2. \quad (6.125)$$

На рис. 6.17 зображено процес формування дифракційної картини. Аналіз функцій (6.123) і (6.125), показує, що головні максимуми модулюються дифракцією $\left(\frac{\sin \xi}{\xi} \right)^2$ від окремих щілин. Максимальне значення функції $\left(\frac{\sin \xi}{\xi} \right)^2 = 1$ відповідає центральному максимуму, для якого $\varphi_d = 0$, коли $m = 0$.

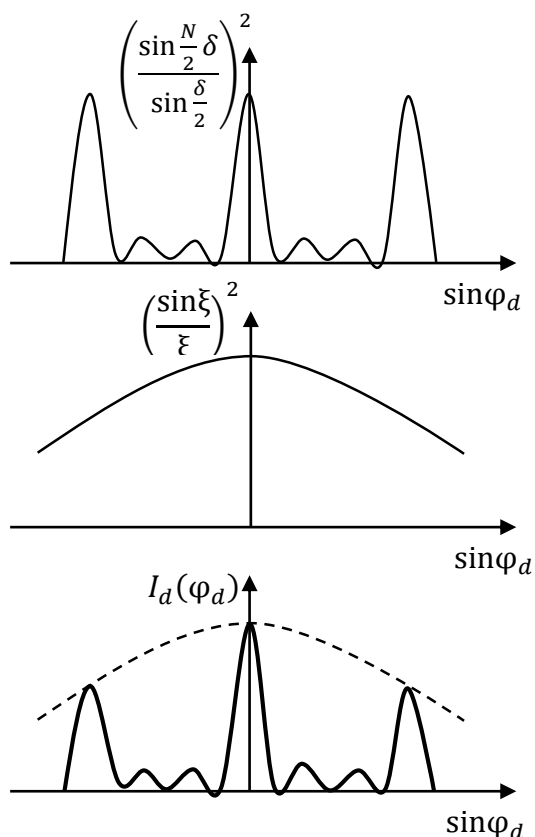


Рис. 6.17. Вигляд дифракційної картини від чотирьох щілин

Очевидно, що між головними максимумами існують мінімуми, які визначаються із рівняння

$$\sin \frac{N}{2} \delta = 0. \quad (6.126)$$

Із рівнянь (6.119) і (6.126) маємо

$$\frac{N}{2} \delta = \frac{N}{2} \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi_{d,n,min} = n\pi \Rightarrow d \sin \varphi_{d,n,min} = \frac{n}{N} \lambda. \quad (6.127)$$

Аналіз рівняння дифракційних мінімумів (6.127) показує, що для випадку, коли $n/N = m$, рівняння (6.127) перетворюється в рівняння головних максимумів (6.124), тобто мінімуми стають максимумами. Це означає, що між двома головними максимумами розташовані $N - 1$ мінімумів. Очевидно, між мінімумам повинні бути $N - 2$ вторинних максимумів.

Визначимо інтенсивність світла в m -ом головному максимумі. На підставі формул (6.118) і (6.125) маємо

$$I_{m,max} = N^2 \left(\frac{\sin \xi}{\xi} \right)^2 = N^2 \left[\frac{\sin \left(\pi b \frac{\sin \varphi_d}{\lambda} \right)}{\pi b \frac{\sin \varphi_d}{\lambda}} \right]^2 = N^2 \left[\frac{\sin \left(\frac{\pi b}{d} m \right)}{\frac{\pi b}{d} m} \right]^2. \quad (6.128)$$

Із формули (6.128) маємо, що інтенсивність головних максимумів $I_{m,max}$ зменшується із збільшенням порядку дифракції m . Крім того, m -й максимум зникає, коли виконується умова $\frac{bm}{d} = m'$ дорівнює цілому числу. Наприклад, якщо $b = d/3$, то зникає кожен третій максимум, а якщо $b = d/2$, то зникають парні максимуми.

6.8.2. Основні характеристики дифракційної ґратки

1. **Кутова і лінійна дисперсія.** Кутова дисперсія ґратки D_a характеризує зміну кутового положення $\delta \varphi_d$ головних максимумів при зміні довжини хвилі $\delta \lambda$ (рис. 6.18), тобто

$$D_a = \frac{\delta \varphi_d}{\delta \lambda}. \quad (6.129)$$

Шляхом диференціювання основного рівняння дифракційної ґратки (6.124) отримаємо, що $d \cos \varphi_d \delta \varphi_d = m \delta \lambda$. Тоді

$$D_a = \frac{m}{d \cos \varphi_d}. \quad (6.130)$$

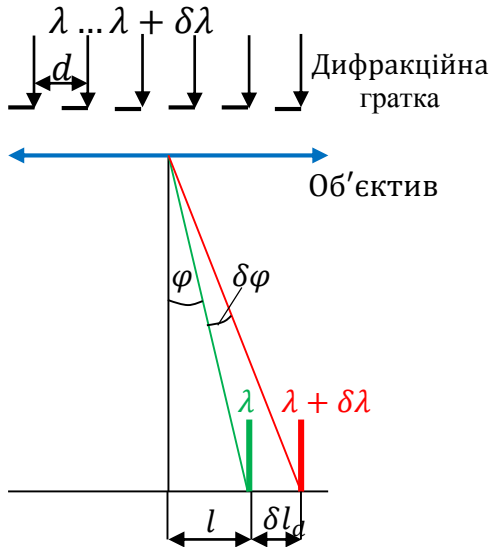


Рис. 6.18. До визначення кутової і лінійної дисперсії дифракційної ґратки

При малих кутах дифракції $D_a = m/d$.

Для отримання великої кутової дисперсії необхідно використовувати великі порядки дифракції m . В той же час згідно (6.128) інтенсивність головних максимумів $I_{m,max} \sim (N/m)^2$ зменшується із збільшенням порядку дифракції m . Тому доцільно використовувати малі порядки m з великим числом штрихів.

Лінійна дисперсія ґратки D_a

характеризує зміну просторового положення δl_d головних максимумів при зміні довжини хвилі $\delta \lambda$ (рис. 6.18), тобто

$$D_l = \frac{\delta l_d}{\delta \lambda} = f D_a, \quad (6.131)$$

f – фокусна відстань об'єктива.

2. Дисперсійна область. Розглянемо дифракцію білого світла на ґратці. Кожна із хвиль різної довжини хвилі λ формує свою дифракційну картину. Із умови (6.124) $d \sin \varphi_d = m \lambda$ видно, що кут дифракції φ_d для фіксованого порядку m збільшується із збільшенням λ . Для нульового порядку дифракції $m = 0$ центральний максимум $\varphi_d = 0$ співпадає для усіх довжин хвиль. Тому в центрі утворюється біла смуга. Потім іде перший порядок дифракції $m = 1$, а потім інші порядки. Максимуми сусідніх порядків не перекиваються, коли максимум m -го порядку для довжини хвилі $\lambda + \Delta \lambda$ має менший кут дифракції, ніж кут дифракції для максимуму $m + 1$ -го порядку для довжини хвилі λ .

Область дисперсії (робочий спектральний діапазон) $\Delta\lambda$ дифракційної ґратки визначається інтервалом довжин хвиль, вільним від перекриття спектрів сусідніх порядків. Перекриття починається, коли положення максимум m -го порядку для довжини хвилі $\lambda + \Delta\lambda$ співпадає з положенням максимуму $m + 1$ -го порядку для довжини хвилі λ , тобто $\varphi_{d,max,m,\lambda+\Delta\lambda} = \varphi_{d,max,m+1,\lambda}$. Із рівняння (6.124) маємо, що

$$\frac{m(\lambda+\Delta\lambda)}{d} = \frac{(m+1)\lambda}{d}.$$

Звідки

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}. \quad (6.132)$$

Із формули (6.132) видно, що дисперсійну область можна збільшити шляхом використання великих порядків спектра.

3. **Роздільна здатність** дифракційної ґратки визначається аналогічно як і для інтерферометра Фабрі-Перо, тобто мінімальною різницею довжин хвиль $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ спектральних ліній λ_1 і λ_2 , при якій ці лінії (максимуми)

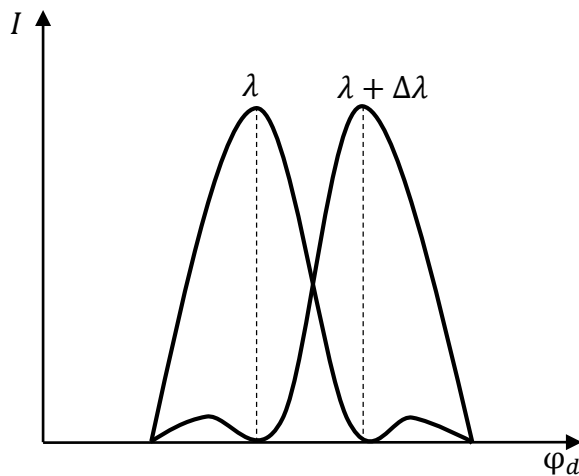


Рис. 6.19. Критерій розділення Релея

$mN + 1$, тобто

$$d\sin\varphi_{d,m,max} = m\lambda \text{ і } d\sin\varphi_{d,1,min,\lambda} = \frac{mN+1}{N}\lambda = \left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda.$$

спостерігаються окремо. Однак в якості умови розділення ліній використовується **критерій Релея** – лінії вважаються розділеними, якщо максимум інтенсивності однієї співпадає з першим мінімумом другої (рис.6.19).

Із умови мінімумів (6.27) видно, що головний максимум виникає, коли $n = mN$, а перший мінімум – коли $n =$

Для довжини хвилі $\lambda + \Delta\lambda$ рівняння головного максимуму порядку m має вигляд

$$d \sin \varphi_{d,m,max,\lambda+\Delta\lambda} = m(\lambda + \Delta\lambda).$$

Згідно критерію Релея спектральні лінії вважаються розділеними, якщо $\varphi_{d,m,max,\lambda+\Delta\lambda} = \varphi_{d,1,min,\lambda}$. З врахуванням (6.131) і (6.132) ця умова запишеться у вигляді

$$\left(m + \frac{1}{N}\right) \lambda = m(\lambda + \Delta\lambda).$$

Звідки роздільна здатність дифракційної ґратки знаходиться за формулою

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN. \quad (6.133)$$

Формула (6.133) визначає роздільну здатність дифракційної ґратки в залежності від порядку дифракції m і числа щілин (штрихів) N . Для збільшення R використовують перший порядок дифракції $m = 1$ і дифракційну ґратку з великим числом штрихів $N \sim 10^4 \dots 10^5$.

Максимальну роздільну здатність можна отримати із рівняння дифракційної ґратки (6.124), коли $\varphi_d \rightarrow \pi/2$.

$$m_{max} = \frac{d}{\lambda}, \quad (6.134)$$

Тоді

$$R_{max} = \frac{d}{\lambda} N = \frac{L}{\lambda}, \quad (6.135)$$

де $L = dN$ – довжина дифракційної ґратки

6.9. Типи дифракційних ґраток

В загальному випадку *дифракційною ґраткою називається оптичний елемент, пропускання і/або відбивання якого змінюються за періодичним законом.*

Усі дифракційні ґратки діляться на:

1. Ґратки, що працюють на пропускання і мають амплітудний коефіцієнт пропускання:

$$t(x, y) = t_a(x, y) \exp[j\varphi(x, y)]. \quad (6.136)$$

2. Ґратки, що працюють на відбивання і мають амплітудний коефіцієнт відбиття:

$$\rho(x, y) = \rho_a(x, y) \exp[j\varphi(x, y)]. \quad (6.137)$$

3. Амплітудні ґратки

$$t(x, y) = t_a(x, y); \rho(x, y) = \rho_a(x, y). \quad (6.138)$$

4. Фазові ґратки

$$t(x, y) = \exp[j\varphi(x, y)]; \rho(x, y) = \exp[j\varphi(x, y)]. \quad (6.139)$$

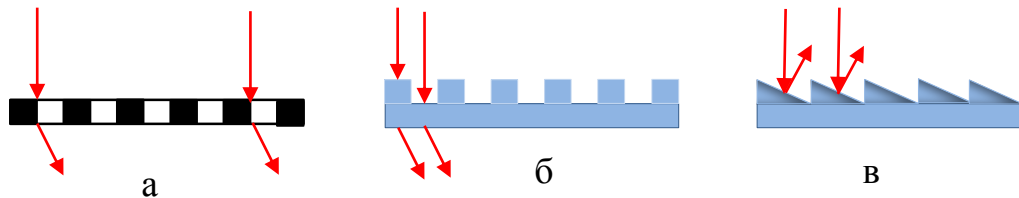


Рис. 6.20. Типи дифракційних ґраток: а – амплітудна, що працює на пропускання; б – фазова, що працює на пропускання; б – фазова, що працює на відбивання

6.10. Дифракція світла при похилому падінні променів

Нехай на дифракційну ґратку з періодом $d = AC$ падає під кутом ε паралельний пучок світла (рис. 6.21).

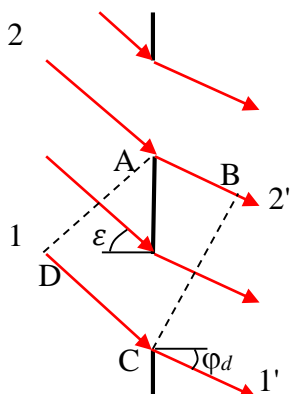


Рис. 6.21. Дифракція світла при похилому падінні променів на дифракційну ґратку

паралельний пучок світла (рис. 6.21). Визначимо рівняння дифракції світла на такій ґратці.

В результаті дифракції промені 1' і 2' відхилились на кут дифракції φ_d . Із трикутників ABC і ACD знаходимо різницю ходу між цими променями

$$\Delta = DC - AB = AC \sin \varepsilon - AC \sin \varphi_d,$$

де $AC = d$ – період дифракційної ґратки.

Головні максимуми утворюються при виконанні умови

$$d(\sin\varepsilon - \sin\varphi_d) = m\lambda. \quad (6.140)$$

Для малих кутів ε і φ_d рівняння (6.140) матиме вигляд

$$\begin{aligned} d(\sin\varepsilon - \sin\varphi_d) &= d2\cos\left(\frac{\varepsilon + \varphi_d}{2}\right)\sin\left(\frac{\varepsilon - \varphi_d}{2}\right) = 2d\cos\varepsilon\sin\frac{\alpha}{2} = \\ &= d\cos\varepsilon\sin\alpha = d'\sin\alpha = m\lambda, \end{aligned} \quad (6.141)$$

де $\varepsilon - \varphi_d = \alpha$; $d' = d\cos\varepsilon$.

Рівняння (6.141) відповідає рівнянню дифракційної ґратки (6.124) з меншим періодом $d' = d\cos\varepsilon$, тобто при спостереженні дифракції в похилих пучках період ґратки зменшується за рахунок кута ε .

6.11. Дифракція на неперервних періодичних структурах

В підрозділі 6.8.1 було розглянуто амплітудну дифракційну ґратку, що працює на пропускання. Коефіцієнт пропускання такої ґратки має значення 1 або 0 (рис. 6.22). Розглянемо дифракцію світла на ґратці великих розмірів, що працює на пропускання, амплітудний коефіцієнт пропускання якої змінюється по косинусоїдальному закону (рис. 6.23)

$$t(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(2\pi\frac{x}{d}\right). \quad (6.142)$$

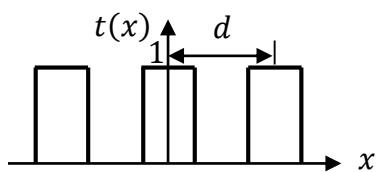


Рис. 6.22. Коефіцієнт пропускання прямокутної амплітудної ґратки, що працює на пропускання

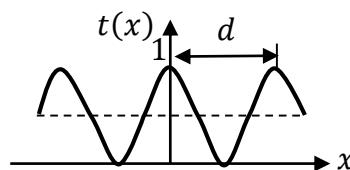


Рис. 6.23. Коефіцієнт пропускання косинусоїдальної амплітудної ґратки, що працює на пропускання

Нехай на таку ґратку нормально падає плоска монохроматична хвиля одиничної амплітуди $V_0 = 1$. Тоді амплітуда поля за ґраткою

$$V(x) = V_0 t(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(2\pi\frac{x}{d}\right). \quad (6.143)$$

Підставимо функцію (6.143) в рівняння Фраунгофера на щілині (6.76'), яке представимо у вигляді

$$\begin{aligned} V(x_0) = V(\varphi_d) &= \frac{1}{j\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} V(x) \exp\left(-j \frac{2\pi \sin\varphi_d}{\lambda} x\right) dx = \\ &= \frac{1}{j\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(2\pi \frac{x}{d}\right)\right] \exp\left(-j \frac{2\pi \sin\varphi_d}{\lambda} x\right) dx. \end{aligned}$$

Використовуючи формулу Ейлера $\cos z = 0,5(e^{jz} + e^{-jz})$, перетворимо останній інтеграл до вигляду

$$\begin{aligned} V(\varphi_d) &= \frac{1}{j\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} \exp\left(-j \frac{2\pi \sin\varphi_d}{\lambda} x\right) + \frac{1}{4} \exp\left[j2\pi \left(\frac{1}{d} - \frac{\sin\varphi_d}{\lambda}\right) x\right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \exp\left[-j2\pi \left(\frac{1}{d} + \frac{\sin\varphi_d}{\lambda}\right) x\right] \right\} dx. \end{aligned} \quad (6.144)$$

Для обчислення інтегралу (6.144) скористаємося табличним інтегралом

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(\pm j2\pi\xi x) dx = \delta(\xi) = \begin{cases} \infty, & \text{коли } \xi = 0 \\ 0, & \text{коли } \xi \neq 0 \end{cases}. \quad (6.145)$$

Тоді обчислення інтегралу (6.144) дає такий результат

$$V(\varphi_d) = \frac{1}{j\lambda z} \left[\frac{1}{2} \delta\left(\frac{\sin\varphi_d}{\lambda}\right) + \frac{1}{4} \delta\left(\frac{1}{d} - \frac{\sin\varphi_d}{\lambda}\right) + \frac{1}{4} \delta\left(\frac{1}{d} + \frac{\sin\varphi_d}{\lambda}\right) \right]. \quad (6.146)$$

Аналіз виразу (6.146) показує, що при дифракції світла на гармонічній ґратці виникає три головних максимуми (рис. 6.24), які розташовані під кутами дифракції, що знаходяться із умов:

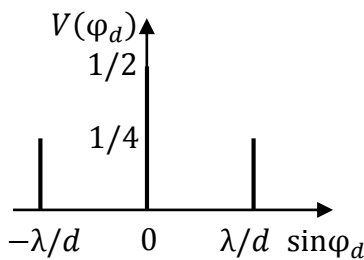


Рис. 6.24. Розподіл поля при дифракції світла на косинусоїдальній амплітудній ґратці, що працює на пропускання

1. $\frac{\sin\varphi_d}{\lambda} = 0 \Rightarrow \varphi_d = 0.$
2. $\frac{1}{d} - \frac{\sin\varphi_d}{\lambda} = 0 \Rightarrow \varphi_d = \arcsin \frac{\lambda}{d}.$
3. $\frac{1}{d} + \frac{\sin\varphi_d}{\lambda} = 0 \Rightarrow \varphi_d = -\arcsin \frac{\lambda}{d}.$

Розглянемо прямокутну амплітудну дифракційну ґратку, що працює на пропускання, коефіцієнт пропускання $t(x)$ якої наведено на графіку рис. 6.22.

Представимо періодичну функцію $t(x)$ у вигляді ряду Фур'є

$$t(x) = t(x + d) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \exp\left(j2\pi m \frac{x}{d}\right), \quad (6.147)$$

де A_m – комплексна амплітуда m -ої гармоніки $\exp\left(j2\pi m \frac{x}{d}\right)$, яка має період $d' = \frac{d}{m}$,

$$\begin{aligned} A_m &= \int_{-d/4}^{d/4} \exp\left(-j2\pi m \frac{x}{d}\right) dx = \\ &= \frac{1}{-j2\pi m \frac{1}{d}} \exp\left(-j2\pi m \frac{x}{d}\right) \Big|_{-d/4}^{d/4} = \frac{d}{\pi m} \sin\left(\frac{\pi m}{2}\right). \end{aligned} \quad (6.148)$$

Кожна гармоніка ряду (6.147) формує два бокових максимуми, положення яких визначається рівнянням

$$\frac{d}{m} \sin\varphi_d = \pm\lambda \Rightarrow d\sin\varphi_d = m\lambda, \quad (6.149)$$

де $m = 0, \pm 1, \dots$ – порядок дифракції. Вираз (6.149) відповідає рівнянню головних максимумів дифракційної ґратки (6.124).

6.12. Дифракція на ультразвукових хвилях

Ультразвуковими або акустичними хвилями будемо називати коливання середовища з частотою $f_v \sim 10^8$ Гц. Така хвиля розповсюджується в середовищі, наприклад, воді, із швидкістю $v_v \sim 10^3$ м/с.

При розповсюдженні звукової хвилі щільність середовища змінюється по гармонічному закону. Зміна щільності викликає зміну показника заломлення (оптичної довжини шляху), в результаті якої в середовищі формується фазова дифракційна ґратка. Період цієї ґратки визначається як

$$d = v_v T_v = \frac{v_v}{f_v} = \frac{10^3}{10^8} = 10^{-5} \text{ м} = 10 \text{ мкм}.$$

На рис. 6.25 наведена схема для дослідження дифракції світла на ультразвуковій хвилі. Когерентне світло від джерела надходить до коліматора 1, який формує паралельний пучок, що нормально падає на пластинку 2. В пластинці за допомогою п'єзокристалу 3 утворюється акустична хвиля, яка формує фазову дифракційну ґратку. Пучок променів, що пройшли через таку

дифракційну ґратку, відхиляються на кут φ_d , а об'єктив 4 фокусує ці промені і утворює в задній фокальній площині 5 дифракційні максимуми.

Із рівняння для бокових максимумів маємо

$$d \sin \varphi_d = \lambda \Rightarrow \sin \varphi_d = \frac{\lambda}{d} = \frac{\lambda f_v}{v_v}. \quad (6.150)$$

Змінюючи частоту звукової хвилі f_v , можна змінювати величину кута відхилення променів φ_d . Це явище використовується в акусто-оптичних дефлекторах і модуляторах світла.

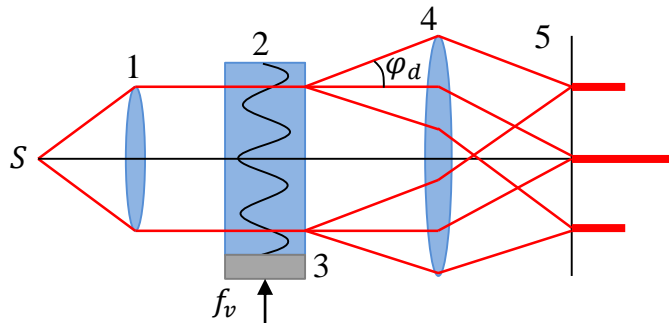


Рис. 6.25. Дифракція світла на ультразвуковій хвилі

6.13. Основи спектроскопії

Спектроскопія – розділ фізики, присвячений вивченню спектрів електромагнітного випромінювання за допомогою спектральних приладів (монохроматорів, спектрофотометрів) [8]. Головним елементом таких приладів є призми або дифракційні ґратки.

Розглянемо узагальнену схему спектрального приладу з дифракційною ґраткою (рис. 6.26). Складовими елементами таких приладів є входна щілина, коліматор, дифракційна ґратка, об'єктив і реєстратор випромінювання. Досліджуване випромінювання надходить до входної щілини шириною b , яка знаходиться в фокусі лінзи коліматора. Коліматор формує паралельний пучок світла, який проходить через дифракційну ґратку і відхиляється на певний кут φ_d . Паралельні пучки надходять до об'єктива і формують в задній фокальній

площині головні максимуми, положення яких визначається рівнянням дифракційної ґратки (6.124)

$$d \sin \varphi_d = m \lambda. \quad (6.151)$$

Розподіл інтенсивності світла в фокальній площині об'єктива реєструється приймачем випромінювання (матричним приймачем).

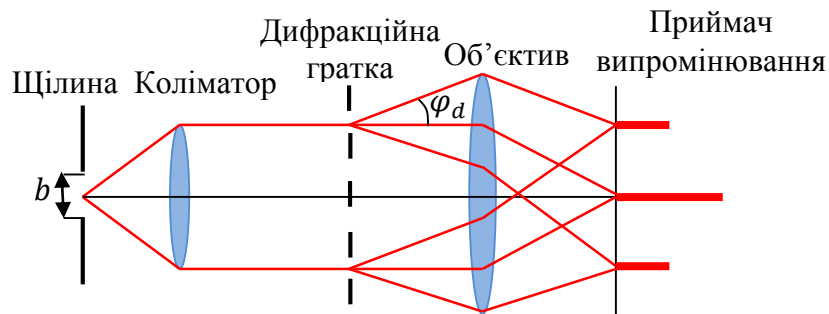


Рис. 6.26. Узагальнена схема спектрального приладу з дифракційною ґраткою

Із рівняння (6.151) видно, що при збільшенні довжини хвилі випромінювання кутове положення головного максимуму також збільшується. Таким чином, вимірюючи інтенсивність максимуму і його кут дифракції, можна визначити спектральний склад випромінювання.

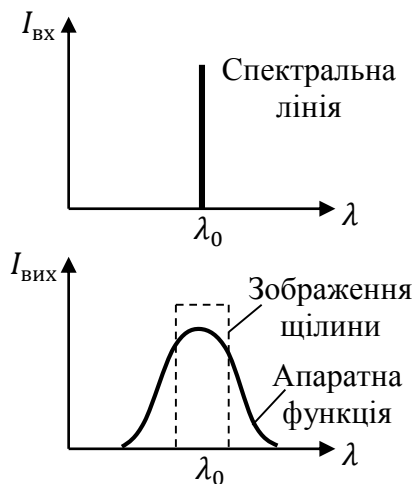


Рис. 6.27. Визначення апаратної функції

Оптична схема спектрального приладу, що наведена на рис. 6.26, формує в фокальній площині об'єктива зображення щілини певної ширини, тобто ширина щілини визначає спектральне розділення приладу. Зменшення ширини щілини призводить до збільшення спектральної роздільної здатності приладу. В той же час зменшення ширини щілини обмежує потік випромінювання, який надходить до приладу, а отже і зменшує енергетичне розділення. В зв'язку

з цим обирають компромісне рішення між спектральним і енергетичним розділеннями, а ширина щілини при цьому може змінюватись в межах від 10 мкм до 1 мм.

Основною характеристикою спектрального приладу є його *апаратна функція*, яка являє собою зображення вхідної щілини для певної довжини хвилі λ_0 , яке спотворюється елементами приладу, наприклад, аберациями об'єктива (рис. 6.27).

6.14. Роздільна здатність об'єктива

Об'єктив призначений для формування зображення, якість якого залежить від його абераций. Однак навіть при відсутності абераций розгледіти (розділити) зображення двох точок, що знаходяться на малій відстані одна від одної, неможливо із-за дифракції світла на вхідній зіниці об'єктива.

Розглянемо зображення двох відділених точкових джерел випромінювання, від яких паралельні пучки світла надходять до вхідної зіниці об'єктива і формують в його задній фокальній площині дві дифракційні картини Ейрі (рис. 6.28). Мінімальна відстань між точковими джерелами, при якій їх зображення спостерігаються роздільно визначаються *критерієм Релея*: зображення двох точкових джерел спостерігаються роздільно, якщо положення максимуму дифракційного зображення одного джерела співпадає з першим мінімумом зображення другого джерела. Це означає що відстань між центрами зображення двох точкових джерел $O_1 O_2$ дорівнює радіусу кружка Ейрі r_E .

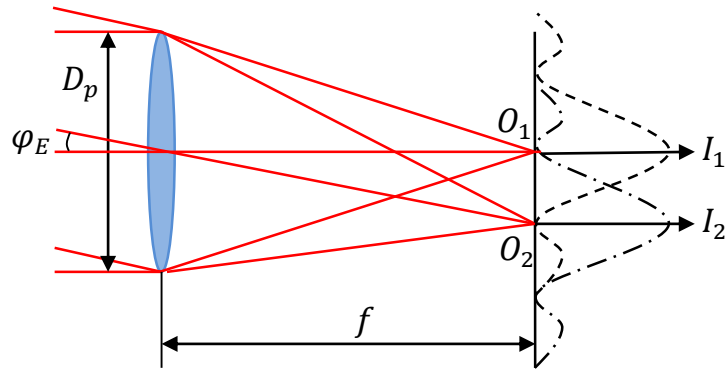


Рис. 6.28. До визначення роздільної здатності об'єктива

Із рис. 6.28 і формули (6.92) маємо

$$O_1O_2 = r_E = 1,22 \frac{\lambda f}{D_p}, \quad (6.152)$$

де D_p – діаметр вхідної зіниці об'єктива.

Кутова відстань між роздільними точками дорівнює

$$\varphi_E = \frac{r_E}{f} = 1,22 \frac{\lambda}{D_p}. \quad (6.153)$$

Величина, обернена радіуса r_E або кута φ_E називається *роздільною здатністю* об'єктива.

Із формул (6.152) і (6.153) видно, що зменшити відстань O_1O_2 або кут φ_E можна двома способами:

1. Збільшенням діаметра вхідної зіниці об'єктива D_p .
2. Зменшенням довжини хвилі λ .

6.15. Роздільна здатність мікроскопа

Мікроскоп призначений для спостереження малорозмірних об'єктів. Зменшити просторове розділення (відстані між двома точками, розташованими близько одна від одної, які спостерігаються роздільно), можна за рахунок підвищення збільшення мікроскопа. Однак існує межа такого підвищення, яка пов'язана з дифракцією світла на об'єкті спостереження.

Німецький фізик Ернст Аббе розробив теорію формування зображення в мікроскопі, ґрунтуючись на припущеннях:

1. Кожна точка джерела випромінювання освітлює весь об'єкт спостереження.
2. На елементах об'єкта спостереження відбувається дифракція світла.
3. Структура дифрагованих променів несе інформацію про елементи об'єкта.

В якості об'єкта спостереження розглянемо дифракційну ґратку з періодом d . Нехай такий об'єкт освітлюється паралельним пучком променів. За рахунок дифракції утворюються паралельні пучки, які утворюють кути дифракції φ_d з оптичною віссю (рис. 6.29). Ці пучки надходять до вхідної зіниці мікрооб'єктива. У задній фокальній площині об'єктива спостерігається дифракційна картина, утворена дифракційною ґраткою, у вигляді яскравих точок (максимумів) P_0, P_1, P_{-1}, \dots . Положення цих точок визначається рівнянням дифракційної ґратки

$$d \sin \varphi_d = m \lambda, \quad (6.154)$$

де m – номер точки (порядок дифракції).

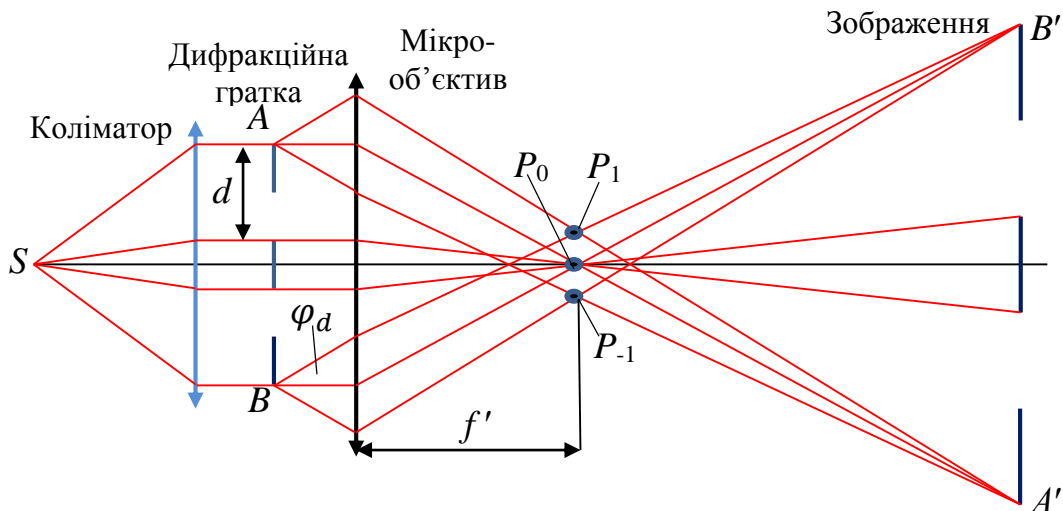


Рис. 6.29. До визначення роздільної здатності мікроскопа

Це означає, що положення точок залежить від періоду d дифракційної ґратки. Наприклад, збільшення періоду d призводить до зменшення відстані між

точками P_i . Насправді максимуми P_i являють собою зображення точкового джерела випромінювання в дифрагованих променях, а тому їх можна розглядати як когерентні джерела. Промені, що дифрагують в певній точці об'єкта, наприклад, в точці A , пройдуть через кожен максимум P_i і зберуться у відповідній точці A' площини зображення і в результаті інтерференції формують зображення точки A . Так можна пояснити формування зображення будь-якої точки об'єкта спостереження.

Для перевірки дифракційної теорії Аббе розглянемо такий експеримент. В задній фокальній площині об'єктива розташуємо непрозорий екран. Якщо в екрані є отвір, який співпадає з центральною точкою P_0 , то зображення дифракційної ґратки $A'B'$ відсутнє. Це, згідно теорії Аббе, пояснюється тим, що в точках площини зображення не відбувається інтерференція, так як в кожену точку надходить тільки один промінь. Якщо в екрані є три отвори, які співпадають з точками P_0, P_1, P_{-1} , то в площині зображення з'являється зображення дифракційної ґратки $A'B'$ як результат інтерференції трьох променів. При збільшенні числа отворів в екрані якість зображення покращується і воно наближається до ідеального зображення (рис. 6.30).

Для підтвердження теорії Аббе розглянемо ще один експеримент Аббе-Портера. За допомогою непрозорого екрана виділимо непарні максимуми P_0, P_2, P_{-2}, \dots , відстань між якими збільшується у двічі. Така дифракційна картина повинна відповідати умові максимуму (6.154), коли період ґратки зменшується у двічі

$$(d/2)\sin(2\varphi_d) = m\lambda. \quad (6.155)$$

Це призведе до формування зображення дифракційної ґратки з періодом $d/2$, що підтверджує теорію Аббе.

Визначимо роздільну здатність мікроскопа, використовуючи умову (6.154), коли до вхідної зіниці об'єктива надходять промені з порядком дифракції

$m = 0, \pm 1$. Якщо об'єкт спостереження малих розмірів знаходиться на оптичній осі, то із рівняння (6.154) маємо

$$d_{min} n \sin \varphi_d = 2 a_{min} n \sin \sigma_A = \lambda, \quad (6.156)$$

де a_{min} – мінімальний розмір об'єкта спостереження; n – показник заломлення середовища між об'єктом і об'єктивом; σ_A – апертурний кут об'єктива.

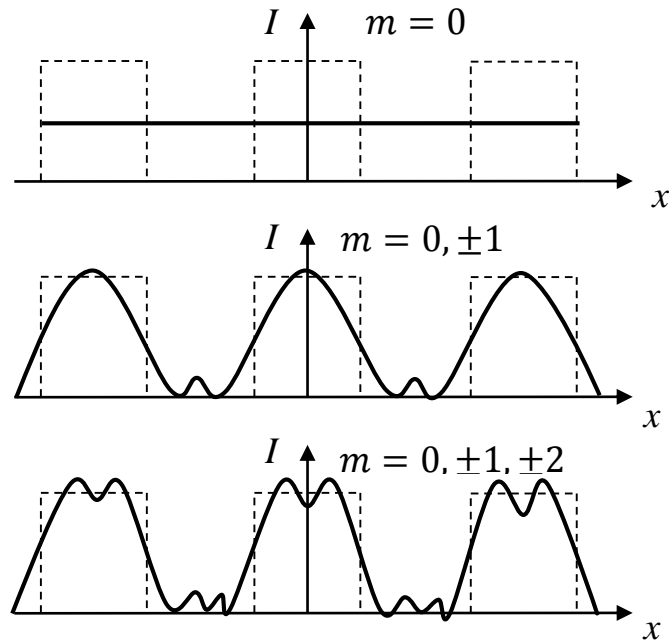


Рис. 6.30. Експеримент Аббе (пунктиром показане ідеальне геометричне зображення)

Із рівняння (6.156) маємо

$$a_{min} = \frac{\lambda}{2n \sin \sigma_A} = \frac{\lambda}{2A}, \quad (6.157)$$

де $A = n \sin \sigma_A$ – числова апертура об'єктива.

Формула (6.157) дозволяє визначити шляхи збільшення роздільної здатності (зменшення a_{min}) мікроскопа:

1. Збільшення числової апертури $A = n \sin \sigma_A$ мікрооб'єктива (для цього використовують об'єктиви з великими апертурними кутами σ_A або імерсійні середовища з високим показником заломлення $n > 1$).

2. Використання ультрафіолетових джерел освітлення з малими довжинами хвиль.

3. Використання похилих пучків, коли до вхідної зіниці об'єктива надходять два пучка, що мають порядок дифракції $m = 0$ і 1 . За цих умов апертурний кут збільшується у два рази $\varphi_d = 2\sigma_A$, що дозволяє розрізнати об'єкти менших розмірів.

6.16. Приклади розрахунку дифракційних картин

Приклад 6.1. Розрахуйте радіус першої і п'ятої зон Френеля для монохроматичного світла ($\lambda = 500$ нм) при відстані від хвильової поверхні до точки спостереження рівному 1 м, коли: а) хвильова поверхня має сферичну форму з радіусом $0,5$ м; б) хвильова поверхня має плоску форму.

Розв'язання. а) Розглянемо рис. 6.1, де згідно умови прикладу відомі $r_0 = 0,5$ м, $b = 1$ м, $\lambda = 0,5 \cdot 10^{-6}$ м. Для розрахунку радіуса m -ї зони Френеля скористаємося формулою (6.21), записав її у вигляді $\rho_m = \rho_1 \sqrt{m}$, де $\rho_1 = \sqrt{\frac{r_0 b}{r_0 + b}} \lambda$

– радіус першої зони Френеля. Після підстановки вихідних даних отримаємо:

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{0,5 \cdot 1}{0,5 + 1}} 0,5 \cdot 10^{-6} = 0,408 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad \rho_5 = 0,408 \cdot 10^{-3} \sqrt{5} = 0,913 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

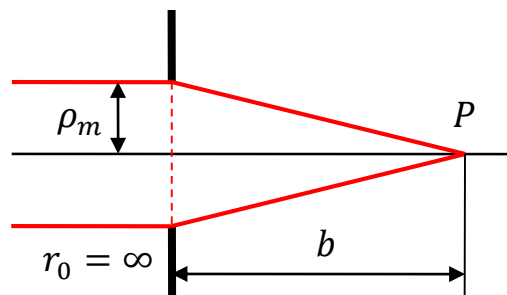


Рис. 6.31. До прикладу 6.1

б) Розглянемо рис. 6.31. Для плоскої хвильової поверхні $r_o \rightarrow \infty$. Для розрахунку радіуса m -ї зони Френеля скористаємося формулою (6.21), записавши її у вигляді $\rho_m = \rho_1 \sqrt{m}$, де $\rho_1 = \sqrt{b\lambda}$. Після підстановки вихідних даних отримаємо

$$\rho_1 = \sqrt{1 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6}} = 0,707 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad \rho_5 = 0,707 \cdot 10^{-3} \sqrt{5} = 1,58 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Приклад 6.2. На діафрагму з круглим отвором діаметром 6 мм нормально падає плоска монохроматична хвиля ($\lambda = 600$ нм). За діафрагмою на відстані 3 м знаходиться екран спостереження. Знайдіть:

1. Скільки зон Френеля вміщується в отворі діафрагми?
2. Яким буде центр дифракційної картини на екрані: світлим чи темним?
3. Інтенсивність світла у центрі картини порівняно з інтенсивністю при відсутності екрану.
4. При якому радіусі отвору діафрагми у центрі картини буде найбільш темна пляма?
5. Яким буде центр тіні на екрані, якщо діафрагму з отвором замінити непрозорим диском такого ж діаметра?
6. На яку відстань необхідно змістити екран спостереження від диска, щоб інтенсивність у плямі Пуансона була не менша, ніж у попередньому пункті.

Розв'язання. Розглянемо рис. 6.31, де відомими є: діаметр отвору у діафрагмі $D = 2\rho_m = 6$ мм; відстані $r_o = \infty$ і $b = 3$ м; довжина хвилі $\lambda = 0,6 \cdot 10^{-6}$ м.

1. Число зон Френеля m , які вміщуються в отворі діафрагми, знайдемо із формули (6.21), коли $r_o = \infty$.

$$m = \frac{\rho_m^2}{b\lambda} = \frac{(3 \cdot 10^{-3})^2}{3 \cdot 0,6 \cdot 10^{-6}} = 5.$$

2. Амплітуду поля в точці P при $m = 5$ знаходимо за формулою (6.14)

$$V(P) = \frac{1}{2}V_1 + \frac{1}{2}V_5.$$

Через те, що дві амплітуди додаються, то в точці P буде спостерігатися світла пляма. Причому $V_1 \approx V_5$.

3. При відсутності діафрагми інтенсивність в точці P згідно формули (6.15)

$$\text{дорівнює } I_0(P) = |V_0|^2 = \frac{1}{4}I_1.$$

При наявності екрану $V(P) \approx V_1$, а $I_{1-5}(P) \approx I_1 = 4I_0$, тобто інтенсивність в точці P зросте майже у 4 рази.

4. Згідно формули (6.13) в точці P буде темно, коли в отворі розміщується парне число зон ($m = 2, 4, \dots$), а найбільш темно буде при $m = 2$ через те, що

$$V_1 > V_2 > V_3 > \dots.$$

При цьому радіус отвору визначається за формулою (6.21)

$$\rho_2 = \sqrt{3 \cdot 2 \cdot 0,6 \cdot 10^{-6}} = 1,9 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

5. Результируюча амплітуда в центрі дифракційної картини за непрозорим диском при $m = 5$ закритих ним зон Френеля буде визначатися згідно формули

(6.13)

$$\begin{aligned} V(P) &= -V_6 + V_7 - V_8 + V_9 - \dots = [V_1 - V_2 + V_3 - V_4 + V_5 - V_6 + \dots] - [V_1 - V_2 + V_3 - V_4 + V_5] \approx \\ &\approx \frac{1}{2}V_1 - \left[\frac{1}{2}V_1 + \left(\frac{1}{2}V_1 - V_2 + \frac{1}{2}V_3 \right) + \left(\frac{1}{2}V_3 - V_4 + \frac{1}{2}V_5 \right) + \frac{1}{2}V_5 \right] \end{aligned}$$

Згідно до метода Шустера значення виразів у круглих дужках дорівнює нулю. Тоді останнє співвідношення може бути записано у вигляді:

$$V(P) \approx \frac{1}{2}V_1 - \frac{1}{2}V_1 + \frac{1}{2}V_5 = \frac{1}{2}V_5.$$

Оскільки V_5 не набагато менше за V_1 , то у точці P буде спостерігатися світла пляма (пляма Пуансона) з інтенсивністю трохи меншою за I_0 .

Через те, що амплітуди V_m повільно зменшуються з ростом m , то інтенсивність світла у плямі пуансона буде повільно зменшуватися. Тому інтенсивність у плямі Пуансона буде більша, якщо $m < 5$. Відповідні значення

відстані від диска до екрану визначаються згідно формули (6.21) як $b_m = \frac{R^2}{m\lambda}$.

Розрахунки дають такі результати: $b_4 = \frac{(3 \cdot 10^{-3})^2}{4 \cdot 0,6 \cdot 10^{-6}} = 3,75$ м; $b_3 = 5$ м; $b_2 = 7,5$ м;

$b_1 = 15$ м. Найбільш світла пляма буде при $m = 1$ і $b_1 = 15$ м, коли $V(P) = \frac{1}{2}V_1$.

Приклад 6.3. Знайдіть вираз для радіусів зон Френеля, якщо ці зони побудовані з боку увігнутої поверхні хвильового фронту сферичної хвилі, що збігається, з радіусом r_0 .

Розв'язання. Розглянемо рис. 6.32. Із трикутника QO_1P_0 маємо

$$R_q^2 = r_0^2 - (r_0 - x)^2 = 2r_0x - x^2,$$

де R_q – радіус q -ї зони Френеля, $R_q = QO_1$.

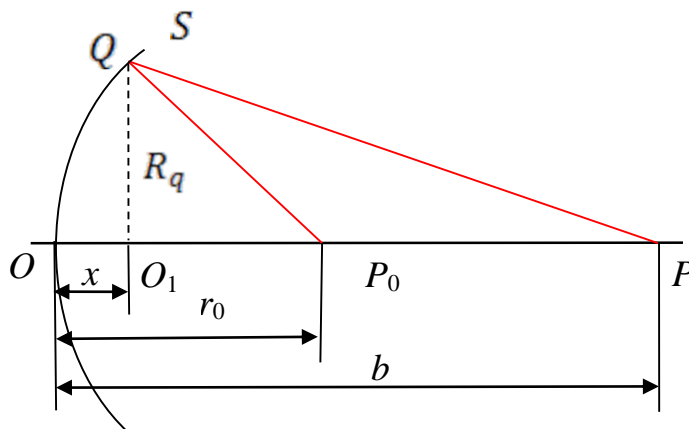


Рис. 6.32. До прикладу 6.3

Із трикутника QO_1P_0 маємо

$$R_q^2 = \left(b - \frac{q\lambda}{2}\right)^2 - (b - x)^2 = -bq\lambda + \left(\frac{q\lambda}{2}\right)^2 + 2bx - x^2.$$

Прирівняємо праві частини останніх двох рівнянь:

$$2r_0x = -bq\lambda + \left(\frac{q\lambda}{2}\right)^2 + 2bx \approx -bq\lambda + 2bx.$$

Звідси $x = \frac{bq\lambda}{2(b-r_0)}$, тоді $R_q^2 = 2r_0x - x^2 \approx 2r_0x = \frac{r_0bq\lambda}{(b-r_0)}$, або

$$R_q = \sqrt{\frac{r_0b}{(b-r_0)}} q\lambda. \quad (6.158)$$

Приклад 6.4. Плоска монохроматична хвиля ($\lambda = 0,589$ мкм) нормально падає на екран із щілиною, ширина якої 2 мкм. *а)* Скільки додаткових максимумів спостерігається в дифракційній картині? *б)* Яка кутова ширина зображення джерела світла? *в)* Яка лінійна ширина цього зображення, що формується лінзою з фокусною відстанню 1 м?

Розв'язання. Розглянемо рис. 6.33.

а) Число додаткових максимумів k повинно бути на одиницю менше за число мінімумів ($k = m - 1$). Із умови мінімумів (6.79) маємо, що $\sin \phi^{\min} = m \frac{\lambda}{b} \leq 1$.

Звідси $m \leq \frac{b}{\lambda} = \frac{2}{0,589} = 3,4$, а $m = 3$. Тоді $k = 2$, тобто видно по два додаткових

максимуми по обидві сторони від головного максимуму.

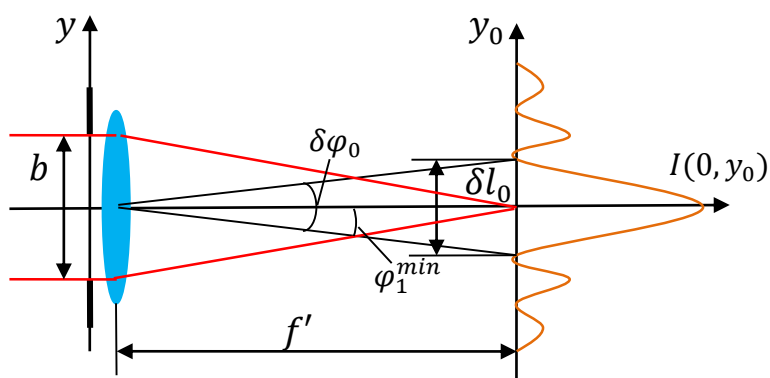


Рис. 6.33. Дифракція Фраунгофера на щілині

б) Кутова ширина дифракційного зображення джерела випромінювання дорівнює кутовій ширині головного максимуму:

$$\delta \varphi_0 = 2\varphi_1^{\min} = 2 \arcsin \left(\frac{\lambda}{b} \right) = 2 \arcsin \left(\frac{0,589}{2} \right) \approx 34^\circ.$$

в) Із рис. 6.33 знаходимо, що ширина дифракційного зображення $\delta l_0 = 2f' \cdot \operatorname{tg} \varphi_1^{\min} = 2 \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} 17^\circ \approx 0,61$ м.

Приклад 6.5. Знайдіть вираз для розподілу інтенсивності в дифракційній картині Фраунгофера на щілині шириною a . На щілину нормально падає плоска монохроматична хвиля, амплітуда якої дорівнює одиниці. Визначте кути дифракції, які відповідають мінімумам і максимумам у дифракційній картині.

Розв'язання. Розглянемо рис. 6.10. Щоб обчислити розподіл амплітуди поля у площині спостереження використаємо рівняння дифракції Фраунгофера (6.65), яке для одновимірного випадку з урахуванням виразу (6.74) матиме вигляд

$$V(\varphi_d) = \frac{1}{j\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} V(x) \exp(-jk \sin \varphi_d \cdot x) dx, \quad (6.159)$$

де амплітуда поля в отворі екрана згідно із співвідношенням (6.67) визначається функцією

$$V(x) = V_0 t(x) = \begin{cases} 1, & \text{коли } -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (6.160)$$

Підставивши функцію (6.160) у вираз (6.159), маємо

$$V(\varphi_d) = \frac{1}{j\lambda z} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp(-jk \sin \varphi_d \cdot x) dx. \quad (6.161)$$

Щоб розрахувати інтеграл (6.161) використаємо табличний інтеграл $\int e^{cx} dx = e^{cx}/c$, де $c = -jk \sin \varphi_d$. Тоді

$$\begin{aligned} V(\varphi_d) &= \frac{1}{j\lambda z} \frac{1}{-jk \sin \varphi_d} \exp(-jk \sin \varphi_d \cdot x) \Bigg|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \\ &= \frac{1}{j\lambda z} \frac{1}{-jk \sin \varphi_d} \left[\exp\left(-jk \sin \varphi_d \cdot \frac{a}{2}\right) - \exp\left(jk \sin \varphi_d \cdot \frac{a}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Скористаємося формулою Ейлера $e^{jx} - e^{-jx} = 2j \sin x$. Тоді

$$V(\varphi_d) = \frac{1}{j\lambda z} \frac{1}{\frac{\pi}{\lambda} \sin \varphi_d} \sin\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi_d\right) = \frac{a}{j\lambda z} \frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi_d\right)}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi_d}. \quad (6.162)$$

Розподіл інтенсивності визначають з амплітуди поля (6.162) як

$$I(\varphi_d) = |V(\varphi_d)|^2 = \left(\frac{a}{\lambda z}\right)^2 \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi_d\right)}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi_d} \right]^2. \quad (6.163)$$

Знайдемо максимальне значення інтенсивності (6.163) у центральному (нульовому) максимумі, коли $\varphi_d = 0$. Для цього використаємо границю $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 1$, де $x = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi_d$. Тоді $I(0) = \left(\frac{a}{\lambda z} \right)^2$, а нормований розподіл інтенсивності

$$I_n(\varphi_d) = \frac{I(\varphi_d)}{I(0)} = \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi_d\right)}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi_d} \right]^2. \quad (6.164)$$

Графік функції $I_n(\varphi_d)$ зображено на рис. 6.34.

Визначимо кути дифракції, які відповідають мінімумам інтенсивності в дифракційній картині функції (6.164), виходячи з рівняння $I_n(\varphi_{d,m}^{min}) = 0$. Використовуючи функцію (6.164), отримаємо рівняння $\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi_{d,m}^{min}\right) = 0$. Звідси $\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi_{d,m}^{min} = m\pi$, або $a \sin \varphi_{d,m}^{min} = m\lambda$. З цього рівняння знаходимо, що

$$\varphi_{d,m}^{min} = \arcsin\left(m \frac{\lambda}{a}\right). \quad (6.165)$$

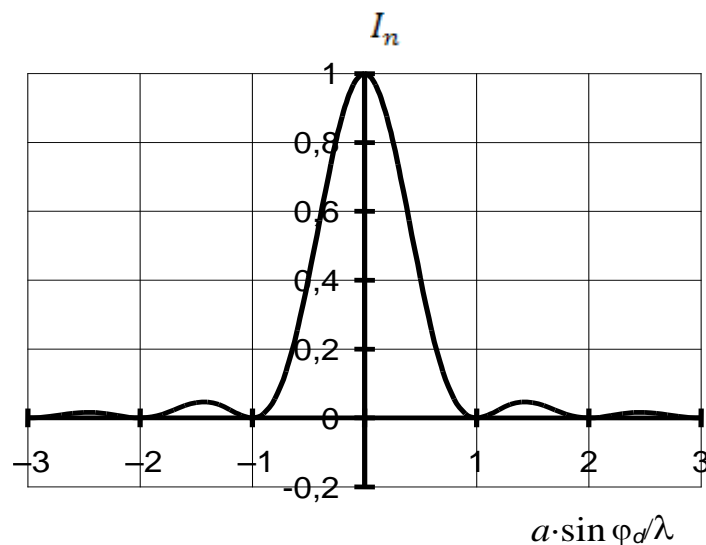


Рис. 6.34. Графік функції (6.164)

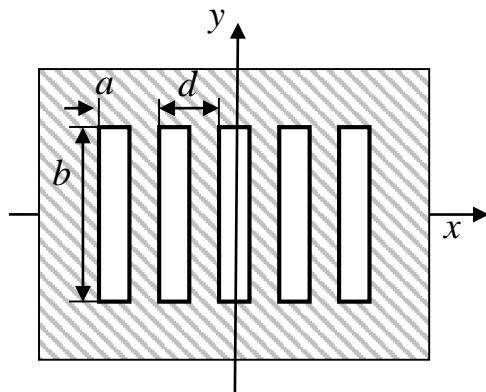
Знайдемо кути дифракції, які відповідають максимумам інтенсивності в дифракційній картині за функцією (6.164), виходячи із рівняння

$$\frac{dI(\varphi_d)}{d\varphi_d} = 0 \text{ або } \frac{d\left[\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right]}{dx} = 0, \text{ де } x = \frac{\pi a}{\lambda} \sin\varphi_d. \text{ Звідси } x = \operatorname{tg} x \text{ або } \frac{\pi a}{\lambda} \sin\varphi_{d,m}^{max} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin\varphi_{d,m}^{max}\right).$$

Розв'язавши це трансцендентне рівняння, можна знайти кути дифракції, що відповідають максимумам. Наприклад, для першого максимуму рівняння має розв'язок $x_1 = 1,43\pi = \frac{\pi a}{\lambda} \sin\varphi_{d,1}^{max}$. Звідси $\varphi_{d,1}^{max} = \arcsin\left(\frac{a}{1,43\lambda}\right)$.

Приклад 6.6. Екран, на якому відбувається дифракція, має п'ять прямокутних діафрагм (рис. 6.35). Визначте амплітуду поля дифракційної картини Фраунгофера. Побудуйте графік розподілу інтенсивності цієї картини.

Розв'язання. 1. Розглянемо спочатку дифракцію Фраунгофера (6.65), що формується центральною діафрагмою, яка має амплітудний коефіцієнт пропускання



$$t_0(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{коли } |x| \leq \frac{a}{2}; |y| \leq \frac{b}{2} \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Розподіл амплітуди поля в такій дифракційній картині описується функцією (6.71):

$$V_0(x_0, y_0) = \frac{ab}{j\lambda z} \operatorname{sinc}\left(\frac{a}{\lambda z} x_0\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{b}{\lambda z} y_0\right). \quad (6.166)$$

2. Амплітудний коефіцієнт пропускання всього екрана можна подати у вигляді окремих складових:

$$t(x, y) = t_{-2} + t_{-1} + t_0 + t_1 + t_2 = \\ = t_0(x + 2d, y) + t_0(x + d, y) + t_0(x, y) + t_0(x - d, y) + t_0(x - 2d, y). \quad (6.167)$$

Якщо екран освітлюється плоскою монохроматичною хвилею одиничної амплітуди, то згідно з рівнянням дифракції Фраунгофера (6.65) розподіл амплітуди поля у дифракційній картині визначається перетворенням Фур'є $V(x_0, y_0) = F\{t(x, y)\}$ для просторових частот перетворення (6.61). Підставимо

вираз (6.167) у рівняння (6.65) і використаємо теорему зміщення відносно перетворення Фур'є:

$$V(x_0, y_0) = F\{t_0(x, y)\} \times \\ \times [\exp(j4\pi d v_x) + \exp(j2\pi d v_x) + 1 + \exp(-j2\pi d v_x) + \exp(-j4\pi d v_x)]. \quad (6.167)$$

Вираз у квадратних дужках являє собою геометричну прогресію зі знаменником $q = \exp(-j2\pi d v_x)$, сума якої

$$\frac{\exp(j4\pi d v_x) - \exp(-j2\pi d v_x) \exp(-j4\pi d v_x)}{1 - \exp(-j2\pi d v_x)} = \\ = \frac{\exp(-j\pi d v_x) [\exp(j5\pi d v_x) - \exp(-j5\pi d v_x)]}{\exp(-j\pi d v_x) [\exp(j\pi d v_x) - \exp(-j\pi d v_x)]} = \frac{\sin(5\pi d v_x)}{\sin(\pi d v_x)}.$$

З урахуванням цієї суми, а також перетворення (6.61) і (6.166), амплітуду поля в дифракційній картині виразу (6.167) визначимо як

$$V(x_0, y_0) = \frac{ab}{j\lambda z} \operatorname{sinc}\left(\frac{a}{\lambda z} x_0\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{b}{\lambda z} y_0\right) \left[\frac{\sin(5\pi d v_x)}{\sin(\pi d v_x)}\right]. \quad (6.168)$$

З урахуванням інтенсивності (2.137) одновимірний нормований розподіл інтенсивності вздовж осі x_0 за $y_0 = 0$ подано на рис. 6.36,

$$I_n(x_0, 0) = \left[\frac{\operatorname{sinc}\left(\frac{10ax_0}{\lambda z}\right)}{\cos\left(\frac{\pi ax_0}{\lambda z}\right)} \right]^2. \quad (6.171)$$

З аналізу функції (6.171) видно, що вона має центральний і два бокові головні максимуми. Бокові максимуми розміщені в точках з координатами $(\pm \frac{\lambda z}{2a})$ і мають амплітуду $4/\pi^2$.

Приклад 6.7. Виведіть формулу Релея (6.103), використовуючи співвідношення (6.102).

Розв'язання. Подамо співвідношення (6.102) у вигляді

$$L(R_0) = \frac{2\pi^2 R^2}{(\lambda z)^2} \int_0^{R_0} \left[2 \frac{J_1\left(2\pi \frac{R}{\lambda z} r_0\right)}{2\pi \frac{R}{\lambda z} r_0} \right]^2 r_0 dr_0.$$

Замінімо змінні: $2\pi \frac{R}{\lambda z} r_0 = x$; $r_0 = \frac{\lambda z}{2\pi R} x$; $dr_0 = \frac{\lambda z}{2\pi R} dx$.

Тоді

$$L(R_0) = \frac{2\pi^2 R^2}{(\lambda z)^2} 4 \int_0^{2\pi \frac{R}{\lambda z} R_0} \frac{J_1^2(x)}{x^2} \left(\frac{\lambda z}{2\pi R}\right)^2 x dx = 2 \int_0^{2\pi \frac{R}{\lambda z} R_0} \frac{J_1^2(x)}{x} dx. \quad (6.172)$$

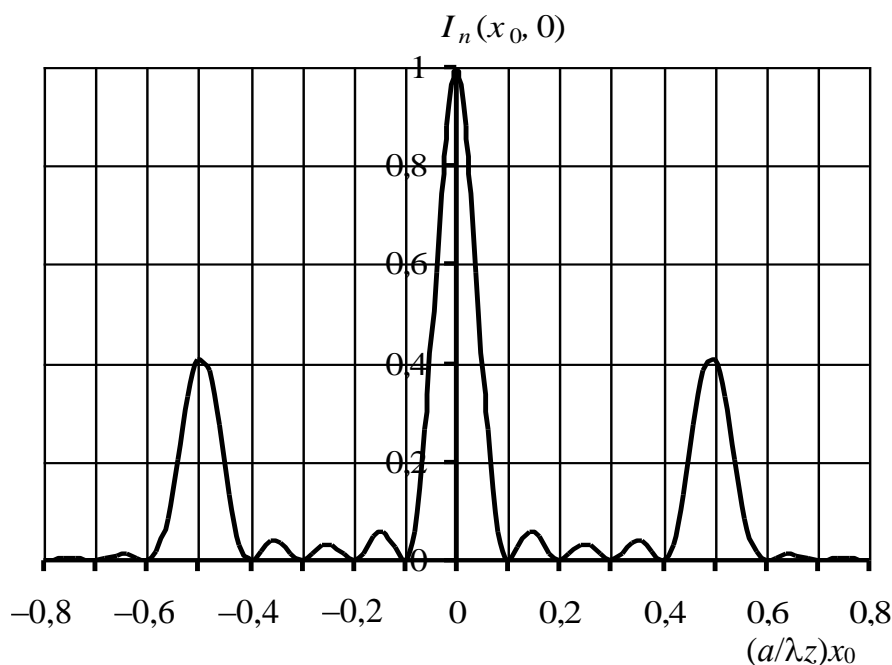


Рис. 6.36. Нормований розподіл інтенсивності під час дифракції Фраунгофера на ґратці (6.167)

Для обчислення інтеграла (6.172) скористаємося співвідношенням (9.1.27) з довідника [11]:

$$\frac{dJ_1(x)}{dx} = J_0(x) - \frac{1}{x}J_1(x). \quad (6.173)$$

Помножимо праву і ліву частини рівняння (6.173) на $J_1(x)$:

$$J_1(x) \frac{dJ_1(x)}{dx} = J_1(x)J_0(x) - \frac{1}{x}J_1^2(x). \quad (6.174)$$

Із співвідношення (6.98) за $n = 0$ маємо

$$\frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x). \quad (6.175)$$

Із системи рівнянь (6.174) і (6.175) отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}J_1^2(x) &= J_1(x)J_0(x) - J_1(x) \frac{dJ_1(x)}{dx} = \\ &= -J_0(x) \frac{dJ_0(x)}{dx} - J_1(x) \frac{dJ_1(x)}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} [J_0^2(x) + J_1^2(x)]. \end{aligned} \quad (6.176)$$

Підставимо співвідношення (6.176) в інтеграл (2.172):

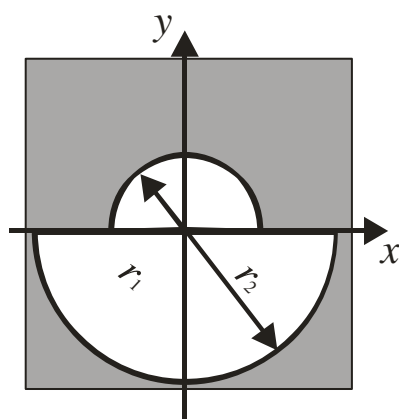
$$L(R_0) = - \int_0^{2\pi \frac{R}{\lambda z} R_0} d[J_0^2(x) + J_1^2(x)] = 1 - J_0^2\left(2\pi \frac{R}{\lambda z} R_0\right) - J_1^2\left(2\pi \frac{R}{\lambda z} R_0\right). \quad (6.177)$$

Отриманий вираз (6.177) збігається з формулою Релея (6.103).

Приклад 6.8. Форму отвору в екрані показано на рис. 6.37. Екран освітлюється плоскою монохроматичною хвилею одиничної амплітуди з довжиною хвилі λ . Визначте комплексну амплітуду та інтенсивність поля у точці $x_0 = y_0 = 0$, якщо дифракція Френеля спостерігається на відстані z за екраном.

Розв'язання. Амплітуду поля під час дифракції Френеля визначають за формулою (6.56). У центрі дифракційної картини, коли $x_0 = y_0 = 0$, ця формула матиме вигляд

$$V(0,0) = \frac{1}{j\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} V(x,y) \exp\left[j\frac{\pi}{\lambda z}(x^2 + y^2)\right] dx dy. \quad (6.178)$$



Нехай екран має амплітудний коефіцієнт пропускання $t(x,y)$. Тоді амплітуду поля безпосередньо за екраном можна знайти за виразом

$$V(x,y) = V_0 t(x,y) = t(x,y). \quad (6.179)$$

Підставимо вираз (6.179) у формулу (6.178),

отримаємо

$$\begin{aligned} \text{Рис. 6.37. До прикладу 6.8} \quad V(0,0) &= \frac{1}{j\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} t(x,y) \cos\left[\frac{\pi}{\lambda z}(x^2 + y^2)\right] dx dy + \\ &+ \frac{1}{j\lambda z} j \iint_{-\infty}^{\infty} t(x,y) \sin\left[\frac{\pi}{\lambda z}(x^2 + y^2)\right] dx dy = \frac{1}{\lambda z} (I_s - jI_c). \end{aligned} \quad (6.180)$$

Щоб обчислити функцію (6.180) перейдемо до полярної системи координат r, φ : $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $dx dy = r dr d\varphi$, $x^2 + y^2 = r^2$. Використовуючи рис. 6.37, запишемо амплітудний коефіцієнт пропускання екрана у полярній системі координат:

$$t(x, y) = t(r, \varphi) = \begin{cases} 1, \text{ коли } 0 \leq r \leq r_1, 0 \leq \varphi \leq \pi; \\ 1, \text{ коли } 0 \leq r \leq r_2, \pi \leq \varphi \leq 2\pi; \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases} \quad (6.181)$$

Тоді

$$\begin{aligned} I_c &= \int_0^{r_1} \int_0^\pi \cos\left(\frac{\pi}{\lambda z} r^2\right) r dr d\varphi + \int_0^{r_2} \int_\pi^{2\pi} \cos\left(\frac{\pi}{\lambda z} r^2\right) r dr d\varphi = \\ &= \frac{\lambda z}{2\pi} \int_0^{r_1} \int_0^\pi \cos\left(\frac{\pi}{\lambda z} r^2\right) d\left(\frac{\pi}{\lambda z} r^2\right) d\varphi + \int_0^{r_2} \int_\pi^{2\pi} \cos\left(\frac{\pi}{\lambda z} r^2\right) d\left(\frac{\pi}{\lambda z} r^2\right) d\varphi = \\ &= \frac{\lambda z}{2} \left[\sin\left(\frac{\pi}{\lambda z} r_1^2\right) + \sin\left(\frac{\pi}{\lambda z} r_2^2\right) \right]; \end{aligned} \quad (6.182)$$

$$\begin{aligned} I_s &= \int_0^{r_1} \int_0^\pi \sin\left(\frac{\pi}{\lambda z} r^2\right) r dr d\varphi + \int_0^{r_2} \int_\pi^{2\pi} \sin\left(\frac{\pi}{\lambda z} r^2\right) r dr d\varphi = \\ &= -\frac{\lambda z}{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{\lambda z} r_1^2\right) + \cos\left(\frac{\pi}{\lambda z} r_2^2\right) \right]. \end{aligned} \quad (6.183)$$

Підставимо інтеграли (6.182) і (6.183) у функцію (6.180):

$$V(0,0) = -\frac{1}{2} \left\{ \left[\cos\left(\frac{\pi}{\lambda z} r_1^2\right) + \cos\left(\frac{\pi}{\lambda z} r_2^2\right) \right] + j \left[\sin\left(\frac{\pi}{\lambda z} r_1^2\right) + \sin\left(\frac{\pi}{\lambda z} r_2^2\right) \right] \right\}. \quad (6.184)$$

Інтенсивність поля в точці $x_0 = y_0 = 0$ для амплітуди поля (6.184) знаходять за формулою

$$\begin{aligned} I(0,0) &= \frac{1}{4} \left\{ \left[\cos\left(\frac{\pi}{\lambda z} r_1^2\right) + \cos\left(\frac{\pi}{\lambda z} r_2^2\right) \right]^2 + \left[\sin\left(\frac{\pi}{\lambda z} r_1^2\right) + \sin\left(\frac{\pi}{\lambda z} r_2^2\right) \right]^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos \left[\frac{\pi}{\lambda z} (r_2^2 - r_1^2) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.185)$$

Приклад 6.9. Знайдіть інтенсивність світлового поля в центрі картини дифракції Френеля, що відбувається на отворі, який освітлюється нормально падаючою плоскою хвилею одиничної амплітуди, якщо його коефіцієнт пропускання

$$t(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ коли } 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R; \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases} \quad (6.186)$$

Розв'язання. Запишемо рівняння дифракції Френеля (6.56) для центра дифракційної картини, коли $x_0 = y_0 = 0$,

$$V(0,0) = \frac{1}{j\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} V(x, y) \exp \left[j \frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2) \right] dx dy. \quad (6.187)$$

Якщо на екран нормально падає плоска монохроматична хвиля одиничної амплітуди $V_0 = 1$, то для функції (6.186) амплітуда поля безпосередньо за екраном

$$V(x, y) = V_0 t(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ коли } 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R; \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases} \quad (6.188)$$

У зв'язку з тим, що функція (6.188) вісесиметрична, запишемо її й рівняння дифракції Френеля (6.187) у полярній системі координат. Замінімо змінні: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $dx dy = r dr d\varphi$. Тоді

$$V(x, y) = V(r) = \begin{cases} 1, \text{ коли } 0 \leq r \leq R; \\ 0 \text{ в інших випадках;} \end{cases} \quad (6.189)$$

$$V(0) = \frac{1}{j\lambda z} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty V(r) \exp\left(j \frac{\pi}{\lambda z} r^2\right) r dr d\varphi. \quad (6.190)$$

Підставимо функцію (6.189) у рівняння (6.190):

$$V(0) = \frac{2\pi}{j\lambda z} \int_0^R \exp\left(j \frac{\pi}{\lambda z} r^2\right) r dr. \quad (6.191)$$

Для розрахунку (6.192) скористаємося табличним інтегралом (1.3.3.7) з довідника [11]:

$$\int e^{-ax^2} x dx = -\frac{1}{2a} e^{-ax^2}, \quad (6.192)$$

де $x = r$; $a = -j \frac{\pi}{\lambda z}$.

Використовуючи інтеграл (6.192), маємо

$$\begin{aligned} V(0) &= \frac{2\pi}{j\lambda z} \left(\frac{\lambda z}{2j\pi}\right) \exp\left(j \frac{\pi}{\lambda z} r^2\right) \Big|_0^R = 1 - \exp\left(j \frac{\pi}{\lambda z} R^2\right) = \\ &= 1 - \cos\left(\frac{\pi}{\lambda z} R^2\right) - j \sin\left(\frac{\pi}{\lambda z} R^2\right). \end{aligned} \quad (6.193)$$

За умови (6.193) інтенсивність світла у точці $x_0 = y_0 = 0$

$$I(0,0) = |V|^2 = \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{\lambda z} R^2\right)\right]^2 + \sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda z} R^2\right) = 4 \sin^2\left(\frac{\pi R^2}{2\lambda z}\right).$$

Приклад 6.10. Дифракційна ґратка освітлюється нормально падаючим паралельним пучком світла ($\lambda = 500$ нм). Відстань між першими максимумами, які проектується на екран лінзою з фокусною відстанню $f' = 1$ м, дорівнює l

= 20,2 см. Довжина ґратки $L = 10$ см. Визначте: а) період ґратки; б) число штрихів на 1 мм; в) кутову та лінійну ширину нульового максимуму; г) кутову та лінійну дисперсії ґратки у спектрі першого порядку; д) роздільну здатність ґратки у спектрі першого порядку.

Розв'язання. а) Із умови головних максимумів (6.124) при $m = 1$ маємо

$$d = \frac{\lambda}{\sin \varphi_1^{\max}}.$$

Із рис. 6.38 маємо $\sin \varphi_1^{\max} \approx \operatorname{tg} \varphi_1^{\max} = \frac{l}{2f'}$. Тоді

$$d \approx \frac{2\lambda f'}{l} = \frac{2 \cdot 0,5 \cdot 10^6}{20,2 \cdot 10^4} = 4,95 \text{ мкм}.$$

б) Число штрихів на 1 мм ґратки

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{4,95 \cdot 10^{-3}} \approx 202 \frac{\text{штриха}}{\text{мм}}.$$

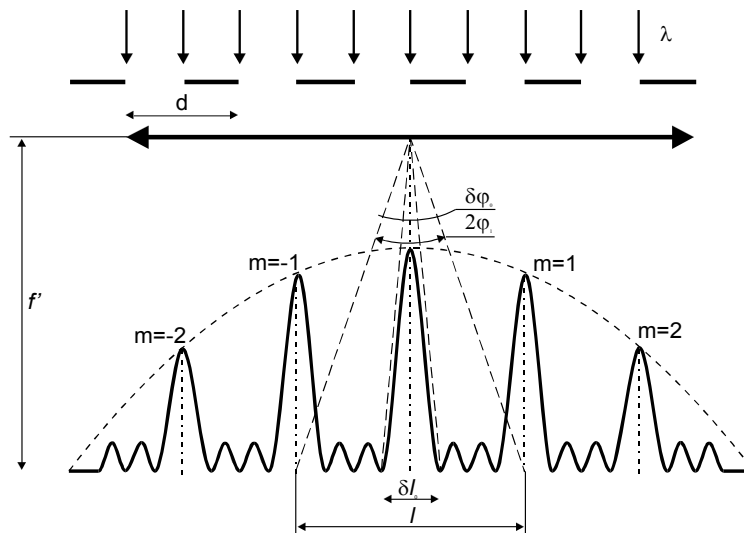


Рис. 6.38. До прикладу 6.10

в) Кутова ширина нульового максимуму – це кут між найближчими до головного (0-го) максимуму мінімумами: $\delta\varphi_0 = 2\varphi_1^{\min}$ (рис.6.38). Із умови

мінімумів (6.127) маємо $\sin \varphi_1^{\min} \approx \varphi_1^{\min} = \frac{\lambda}{dN}$.

$$\text{Тоді } \delta\varphi_0 = 2 \frac{\lambda}{dN} = 2 \frac{\lambda}{L} = 2 \frac{0,5 \cdot 10^{-3}}{100} = 10^{-5} \text{ рад} = 2,06''.$$

Лінійна ширина нульового головного максимуму

$$\delta l_0 = f' \cdot \delta\varphi_0 = 10^6 \cdot 10^{-5} = 10 \text{ мкм}.$$

з) Кутову дисперсію визначаємо за формулою (6.130) при $m = 1$

$$D_\varphi = \frac{1}{\sqrt{d^2 - \lambda^2}} = \frac{1}{\sqrt{4,95^2 - 0,5^2}} = 0,2 \frac{\text{рад}}{\text{мкм}}.$$

Лінійну дисперсію визначаємо за формулою (6.131)

$$D_l = f' D_\varphi = 10^6 \cdot 0,2 = 2 \cdot 10^5 \frac{\text{мм}}{\text{мкм}}.$$

д) Роздільну здатність визначаємо за формулою (6.133)

$$R = mN = m \frac{L}{d} = 1 \frac{10^5}{4,95} = 2,02 \cdot 10^4.$$

Приклад 6.11. Дифракційна ґратка освітлюється нормально падаючим світлом від гелієвої розрядної трубки. Відрахунки по лімбу гоніометра положень фіолетової лінії ($\lambda_\phi = 0,389 \text{ мкм}$) у спектрах першого порядку по обидві сторони від нульового максимуму дали значення $\varphi_{-1}^\phi = 27^\circ 33'$ і $\varphi_1^\phi = 36^\circ 27'$. Відрахунки по лімбу для червоної лінії у спектрах першого порядку дали відповідно $\varphi_{-1}^r = 23^\circ 54'$ і $\varphi_1^r = 40^\circ 06'$. Визначте період ґратки і довжину хвилі червоної лінії у спектрі гелію.

Розв'язання. Із умови прикладу видно, що нульове значення лімба не співпадає з положенням нульового максимуму (рис.6.39). Із рис.13.3 знаходимо,

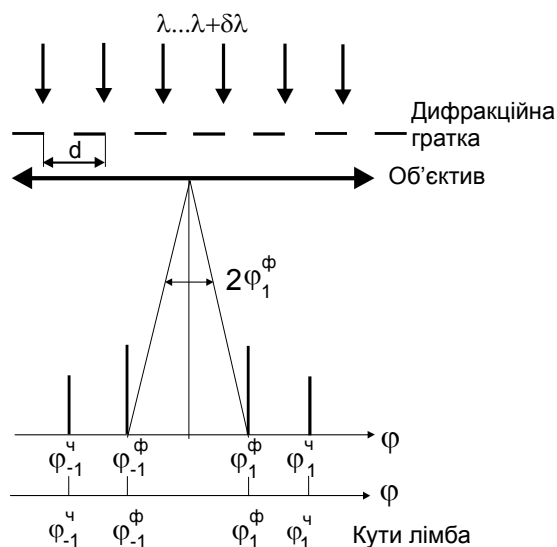


Рис. 6.39. До прикладу 6.11

що $\varphi_1^\phi = \frac{1}{2}(\varphi_1^\phi - \varphi_{-1}^\phi) = \frac{1}{2}(36^\circ 27' - 27^\circ 33') = 4^\circ 27'$. Період дифракційної ґратки

знаходимо із умови головних максимумів (6.124) для фіолетової лінії

$d = \frac{\lambda_\phi}{\sin \varphi_1^\phi} = \frac{0,389}{\sin 4^\circ 27'} = 5 \text{ мкм}$. Аналогічно із рис. 6.39 знаходимо кути дифракції

для червоної лінії $\varphi_1^ч = \frac{1}{2}(\varphi_1^ч - \varphi_{-1}^ч) = \frac{1}{2}(40^\circ 06' - 23^\circ 54') = 8^\circ 06'$. Довжину хвилі

знаходимо із умови головних максимумів (6.124)

$$\lambda_ч = d \sin \varphi_1^ч = 5 \sin 8^\circ 06' = 0,705 \text{ мкм}.$$

Приклад 6.12. Плоска світлова хвиля падає на плоску дифракційну ґратку з періодом $d = 2 \text{ мкм}$ під кутом $\theta = 80^\circ$. Знайдіть кут φ_{\max} , що відповідає максимуму найбільшого порядку, якщо на ґратку падає монохроматичне світло з довжиною хвилі $\lambda = 546 \text{ нм}$.

Розв'язання. Якщо плоска світлова хвиля падає на дифракційну ґратку під кутом θ , то положення головних максимумів визначається рівнянням (6.140)

$$d(\sin \theta - \sin \varphi_m) = m\lambda.$$

Визначимо максимальний порядок спектру виходячи з того, максимальний кут відхилення променів ґраткою не може перевищувати $\pm 90^\circ$, тобто $\sin \varphi_{\max} \leq \pm 1$. Тоді із рівняння (6.140) можна записати

$$m_{\max} \leq \frac{d}{\lambda}(\sin \theta + 1) = \frac{2}{0,546}(\sin 80^\circ + 1) = 7,27.$$

Число m_{\max} повинно бути цілим, тобто $m_{\max} = 7$.

Максимальний кут відхилення променів, який відповідає останньому дифракційному максимуму визначимо із співвідношення (6.140)

$$d(\sin \theta + \sin \varphi_{\max}) = m_{\max} \lambda.$$

$$\text{Звідки } \varphi_{\max} = \arcsin\left(\frac{\lambda}{d} m_{\max} - \sin \theta\right) = \arcsin\left(\frac{0,546}{d} 7 - \sin 80^\circ\right) = 67^\circ 51'.$$

Приклад 6.13. При нормальному падінні світла на дифракційну ґратку шириною 10 мм виявилось, що компоненти жовтої лінії натрію (589,0 нм та 589,6 нм) спостерігаються роздільно, починаючи з п'ятого порядку спектру. Оцінити: а) період цієї дифракційної ґратки; б) при якій ширині дифракційної ґратки з таким же періодом можна роздільно спостерігати в третьому періоді дуплет спектральної лінії з $\lambda_{\text{ср}} = 460,0$ нм, компоненти якої відрізняються на 0,13 нм?

Розв'язання. а) Період дифракційної ґратки d пов'язаний з порядком дифракції m співвідношенням (6.124). Роздільна здатність дифракційної ґратки

$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN = m \frac{L}{d}$, де m – порядок дифракції, в якому проводяться спектральні

дослідження; L – ширина дифракційної ґратки. Звідси величина періоду ґратки

$$d = \frac{m \cdot L \cdot \delta\lambda}{\lambda} = \frac{5 \cdot 10 \text{ мм} \cdot 0,6 \cdot 10^{-9}}{589,3 \cdot 10^{-9}} \approx \frac{30}{600} = 0,05 \text{ мм} = 50 \text{ мкм}.$$

Звернемо увагу на те, що значення λ , яке ми підставляли у формулу для визначення d , в силу дуже близьких значень λ_1 та λ_2 , було середньо арифметичним значенням λ_{cp} .

б) Для другого випадку дифракційною ґраткою, яка мала такий же період d , але іншу ширину L_2 , для інших спектральних ліній, роздільна здатність буде

іншою і визначатись як $R_2 = \frac{\lambda_{2cp}}{\delta\lambda_2} = m_2 N_2 = m_2 \frac{L_2}{d}$. Звідси:

$$L_2 = \frac{\lambda_{2cp} d}{\delta\lambda_2 m_1} = \frac{460,0 \cdot 10^{-9} \cdot 0,05 \text{ мм}}{0,13 \cdot 10^{-9} \cdot 3} = 59 \text{ мм}.$$

Приклад 6.14. У телескоп, діаметр об'єктива якого $D = 1000$ мм, спостерігають зірки. Знайдіть найменшу кутову відстань $\delta\varphi$ між зірками, при якій їх дифракційні зображення спостерігаються роздільно. Довжина хвилі $\lambda = 0,55$ мкм.

Розв'язання. Розглянемо рис. 6.40. Згідно критерію Релея зображення двох точкових джерел випромінювання буде видно роздільно, якщо максимум дифракційного зображення одного співпадає з першим мінімумом другого, тобто

$$\delta\varphi = \varphi_E = \frac{O_1 O_2}{f'} = 1,22 \frac{\lambda}{D} = 1,22 \frac{0,55 \cdot 10^{-3}}{1000} = 0,67 \cdot 10^{-6} \text{ рад} = 0,14''.$$

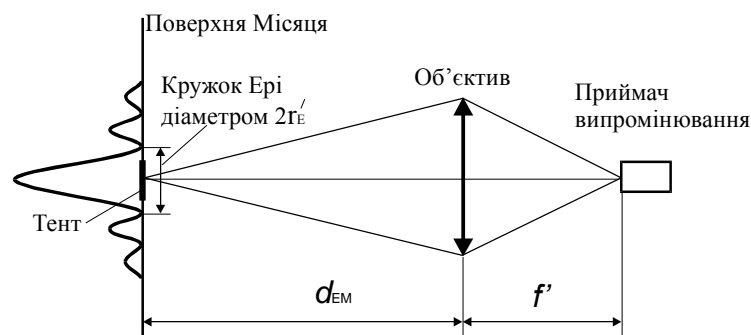


Рис. 6.40. До прикладу 6.14

Приклад 6.15. На якій найбільшій відстані видно роздільно два стовпи, відстань між якими 1 м? а) Неозброєним оком, діаметр зіниці якого 3 мм. б) За допомогою зорової труби, яка має об'єктив діаметром 38 мм. в) Розрахуйте кутовий діаметр дифракційного зображення точки, яке формується оком і об'єктивом зорової труби.

Розв'язання. Два точкові джерела світла (стовпи) будуть спостерігатися роздільно, якщо кут $\delta\psi = l/d$, під яким вони спостерігаються, буде більшим за граничне кутове розділення оптичної системи (6.153), тобто $\frac{l}{d_{\max}} \geq 1,22 \frac{\lambda}{D}$.

Звідси $d_{\max} \leq \frac{l \cdot D}{1,22\lambda}$, де $l = 1$ м; $\lambda = 0,55 \cdot 10^{-6}$ м.

$$а) \text{ Для ока } d_{\max} \leq \frac{1 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{1,22 \cdot 0,55 \cdot 10^{-6}} \approx 4,5 \text{ км.}$$

$$б) \text{ Для зорової труби } d_{\max} \leq \frac{1 \cdot 38 \cdot 10^{-3}}{1,22 \cdot 0,55 \cdot 10^{-6}} \approx 56,5 \text{ км.}$$

в) Кутовий діаметр дифракційного зображення дорівнює кутовому діаметру кружка Ейрі $\delta\psi_o = 2\varphi_E = 2,44 \frac{\lambda}{D}$.

$$\text{Для ока } \delta\psi_o = 2,44 \frac{0,55 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-3}} \approx 0,45 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = 1,5'.$$

$$\text{Для зорової труби } \delta\psi_o = 2,44 \frac{0,55 \cdot 10^{-6}}{38 \cdot 10^{-3}} \approx 0,35 \cdot 10^{-4} \text{ рад} = 7''.$$

Приклад 6.16. Космонавти прибули на Місяць. Щоб сповістити про це на Землю, вони послали на поверхні Місяця чорний тент. Яким повинен бути радіус цього тенту, щоб його можна було помітити з Землі у телескоп з діаметром об'єктива 5 м. Контрастна чутливість приймача випромінювання $c = 0,01$.

Розв'язання. Контрастна чутливість приймача випромінювання визначається як

$$c = \frac{\Phi_{\max} - \Phi_o}{\Phi_o},$$

де Φ_{\max} і Φ_o – максимальний і середній потоки випромінювання, які потрапляють до приймача випромінювання малих розмірів.

Розглянемо рис. 6.41. Якщо приймач випромінювання знаходиться у фокусі об'єктива, то до нього надходить випромінювання, яке знаходиться у межах його зображення (кружка Ейрі) на поверхні Місяця. Випромінювання з інших ділянок поверхні Місяця також надходить до телескопу, але не потрапляє на точковий приймач випромінювання. Тому світловий потік, який надходить до приймача випромінювання від поверхні Місяця буде $\Phi_o \approx E_o R_M A'_E$, де E_o – освітленість поверхні Місяця; R_M – коефіцієнт відбиття поверхні Місяця; A'_E – площа кружка Ейрі на поверхні Місяця.

Якщо у межах кружка Ейрі знаходиться чорний тент з коефіцієнтом відбиття $R_T < R_M$, то світловий потік, який потрапляє на приймач випромінювання, зменшиться (рис. 6.41)

$$\Phi_{\min} = \Phi_1 + \Phi_2 \cong E_o R_T A_T + E_o R_M (A'_E - A_T),$$

де Φ_1 – потік від тенту; Φ_2 – потік від частини кружка Ейрі, яка не закрита тентом; A_T – площа тенту. З урахуванням зменшення потоку при наявності в полі зору тенту контрастна чутливість приймача випромінювання

$$c = \frac{E_o R_M A'_E - [E_o R_T A_T + E_o R_M (A'_E - A_T)]}{E_o R_M A'_E} = \frac{A_T (R_M - R_T)}{A'_E R_M}.$$

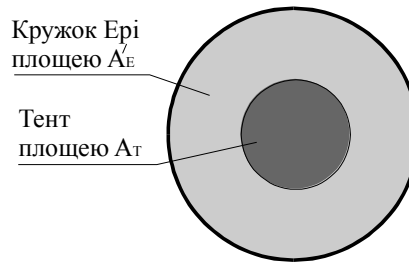


Рис. 6.41. До прикладу 6.16

Якщо $R_T = 0$, то $c = \frac{A_T}{A'_E}$. Площа тенту $A_T = \pi r_T^2$. Площа кружка Ейрі на поверхні Місяця $A'_E = \pi r_E'^2 = \pi \left(1,22 \frac{\lambda}{D} d_{EM} \right)^2$, де $d_{EM} = 4 \cdot 10^8$ м – відстань від Землі до Місяця. Тоді $c = \frac{A_T}{A'_E} = \frac{r_T^2}{\left(1,22 \frac{\lambda}{D} d_{EM} \right)^2}$.

$$\text{Звідси } r_T = 1,22 \frac{\lambda}{D} d_{EM} \sqrt{c} \geq 1,22 \frac{0,55 \cdot 10^{-6}}{5} 4 \cdot 10^8 \sqrt{0,01} = 5,37 \text{ м.}$$

Приклад 6.17. Визначте роздільну здатність мікроскопа для «сухого» об'єктива з числовою апертурою $A = 0,09$ і роздільну здатність для того ж об'єктива, але з масляною імерсією ($n = 1,6$). Довжина хвилі світла $\lambda = 546$ нм.

Розв'язання. Роздільна здатність – це обернена величина до мінімально роздільного розміру об'єкта спостереження, що визначається формулою (6.157):

$$R = \frac{1}{a_{\min}} = \frac{2n \sin \sigma_A}{\lambda},$$

де $\sin \sigma_A = 0,09$.

Тоді для «сухого» об'єктива маємо

$$R_1 = \frac{2 \cdot 0,09}{546 \cdot 10^{-6}} = 330 \text{ мм}^{-1},$$

а для імерсійного об'єктива –

$$R_2 = \frac{2 \cdot 1,6 \cdot 0,09}{546 \cdot 10^{-6}} = 528 \text{ мм}^{-1}.$$

6.17. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 6.1. Розрахуйте радіуси перших п'яти зон Френеля, а також зон з номерами 100 і 500, якщо відстань від хвильового фронту монохроматичної хвилі ($\lambda = 0,5 \text{ мкм}$) до екрану спостереження дорівнює 1 м, коли: а) точкове джерело випромінювання знаходиться на відстані 2 м від екрана; б) точкове джерело випромінювання знаходиться у нескінченності.

Відповідь:

q		1	2	3	4	5	100	500
ρ_m ,	а)	0,50	0,71	0,86	1,00	1,12	5,00	10,18
мм	б)	0,71	1,00	1,23	1,42	1,59	7,10	15,87

Задача 6.2. Радіус четвертої зони Френеля для плоского хвильового фронту дорівнює 3 м. Визначте радіуси 12-ї і 25-ї зон із тієї ж точки спостереження.

Відповідь: $\rho_{12} = 5,2 \text{ мм}$; $\rho_{25} = 7,5 \text{ мм}$.

Задача 6.3. Дифракція Френеля спостерігається на екрані, який розташований на відстані l від точкового монохроматичного джерела випромінювання ($\lambda = 0,6 \text{ мкм}$). Посередині цієї відстані розташований круглий непрозорий диск діаметром 1 см. Чому дорівнює відстань l , якщо диск закриває: а) тільки першу зону Френеля; б) перші дві зони; в) яким буде центр тіні у першому і другому випадках – світлим чи темним?

Відповідь: а) $l = 167 \text{ м}$; б) $l = 83,5 \text{ м}$; в) світлим в обох випадках (у першому випадку буде трохи світлішим).

Задача 6.4. Дифракційна картина спостерігається на відстані 4 м від точкового джерела випромінювання ($\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м). Посередині між джерелом і екраном встановлена діафрагма з круглим отвором. При якому радіусі отвору центр світлого кружка на екрані буде: а) найбільш темним; б) найбільш світлим?

Відповідь: а) найбільш світлим буде при $r_1 = 0,71$ мм; а) найбільш темним буде при $r_2 = 1$ мм.

Задача 6.5. На діафрагму з круглим отвором діаметром 1,96 мм нормально падає паралельний пучок монохроматичного світла ($\lambda = 0,6$ мкм). При якій найбільшій відстані до екрану у його центрі ще буде: а) темна пляма; б) світла пляма?

Відповідь: а) $b_2 = 0,8$ м; б) $b_1 = 1,6$ м.

Задача 6.6. Плоска монохроматична хвиля ($\lambda = 0,5$ мкм) з інтенсивністю I_0 нормально падає на діафрагму з круглим отвором діаметром 2 мм. Знайдіть відстані b_1, b_2, b_3, \dots від діафрагми до точок P_1, P_2, P_3, \dots , для яких в отворі вміщується 1, 2, 3, ... зони Френеля відповідно. Побудуйте наближено графік залежності інтенсивності у точці спостереження $I(b)$.

Відповідь:

q	1	2	3	4	5	∞
b_q , см	200	100	66	50	40	0
$I(b)$	$4I_0$	Приблизно 0	Менше $4I_0$	Більше 0	Менше $4I_0$	I_0

Задача 6.7. Монохроматичне точкове джерело світла ($\lambda = 550$ нм) розташоване на відстані 10 м від екрана. Між ними на відстані 5 м від екрана розташована діафрагма з круглим отвором, діаметр якого дорівнює 4,2 мм.

а) Скільки зон Френеля відкрито отвором? б) Як зміниться інтенсивність світла у центрі дифракційної картини, якщо забрати діафрагму?

Відповідь: а) $q = 3$; б) Зменшиться майже в 4 рази.

Задача 6.8. Паралельний монохроматичний пучок світла ($\lambda = 0,6$ мкм) нормально падає на діафрагму з круглим отвором діаметром 1,2 мм. На відстані 15 см за діафрагмою на осі отвору спостерігається темна пляма. На яку мінімальну відстань Δb необхідно змістити від цієї точки уздовж осі отвору, віддаляючись від нього, щоб у центрі дифракційної картини знову спостерігалася темна пляма?

Відповідь: $\Delta b = 15$ см.

Задача 6.9. Точкове монохроматичне джерело світла розташоване на відстані 3 м перед зонною пластинкою Френеля, а його зображення - на відстані 2 м за пластинкою. На якій відстані буде зображення джерела, якщо встановити його у нескінченності?

Відповідь: $b = 1,2$ м.

Задача 6.10. На шляху плоскої світлової хвилі з $\lambda = 589$ нм встановлено фокусувальну лінзу з фокусною відстанню $f = 300$ мм. Безпосередньо за лінзою розміщено діафрагму з круглим отвором, а на відстані $b = 1$ м від цієї діафрагми перебуває екран. Знайдіть мінімальний радіус отвору у діафрагмі, за якого у точці спостереження на екрані буде максимум освітленості.

Вказівка. Скористайтесь прикладом 6.1.

Відповідь: $R_1 = \sqrt{\frac{bf}{b-f}} \lambda = 0,5$ мм.

Задача 6.11. Між точковим джерелом монохроматичного світла з довжиною хвилі λ та екраном розмістили діафрагму з круглим отвором, радіус якого може змінюватись у процесі досліду. Відстань від діафрагми до джерела $r_0 = 1000$ мм, а відстань від діафрагми до екрана $b = 1500$ мм. Знайдіть довжину хвилі світла λ , якщо максимум освітленості у центрі дифракційної картини

спостерігається за радіуса отвору в діафрагмі $R_1 = 1$ мм, а наступний максимум – за $R_2 = 1,58$ мм.

$$\text{Відповідь: } \lambda = \frac{(R_2^2 - R_1^2)(r_0 + b)}{2r_0 b} = 1,25 \text{ мкм.}$$

Задача 6.12. Основна фокусна відстань зонної пластинки Френеля $f_1 = R_1^2/\lambda$, тобто в радіусі R_1 розміщується лише перша зона. Знайдіть її інші фокусні відстані.

$$\text{Відповідь: } f_q = \frac{f_1}{2q+1}.$$

Задача 6.13. Знайдіть фокусну відстань зонної пластинки для світла з довжиною хвилі $\lambda = 656$ нм, якщо радіус 7-ої зони Френеля $\rho_7 = 1,4$ мм. Визначте радіус 1-ої зони Френеля. Що трапиться, якщо простір між зонною пластинкою і екраном заповнити водою з $n = 1,33$?

$$\text{Відповідь: } f' = \frac{\rho_m^2}{m\lambda} = 475 \text{ мм}; \quad \rho_1 = \sqrt{\lambda f'} = 0,53 \text{ мм}; \quad \text{Зображення зміститься на}$$

величину $\Delta = 108$ мм, яка визначається із співвідношення $n\Delta = nf' - f'$.

Задача 6.14. Визначте фокусну відстань зонної пластини, якщо точкове джерело світла розташоване на відстані $r_0 = 500$ мм, а його зображення утворюється на відстані $b = 100$ мм. Джерело світла монохроматичне.

$$\text{Відповідь: } f' = \frac{r_0 b}{r_0 + b} = 333 \text{ мм.}$$

Задача 6.15. Точкове джерело світла з довжиною хвилі $\lambda = 404$ нм розташоване на відстані $r_0 = 1000$ мм від діафрагми з круглим отвором, радіус якого дорівнює $R = 1$ мм. Визначте відстань b від діафрагми до точки спостереження дифракційної картини P , для якої число зон Френеля у круглому отворі дорівнює $q = 5$.

$$\text{Відповідь: } b = \frac{R^2 r_0}{r_0 q \lambda - R^2} = 975,6 \text{ мм.}$$

Задача 6.16. На прозору перепону, яка має отвір з радіусом $r = 1$ мм, нормально падає плоска світлова хвиля. Коли відстань від перепони до встановленого за нею екрану $b_1 = 0,575$ м, то у центрі дифракційної картини спостерігається максимум інтенсивності. При збільшенні відстані до значення $b_2 = 0,862$ м максимум інтенсивності змінюється мінімумом. Визначте довжину хвилі λ світла.

$$\text{Відповідь: } \lambda = \frac{r^2(b_2 - b_1)}{b_1 b_2} = 0,58 \text{ мкм.}$$

Задача 6.17. На шляху плоскої світлової хвилі з $\lambda = 0,54$ мкм поставили тонку збираючу лінзу з фокусною відстанню $f = 50$ см. Безпосередньо за нею – діафрагма із круглим отвором, а на відстані $b = 75$ см від діафрагми – екран для спостережень. При яких радіусах отвору центр дифракційної картини на екрані має максимальну освітленість?

$$\text{Відповідь: } r_1 = 0,9 \text{ мм; } r_3 = 1,56 \text{ мм.}$$

Задача 6.18. Точкове джерело світла з довжиною хвилі $\lambda = 0,5$ мкм розташоване на відстані $a = 100$ см перед діафрагмою з круглим отвором $r = 1$ мм. Знайдіть відстань b від діафрагми до точки спостереження, для якої число зон Френеля отворі складає число $q = 3$.

$$\text{Відповідь: } b = \frac{ar_3^2}{3a\lambda - r_3^2} = 2 \text{ м.}$$

Задача 6.19. На шляху плоскої монохроматичної хвилі розташована непрозора ширма з секторним вирізом (рис. 6.42). Створена ширмою дифракційна картина з центром у точці P спостерігається на екрані, який розташований на деякій відстані від ширми. Інтенсивність світла у точці P екрана при відсутності ширми дорівнює I_0 . Знайдіть інтенсивність світла у точці P екрана при різних ширмах, які зображені на рис. 6.42. Радіуси закруглень у ширмах співпадають з радіусом першої зони Френеля.

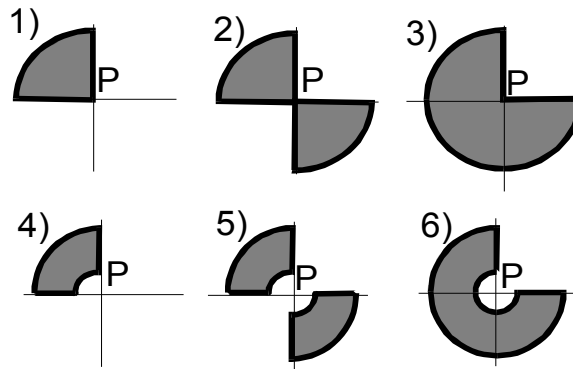


Рис. 6.42. До задачі 6.19

Вказівка. Необхідно виразити результуючу амплітуду $V(P)$ для кожної ширми через амплітуду V_1 першої зони, користуючись методом Шустера, вважаючи амплітуду пропорційну відкритій для світла площі ширми. Потім від амплітуди перейдіть до інтенсивності, замінюючи $(0,5V_1)^2$ на I_0 .

$$\text{Відповідь: } 1) V(P) = \frac{3}{4}V_1 - \frac{3}{4}V_2 + \frac{3}{4}V_3 - \dots \approx \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2}V_1 \right); \quad I(P) = \frac{9}{16}I_0;$$

$$2) \frac{1}{4}I_0; \quad 3) \frac{1}{16}I_0; \quad 4) \frac{25}{16}I_0; \quad 5) \frac{9}{4}I_0; \quad 6) \frac{49}{16}I_0.$$

Задача 6.20. Точкове джерело світла з двома монохроматичними лініями $\lambda_1 = 560$ нм і $\lambda_2 = 280$ нм однакової інтенсивності розміщено на відстані $L = 1$ м від екрана. Перед екраном на відстані $a = 0,2$ м встановлено прозорий диск діаметром $D = 0,6$ мм, який вносить фазову затримку у π разів для обох компонентів. Джерело світла, центри диска та екрана розміщені на одній осі. Як залежить інтенсивність світла у центрі екрана від наявності екрана?

$$\text{Відповідь: } I_{01} = I_{02} = \frac{1}{2}I_0; \quad q_1 = 1, \quad V_1(P) = -\frac{3}{2}V_{11}, \quad I_1 = 9I_0;$$

$$q_2 = 2, \quad V_2(P) = -\frac{3}{2}V_1 + V_2 \approx -\frac{1}{2}V_{12}, \quad I_2 = I_{02}, \quad I(P) = I_1 + I_2 = 5I_0.$$

Задача 6.21. Між точковим джерелом монохроматичного світла і точкою спостереження перпендикулярно лінії, яка з'єднує їх, встановлено непрозорий екран, що складається із двох кругів (рис. 6.43). Радіус одного з них відповідає першій зоні Френеля, а радіус другого – другій зоні Френеля. Визначте інтенсивність світла у точці спостереження, якщо, коли немає екрана, вона дорівнює I_0 .

Відповідь: $V(P) = -\frac{1}{4}V_2 + V_3 - V_4 + \dots \approx \frac{1}{4}V_1; I(P) = \frac{1}{4}I_0.$

Задача 6.22. Вдалині від точкового джерела S встановлено нескінченний екран, який ідеально відбиває світло. З екрана вилучено диск діаметром $D_1 =$

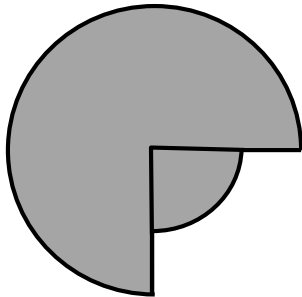


Рис. 6.43. До задачі 6.21

$2R_1\sqrt{2/3}$, де R_1 – радіус першої зони Френеля, і встановлено інший диск діаметром $D_2 = R_1\sqrt{2}$ (рис. 6.44). Знайдіть у точці S інтенсивність світла $I(S)$, що відбилося від екрана, якщо диск діаметром D_2 розміщений у площині екрана.

Відповідь: Інтенсивність світла у точці S

формується всіма зонами Френеля за винятком непрозорої частини першої зони.

Частка площі непрозорої частини першої зони становить $\frac{D_1^2 - D_2^2}{4R_1^2} = \frac{1}{6}$;

$$V(S) = \frac{5}{6}V_1 - V_2 + V_3 - \dots \approx \frac{1}{6}V_1 + \frac{1}{2}V_1 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}V_1\right); I(S) = \frac{4}{9}I_0.$$

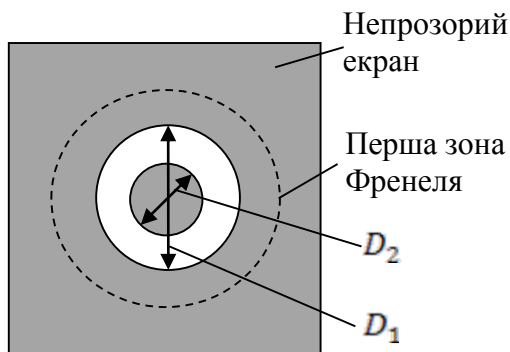


Рис. 6.44. До задачі 6.22

Задача 6.23. Фазова зонна пластинка

виготовлена з матеріалу з показником заломлення $n = 1,5$. Яку мінімальну висоту h мають мати виступи над парними (або непарними) зонами пластинки для довжини хвилі $\lambda_0 = 500$ нм?

Відповідь: $h = \frac{\lambda_0}{2(n-1)} = 500 \text{ нм}$.

Задача 6.24. Диск із скла для червоного світла закриває півтори зони Френеля для точки спостереження P . При якій товщині диска освітленість в точці P буде найбільшою ?

Відповідь: $h = \frac{\lambda}{n-1} \left(m + \frac{5}{8} \right)$. Для $\lambda = 0,6 \text{ мкм}$ та $n = 1,5$: $h = 0,75 \text{ мкм}; 1,95 \text{ мкм}$.

Задача 6.25. Чому дорівнює інтенсивність світла в фокусі зонної платівки, якщо закрити всі зони, крім першої. Інтенсивність світла без платівки дорівнює I_0 .

Відповідь: $I \approx 4I_0$.

Задача 6.26. Плоска хвиля з $\lambda = 0,5 \text{ мкм}$ падає на екран з круглим отвором радіуса $r = 0,8 \text{ мм}$. В точці P , яка знаходиться на відстані 64 см від отвору, знаходиться фотоприймач (ФП), що фіксує в цій точці мінімум інтенсивності. Куди треба пересунути ФП, щоб він зафіксував максимум інтенсивності світла?

Відповідь: на 64 см від екрану.

Задача 6.27. Радіус п'ятого кільця зонної пластинки Френеля для монохроматичної сферичної хвилі ($\lambda = 500 \text{ нм}$) дорівнює $1,5 \text{ мм}$. Визначте: а) фокусну відстань зонної пластинки; б) радіус першого кільця пластинки; в) що відбудеться, якщо простір за пластинкою заповнити водою?

Відповідь: а) $f' = 900 \text{ мм}$; б) $r_1 = 0,67 \text{ мм}$; в) $f' = 1097 \text{ мм}$.

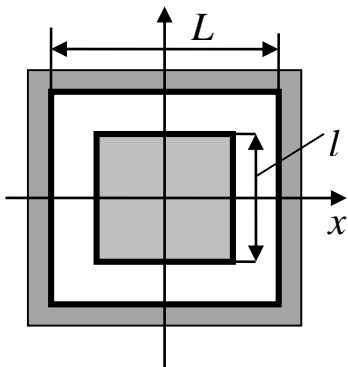


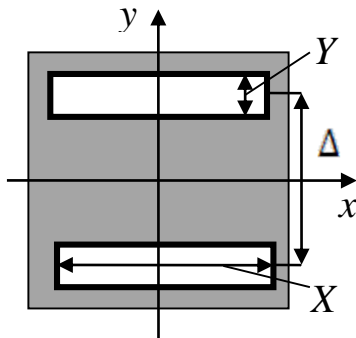
Рис. 6.45. До задачі 6.28

Задача 6.28. Виведіть вираз для розподілу інтенсивності у картині дифракції Фраунгофера на отворі, який зображено на рис. 6.45. Вважається, що отвір освітлюється нормально падаючою плоскою хвилею, амплітуда якої дорівнює одиниці.

Відповідь:
$$I(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{\lambda z}\right)^2 \times$$

$$\times \left[L^2 \operatorname{sinc}\left(\frac{Lx_0}{\lambda z}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{Ly_0}{\lambda z}\right) - l^2 \operatorname{sinc}\left(\frac{lx_0}{\lambda z}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{ly_0}{\lambda z}\right) \right]^2.$$

Задача 6.29. Екран освітлює нормально падаюча монохроматична хвиля, амплітуда якої дорівнює одиниці. Знайдіть розподіл інтенсивності у дифракційній



картині Фраунгофера на двох щілинах (рис. 6.46).

Побудуйте графіки нормованого розподілу вздовж осей x_0 та y_0 площини спостереження, якщо $\frac{X}{\lambda z} =$

$$10 \text{ м}^{-1}; \frac{Y}{\lambda z} = 1 \text{ м}^{-1};$$

$$\frac{\Delta}{\lambda z} = 1,5 \text{ м}^{-1}, \text{ де } \lambda - \text{ довжина хвилі; } z - \text{ відстань від}$$

екрана до площини спостереження.

Відповідь:
$$I(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{\lambda z}\right)^4 \left[X \operatorname{sinc}\left(\frac{Xx_0}{\lambda z}\right) \right]^2 \times$$

$$\times \left[(\Delta + Y) \operatorname{sinc}\left(\frac{(\Delta + Y)y_0}{\lambda z}\right) - (\Delta - Y) \operatorname{sinc}\left(\frac{(\Delta - Y)y_0}{\lambda z}\right) \right]^2;$$

$$I(0,0) = \left(\frac{2XY}{\lambda z}\right)^2;$$

$$I_n(x_0, y_0) = \frac{I(x_0, y_0)}{I(0,0)} = \{ \operatorname{sinc}(10x_0) [1,25 \operatorname{sinc}(2,5y_0) - 0,25 \operatorname{sinc}(0,5y_0)] \}^2.$$

Задача 6.30. На екран із круглим отвором діаметром 40 мм нормально падає плоска монохроматична хвиля, довжина якої становить 0,5 мкм, а амплітуда дорівнює одиниці. Знайдіть розподіл інтенсивності у дифракційній картині Фраунгофера, якщо фокусна відстань фокусувальної лінзи становить 100 мм. Побудуйте графік цього розподілу.

Відповідь:
$$I_n(r_0) = \left[\frac{2J_1\left(\frac{2\pi \cdot 20}{0,5 \cdot 10^3 \cdot 100} r_0\right)}{\frac{2\pi \cdot 20}{0,5 \cdot 10^3 \cdot 100} r_0} \right]^2 = \left[\frac{2J_1(2,5r_0)}{2,5r_0} \right]^2,$$

де r_0 вимірюється у мкм.

Задача 6.31. Екран із круглим кільцевим отвором із зовнішнім і внутрішнім радіусами $R_1 = 20$ мм та $R_2 = 10$ мм освітлюється нормально падаючою монохроматичною хвилею, довжина якої становить $0,5$ мкм, а амплітуда дорівнює одиниці. Знайдіть розподіл інтенсивності в дифракційній картині Фраунгофера, якщо фокусна відстань фокусувальної лінзи становить 100 мм. Побудуйте графік нормованого розподілу інтенсивності.

Відповідь:

$$I_n(r_0) = \frac{I(r_0)}{I(0)} = \left(\frac{1}{R_1^2 - R_2^2} \right)^2 \left[R_1^2 \frac{2J_1\left(\frac{2\pi R_1 r_0}{\lambda f}\right)}{\frac{2\pi R_1 r_0}{\lambda f}} - R_2^2 \frac{2J_1\left(\frac{2\pi R_2 r_0}{\lambda f}\right)}{\frac{2\pi R_2 r_0}{\lambda f}} \right]^2.$$

Задача 6.32. Визначте нормовану інтенсивність дифракційної картини Фраунгофера, якщо плоска хвиля одиничної амплітуди нормально падає на екран із кільцевою діафрагмою з радіусами $2R$ та R . Отриманий результат порівняйте з дифракцією Фраунгофера на круглому отворі з радіусом $2R$. Побудуйте відповідні графіки нормованої інтенсивності за $R = 10$ мм.

Відповідь:
$$I_n(r_0) = \frac{I(r_0)}{I(0)} = \frac{1}{9} \left[4 \frac{2J_1\left(\frac{4\pi R r_0}{\lambda f}\right)}{\frac{4\pi R r_0}{\lambda f}} - \frac{2J_1\left(\frac{2\pi R r_0}{\lambda f}\right)}{\frac{2\pi R r_0}{\lambda f}} \right]^2.$$

Задача 6.33*. Знайдіть розподіл поля в дифракційній картині Фраунгофера на синусоїдальній фазовій ґратці, яка має комплексний амплітудний коефіцієнт пропускання

$$t(x, y) = \exp \left[j \frac{m}{2} \sin(2\pi\nu_0 x) \right] \text{rect} \left(\frac{x}{a} \right) \text{rect} \left(\frac{y}{b} \right),$$

де m – глибина фазової модуляції; ν_0 – просторова частота ґратки.

Відповідь:

$$V(x_0, y_0) = \left(\frac{ab}{\lambda z} \right)^2 \text{sinc} \left(\frac{by_0}{\lambda z} \right) \sum_{n=0}^{\infty} J_n(m) \text{sinc} \left[\frac{a}{\lambda z} (x_0 + \lambda z n \nu_0) \right],$$

де J_n – функція Бесселя n -го порядку; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Задача 6.34. На щілину шириною $b = 10$ мм падає під кутом $\varepsilon = 2^\circ$ плоска монохроматична хвиля одиничної амплітуди з довжиною $\lambda = 0,5$ мкм. Хвильовий

вектор \vec{k} перебуває у площині yz , а щілина – у площині xz . За екраном встановлено фокусувальну лінзу з фокусною відстанню $f = 100$ мм. Виведіть функцію, яка описує розподіл інтенсивності у дифракційній картині Фраунгофера. Побудуйте графік нормованого розподілу інтенсивності $I(y_0)$.

Вказівка: Скористайтесь рівнянням дифракції Фраунгофера (6.65) для одновимірного випадку. Для визначення амплітуди падаючої хвилі у площині екрана використайте рівняння плоскої монохроматичної хвилі.

$$\text{Відповідь: } I_n(y_0) = \text{sinc}^2 \left[\frac{\pi b}{\lambda f} (f \sin \varepsilon - y_0) \right].$$

*Задача 6.35**. Виконайте перетворення (6.60), яке визначає передавальну функцію дифракції Френеля.

Задача 6.36. Доведіть, що передавальна функція дифракції Френеля (6.60) є окремим випадком передавальної функції вільного простору (1.40) [12] з урахуванням обмежень (6.54), зумовлених дифракцією Френеля.

Задача 6.37. Знайдіть інтенсивність світлового поля на осі картини дифракції Френеля на отворі, який освітлюється нормально падаючою плоскою хвилею одиничної амплітуди, якщо його коефіцієнт пропускання

$$t(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{коли } a \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Вказівка: Скористайтесь прикладом 6.9.

$$\text{Відповідь: } I(0,0) = \left(\frac{2\pi}{\lambda z} \right)^2 \sin^2 \left[\frac{\pi}{2\lambda z} (1 - a^2) \right].$$

*Задача 6.38**. Отвір екрана освітлюється нормально падаючою плоскою хвилею одиничної амплітуди. Знайдіть картину дифракції Френеля на нескінченному отворі, який має амплітудний коефіцієнт пропускання $t(x, y) = \frac{1}{2} [1 + m \sin(2\pi \nu_0 x)]$, де $0 < m < 1$.

Відповідь:

$$I(x_0, y_0) = \frac{1}{4} + \frac{m^2}{16} \left\{ \exp \left[-j \frac{2\pi}{\lambda z} (x_0 - v_0 \lambda z)^2 \right] - \exp \left[-j \frac{2\pi}{\lambda z} (x_0 + v_0 \lambda z)^2 \right] \right\}^2.$$

Задача 6.39. Дифракційна ґратка освітлюється нормально падаючим пучком світла від газорозрядної лампи. Чому повинен бути рівним період ґратки, щоб у напрямку $\varphi^{\max} = 41^\circ$ співпадали максимуми двох спектральних ліній $\lambda_1 = 656,3$ нм і $\lambda_2 = 410,2$ нм? У спектрах яких порядків вони знаходяться?

Вказівка. Скористайтесь співвідношенням між довжинами хвиль і порядками їх спектрів, головні максимуми яких видно під одним кутом дифракції $\varphi^{\max} = 41^\circ$

$$d \sin \varphi_d^{\max} = m_1 \lambda_1 = m_2 \lambda_2$$

для підбору цілих чисел m_1 і m_2 , а потім визначте період d .

Відповідь: $d = 5$ мкм; $m_1 = 5$, $m_2 = 8$.

Задача 6.40. У спектрі третього порядку дифракційної ґратки під деяким кутом видно спектральну лінію $\lambda = 0,44$ мкм. Чи буде видно під тим же кутом які-небудь інші лінії видимого діапазону (0,4...0,76 мкм)?

Відповідь: $\lambda = 0,66$ мкм.

Задача 6.41. При нормальному падінні пучка світла на дифракційну ґратку жовту лінію натрію ($\lambda = 589$ нм) у спектрі першого порядку видно під кутом дифракції $\varphi_1^{\max} = 17^\circ 08'$. Деяку іншу лінію у спектрі другого порядку видно під кутом $24^\circ 12'$. Визначте число штрихів на 1 мм ґратки і довжину хвилі іншої лінії.

Відповідь: $1/d = 500$ мм⁻¹; $\lambda_2 = 410$ нм.

Задача 6.42. На дифракційну ґратку з періодом 6 мкм нормально падає монохроматичне світло. Різниця кутів дифракції для головних максимумів першого і другого порядків дорівнює $4^\circ 36'$. Визначте довжину хвилі джерела світла і число головних максимумів в дифракційній картині.

Відповідь: $\lambda = 0,478$ мкм; $m = 12$.

Задача 6.43. Дифракційна ґратка освітлюється нормально падаючим білим світлом ($\lambda_1 \dots \lambda_2 = 0,40 \dots 0,76$ мкм). Чи будуть перекриватися спектри: а) першого і другого порядків; б) другого і третього порядків?

Відповідь: а) Ні. б) Так.

Задача 6.44. Спектри видимого світла ($\lambda_1 \dots \lambda_2 = 0,40 \dots 0,76$ мкм), створені дифракційною ґраткою з 500 штрихами на 1 мм, проєктуються на екран лінзою з фокусною відстанню 2 м. а) Чи будуть перекриватися спектри першого і другого, другого і третього порядків? б) У скільки разів спектр другого порядку на екрані довше спектра першого порядку? в) Яка різниця кутів кінця першого і початку другого спектрів?

Відповідь: а) Ні, так. б) $\Delta l_1 / \Delta l_2 = 2,1$. в) $\varphi_{d2}^{\lambda_1 \max} - \varphi_{d1}^{\lambda_2 \max} = 1^\circ 12'$.

Задача 6.45. Дифракційна ґратка з 3937 штрихами на 1 см освітлюється нормально падаючим світлом. Визначте у спектрі першого порядку ($\cos \varphi_1^{\max} \approx 1$): а) кутову дисперсію у кутових секундах на ангстрем; б) лінійну дисперсію спектрографа з цією ґраткою при фокусній відстані лінзи 50 см; в) обернену лінійну дисперсію в ангстремах на міліметр.

Відповідь: а) $D_\varphi = 8,12 \frac{\text{кут. с}}{\text{А}}$; б) $D_l = 0,0197 \frac{\text{мм}}{\text{А}}$; в) $D_l^{-1} = 50,8 \frac{\text{А}}{\text{мм}}$.

Задача 6.46. Яке число штрихів N повинна мати дифракційна ґратка для того, щоб розділити у спектрі 1-го порядку лінії натрію жовтого дублету натрію, довжини хвиль якого дорівнюють $\lambda_1 = 589,0$ нм і $\lambda_2 = 589,6$ нм?

Відповідь: $N = \frac{\lambda}{\delta \lambda} = \frac{589}{589,6 - 589} = 982$.

Задача 6.47. Кутова дисперсія дифракційної ґратки для $\lambda = 668$ нм у спектрі першого порядку дорівнює $2,02 \cdot 10^5$ рад/м. Визначте: а) період ґратки; б) лінійну дисперсію у спектрі другого порядку ($\text{мм}/\text{\AA}$), якщо фокусна відстань лінзи дорівнює 40 см.

Відповідь: а) $d = 5$ мкм; б) $D_1 = 1,66 \text{ мм}/\text{\AA}$.

Задача 6.47. Чому дорівнює період дифракційної ґратки шириною 3 см, якщо вона може розділити у спектрі першого порядку спектральні лінії калію 404,4 нм і 404,7 нм?

Відповідь: $d = mL \frac{\delta\lambda}{\lambda} = 22,2$ мкм.

Задача 6.48. Яку різницю довжин хвиль може розділити дифракційна ґратка з періодом 2 мкм і шириною 2,5 мм у спектрі другого порядку в області жовтих променів ($\lambda = 600$ нм)?

Відповідь: $\delta\lambda = 0,24$ нм.

Задача 6.49. Період дифракційної ґратки $d = 0,01$ мм. Визначте найменше число N штрихів ґратки, при якому складові жовтої лінії натрію ($\lambda_1 = 589$ нм, $\lambda_2 = 589,6$ нм) будуть спостерігатись роздільно у спектрі 1-го порядку. Знайдіть найменшу довжину ґратки.

Відповідь: $N = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = 982$; $L = Nd = 9,82$ мм.

Задача 6.50. Кут між максимумами 1-го і 2-го порядку складає $\Delta\varphi = 8^\circ$. Знайдіть довжину хвилі монохроматичного світла, яке нормально падає на дифракційну ґратку з періодом $d = 3,11$ мкм.

Відповідь: $\lambda = \frac{d \sin \Delta\varphi}{\sqrt{5 - 4 \cos \Delta\varphi}} = 425$ нм.

Задача 6.51. На дифракційну ґратку з $N = 500$ штрихів/мм падає біле світло. За ґраткою встановлена додатна лінза з фокусною відстанню $f' = 2$ м. У фокальній

площині лінзи встановлено екран. Визначте довжину спектра 1-го порядку, якщо границя видимого спектра $\lambda_1 = 404,66$ нм, $\lambda_2 = 656,26$ нм.

$$\text{Відповідь: } \Delta l = l_2 - l_1 = f' \left\{ \operatorname{tg} \left[\arcsin(\lambda_2 N) \right] - \operatorname{tg} \left[\arcsin(\lambda_1 N) \right] \right\} = 0,28 \text{ м.}$$

Задача 6.52. На дифракційну ґратку з $N = 400$ штрихів/мм падає нормально монохроматичне світло з довжиною хвилі $\lambda = 656$ нм. Знайдіть загальне число дифракційних максимумів, які утворює ця ґратка. Визначте кут дифракції останнього максимуму.

$$\text{Відповідь: } m_{\max} = 3; \varphi_{\max} = \arcsin(m_{\max} N) = 51^\circ 55'.$$

Задача 6.53. На плоску дифракційну ґратку з періодом $d = 1,2$ мкм падає під кутом $\theta = 45^\circ$ до нормалі монохроматичне світло з довжиною хвилі $\lambda = 656$ нм. Знайдіть кутову дисперсію для кута дифракції, що відповідає максимуму 5-го порядку.

Вказівка. Скористайтесь прикладом 6.10.

$$\text{Відповідь: } D_\varphi = \frac{m}{d \sqrt{1 - \left(\sin \theta - \frac{m\lambda}{d} \right)^2}} = 2,54 \frac{1}{\text{мкм}}.$$

Задача 6.54. Визначте роздільну здатність дифракційної ґратки довжиною $L = Nd = 125$ мм з періодом $d = 1,25$ мкм і область дисперсії при нормальному падінні світла з довжиною хвилі $\lambda = 546$ нм. Порядок дифракції $m = 1$.

$$\text{Відповідь: } R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN = 10^5; \Delta\lambda = 546 \text{ нм.}$$

Задача 6.55. Яку фокусну відстань f' повинна мати лінза, що проектує на екран спектр, який отримано за допомогою дифракційної ґратки, щоб відстань між двома лініями калію $\lambda_1 = 404,4$ нм і $\lambda_2 = 404,7$ нм у спектрі першого порядку була рівною $l = 0,1$ мм? Постійна ґратки $d = 2$ мкм.

$$\text{Відповідь: } f' = \frac{l}{\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(\frac{\lambda_2}{d}\right)\right) - \operatorname{tg}\left(\arcsin\left(\frac{\lambda_1}{d}\right)\right)} = 626 \text{ мм.}$$

Задача 6.56. На дифракційну ґратку нормально падає пучок білого світла. Червону лінію ($\lambda_1 = 630$ нм) видно у спектрі третього порядку під кутом $\varphi = 60^\circ$. Яку спектральну лінію λ_2 видно під цим же кутом у спектрі четвертого порядку? Яке число штрихів N_0 на одиницю довжини має дифракційна ґратка? Знайдіть кутову дисперсію $d\varphi/d\lambda$ цієї ґратки для довжини хвилі $\lambda_1 = 630$ нм у спектрі третього порядку.

$$\text{Відповідь: } \lambda_2 = \frac{3}{4}\lambda_1 = 472,5 \text{ нм}; \quad \frac{1}{d} = \frac{\sin \varphi_1}{3\lambda_1} = 458 \frac{\text{штр}}{\text{мм}} \cdot \frac{d\varphi}{d\lambda} = 1,77 \frac{\text{рад}}{\text{нм}}.$$

Задача 6.57. В спектрографі встановлена перпендикулярно до падаючого світлового пучка дифракційна ґратка, період якої $d = 1000$ нм, а довжина робочої частини $l = 100$ мм. Фокусна відстань об'єктива $f' = 1$ м. Визначте довжину Δx видимого спектру в першому порядку на фотопластинці, яка встановлена у фокальній площині об'єктива. Розрахуйте лінійну дисперсію D_l і роздільну здатність R приладу.

$$\text{Відповідь: } \Delta x = f' \left[\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{\lambda_2}{d}\right) - \operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{\lambda_1}{d}\right) \right] = 810 \text{ мм};$$

$$D_l = f' \frac{m}{\sqrt{d^2 - (m\lambda)^2}} = 1,15 \frac{\text{М}}{\text{нм}}; \quad R = 10^5.$$

Задача 6.58. Період дифракційної ґратки $d = 2$ нм. Яку різницю довжин хвиль $\delta\lambda$ може розділити ця ґратка в області жовтих променів у спектрі другого порядку? Довжина ґратки $L = 2,5$ см.

$$\text{Відповідь: } \delta\lambda = \frac{\lambda d}{2L} = 0,0424 \text{ нм.}$$

Задача 6.59. На якій відстані одна від одної будуть знаходитись на екрані дві лінії ртутної лампи з $\lambda_1 = 5770 \text{ \AA}$ та $\lambda_2 = 5791 \text{ \AA}$ в спектрі 1-го порядку, який отриманий за допомогою дифракційної ґратки з періодом $d = 2 \cdot 10^{-4} \text{ см}$? Фокусна відстань лінзи, що проектує спектр на екран, $f = 0,6 \text{ м}$.

Відповідь: $l = 0,72 \text{ мм}$.

Задача 6.60. Визначити максимальну роздільну здатність (для світла з $\lambda = 590 \text{ нм}$) двох дифракційних ґраток, які мають однакову довжину $L = 3 \text{ мм}$, але різні періоди: $d_1 = 3 \text{ мкм}$ і $d_2 = 6 \text{ мкм}$.

Відповідь: $R_{\max} = \frac{m_{\max} L}{d}$; $R_1 = 5 \cdot 10^3$; $R_2 = 5 \cdot 10^3$.

Задача 6.61. Яку роздільну силу повинен мати спектральний прилад для того, щоб розділити дублет Na ($\lambda_1 = 589,0 \text{ нм}$ і $\lambda_2 = 589,6 \text{ нм}$) ?

Відповідь: $R \geq 982$.

Задача 6.62. Яку фокусну відстань повинна мати лінза, яка проектує на екран спектр, отриманий за допомогою дифракційної ґратки, щоб відстань між двома лініями калію 4044 \AA та 4047 \AA в спектрі 2-го порядку була рівна $0,1 \text{ мм}$. Постійна дифракційної ґратки - 2 мкм .

Відповідь: $f' = 0,63 \text{ м}$.

Задача 6.62. Зорова труба геодезичного приладу має об'єктив діаметром $D_o = 60 \text{ мм}$. Визначить: а) Кутову границю розділення об'єктива труби і мінімальну відстань між двома точками, що знаходяться на відстані $l = 2 \text{ км}$ від труби, які може розділити ця труба. Довжина хвилі $\lambda = 546 \text{ нм}$. б) Мінімальне збільшення зорової труби, при якому її роздільна здатність буде повністю використана. Діаметр зіниці ока $D_E = 4 \text{ мм}$.

Відповідь: а) $\delta\varphi = 2,29''$; $\delta l = \frac{l}{f'} r_E = 22 \text{ мм}$; б) $\Gamma_{\min} = \frac{\delta\varphi_E}{\delta\varphi_o} = \frac{D_o}{D_E} = 15^x$.

Задача 6.63. Яку мінімальну відстань між двома точками на Місяці може розділити телескоп з діаметром об'єктива 5 м? Довжину хвилі світла вважати рівною 0,55 мкм, а середню відстань від Землі до Місяця $3,884 \cdot 10^8$ м. Визначте кутовий діаметр дифракційної плями телескопа.

Відповідь: $l = 52$ м; $\delta\varphi = 0,055''$.

Задача 6.64. Яка повинна бути довжина відрізка на Сонці, щоб його зображення у телескопі з діаметром дзеркала 6 м можна було відрізнити від зображення точки, якщо середня відстань від Землі до Сонця дорівнює $149,6 \cdot 10^6$ км? Чи можливо за допомогою цього телескопу розгледіти кратер діаметром 50 м на поверхні Місяця, який знаходиться на відстані $384 \cdot 10^3$ км від Землі?

Відповідь: Більше 16,7 км. Можливо.

Задача 6.65. Дзеркальний металевий міжпланетний корабель з поперечним розміром $D_k = 10$ м зробив посадку на освітлену поверхню Місяця. Визначте діаметр D_o дзеркала телескопа, у який можна побачити з Землі корабель, якщо контраст, що виявляється оком, дорівнює $c = 0,15$. Вважайте коефіцієнт відбиття поверхні Місяця $R_M = 0,1$, а корабля – $R_k = 1$. Спостереження відбувається у світлі з довжиною хвилі $\lambda = 0,6$ мкм. Відстань від Землі до Місяця $d_{EM} = 4 \cdot 10^5$ км.

Вказівка. Скористайтесь прикладом 14.3 з урахуванням знаку контрасту.

$$\text{Відповідь: } D_o \geq \frac{2,44\lambda d_{EM}}{D_j} \sqrt{c \frac{R_M}{R_k - R_M}} = 7,56'' .$$

Задача 6.66. Передній апертурний кут об'єктива мікроскопа дорівнює 14° .
 а) Чому дорівнює мінімальний розмір предмета, який може розділити об'єктив при $\lambda = 0,55$ мкм? б) У скільки разів зменшиться цей розмір, якщо повітряний простір між предметним склом і об'єктивом заповнити водою? в) Який показник

заломлення повинна мати імерсійна рідина, щоб за допомогою мікроскопа можна було розгледіти мікроби розміром 0,63 мкм?

Відповідь: а) $a_{\min} = 1,14$ мкм; б) У 1,33 рази; в) $n = 1,8$.

Задача 6.67. Знайдіть дифракційну границю розділення біологічного мікроскопа при використанні ахроматичного об'єктива 100×1,25МИ (масляна імерсія), якщо $\lambda = 546$ нм.

Відповідь: $a_{\min} = 0,22$ мкм.

Задача 6.68. Знайдіть найменшу відстань між двома точками об'єкта, які можна спостерігати роздільно, при використанні таких об'єктивів: 6,3×0,20; 10×0,30; 25×0,50; 60×0,85, якщо $\lambda = 0,55$ мкм.

Відповідь: 1,37 мкм; 0,92 мкм; 0,55 мкм; 0,32 мкм.

Задача 6.69. Визначте дифракційну границю розділення ультрафіолетового мікроскопа при використанні суперапохромата 6,3×0,75ВГИ (водно-гліцерина імерсія $n = 1,33$) в ультрафіолетовому випромінюванні з $\lambda = 0,28$ мкм.

Відповідь: $a_{\min} = 0,14$ мкм.

РОЗДІЛ 7

ОПТИЧНА ГОЛОГРАФІЯ

7.1. Фізичні основи голографії

7.1.1. Загальні положення

Голографія (від грецького *holos* – увесь, повний і *grapho* – пишу) – це спосіб запису і поновлення хвильового поля, заснований на реєстрації інтерференційної картини, яка утворена хвилею, відбитою від предмета, що освітлюється джерелом світла (*предметна хвиля*), і когерентною з нею хвилею, що іде безпосередньо від джерела світла (*опорна хвиля*) [2,8]. Зареєстрована інтерференційна картина називається *голограмою*. Голограма, що освітлена опорною хвилею, створює такий амплітудно-фазовий просторовий розподіл хвильового поля, яке створювала при запису предметна хвиля.

В якості предметної хвилі розглянемо рівняння плоскої монохроматичної хвилі в площині її реєстрації, наприклад, на поверхні фотопластинки.

$$\begin{aligned} E(x, y, t) &= E_0(x, y, t) \exp[j\varphi(x, y, d)] = \\ &= E_0(x, y) \exp\left[j\omega\left(t - \frac{d}{c}\right)\right] \exp[j\varphi(x, y, d)], \end{aligned} \quad (7.1)$$

де $E_0(x, y)$ і $\varphi(x, y, d)$ – дійсна амплітуда і фаза світлової хвилі в площині фотопластинки; d – відстань від довільної точки предмета до точки на фотопластинці з координатами x, y .

Усі приймачі випромінювання реєструють інтенсивність світла, яка згідно (2.60) дорівнює [12]

$$I(x, y) = |E(x, y)|^2 = E \cdot E^* = E_0 e^{j\varphi} E_0 e^{-j\varphi} = E_0^2(x, y), \quad (7.2)$$

де не враховано постійний множник $c\varepsilon_0/2$. Тому інформація про фазу втрачається. Так як фаза залежить від відстані, яку проходить хвиля, то в інтенсивності відсутня інформація про розташування окремих елементів об'єкта реєстрації відносно фотопластинки.

Голографія дозволяє записати інформацію як про амплітуду, так і про фазу світлової хвилі, тобто повну інформацію. Отримання голографічного зображення складається із двох стадій: запис голограми і поновлення зображення. Для запису голограми використовують інтерференцію двох хвиль – *об'єктної (предметної) хвилі* $E_o(x, y)$ від предмета і *опорної (референтної) хвилі* $E_r(x, y)$ з відомою фазою. Записана інтерференційна картина у вигляді амплітудного коефіцієнта пропускання $t_p(x, y)$ фотопластинки називається *голограмою*.

Для відновлення зображення (об'єктної хвилі) голограма освітлюється *хвилею відновлення* $E_{rec}(x, y)$, яка в більшості випадків відповідає референтній хвилі. В результаті дифракції світла на інтерференційних смугах, що записані на голограмі, утворюється декілька хвиль, одна із яких відповідає об'єктній хвилі.

7.1.2. Запис голограми

При запису голограми використовуються дві когерентні хвилі з певними амплітудами і фазами, інформацію про які необхідно зберегти. Однак усі приймачі випромінювання чутливі тільки до інтенсивності. Тому необхідно, щоб інформація про фазу при запису перетворювалась в модуляцію інтенсивності. Стандартний метод розв'язку такої задачі – це інтерферометрія. До невідомого хвильового фронту об'єктної хвилі $E_o(x, y)$ добавляється другий когерентний фронт референтної хвилі $E_r(x, y)$ з відомою амплітудою і фазою (рис. 7.1). Тоді їх сумарна інтенсивність буде залежати як від амплітуди, так і від фази об'єктної хвилі.

Таким чином, якщо

$$E_o(x, y) = E_{o0}(x, y)\exp[j\varphi_o(x, y)] \text{ і } E_r(x, y) = E_{r0}(x, y)\exp[j\varphi_r(x, y)], \quad (7.2)$$

то результуюча інтенсивність в площини фотопластинки буде

$$I_p(x, y) \sim |E_o + E_r|^2 = (E_o + E_r)(E_o^* + E_r^*) = |E_o|^2 + |E_r|^2 + E_r^*E_o + E_rE_o^* =$$

$$= |E_{o0}|^2 + |E_{r0}|^2 + E_{r0} \exp(-j\varphi_r) E_{o0} \exp(j\varphi_o) + \\ + E_{r0} \exp(j\varphi_r) E_{o0} \exp(-j\varphi_o) = E_{o0}^2 + E_{r0}^2 + 2E_{r0}E_{o0} \cos(\varphi_r - \varphi_o). \quad (7.3)$$

Перші два члени в (7.3) визначають інтенсивності двох хвиль, а третій залежить від різниці їх фаз. Таким чином, розподіл інтенсивності $I_p(x, y)$ (7.3) залежить як від амплітуди E_{o0} так і від фази φ_o об'єктної хвилі.

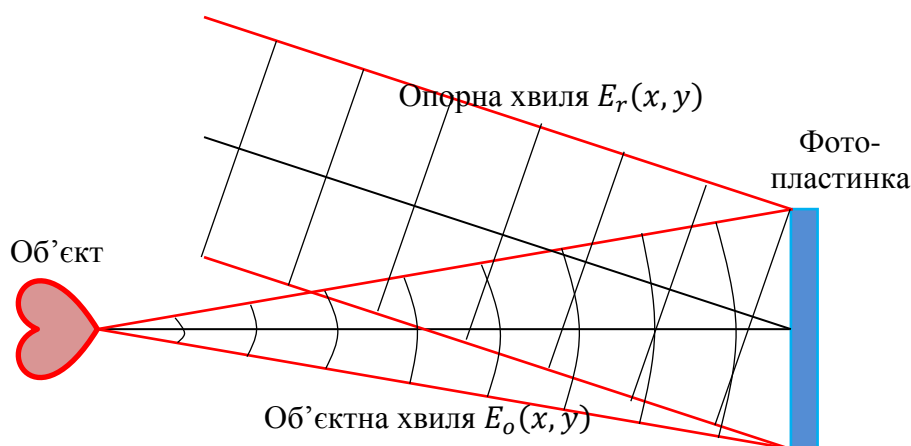


Рис. 7.1. Схема запису голограми

Інтерференційну картину можна записати на фотопластинку, фотоплівку, фотохромне скло, електронні приймачі випромінювання і т.п. Будемо вважати, що реєстрація інтенсивності інтерференційної картини здійснюється фотопластинкою, амплітудний коефіцієнт пропускання якої після експонування і хімічної обробки лінійно залежить від інтенсивності

$$t_p(x, y) = \beta_p I_p(x, y), \quad (7.4)$$

де β_p – коефіцієнт контрастності, який від'ємний для негативної фотопластинки і додатний для позитивної. Будемо також вважати, що інтенсивність $I_r(x, y)$ референтної хвилі постійна на усій поверхні фотопластинки. В цьому випадку амплітудний коефіцієнт пропускання обробленої фотопластинки (голограми) можна записати у вигляді

$$t_p(x, y) = t_0 + \beta_p (E_{o0}^2 + E_r^* E_o + E_r E_o^*), \quad (7.5)$$

де t_0 – постійна складова пропускання фотопластинки.

7.1.3. Відновлення об’єктної хвилі

Нехай голограма, що має коефіцієнт пропускання $t_p(x, y)$ освітлюється хвилею відновлення $E_{rec}(x, y)$. Тоді амплітуда поля за голограмою

$$E_h(x, y) = E_{rec}(x, y)t_p(x, y) = E_{rec}t_0 + \beta_p E_{rec}E_{o0}^2 + \beta_p E_{rec}E_r^*E_o + \beta_p E_{rec}E_rE_o^* = E_1 + E_2 + E_3 + E_4. \quad (7.6)$$

Аналіз поля (7.6) за голограмою показує:

1. Якщо хвиля відновлення E_{rec} є точна копія референтної хвилі E_r , то третя складова поля E_3 буде мати вигляд

$$E_3(x, y) = \beta_p |E_r|^2 E_o \sim E_o(x, y). \quad (7.7)$$

Прийmemo до уваги наше допущення про те, що інтенсивність референтної хвилі $|E_r|^2$ постійна. Тоді складова $E_3(x, y)$ з точністю до постійного множника буде копією об’єктної хвилі $E_o(x, y)$ (рис. 7.2,а).

2. Якщо хвиля відновлення $E_{rec} = E_r^*$ є комплексно спряженою до референтної хвилі E_r , то четверта складова поля E_4 буде мати вигляд (рис. 7.2,б)

$$E_4(x, y) = \beta_p |E_r|^2 E_o^* \sim E_o^*(x, y). \quad (7.8)$$

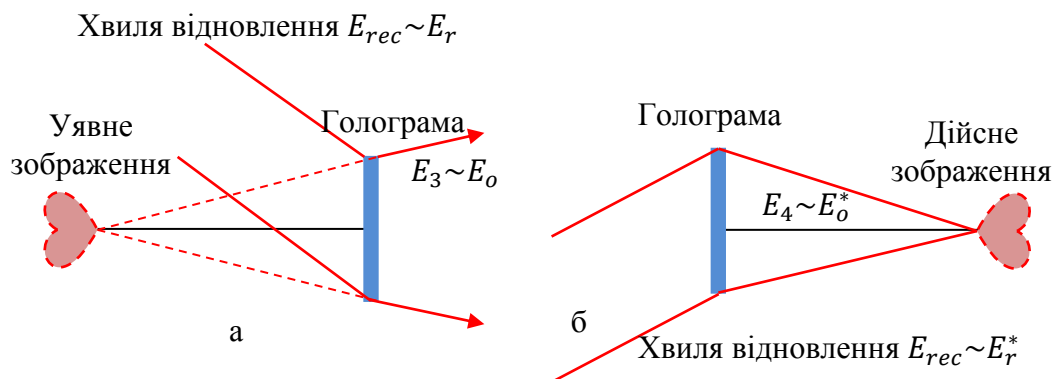


Рис. 7.2. Схема відновлення хвильового фронту: а – формування уявленого зображення; б – формування дійсного зображення

3. В полі за голограмою в кожному із розглянутих випадків завжди присутні додаткові три компоненти, які створюють інтерференційні завади. Тому очевидно, що для отримання точної копії хвилі $E_o(x, y)$ або $E_o^*(x, y)$ необхідно використати деякий метод, який дозволяє спостерігати окремо складові поля E_1, E_2, E_3, E_4 .

7.2. Історія розвитку голографії

В 1948 році Деніс Габор, американець – угорець по походженню, запропонував новий двоступінчастий процес безлінзового отримання зображення, який він назвав поновленням хвильового фронту [2]. Вивчення питань поновлення хвильового фронту Габор розпочав з метою підвищення роздільної здатності електронних мікроскопів. Однак, по технічним причинам цей метод не знайшов ще широкого застосування, проте став початком розвитку голографії. В 50-х роках багато авторів значно розвинули теорію метода отримання зображення відновленням хвильового фронту.

На початку 60-х років в голографії розпочалася справжня революція. При цьому важливу роль відіграли наукові дослідження, які проводилися в радіолокаційній лабораторії Мічиганського університету, особливо роботи Лейта і Упатнієкса. Ці автори виявили подібність між методом Габора відновлення хвильового фронту і методом антен синтетичної апертури, що дало змогу змінити схему запису голограми Габора. Вони також вперше використали в голографії лазер для отримання тривимірних (об'ємних) фотографій. Висока якість і натуральність тривимірних зображень, отриманих методом голографії, викликали загальний інтерес до ідеї відновлення хвильового фронту. Але найбільш цікаві і потенційно корисні властивості голограм не пов'язані з отриманням тривимірних зображень.

7.3. Голограма Габора

Схема запису голограми Габора наведена на рис.7.3. Нехай об'єкт має високу прозорість, тобто його амплітудний коефіцієнт пропускання

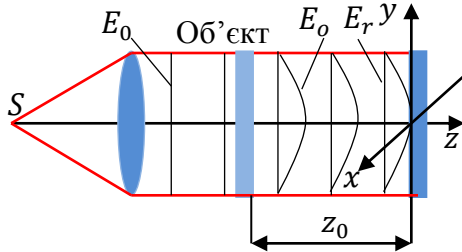


Рис. 7.3. Запис голограми Габора

$$t_o(x_o, y_o) = t_o + \Delta t(x_o, y_o), \quad (7.9)$$

де t_o – середній високий коефіцієнт пропускання; Δt – відхилення пропускання від середнього значення, $|\Delta t| \ll t_o$.

Якщо такий об'єкт освітити паралельним пучком, то амплітуда поля за об'єктом матиме дві компоненти:

1. Інтенсивна однорідна плоска хвиля, яка буде виконувати роль референтної хвилі E_r .
2. Слабка розсіяна об'єктна хвиля E_o , яку формує пропускання об'єкта $\Delta t(x_o, y_o)$.

Тоді розподіл інтенсивності на фотопластинці, яка знаходиться на відстані z_o від об'єкта, можна записати у вигляді

$$I_p(x, y) \sim |E_o + E_r|^2 = |E_r|^2 + |E_o|^2 + E_r^* E_o + E_r E_o^*, \quad (7.10)$$

де $E_r = E_o t_o = \text{const}$ – амплітуда плоскої хвилі; $E_o(x, y) = E_o \Delta t(x_o, y_o)$ – амплітуда розсіяного світла.

Після експонування і обробки фотопластинки її амплітудний коефіцієнт пропускання буде дорівнювати

$$t_p(x, y) = t_o + \beta_p(E_{o0}^2 + E_r^* E_o + E_r E_o^*), \quad (7.11)$$

де t_o – постійна складова пропускання фотопластинки (голограми).

Якщо на голограму з амплітудним коефіцієнтом пропускання (7.11) нормально падає плоска монохроматична хвиля з амплітудою E_{rec} , то амплітуда поля за голограмою матиме чотири складові (рис. 7.4):

$$E_h(x, y) = E_{rec}t_p(x, y) = E_{rec}t_0 + \beta_p E_{rec}E_{o0}^2 + \beta_p E_{rec}E_r^*E_o + \beta_p E_{rec}E_rE_o^* = E_1 + E_2 + E_3 + E_4. \quad (7.12)$$

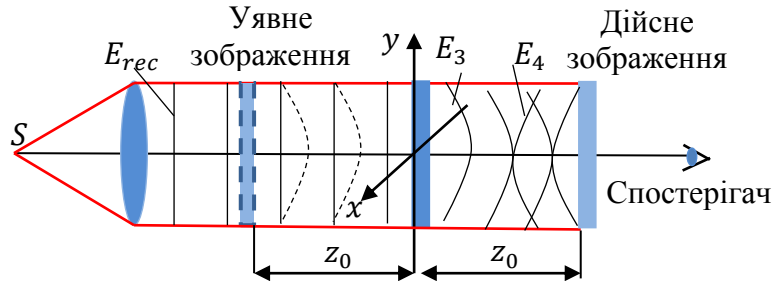


Рис. 7.4. Відновлення голограми Габора

Перша складова $E_1 = E_{rec}t_0$ утворює плоску хвилю, яка проходить через голограму без спотворень. Другою складовою $E_2 = \beta_p E_{rec}E_{o0}^2$ можна знехтувати, так як $|E_o|^2 \ll |E_r|^2$. Третя складова $E_3 = \beta_p E_{rec}E_r^*E_o$ пропорційна амплітуді об'єктної хвилі $E_o(x, y)$. Ця хвиля утворює уявне зображення об'єкта, яке розташоване на відстані z_0 перед голограмою. Четверта складова $E_4 = \beta_p E_{rec}E_rE_o^*$ пропорційна комплексно спряженій амплітуді об'єктної хвилі $E_o^*(x, y)$. Ця хвиля утворює дійсне зображення об'єкта, яке розташоване на відстані z_0 за голограмою.

Таким чином, в голограмі Габора відновлюються два спряжених зображення об'єкта, які розташовані на оптичній осі на відстані $2z_0$ одно від одного в присутності рівномірного фону $E_{rec}t_0$.

Із співвідношення (7.11) видно, що пропускання голограми відносно постійної складової t_0 може бути додатнім або від'ємним в залежності від контрастності β_p фотопластинки. Це означає, що амплітуди когерентних хвиль E_3 і E_4 , які відновлюють зображення, будуть відніматися або додаватися до рівномірного фону $E_{rec}t_0$. Тому голограма, що записана на позитивну

фотопластинку, буде відновлювати зображення з позитивним контрастом, а для негативної фотопластинки – з від’ємним контрастом.

Методу Габора властиві деякі недоліки, які обмежують сферу його застосування. Можливо, найбільш істотне обмеження пов’язане з допущення про високу прозорість об’єкта $|\Delta t| \ll t_o$, внаслідок якого $|E_o(x, y)| \ll E_r$. Якщо не виконується це обмеження, то знехтувати складовою поля за голограмою $E_2 = \beta_p E_{rec} E_{o0}^2$ неможливо, а наявність поля E_2 призведе до істотного спотворення відновлених зображень. Таким чином, за допомогою голограми Габра можна відновити зображення об’єктів у вигляді, наприклад, непрозорих букв на прозорому фоні, але не об’єктів у вигляді прозорих букв на непрозорому фоні.

Другим істотним обмеженням є те, що при відновленні утворюється не одно зображення, а два спряжених зображення, які *неможливо розглядати роздільно*. Коли фокусується дійсне зображення, воно завжди супроводжується розфокусованим уявним зображенням, і навпаки. Таким чином, навіть для об’єктів високої прозорості якість зображень погіршується із-за їх роздвоєності. Для вилучення або зменшення цього недоліку запропоновано ряд методів, серед яких метод Лейта – Упатнієкса став найбільш успішним.

7.4. Голограма Лейта і Упатнієкса

Найбільше розповсюдження отримали *голограми Лейта – Упатнієкса*, які іноді називають *голограмами з похилим референтним пучком*. Головна їх особливість полягає в тому, що під час запису використовується додаткова референтна хвиля, на відміну від методу Габора, в якому референтною хвилею служить хвиля, що безпосередньо пройшла через об’єкт. Більш того, в методі Лейта – Упатнієкса напрямком розповсюдження референтної хвилі не співпадає з напрямком осі, на якій розташовані об’єкт і фотопластинка, а утворює певний кут.

Вперше можливість практичної реалізації такої голограми була доведена Лейтом і Упатнієксом (Emmeth Leith and Juris Upatnieks, the university of Michigan) в 1962 році. Перші голограми такого типу були отримані без використання лазерів.

7.4.1. Запис голограми

Одна із можливих схем запису голограми Лейта – Упатнієкса наведена на рис. 7.5. Випромінювання від точкового джерела за допомогою додатної лінзи перетворюється в когерентний паралельний пучок, на шляху якого розташовані об'єкт з коефіцієнтом пропускання $t_o(x_o, y_o)$ і призма. Об'єктна хвиля $E_o(x, y)$, яка утворилася після проходження об'єкта, нормально падає на фотопластинку. Друга частина плоскої хвилі відхиляється призмою і падає на фотопластинку під кутом θ .

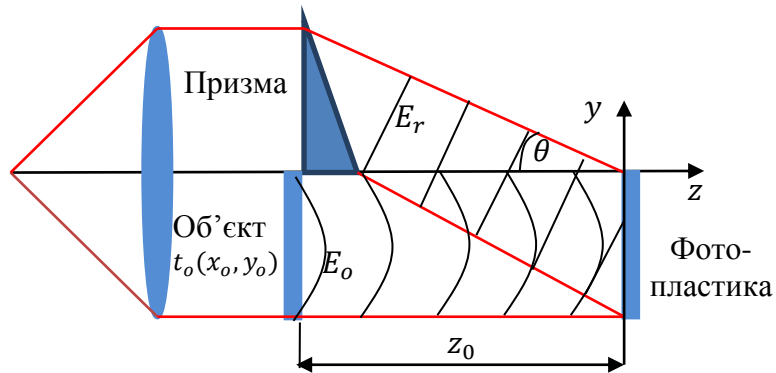


Рис. 7.5. Запис голограми Лейта – Упатнієкса

Знайдемо амплітуду поля цієї референтної хвилі $E_r(x, y)$ на поверхні фотопластини, використовуючи рівняння плоскої хвилі (2.47) [12]

$$E_r(x, y) = E_{r0} \exp(-j\vec{k}\vec{r}), \quad (7.13)$$

де \vec{k} – хвильовий вектор, орієнтація якого вказує напрямок переміщення хвильового фронту,

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} (\vec{x}_0 \cos\alpha + \vec{y}_0 \cos\beta + \vec{z}_0 \cos\gamma); \quad (7.14)$$

\vec{r} – радіус-вектор, який визначає положення точки на фотопластині,

$$\vec{r} = \vec{x}_0x + \vec{y}_0y + \vec{z}_0z. \quad (7.15)$$

Причому

$$\vec{k}\vec{r} = \frac{2\pi}{\lambda}(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma). \quad (7.16)$$

Із рис. 7.5 маємо $z = 0$; $\alpha = 90^\circ$; $\beta = 90^\circ + \theta$; $\gamma = \theta$. Тоді

$$\vec{k}\vec{r} = \frac{2\pi}{\lambda}y\cos(90^\circ + \theta) = -2\pi\nu_r y, \quad (7.17)$$

де $\nu_r = \sin\theta/\lambda$ – просторова частота референтної хвилі в площині фотопластинки.

В цьому випадку рівняння (7.13) матиме вигляд

$$E_r(x, y) = E_{r0}\exp(j2\pi\nu_r y). \quad (7.18)$$

В результаті інтерференції об'єктної і референтної хвиль на поверхні фотопластинки утворюється інтерференційна картина, яка має інтенсивність

$$\begin{aligned} I_p(x, y) &\sim |E_o + E_r|^2 = (E_o + E_r)(E_o^* + E_r^*) = |E_o|^2 + |E_r|^2 + E_r^*E_o + E_rE_o^* = \\ &= |E_{o0}|^2 + |E_{r0}|^2 + E_{r0}\exp(-j2\pi\nu_r y)E_{o0}\exp(j\varphi_o) + \\ &\quad + E_{r0}\exp(j2\pi\nu_r y)E_{o0}\exp(-j\varphi_o)E_r. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Розподіл інтенсивності (7.19) можна представити аналогічно (7.3) у вигляді

$$I_p(x, y) \sim E_{o0}^2 + E_{r0}^2 + 2E_{r0}E_{o0}\cos(2\pi\nu_r y - \varphi_o). \quad (7.20)$$

Цей вираз показує, що амплітуда E_{o0} і фаза φ_o об'єктної хвилі E_o записуються відповідно як амплітудна і частотна модуляція несучої частоти ν_r .

Після експонування і обробки фотопластинки отримаємо голограму, яка має амплітудний коефіцієнт пропускання

$$t_p(x, y) = t_0 + \beta_p[E_{o0}^2 + E_oE_{r0}\exp(-j2\pi\nu_r y) + E_{r0}\exp(j2\pi\nu_r y)E_o^*]. \quad (7.21)$$

7.4.2. Відновлення об'єктної хвилі

Нехай отримана голограма освітлюється однорідною плоскою хвилею, яка нормально падає на голограму (рис. 7.6). Тоді за голограмою утворюється електромагнітне поле, яке має чотири складових.

$$E_h(x, y) = E_{rec}t_0 + \beta_p E_{rec} E_{o0}^2 + \beta_p E_{rec} E_o E_{r0} \exp(-j2\pi\nu_r y) + \beta_p E_{rec} E_o^* E_{r0} \exp(j2\pi\nu_r y) = E_1 + E_2 + E_3 + E_4. \quad (7.22)$$

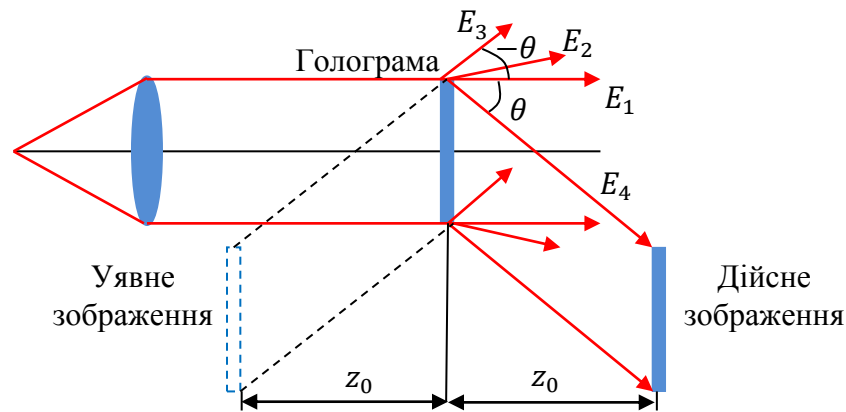


Рис. 7.6. Відновлення зображення

Компонента поля $E_1 = E_{rec}t_0$ – плоска рівномірно ослаблена падаюча хвиля, яка розповсюджується уздовж нормалі (оптичної осі) до голограми.

Компонента поля $E_2(x, y) = \beta_p E_{rec} E_{o0}^2(x, y)$ залежить від координати голограми і являє собою набір плоских хвиль, які розповсюджуються під різними кутами до оптичної осі.

Компонента поля $E_3(x, y) = \beta_p E_{rec} E_o E_{r0} \exp(-j2\pi\nu_r y)$ пропорційна амплітуді об'єктної хвилі $E_o(x, y)$, помноженій на експоненціальний множник. Пропорційність E_o означає, що ця компонента формує уявне зображення об'єкта на відстані z_0 перед голограмою. Пропорційність множнику $\exp(-j2\pi\nu_r y)$ показує, що це зображення відхилене від оптичної осі на кут $-\theta$ (рис. 7.6).

Подібним чином, компонента поля $E_4(x, y) = \beta_p E_{rec} E_o^* E_{r0} \exp(j2\pi\nu_r y)$ пропорційна комплексній амплітуді об'єктної хвилі $E_o^*(x, y)$, помноженій на експоненціальний множник. Пропорційність E_o^* означає, що ця компонента формує дійсне зображення об'єкта на відстані z_0 за голограмою. Пропорційність множнику $\exp(j2\pi\nu_r y)$ показує, що це зображення відхилене від оптичної осі на кут θ (рис. 7.6).

Найбільш важливий висновок із аналізу поля за голограмою полягає в тому, що при відновленні формуються уявне і дійсне зображення, які просторово віддалені одне від одного і від компонент E_1 і E_2 . Таке розділення виникає завдяки використанню похилого референтного пучка. Для успішного розділення уявного і дійсного зображень необхідно, щоб кут θ між референтним пучком і об'єктною хвилею перевищував деяке мінімальне значення θ_{min} . Коли $\theta > \theta_{min}$, уявне і дійсне зображення не спотворюються другими компонентами поля. Оскільки зображення спостерігаються незалежно від когерентного фону E_1 і E_2 , то знак хвильових компонентів E_3 і E_4 тепер не має значення. Таким чином, при запису голограми Лейта – Упатнієкса можна використовувати як позитивну так і негативну фотопластинку.

7.4.3. Узагальнення на випадок неколімованих референтної і відновлювальної хвиль

Розглянемо тепер більш загальні схеми запису і відновлення голографічних зображень [2]. В якості референтної хвилі і хвилі відновлення будемо використовувати сферичні хвилі центри випромінювання яких розташовані в точках з координатами (x_r, y_r, z_r) і $(x_{rec}, y_{rec}, z_{rec})$ відповідно, а об'єкт будемо розглядати як сукупність точок з координатами (x_o, y_o, z_o) . В загальному випадку будемо вважати, що довжина хвилі λ_2 при відновленні може відрізнитись від довжини хвилі λ_1 в процесі запису голограми.

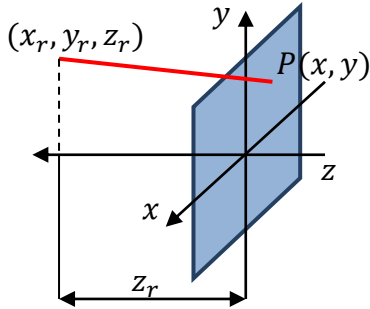


Рис. 7.7. До визначення рівняння референтної хвилі

Запишемо рівняння референтної монохроматичної сферичної хвилі (2.51) [9] в квадратичному наближенні (рис. 7.7)

$$E(r) = \frac{E_0}{r} \exp(jkr), \quad (7.23)$$

де $k = 2\pi/\lambda$ – хвильове число; $r = P_r P$ – відстань між точковим джерелом випромінювання і довільною точкою $P(x, y, 0)$ на поверхні фотопластинки,

$$r = \sqrt{(x_r - x)^2 + (y_r - y)^2 + z_r^2} = z_r \sqrt{1 + \frac{(x_r - x)^2 + (y_r - y)^2}{z_r^2}}. \quad (7.24)$$

Для параксіальної області вираз (7.24) має вигляд (6.54), тобто

$$r \approx z_r \left[1 + \frac{1}{2} \frac{(x_r - x)^2 + (y_r - y)^2}{z_r^2} \right]. \quad (7.25)$$

Підставимо функцію (7.25) до рівняння (7.23), вважаючи в знаменнику, що $r \approx z_r$

$$\begin{aligned} E_r(x, y) &= \frac{E_0}{z_r} \exp \left\{ j \frac{2\pi}{\lambda} z_r \left[1 + \frac{1}{2} \frac{(x_r - x)^2 + (y_r - y)^2}{z_r^2} \right] \right\} = \\ &= \frac{E_{0r}}{z_r} \exp \left(j \frac{2\pi}{\lambda} z_r \right) \exp \left\{ j \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{(x_r - x)^2 + (y_r - y)^2}{2z_r} \right] \right\} = \\ &= E_{0rc} \exp \left\{ j \frac{\pi}{\lambda z_r} [(x_r - x)^2 + (y_r - y)^2] \right\}, \end{aligned} \quad (7.26)$$

де E_{0rc} – комплексна амплітуда поля.

Аналогічно можна записати рівняння об'єктної хвилі

$$E_o(x, y) = E_{0oc} \exp \left\{ j \frac{\pi}{\lambda z_o} [(x_o - x)^2 + (y_o - y)^2] \right\}. \quad (7.27)$$

Тоді результуючу інтенсивність на фотопластинці при запису голограми можна записати як

$$\begin{aligned} I_p(x, y) &\sim |E_o + E_r|^2 = |E_o|^2 + |E_r|^2 + E_r^* E_o + E_r E_o^* = |E_{0oc}|^2 + |E_{0rc}|^2 + \\ &+ E_{0oc} E_{0rc}^* \exp \left\{ j \frac{\pi}{\lambda z_o} [(x_o - x)^2 + (y_o - y)^2] - j \frac{\pi}{\lambda z_r} [(x_r - x)^2 + (y_r - y)^2] \right\} + \\ &+ E_{0oc}^* E_{0rc} \exp \left\{ -j \frac{\pi}{\lambda z_o} [(x_o - x)^2 + (y_o - y)^2] + j \frac{\pi}{\lambda z_r} [(x_r - x)^2 + (y_r - y)^2] \right\}. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Після експонування і обробки фотопластинки голограма матиме амплітудний коефіцієнт пропускання $t_p(x, y) = \beta_p I_p(x, y)$.

Нехай голограма освітлюється сферичною хвилею відновлення

$$E_{rec}(x, y) = E_{0,rec,c} \exp \left\{ j \frac{\pi}{\lambda z_{rec}} [(x_{rec} - x)^2 + (y_{rec} - y)^2] \right\}. \quad (7.29)$$

Тоді амплітуда поля за голограмою (7.29) матиме чотири складові (7.6).

Нас цікавлять дві хвилі E_3 і E_4 , які описуються рівняннями

$$E_3 = \beta_p E_{rec} E_r^* E_o = \beta_p E_{0,rec,c} E_{0oc} E_{0rc}^* \exp \left\{ j \frac{\pi}{\lambda z_{rec}} [(x_{rec} - x)^2 + (y_{rec} - y)^2] + \right. \\ \left. + j \frac{\pi}{\lambda z_o} [(x_o - x)^2 + (y_o - y)^2] - \frac{\pi}{\lambda j z_r} [(x_r - x)^2 + (y_r - y)^2] \right\}. \quad (7.30)$$

$$E_4 = \beta_p E_{rec} E_r E_o^* = \beta_p E_{0,rec,c} E_{0oc}^* E_{0rc} \exp \left\{ j \frac{\pi}{\lambda z_{rec}} [(x_{rec} - x)^2 + (y_{rec} - y)^2] - \right. \\ \left. - j \frac{\pi}{\lambda z_o} [(x_o - x)^2 + (y_o - y)^2] + \frac{\pi}{\lambda j z_r} [(x_r - x)^2 + (y_r - y)^2] \right\}. \quad (7.31)$$

Розглянемо світлові поля E_3 і E_4 в площині фотопластинки xu . Функції (7.30) і (7.31) містять лінійні та квадратичні складові і описують в квадратичному наближенні сферичні хвилі. Наявність лінійних складових свідчить про те що, хвилі сходяться (або розходяться) до точок, які не лежать на осі z . Знайдемо положення цих точок фокусування.

Відзначимо також, що фазові члени, які залежать від x^2 і y^2 , визначають координату z фокуса, а лінійні члени визначають його зміщення відносно осі. Якщо згрупувати усі члени, які містять $(x^2 + y^2)$, то експоненціальні множники запишуться у вигляді

$$\exp \left[j\pi \left(\pm \frac{1}{\lambda_1 z_r} \mp \frac{1}{\lambda_1 z_o} + \frac{1}{\lambda_2 z_{rec}} \right) (x^2 + y^2) \right], \quad (7.32)$$

де верхні знаки відповідають компоненті E_3 , а нижні – E_4 .

Запишемо загальне рівняння сферичної хвилі (7.27) в квадратичному наближенні для відновлювальної хвилі

$$E_{rec}(x, y) = E_{0,rec,c} \exp \left\{ j \frac{\pi}{\lambda_2 z_i} [(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2] \right\} =$$

$$= E_{0,rec,c} \exp \left\{ j \frac{\pi}{\lambda_2 z_i} [(x_i^2 + y_i^2) + (x^2 + y^2) - 2(x_i x + y_i y)] \right\}. \quad (7.33)$$

Із порівняння (7.33) з (7.32) маємо

$$z_i = \left(\frac{1}{z_{rec}} \pm \frac{\lambda_2}{\lambda_1 z_r} \mp \frac{\lambda_2}{\lambda_1 z_o} \right)^{-1}. \quad (7.34)$$

Для визначення координат x_i, y_i відновленого зображення об'єднаємо усі члени в (7.30) і (7.31), які лінійні відносно x, y і порівняємо їх з виразом (7.33):

$$\exp \left\{ -j 2\pi \left[\left(\pm \frac{x_r}{\lambda_1 z_r} \mp \frac{x_o}{\lambda_1 z_o} + \frac{x_{rec}}{\lambda_2 z_{rec}} \right) x + \left(\pm \frac{y_r}{\lambda_1 z_r} \mp \frac{y_o}{\lambda_1 z_o} + \frac{y_{rec}}{\lambda_2 z_{rec}} \right) y \right] \right\}; \quad (7.35)$$

$$\exp \left[-j \frac{2\pi}{\lambda_2 z_i} (x_i x + y_i y) \right]. \quad (7.36)$$

Звідки знаходимо координати x_i, y_i

$$x_i = \pm \frac{\lambda_2 z_i}{\lambda_1 z_r} x_r \mp \frac{\lambda_2 z_i}{\lambda_1 z_o} x_o + \frac{z_i}{z_{rec}} x_{rec}; \quad (7.37)$$

$$y_i = \pm \frac{\lambda_2 z_i}{\lambda_1 z_r} y_r \mp \frac{\lambda_2 z_i}{\lambda_1 z_o} y_o + \frac{z_i}{z_{rec}} y_{rec}. \quad (7.38)$$

Визначимо поперечне збільшення при відновленні голографічного зображення

$$\beta_h = \left| \frac{\Delta y_i}{\Delta y_o} \right| = \left| \frac{\lambda_2 z_i}{\lambda_1 z_o} \right| = \left| 1 - \frac{z_o}{z_r} \mp \frac{\lambda_1 z_o}{\lambda_2 z_{rec}} \right|^{-1}. \quad (7.39)$$

При використанні плоскої референтної хвилі ($z_r = \infty$) і плоскої хвилі відновлення ($z_{rec} = \infty$), збільшення, як видно із (7.39) дорівнює одиниці незалежно від відношення λ_2/λ_1 . Одиничне збільшення $\beta_h = 1$ буде для уявного зображення, коли $\lambda_1 = \lambda_2$ і $z_{rec} = z_r$, а для дійсного зображення – коли $\lambda_1 = \lambda_2$ і $z_{rec} = -z_r$.

7.4.4. Застосування метода Лейта – Упатнієкса до тривимірної фотографії

В 1964 році Лейт і Упатнієкс вперше представили результати експериментальних досліджень по застосуванню голографії для отримання

об'ємних зображень. Успіхи в отриманні таких зображень були обумовлені появою лазерів з їх високою часовою і просторовою когерентністю.

На рис. 7.8,а наведена загальна схема голограми тривимірного об'єкта. Когерентне світло освітлює об'єкт і плоске дзеркало і після відбивання надходить до фотопластинки у вигляді об'єктної і опорної хвиль. В результаті інтерференції цих хвиль утворюються смуги, які після експонування і обробки фотопластинки, формують голограму тривимірного об'єкта.

Щоб відновити зображення, голограму освітлюють хвилею відновлення, як показано на рис. 7.8,б. За голограмою виникає уявне тривимірне зображення. Так як хвилі, які падали на фотопластинку при запису, і хвилі, які виникли при відновленні, тотожні, то відновлене зображення зберігає усі тривимірні властивості вихідного об'єкта. Наприклад, добре спостерігається ефект паралаксу, тобто змінюючи спостереження, можна «заглянути за об'єкт», що розташований на передньому плані. Такий паралакс обмежений розміром голограми як вікном, через яке ми спостерігаємо за об'єктами, що розташовані в тривимірному просторі. Дійсне зображення формується в просторі між голограмою і спостерігачем. У випадку тривимірних об'єктів це зображення менш реалістичне, ніж уявне зображення. По-перше, точки об'єкта, що розташовані ближче до фотопластинки (ближче до спостерігача), у відновленому дійсному зображенні знову будуть розташовані ближче до голограми (найбільш віддалені від спостерігача). Таким чином, для спостерігача, що сприймає дійсне зображення, паралакс буде не таким, як у вихідного зображення, а само зображення буде здаватися «вивернутим». Такого роду зображення відомі під назвою *псевдоскопічних*.

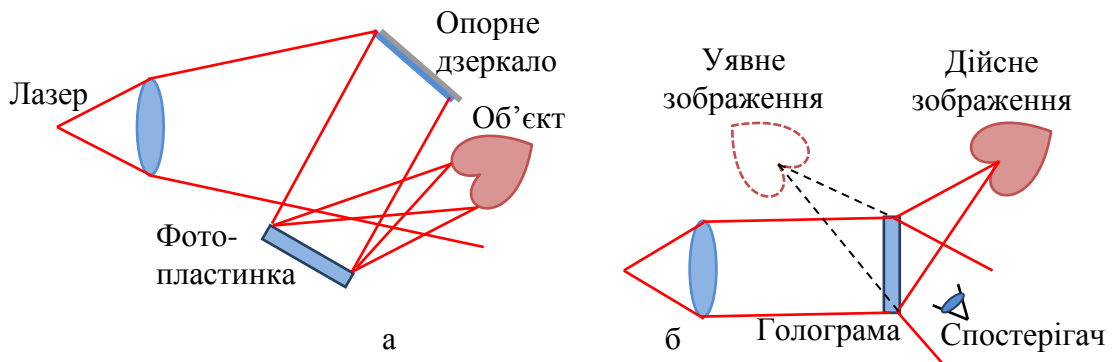


Рис. 7.8. Отримання голографічного зображення тривимірного об'єкта:
а – запис голограми; б – відновлення зображень

7.4.5. Експериментальні труднощі отримання голографічних зображень

При запису голограми і відновленні зображень виникають значні проблеми, які полягають в наступному.

1. *Необхідність використання потужного когерентного джерела випромінювання при запису голограми.* Це пов'язано з тим, що для запису об'єктів великих розмірів необхідно освітлювати великий простір, що призводить до зменшення амплітуди об'єктної хвилі.

2. *Стабілізація (віброзахист) установки при запису голограми.* Так як влюбій інтерференційній установці для запису чітких смуг необхідно, щоб положення оптичної системи було фіксованим протягом експонування з точністю з точністю до $0,1 \lambda$. Чим більша потужність лазера, тим менший час експозиції і менші вимоги до стабілізації установки. Необхідний час експозиції в кожному випадку залежить від багатьох факторів, в тому числі від прозорості (відбиваючої здатності) об'єкта, відстані до об'єкта, типу фотопластинки і т.п. На практиці час експонування становить від десятої долі секунди до декількох годин. Якщо використовується імпульсний лазер, то час експонування складає декілька наносекунд.

3. *Використання фотопластинки з високою роздільною здатністю.* Для запису голограми тривимірних об'єктів необхідно використовувати

фотопластинки з просторовою частотою 3000 – 4000 лін/мм. Нажаль, емульсії високого розділення мають надзвичайно низьку чутливість. Із-за низької чутливості вимушені збільшувати час експозиції, що визиває більші вимоги до стабілізації оптичної системи. Для запису голограм крім пластинок з галоген

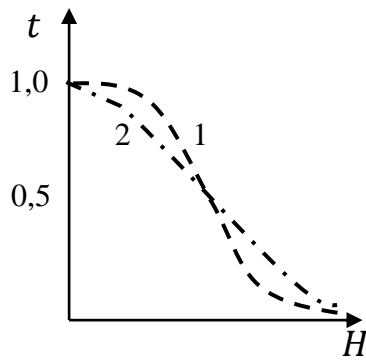


Рис. 7.9. Залежність амплітудного коефіцієнта пропускання від експозиції для фотоплівки;
1 – високо контрастної;
2 – низько контрастної

срібною емульсією використовують термопластики, фотохромне скло, діелектричні і напівпровідникові кристали. Голограми можуть також реєструватись на магнітних плівках, рідких кристалах, хромованій желатині, фоторезисторах і т.п.

4. *Обмежений динамічний діапазон фотопластинки.* В деяких випадках важливу роль відіграє обмежений динамічний діапазон фотоемульсії. Із

наведених на рис. 7.9 графіків залежності амплітудного пропускання позитивної фотопластинки від експозиції $H = Et$ ($t - H$ – крива) видно, що лінійна залежність виконується в обмеженому діапазоні. Тому бажано обирати середню експозицію так, щоб вона знаходилась біля середньої точки лінійної залежності. Проте для деяких об'єктів експозиція може бути набагато більшою або набагато меншою за лінійний діапазон $t - H$ – кривої. Із-за такої нелінійності відбуваються спотворення відновлених зображень.

7.5. Безлінзова фур'є – голограма

Розглянемо схему запису голограми, що наведена на рис. 7.10. Референтною хвилею буде сферична хвиля, точкове джерело якої має координати (x_r, y_r, z) і знаходиться в площині, де розташований об'єкт. В якості об'єктної хвилі розглянемо сферичну хвилю, утворену точкою об'єкта з координатами (x_o, y_o, z) .

Тоді розподіли амплітуд референтної і об'єктної хвиль в квадратичному наближенні згідно (7.27) матимуть вигляд:

$$E_r(x, y) = E_{0rc} \exp \left\{ j \frac{\pi}{\lambda z} [(x_r - x)^2 + (y_r - y)^2] \right\}; \quad (7.40)$$

$$E_o(x, y) = E_{0oc} \exp \left\{ j \frac{\pi}{\lambda z} [(x_o - x)^2 + (y_o - y)^2] \right\}. \quad (7.41)$$

Тоді результуючу інтенсивність на фотопластинці при запису голограми можна записати аналогічно (7.28) як

$$\begin{aligned} I_p(x, y) &\sim |E_o + E_r|^2 = |E_{0oc}|^2 + |E_{0rc}|^2 + \\ &+ E_{0oc} E_{0rc}^* \exp \left\{ j \frac{\pi}{\lambda z} [(x_o - x)^2 + (y_o - y)^2] - j \frac{\pi}{\lambda z} [(x_r - x)^2 + (y_r - y)^2] \right\} + \\ &+ E_{0oc}^* E_{0rc} \exp \left\{ -j \frac{\pi}{\lambda z} [(x_o - x)^2 + (y_o - y)^2] + j \frac{\pi}{\lambda z} [(x_r - x)^2 + (y_r - y)^2] \right\} = \\ &= |E_{0oc}|^2 + |E_{0rc}|^2 + 2E_{0rc} E_{0oc} \cos \left[2\pi \frac{(x_o - x_r)x}{\lambda z} + \right. \\ &\quad \left. + 2\pi \frac{(y_o - y_r)y}{\lambda z} + \theta(x_r, y_r; x_o, y_o) \right], \quad (7.42) \end{aligned}$$

де $\theta(x_r, y_r; x_o, y_o)$ – фазовий кут, який залежить від координат (x_r, y_r) і (x_o, y_o) , але не від координат плівки (x, y) .

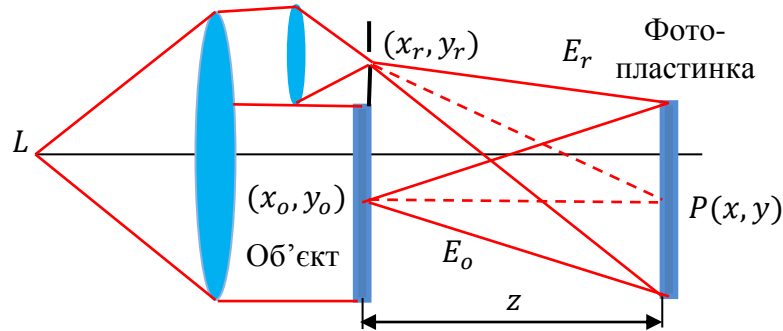


Рис. 7.10. Схема запису безлінзової голограми Фур'є

Після експонування і обробки фотопластинки голограма матиме амплітудний коефіцієнт пропускання $t_p(x, y) = \beta_p I_p(x, y)$. Отримана голограма називається *безлінзовою фур'є-голограмою*, так як хвиля, що виникла в точці

(x_o, y_o) об'єкта, інтерферує з референтною хвилі, і в результаті формує розподіл косинусоїдальних інтерференційних смуг з просторовими частотами

$$v_x = \frac{(x_o - x_r)}{\lambda z}; \quad v_y = \frac{(y_o - y_r)}{\lambda z}. \quad (7.43)$$

Таким чином, при такій схемі запису голограми існує однозначна відповідність між координатами об'єкта і просторовими частотами на голограмі. Така відповідність характерна для операції перетворення Фур'є, яке отримано без застосування лінз.

Щоб отримати від такої голограми зображення, її освітлюють паралельним пучком світла ($z_{rec} = \infty$) (рис. 7.11). В цьому випадку за голограмою утворюються чотири хвилі E_1, E_2, E_3, E_4 . Із формули (7.34) маємо, що при $z_{rec} = \infty$ і $z_o = z_r$ зображення знаходяться в нескінченності ($z_i = \infty$). Складові E_1 і E_2 формують завади біля оптичної осі, а складові E_3 і E_4 – спряжені зображення у вигляді плоских хвиль, які відхиляються симетрично оптичній осі (дивись приклад 7.3). Позитивна лінза, що розташована за голограмою, формує ці два дійсні зображення в задній фокальній площині (рис. 7.11).

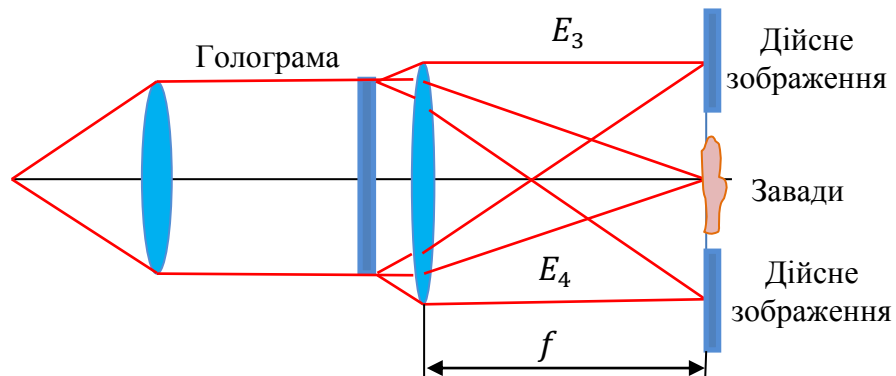


Рис. 7.11. Отримання зображення від безлінзової фур'є-голограми

7.6. Властивості голографічних зображень

7.6.1. Дифракційна ефективність голограм

Якість і властивості голографічного зображення характеризується декількома параметрами. Одним із важливих параметрів є дифракційна ефективність, яка визначається як відношення інтенсивності світла першого

дифракційного порядку I_1 до інтенсивності пучка реконструкції (відновлення) I_{rec} :

$$\eta_h = \frac{I_1}{I_{rec}} = \left| \frac{E_1}{E_{rec}} \right|^2. \quad (7.44)$$

7.6.2. Геометричне збільшення зображення

В попередніх підрозділах ми розглядали запис і відновлення голографічного зображення окремої точки. Для складного об'єкта його голографічне зображення в залежності від умов реконструкції (відновлення) може змінювати масштабні перетворення, які аналогічно геометричній оптиці характеризуються: поперечним (лінійним) збільшенням β , поздовжнім α і кутовим γ (або M_h, M_l, M_a).

Поперечне збільшення визначається за раніше отриманою формулою (7.39)

$$\beta = \left| \frac{\Delta y_i}{\Delta y_o} \right| = \frac{1}{1 - \frac{z_o \mp \lambda_1 z_o}{z_r} \frac{\lambda_1 z_o}{\lambda_2 z_{rec}}}, \quad (7.45)$$

де верхній знак відповідає уявному (головному) зображенню, а нижній – дійсному.

Як видно із останнього виразу, в випадку плоскої хвилі відновлення ($z_{rec} = \infty$) збільшення не залежить від відношення довжин хвиль λ_2/λ_1 . Якщо при цьому і референтна хвиля буде плоскою ($z_r = \infty$), то поперечне збільшення буде дорівнювати одиниці.

Поздовжнє збільшення визначається співвідношенням

$$\alpha = \frac{dz_i}{dz_o}. \quad (7.46)$$

Використовуючи співвідношення (7.34) і (7.45), отримуємо формулу

$$\alpha = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \quad (7.47)$$

Для знаходження *кутового збільшення* необхідно спочатку визначити положення ока при спостереженні об'єкта і зображення. Найбільш зручним є

випадок, коли око розташоване в площині голограми. Тоді кутове збільшення буде дорівнювати

$$\gamma = \frac{d(y_i/z_i)}{(y_o/z_o)} = \pm \frac{\lambda_2}{\lambda_1}. \quad (7.48)$$

Цікаво відзначити, що визначене таким чином кутове збільшення не залежить від геометрії схеми запису і відновлення. При $\lambda_1 = \lambda_2$ воно по абсолютній величині завжди дорівнює одиниці.

7.6.3. Просторова характеристика зображення

При відновленні виникають два зображення: головне (уявне) і вторинне (дійсне). Взаємне розташування цих зображень таке, як для об'єкта і його зображення в сферичному дзеркалі. Покажемо це виходячи із формули

$$\frac{1}{z_i} = \frac{1}{z_{rec}} \pm \frac{\lambda_2}{\lambda_1 z_r} \mp \frac{\lambda_2}{\lambda_1 z_o}. \quad (7.49)$$

Цей вираз можна спростити, якщо ввести фокусну відстань системи.

$$\frac{1}{z_o} + \frac{1}{z_i} = \frac{1}{z_o} + \frac{1}{z_{rec}} \pm \frac{\lambda_2}{\lambda_1 z_r} \mp \frac{\lambda_2}{\lambda_1 z_o} = \frac{1}{z_{rec}} \pm \frac{\lambda_2}{\lambda_1 z_r} + \frac{1}{z_o} \left(1 \mp \frac{\lambda_2}{\lambda_1 z_o} \right) = \frac{1}{f_h}. \quad (7.50)$$

Голограма – це оптичний елемент з двома фокусними відстанями: для основного і спряженого зображення. Якщо записати вираз (7.50) для дійсного і уявного зображень, а потім скласти ці вирази, то отримаємо співвідношення, яке пов'язує положення двох зображень:

$$\frac{1}{z_{im}} + \frac{1}{z_{id}} = \frac{2}{z_{rec}} = \frac{1}{f_h}. \quad (7.51)$$

Отримана формула (7.50), аналогічна формулі сферичного дзеркала.

7.7. Товста голограма

В попередніх підрозділах вважалось, що при запису голограми фоточутливий шар пластинки має малу товщину, а процес запису і відновлення розглядався як двовимірний випадок. Реальні пластинки мають чутливий шар

(емульсію) приблизно 15 – 20 мкм, що в 20 разів перевищує період інтерференційних смуг. Тому в цьому випадку при запису *товстої голограми* необхідно враховувати тривимірний розподіл інтерференційної картини в фотоемульсії пластинки.

Розглянемо спочатку дуже простий випадок, коли на фотоемульсію певної товщини падають плоскі об'єктна і опорна (референтна) хвилі, які дозволяють записати *елементарну голограму* (рис. 7.12) [2].

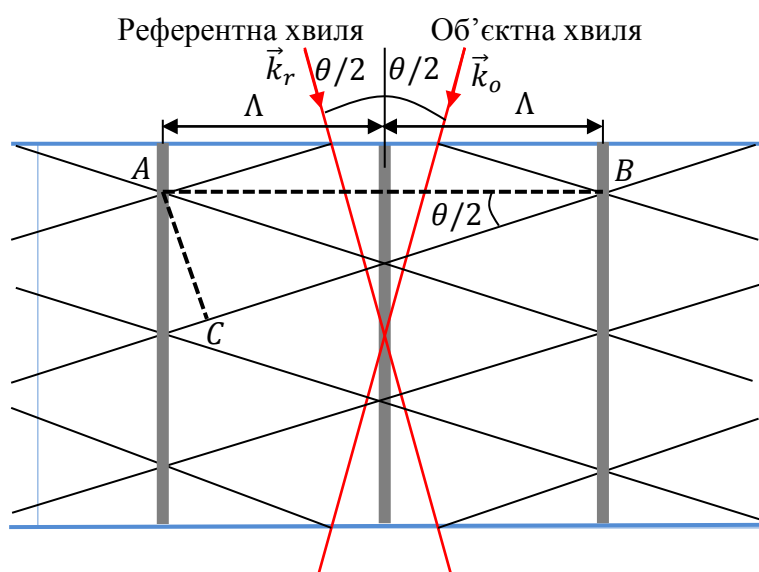


Рис. 7.12. Запис елементарної голограми в товстій фотоемульсії

Нехай хвильові вектори цих хвиль утворюють кути $\pm\theta/2$ з нормаллю до поверхні. Хвильові фронти з максимальними амплітудами кожної хвилі мають період λ . В місцях перетину цих фронтів утворюються лінії, перпендикулярні малюнку, з максимальною інтенсивністю. З часом хвильові фронти рухаються уздовж хвильових векторів, а лінії з максимальною інтенсивністю утворюють в фотоемульсії площини великої інтенсивності. Із рис. 7.12 видно, що ці площини ділять кут θ пополам і мають період Λ в фотоемульсії. Після експонування і обробки фотопластинки атоми срібла утворюють дзеркальні площини в місцях

розташування площин великої інтенсивності. Із трикутника ABC знаходимо рівняння для визначення періоду Λ .

$$AB \sin \frac{\theta}{2} = AC, \text{ де } AB = 2\Lambda; AC = \lambda.$$

Тоді

$$2\Lambda \sin \frac{\theta}{2} = \lambda. \quad (7.52)$$

Для відновлення об'єктної хвилі використаємо плоску відновлювальну хвилю, яка падає під кутом ψ на голограму. Будемо розглядати емульсію голограми як набір паралельних дзеркальних площин із срібла, які відбивають світло за законами геометричної оптики. Для того, щоб відбиті промені в результаті інтерференції утворювали максимальну інтенсивність, необхідно, щоб різниця ходу променів, відбитих від сусідніх площин дорівнювала одній довжини хвилі. Із рис. 7.13 знаходимо цю різницю ходу

$$\Delta d = CB + BD = 2 \frac{AB}{\sin \psi} = 2 \frac{\Lambda}{\sin \psi}.$$

Умова максимуму виконується, коли $\Delta d = \pm \lambda$. Звідки знаходимо умову Брегга, якій повинен задовольняти кут ψ :

$$\sin \psi = \pm \frac{\lambda}{\Lambda}. \quad (7.53)$$

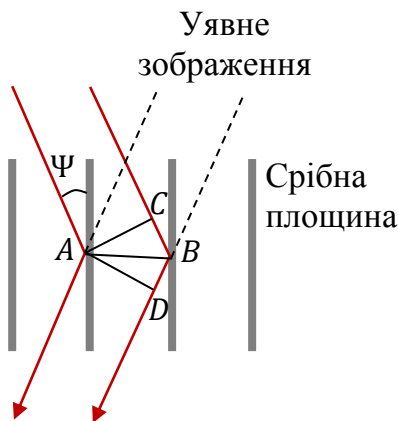


Рис. 7.13. Відновлення уявного зображення

Порівняння співвідношень (7.52) і (7.53) показує, що інтенсивність буде максимальною, коли

$$\psi = \begin{cases} \pm \frac{\theta}{2}; \\ \pm \left(90^\circ - \frac{\theta}{2}\right). \end{cases} \quad (7.54)$$

Для отримання максимальної інтенсивності відновленої хвилі необхідно застосовувати для освітлення голограми хвилю, яка є точною копією

референтної хвилі ($\psi = +\theta/2$). Ця хвиля відновлення формує уявне зображення. Якщо освітити голограму об'єктною хвилею ($\psi = -\theta/2$), то відновлюється референтна хвиля.

Крім того, умова Брега (7.53) справедлива і для хвиль, що розповсюджуються в протилежних напрямках відносно референтної хвилі. Якщо освітити голограму хвилею, яка розповсюджується назустріч референтній хвилі, тобто коли $\psi = -(180 - \theta/2)$, то при цьому виникає плоска хвиля, яка розповсюджується назустріч об'єктній хвилі. Ця комплексно спряжена хвиля формує дійсне зображення об'єкта.

Головний результат дослідження співвідношення (7.54) полягає в тому, що в випадку «товстої» емульсії максимальна інтенсивність уявного і дійсного зображень спостерігається тільки при певному освітленні голограми. Щоб отримати уявне зображення необхідно освітити голограму точною копією референтної хвилі. Щоб отримати дійсне зображення необхідно освітити голограму з протилежної сторони хвилею відновлення, яка комплексно спряжена до референтної хвилі.

Крім того, слід пам'ятати, що для «тонкої» емульсії, коли $\Lambda \ll \lambda$, голограму слід розглядати як двовимірну дифракційну ґратку, а для «товстої» емульсії, коли $\Lambda \ll \lambda$, голограму слід розглядати як просторовий набір дзеркальних пластинок.

7.8. Відбиваюча голограма

Існує метод запису голограми в когерентному світлі, а відновлення зображення в білому світлі. В цьому випадку відновлені хвильові фронти утворюються не після проходження хвилі відновлення через голограму, а при відбиванні від неї. Цей метод заснований на використанні тривимірних властивостей фотографічної емульсії і подібний з методом кольорової

фотографії Ліпмана, який було розглянуто в п. 5.9. Основна ідея цього методу була запропонована в 1962 році в Радянському Союзі Ю. Денисюком.

Щоб записати відбиваючу голограму, об'єктна і референтна хвилі повинні падати на емульсію з протилежних сторін (рис. 7.14,а). В результаті інтерференції в емульсії формуються площини максимальної інтенсивності, які після експозиції і обробки фотопластинки утворюються металеві площини із срібла, які здатні відбивати світло. Так як кут θ між хвильовими векторами об'єктної і референтної хвиль 180° , відбиваючі площини ділять цей кут пополам і будуть розташовані паралельно поверхні фотопластинки. Із формули (7.52) видно, сусідні площини розташовані на відстані $\Lambda \approx \lambda/2$.

Щоб отримати уявне зображення, ми повинні освітити голограму копією опорної хвилі. Після відбивання і інтерференції отримаємо уявне зображення у

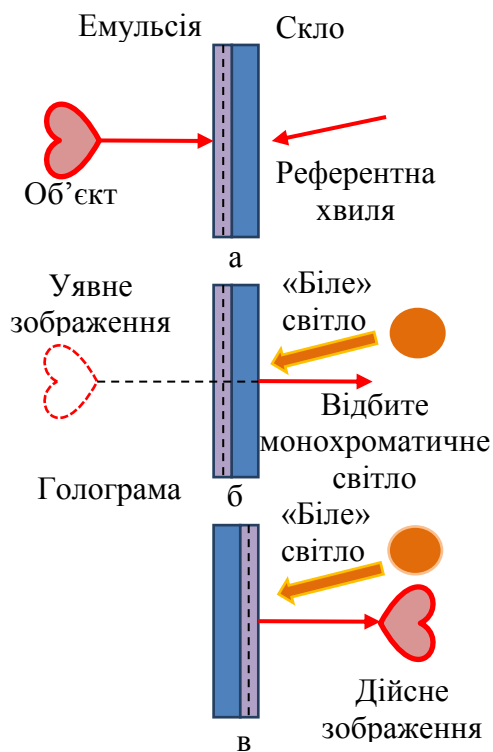


Рис. 7.14. Голографія у відбитому світлі: а – запис голограми; б – відновлення уявного зображення; в – відновлення дійсного зображення

відбитому світлі (рис. 7.14,б). При цьому слід зазначити, що умова Брегга (7.53) буде виконуватись тільки для певної довжини хвилі. Тому при відновленні зображення в білому світлі відбивається тільки монохроматична складова, яка задовольняє умові Брегга, а інші складові білого світла проходять через голограму.

Щоб отримати дійсне зображення, необхідно освітити голограму з протилежної сторони (рис. 7.14,в). Зображення у відбитому світлі також формується тільки для одного кольору.

7.9. Типи голограм

Голограми можна класифікувати по способу реєстрації інтерференційної картини і методу формування інтерференційної картини.

По способу реєстрації інтерференційної картини в емульсії фотопластинки голограми діляться на:

1. Амплітудні і фазові.
2. Тонкі і товсті.
3. Пропускаючі і відбиваючі.

Розглянемо особливості деяких голограм.

1. *Тонка амплітудна голограма, що працює на пропускання.* Нехай на голограмі записана косинусоїдальна дифракційна ґратка, амплітудний коефіцієнт пропускання якої описується виразом

$$t_p(x, y) = \frac{1}{2} [1 + \cos(2\pi\nu_0 y)], \quad (7.55)$$

де ν_0 – частота ґратки.

Таку голограму можна отримати в результаті інтерференції двох плоских хвиль однакової інтенсивності.

Якщо на таку голограму падає плоска когерентна хвиля, то за голограмою утворюється світлове поле з амплітудою

$$E_h(x, y) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \exp(j2\pi\nu_0 y) + \frac{1}{4} \exp(-j2\pi\nu_0 y). \quad (7.56)$$

Максимальні інтенсивності другої і третьої складових світлового поля (7.56), які формують дійсне і уявне зображення, складають 1/16 від загальної інтенсивності. Тому максимальна дифракційна ефективність тонкої амплітудної голограми дорівнює 1/16, або 6,25%. На практиці дифракційна ефективність таких голограм має значення від 1% до 2%.

2. *Товста амплітудна голограма, що працює на пропускання.* Таку голограму можна отримати в результаті інтерференції двох плоских хвиль

однакової інтенсивності. Амплітудний коефіцієнт пропускання такої голограми змінюється по закону

$$t_p(x, y) = \exp[-\alpha(x, y)h_p], \quad (7.57)$$

де h_p – товщина фотоемульсії пластинки; $\alpha(x, y)$ – показник поглинання фотоемульсії, який змінюється по гармонічному закону

$$\alpha(x, y) = \alpha_0 + \alpha_a \cos(2\pi\nu_0 y). \quad (7.58)$$

Дослідження таких голограм свідчать про те, що їх максимально можлива дифракційна ефективність становить 3,7%, для відбиваючих голограм – 7,2%.

3. *Тонка фазова голограма, що працює на пропускання.* Фазові голограми утворюються за рахунок зміни їх показника заломлення або товщини. Так як такі голограми не поглинають світла, то їх дифракційна ефективність повинна бути значно більшою, порівняно з амплітудними голографами. Модуляція фази являється нелінійним процесом, що призводить до погіршення якості відновлених зображень.

Амплітудний коефіцієнт пропускання фазових голограм описується функцією

$$t_p(x, y) = \exp[j\mu \sin(2\pi\nu_0 y)], \quad (7.59)$$

де μ – максимальна амплітуда фазової модуляції.

Представимо функцію (7.59) у вигляді ряду Фур'є:

$$t_p(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\mu) \exp(j2\pi m \nu_0 y), \quad (7.59)$$

де J_m – функція Бесселя першого роду m -го порядку.

Складова J_0 відповідає амплітуді плоскої хвилі, яка розповсюджується уздовж оптичної осі, і формує рівномірний фон. Складові J_1 і J_{-1} утворюють два зображення першого роду, а інші складові утворюють завади.

Дифракційна ефективність тонкої фазової ґратки дорівнює $J_1^2(\mu)$ і має максимальне значення 33,9%, яка досягається при глибині модуляції $\mu = 1,8$.

4. *Товста фазова голограма.* Амплітудний коефіцієнт пропускання такої голограми змінюється по закону

$$t_p(x, y) = \exp[j \frac{2\pi}{\lambda} n(x, y) h_p], \quad (7.60)$$

де h_p – товщина фотоемульсії пластинки; $n(x, y)$ – показник заломлення фотоемульсії, який змінюється по гармонічному закону

$$n(x, y) = n_0 + n_1 \cos(2\pi \nu_0 y). \quad (7.61)$$

При використанні товстих синусоїдальних фазових ґраток, які працюють на пропускання або відбивання, теоретично можна отримати 100% дифракційної ефективності (за умови виконання мови Брегга (7.53)).

По методу формування інтерференційної картини голограми діляться на:

1. Голограма сфокусованого зображення.
2. Голограма Фраунгофера.
3. Голограма Френеля.
4. Голограма Фур'є.
5. Безлінзова фур'є–голограма.
6. Голограма радужна.

Розглянемо декілька схем запису голограм (рис. 7.15).

Голограма сфокусованого зображення утворюється в результаті інтерференції плоскої референтної хвилі і об'єктною хвилею, яка відповідає розподілу амплітуди поля в площині об'єкта (рис.7.15,а).

Голограма Фур'є утворюється в результаті інтерференції об'єктної і референтної хвиль, які являють собою фур'є-образи об'єктної хвилі і референтного когерентного джерела випромінювання. При запису голограми Фур'є об'єкт і референтне джерело розташовують в фокальній площині лінзи (рис. 7.15,б).

Голограма Френеля утворюється в тому випадку, коли кожна точка об'єкта формує на фотопластинці сферичну хвилю (рис. 7.15,г).

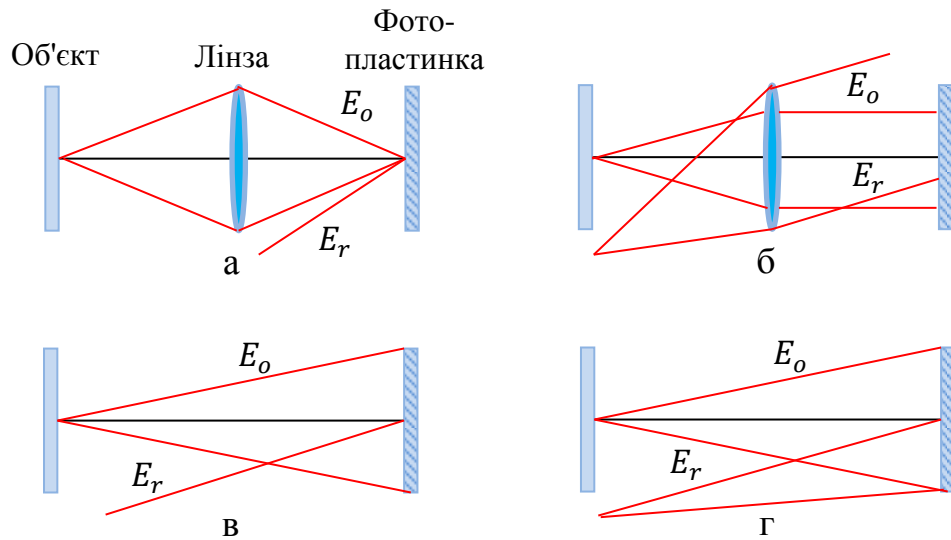


Рис. 7.15. Схеми отримання голограм різних типів: а – голограма сфокусованого зображення; б – голограма Фур'є; в – голограма Френеля; г – безлінзова фур'є-голограма

Безлінзова фур'є-голограма утворюється в тому випадку, коли опорне джерело розташовують в площині предмета (рис. 7.15,д). При цьому фронт референтної хвилі і елементарної хвилі від точки об'єкта мають однаковий радіус в площині фотопластинки. В результаті цього структура інтерференційної картини буде такою ж, як і голограмі Фур'є.

Голограма радужна (голограма Бентона) – це голограма сфокусованого зображення, яка дозволяє відновити об'єктну хвилю білим світлом за рахунок обмеження паралакса у вертикальному напрямку. Спостерігач відчуває паралакс у горизонтальному напрямку за рахунок зору двома очима. Така голограма дозволяє спостерігати чітке кольорове зображення об'єкта. При цьому колір зображення залежить від положення очей спостерігача і не залежить від кольору об'єкта. Голограма радужна широко застосовується в якості елементів кодування і захисту документів і товарних знаків. Поверхня голограми має рельєфну форму, що дозволяє дешеве масове виробництво контактним способом.

7.10. Застосування голографії

Сучасна голографія знаходить широке застосування в різних галузях науки і техніки. Розглянемо декілька прикладів застосування голографії [2].

1. *Створення об'ємних зображень.* Записані на голограмі світлові хвилі при їх відновленні створюють повну ілюзію існування об'єкта, який не відрізняється від оригіналу. В межах тілесного кута, утвореного голограмою, зображення об'єкта можна розглядати з різних напрямків, тобто таке зображення являється тривимірним. Ці властивості голограм використовуються в лекційних демонстраціях, при створенні об'ємних копій виробів мистецтва. Тривимірні властивості голографічних зображень використовуються при дослідженні рухомих частинок, крапель дощу або туману. При цьому голограму створюють за допомогою імпульсного лазера, а зображення відновлюють в неперервному випромінюванні.

2. *Голографічна інтерферометрія.* Якщо розташувати голограму на те місце, де вона записувалась, і освітити референтним пучком, то відновлюється об'єктна хвиля, яка була записана під час експозиції. Якщо об'єкт залишити, то можна одночасно спостерігати дві хвилі, які безпосередньо ідуть від об'єкта і відновленого голограмою зображення. Ці хвилі когерентні і можуть інтерферувати.

Якщо з об'єктом відбуваються які-небудь зміни, які призводять до фазових спотворень об'єктної хвилі (наприклад, деформація або зміна показника заломлення), то це вплине на картину спостереження. З'являються інтерференційні смуги, форма яких однозначно пов'язана із зміною стану об'єкта. На цьому явищі заснована *голографічна інтерферометрія*, де, як і у звичайній інтерферометрії, відбувається порівняння декількох хвиль. Утворена інтерференційна картина відображає відмінність хвиль порівняння. Така голографія дозволяє зафіксувати світлову хвилю в певний момент часу і

поновити її копію в будь який момент часу. Ця особливість знизилася вимоги до якості оптичних елементів, так обидві хвилі, що інтерферують, проходять по одному і тому напрямку і однаково спотворюються оптичними елементами.

За допомогою голограми можна відновити інтерференційну картину світлових хвиль від об'єкта в різних напрямках. Це дозволяє вивчати просторові неоднорідності показника заломлення. Одним із напрямків застосування голографічної інтерферометрії було дослідження механічних деформацій.

Розглянемо два ефектних експерименти [2]. Якщо на фотопластинку записати голограму двома лазерними імпульсами, то в результаті відновлення зображення два зображення утворюють інтерференційну картинку. Перший імпульс записує тільки голограму фону (повітряного простору), а другий імпульс записує на цьому фоні кулю в польоті. При польоті кулі виникають ударні хвилі, які визивають зміну показника заломлення повітря. В результаті два зображення фону – одно записане за відсутності кулі, а друге при наявності неоднорідності показника заломлення – інтерферують, і ми отримуємо зображення ударних хвиль, які виникають при польоті кулі. Ці смуги будуть розташованими в тривимірному просторі навколо кулі.

Аналогічно можна дослідити перехідні процеси в лампах розжарювання. При першій експозиції спіраль розжарювання була вимкнена. При цьому знову спочатку записувалась голограма фону через скляну колбу лампи. Потім вмикалась спіраль і голограма експонувалась другим лазерним імпульсом. Некогерентне світло лампи не інтерферує з лазерним світлом, а тому в результуючому зображенні спіраль не світиться. В той же час нагрівання газу в колбі визиває зміну показника заломлення, що в свою чергу призводить до появи в кінцевому зображенні інтерференційних смуг, які визначають характер розширення газу. Необхідно підкреслити, що ці інтерференційні смуги

отримані при наявності оптичних дефектів скляної колби – можливість, яку не дають інші методи інтерферометрії.

3. *Зберігання і обробка інформації*. Інформація про об'єкт записується у вигляді інтерференційної картини рівномірно по всій площині. Це дозволяє створити високу щільність її запису і велику надійність. Обробка записаного на голограмі масиву інформації світловим пучком відбувається одночасно по всій голограмі з швидкістю світла.

4. *Голографічний оптичний елемент* (holographic optical element) – це дифракційний оптичний елемент, створений у результаті інтерференції двох хвильових фронтів від оптичних елементів, які будуть використовуватися як компоненти оптичної системи. Прикладом таких елементів може бути синусоїдальна дифракційна ґратка, яка утворена в результаті інтерференції двох плоских хвиль.

5. *Мікроскопія*. Застосування голографії в мікроскопії не знайшло достатнього розповсюдження, хоч і має певні перспективи. Розглянемо дві сфери цього застосування: отримання об'ємних зображень високої якості і створення рентгенівського мікроскопа.

В звичайній мікроскопії високе розділення досягається за рахунок зменшення глибини фокуса. Запис голограми об'ємного об'єкта спостереження дозволяє значно збільшити глибину фокуса.

Основна ідея створення рентгенівського мікроскопа полягає в тому, що для запису голограми використовується рентгенівське випромінювання з довжиною хвилі $\lambda_r = 10^{-4}$ мкм, а відновлення зображення здійснюється в видимому діапазоні світла ($\lambda_{rec} = 0,5$ мкм). Згідно формули (7.39) збільшення відновленого зображення складає $\beta_h = \frac{\lambda_{rec}}{\lambda_r} = \frac{0,5}{10^{-4}} = 5 \cdot 10^3$, а просторове розділення складає 1 Å. Таке розділення досягається в електронному мікроскопі. Одна від рентгенівських променів об'єкт нагрівається менше, ніж від потоку

електронів, крім того відпадає необхідність в вакуумній системі, яка необхідна для електронного мікроскопа.

6. *Комп'ютерна голографія.* Голограму можна виготовити не тільки оптичним методом, а також розрахувати на комп'ютері. Такі комп'ютерні голограми використовуються для отримання об'ємних зображень неіснуючих об'єктів. Комп'ютерні голограми складних оптичних поверхонь використовуються як еталони для інтерференційного контролю поверхонь виробів.

7. *Захист інформації.* Радужна голограма служить ефективним засобом захисту документів та виробів (акцизні марки) від підробок, так як відтворити такі голограми достатньо складно.

8. *Корекція аберацій.* За допомогою голографічних елементів здійснюються різні хвильові перетворення, що дозволяє компенсувати (зменшувати) хвильові аберації оптичних систем.

9. *Голографічні дисплеї, телебачення та кіно.* Об'ємність голографічного зображення обумовлює перспективи створення голографічних дисплеїв для мобільних телефонів, телебачення та кіно. Головна проблема – створення великих голограм, через які як через вікно одночасно була можливість спостерігати зображення багатьом глядачам. Ці голограми повинні бути динамічними, тобто змінюватись в часі у відповідності до змін стану об'єкта спостереження. Голографічне телебачення також зустрілась з труднощами створення динамічних середовищ в передавальній і приймальній частинах телевізійної системи. Друга проблема пов'язана необхідності надзвичайно широкої смуги пропускання телевізійного каналу, яку необхідно збільшити на декілька порядків для передачі тривимірних рухомих сцен.

7.11. Приклади розрахунку голограм

Приклад 7.1. Знайдіть амплітудний коефіцієнт пропускання $t_h(x, y)$ голограми точкового джерела світла, якщо в якості референтної хвилі використовується плоска хвиля, яка нормально падає на фотопластинку. Джерело світла розташоване на відстані L від фотопластинки на осі, яка

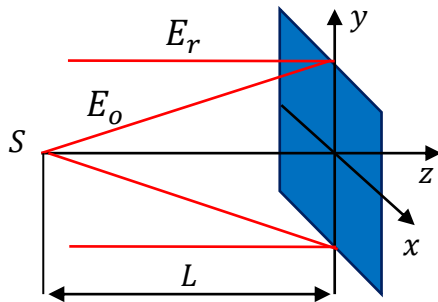


Рис. 7.16. Схема запису голограми

перпендикулярна до неї. Вважайте, що прозорість (амплітудний коефіцієнт пропускання) пропорційна інтенсивності світла при запису голограми. Знайдіть положення дійсного і уявного зображення при відтворенні зображення плоскою хвилею, яка нормально падає на голограму. Визначте мінімальний розмір D_{min} голограми, при якому повністю використовується роздільна здатність фотоемульсії, що дорівнює ν_h штрихів/мм.

Розв'язання. Розглянемо схему запису голограми (рис. 7.16). Нехай система координат xy розташована у площині фотопластинки, а об'єкт у вигляді точкового джерела розташований на осі z на відстані L від фотопластинки. В результаті інтерференції об'єктної V_o і референтної V_r хвиль у площині фотопластинки утворюється інтерференційні смуги, інтенсивність яких визначається як

$$I_p(x, y) \sim |E_o + E_r|^2 = (E_o + E_r)(E_o^* + E_r^*) = |E_o|^2 + |E_r|^2 + E_r^*E_o + E_rE_o^*. \quad (7.62)$$

Згідно умови прикладу референтна хвиля є плоскою хвилею з амплітудою E_{r0} . Так як опорна хвиля нормально падає на фотопластинку, то амплітуда опорної хвилі у площині фотопластинки буде постійною величиною, тобто

$$E_r(x, y) = E_{r0}. \quad (7.63)$$

Точкове джерело об'єкта створює на поверхні фотопластинки змінну амплітуду хвилі, яка описується рівнянням сферичної хвилі, що розходить

$$E_o(x, y) = \frac{E_{o0}}{r} \exp(jkr), \quad (7.64)$$

де E_{o0} – амплітуда об'єктної хвилі; $r = \sqrt{x^2 + y^2 + L^2}$ – відстань від точкового джерела S до довільної точки фотопластинки. Якщо розмір фотопластинки значно менший за відстань від джерела до фотопластинки, то

$$r = L \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{L^2}} \approx L + \frac{x^2 + y^2}{2L}. \quad (7.65)$$

Після підстановки (7.65) в (7.64) отримаємо рівняння сферичної хвилі в квадратичному наближенні

$$E_o(x, y) = \frac{E_{o0} \exp(jkL)}{L} \exp\left(jk \frac{x^2 + y^2}{2L}\right), \quad (7.66)$$

Після експонування і хімічної обробки фотопластинки отримаємо голограму, амплітудний коефіцієнт пропускання якої описується виразом (7.4)

$$t_p(x, y) = \beta_p I_p(x, y). \quad (7.67)$$

Підставляючи (7.63) і (7.66) в (7.62) з подальшою підстановкою в (7.67), отримаємо загальний вираз для амплітудного коефіцієнта пропускання голограми

$$t_h(x, y) = t_0 + \beta_p E_{r0} \frac{E_{o0} \exp(jkL)}{L} \exp\left(jk \frac{x^2 + y^2}{2L}\right) + \beta_p E_{r0} \frac{E_{o0} \exp(jkL)}{L} \exp\left(jk \frac{x^2 + y^2}{2L}\right), \quad (7.68)$$

де $t_0 = \beta_p A_r^2 + \beta_p \frac{E_{o0}^2}{L^2}$ – постійна складова пропускання голограми.

Розглянемо схему відновлення зображення (рис. 7.17). Нехай на голограму нормально падає плоска хвиля з амплітудою E_{rec0} . Тоді за голограмою виникає світлове поле з амплітудою

$$V_h(x, y) = E_{rec0} t_h(x, y) = V_{1,2} + V_3 + V_4, \quad (7.69)$$

де $V_{1,2} = E_{rec0} t_0$ – плоска хвиля;

$$V_3 = \beta_p E_{rec0} E_{r0} \frac{E_{o0} \exp(jkL)}{L} \exp\left(jk \frac{x^2 + y^2}{2L}\right); \quad (7.70)$$

$$V_4 = \beta_p E_{rec0} E_{r0} \frac{E_{o0} \exp(-jkL)}{L} \exp\left(-jk \frac{x^2 + y^2}{2L}\right). \quad (7.71)$$

Із порівняння виразів (7.70) і (7.71) з (7.66) видно, що V_3 описує сферичну хвилю, яка розповсюджується із точки S' , що знаходиться на відстані L перед голограмою, а V_4 – сферичну хвилю, яка збігається (фокусується) у точку S'' , що знаходиться на відстані L за голограмою.

Таким чином, при відновленні виникає два зображення: уявне V_3 і дійсне V_4 , які розташовані на відстані L перед і за голограмою на рівномірному яскравому фоні $V_{1,2}$ (аналог голограми Габора).

Для визначення мінімального розміру D_{min} круглої голограми, при якому повністю використовується роздільна здатність фотоемульсії, запишемо (7.68) у вигляді

$$t_h(x, y) = t_0 + \beta_p \frac{E_{00}E_{r0}}{L} \cos \left[k \left(\frac{r^2}{2L} + L \right) \right], \quad (7.72)$$

де $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. При цьому було використано формулу Ейлера

$$2\cos z = \exp(jz) + \exp(-jz). \quad (7.73)$$

З (7.72) випливає, що голограма являє собою концентричні смуги, відстань між якими визначається з умови

$$k \left(\frac{r_{m+1}^2}{2L} + L \right) - k \left(\frac{r_m^2}{2L} + L \right) = 2\pi \Rightarrow \frac{\pi}{\lambda L} (r_{m+1}^2 - r_m^2) = 2\pi \Rightarrow \Delta r_m = r_{m+1} - r_m = \frac{\lambda L}{r_m},$$

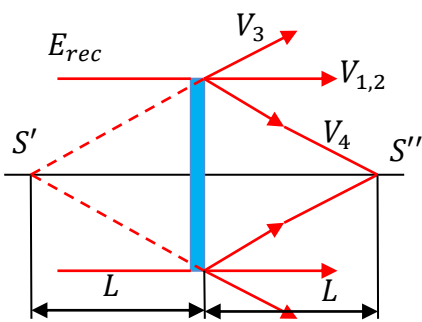


Рис. 7.17. Схема відновлення голографічного зображення

тобто, із збільшенням радіуса кільця відстань між ними зменшується.

Роздільна здатність фотопластинки буде повністю використана, якщо для найбільшого кільця виконується умова

$$v_h \geq \frac{1}{\Delta r_m} = \frac{r_m}{\lambda L} \Rightarrow D_{min} \geq 2v_h \lambda L. \quad (7.74)$$

Приклад 7.2. Отримано голограму невеликого об'єкта, який розташований на відстані $L = 50$ см від неї. Яким повинен бути розмір D_p фотопластинки, щоб записати на голограму деталі

предмета розміром $b = 0,01$ мм? Яка немонахроматичність світла $\Delta\lambda$ допускається при запису голограми? Довжина хвилі світла $\lambda = 0,5$ мкм.

Розв'язання. Розглянемо рис. 7.18. При проходженні світла через прозорий предмет або при відбитті від нього відбувається дифракція світла на його структурі.

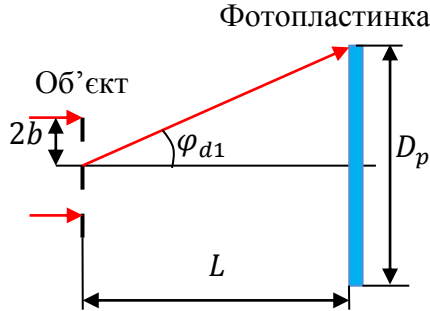


Рис. 7.18. До розв'язання прикладу 7.2

Будемо розглядати предмет у вигляді синусоїдальної дифракційної ґратки з періодом $2b$. Тоді головне рівняння дифракційної ґратки запишеться у вигляді

$$2b \sin \varphi_{dm} = m\lambda, \quad (7.75)$$

де $m = 0, \pm 1$.

Для запису голограми предмета необхідно, щоб на фотопластинку потрапляло дифраговане світло, тобто

$$\frac{1}{2} D_p \geq L \operatorname{tg} \varphi_{d1}. \quad (7.76)$$

Для малих кутів дифракції $\operatorname{tg} \varphi_{d1} \approx \sin \varphi_{d1} = \frac{\lambda}{2b}$. Тоді

$$D_p \geq \frac{L\lambda}{b} = \frac{5 \cdot 10^2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}}{10^{-2}} = 25 \text{ мм}. \quad (7.77)$$

Допустиму немонахроматичність світла визначимо з розгляду інтерференційної картини у площині фотопластинки. Якщо опорна хвиля є плоска хвиля, що нормально падає на фотопластинку, то інтерференційна картина являє собою смуги, нумерація яких починається з центру (осі) голограми. Номер смуги на краю голограми визначається з умови

$$r - L = N\lambda = \sqrt{L^2 + \frac{1}{4} D_p^2} - L \approx \frac{D_p^2}{8L}. \quad (7.78)$$

Допустима немонохроматичність визначається з умови, коли $N+1$ смуга для довжини хвилі λ співпадає з N смугою для довжини хвилі $\lambda+\Delta\lambda$, тобто $(N+1)\lambda = N(\lambda + \Delta\lambda)$. Звідси

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{N}, \quad (7.79)$$

де номер смуги N визначається із (7.78) як

$$N = \frac{D_p^2}{8\lambda L}. \quad (7.80)$$

Тоді допустима немонохроматичність світла

$$\Delta\lambda = \frac{8\lambda^2 N}{D_p^2}. \quad (7.81)$$

Враховуючи (7.77), маємо

$$\Delta\lambda = \frac{8\lambda^2 L}{(\lambda L / b)^2} = \frac{8b^2}{L} = \frac{8 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^2} = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ мм} = 1,6 \text{ нм}. \quad (7.82)$$

Приклад 15.3. На рис. 7.10 і 7.15,г зображена схема запису безлінзової голограми Фур'є точкового об'єкта. Знайдіть амплітудний коефіцієнт пропускання такої голограми.

Розв'язання. Особливістю запису голограми Фур'є є те, що:

- 1) опорна хвиля є сферична хвиля, що розходитьься;
- 2) точкове джерело опорної хвилі і об'єкт знаходяться в одній площині, що розташована на відстані z від фотопластинки, тобто $z_r = z_o = z$.

Запишемо рівняння об'єктної і опорної хвиль, які розходяться, в квадратичному наближенні. Для об'єктної хвилі маємо, що розподіл монохроматичної хвилі у площині фотопластинки описується функцією:

$$V_o(x, y, 0) = \frac{V'_{o0}}{r} \exp(jkr), \quad (7.83)$$

де V'_{o0} – амплітуда об'єктної хвилі; $r = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + z^2}$ – відстань від точкового джерела об'єктної хвилі з координатами (x_o, y_o, z) до довільної точки на фотопластині з координатами $(x, y, 0)$; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число.

Запишемо вираз для відстані r в квадратичному наближенні, вважаючи, що розміри фотопластинки набагато менші за відстань z . Тоді

$$r = z \sqrt{1 + \frac{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2}{z^2}} \approx z \left[1 + \frac{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2}{2z^2} \right]. \quad (7.84)$$

Підставимо (7.84) в (7.83)

$$\begin{aligned} V_o(x, y, 0) &= \frac{V'_{o0}}{z} \exp(jkz) \exp \left\{ j \frac{k}{2z} [(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2] \right\} = \\ &= V_{o0} \exp \left\{ j \frac{\pi}{\lambda z} [(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2] \right\}. \end{aligned} \quad (7.85)$$

де $V_{o0} = \frac{V'_{o0}}{z} \exp(jkz)$ – амплітуда об'єктної хвилі у квадратичному наближенні.

Аналогічно (7.85) запишемо рівняння опорної хвилі у квадратичному наближенні:

$$V_r(x, y, 0) = V_{r0} \exp \left\{ j \frac{\pi}{\lambda z} [(x - x_r)^2 + (y - y_r)^2] \right\}. \quad (7.86)$$

В результаті інтерференції опорної і об'єктної хвиль у площині фотопластинки утворюється інтерференційна картина з інтенсивністю

$$I_p(x, y) = |V_o + V_r|^2 = |V_o|^2 + |V_r|^2 + V_r^* V_o + V_r V_o^*. \quad (7.87)$$

Після експонування і обробки фотопластинки голограма матиме амплітудний коефіцієнт пропускання:

$$t_h(x, y) = \beta I_p(x, y) = \beta |V_o|^2 + \beta |V_r|^2 + \beta V_r^* V_o + \beta V_r V_o^* = t_1 + t_2 + t_3 + t_4, \quad (7.88)$$

де $t_1(x, y) = \beta |V_o|^2 = \text{const}$, $t_2(x, y) = \beta |V_r|^2 = \text{const}$ – постійні коефіцієнти пропускання, які не залежать від координат голограми x, y ;

$$\begin{aligned}
 t_3(x, y) &= \beta V_r^* V_o = \beta V_{r0}^* V_{o0} \exp\left\{-j \frac{\pi}{\lambda z} \left[(x - x_r)^2 + (y - y_r)^2\right]\right\} \times \\
 &\times \exp\left\{j \frac{\pi}{\lambda z} \left[(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2\right]\right\} = \\
 &= \beta V_{r0}^* V_{o0} \exp\left[j2\pi \left(\frac{x_r - x_o}{\lambda z} x + \frac{y_r - y_o}{\lambda z} y - \frac{x_r^2 - x_o^2}{2\lambda z} - \frac{y_r^2 - y_o^2}{2\lambda z}\right)\right] = \\
 &= t_{30} \exp\left[j2\pi \left(\frac{x_r - x_o}{\lambda z} x + \frac{y_r - y_o}{\lambda z} y\right)\right],
 \end{aligned} \tag{7.89}$$

де $t_{30} = \beta V_{r0}^* V_{o0} \exp\left[-j2\pi \left(\frac{x_r^2 - x_o^2}{2\lambda z} + \frac{y_r^2 - y_o^2}{2\lambda z}\right)\right]$ – комплексний коефіцієнт

пропускання, який не залежить від координат x, y .

Аналогічно

$$t_4(x, y) = t_{40} \exp\left[-j2\pi \left(\frac{x_r - x_o}{\lambda z} x + \frac{y_r - y_o}{\lambda z} y\right)\right]. \tag{7.90}$$

7.11. Задачі для самостійного розв'язування

Задача 7.1. Знайдіть амплітудний коефіцієнт пропускання $t_h(x, y)$ голограми точкового джерела світла, якщо в якості опорної хвилі використовується плоска хвиля, яка падає на фотопластинку під кутом θ . Джерело світла розташоване на відстані L від фотопластинки на осі, яка перпендикулярна до неї. Знайдіть положення дійсного і уявного зображень при відновленні зображення плоскою хвилею, яка нормально падає на голограму. Визначте мінімальну роздільну здатність ν_p фотопластинки, яка необхідна при запису голограми діаметром D_h .

$$\text{Відповідь: } t_h(x, y) = t_0 + \beta V_o A_r \exp\left(j2\pi \frac{\sin \theta}{\lambda} y\right) + \beta V_o^* A_r \exp\left(-j2\pi \frac{\sin \theta}{\lambda} y\right);$$

$$\nu_p \geq \frac{D_h}{\lambda L}.$$

Задача 15.2. Голограма записана на фотопластинку радіусом $r_p = 5$ см. Голограма освітлюється монохроматичним світлом з довжиною хвилі $\lambda = 0,5$ мкм, а зображення формується на відстані $L = 1$ м. Знайдіть допустиму немонохроматичність світла $\Delta\lambda$, при якій ще повністю використовується теоретична роздільна здатність голограми.

Вказівка: Використайте приклад 7.2.

$$\text{Відповідь: } \Delta\lambda \leq \frac{2L\lambda^2}{r_p^2} = 0,2 \text{ нм.}$$

Задача 15.3. Голограма Фур'є, амплітудний коефіцієнт пропускання якої був визначений у прикладі 7.3, освітлюється монохроматичною хвилею з амплітудою A_{rec} , яка нормально падає на голограму. Знайдіть розподіл амплітуди поля за голограмою. Доведіть, що дві складові цього поля є плоскі хвилі. Знайдіть направляючі косинуси цих плоских хвиль.

Вказівка: Порівняйте складові поля V_3 і V_4 з рівнянням плоскої хвилі

$$V_{rec}(x, y) = A_{rec} \exp(j\vec{k}\vec{r}) = A_{rec} \exp\left[j\frac{2\pi}{\lambda}(x\cos\alpha + y\cos\beta)\right].$$

Відповідь: $V_1 = A_{rec}t_1$, $V_2 = A_{rec}t_2$ – постійний фон;

$$V_3 = A_{rec}t_3 = A_{rec}t_{30} \exp\left[j2\pi\left(\frac{x_r - x_o}{\lambda z}x + \frac{y_r - y_o}{\lambda z}y\right)\right]; \quad V_4 = V_3^*.$$

$$\cos\alpha = \frac{x_o - x_r}{\lambda z}; \quad \cos\beta = \frac{y_o - y_r}{\lambda z} \quad \text{– для складової поля } V_3;$$

$$\cos\alpha = \frac{x_r - x_o}{\lambda z}; \quad \cos\beta = \frac{y_r - y_o}{\lambda z} \quad \text{– для складової поля } V_4;$$

$$\cos\gamma = \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta}.$$

Задача 15.4. На фотопластинку падають об'єктна і опорна плоскі хвилі, хвильові вектори яких лежать в одній площині уз. Об'єктна і опорна хвилі мають однакову амплітуду A і довжину хвилі $\lambda = 0,63$ мкм. Об'єктна хвиля

падає під кутом θ_o на фотопластинку, а опорна хвиля – під кутом θ_r . Знайдіть розподіл інтенсивності у площині фотопластинки $xу$. Побудуйте графік цього розподілу уздовж координати y , якщо $\theta_o = 0^\circ$, а $\theta_r = 5^\circ$.

$$\text{Відповідь: } I_p(x, y) = 4A^2 \cos^2 \left[\frac{\pi y}{\lambda} (\sin \theta_r - \sin \theta_o) \right].$$

Задача 15.5. При запису голограми точкового джерела випромінювання використовується плоска референтна хвиля, яка нормально падає на фотопластинку. Довжина хвилі $\lambda = 0,63$ мкм, а точкове джерело розташоване на відстані $L = 0,5$ м від фотопластинки. Знайдіть розподіл інтенсивності у площині фотопластинки. Визначте відстань між 1 і 2 та 9 і 10 світлими кільцями.

$$\text{Відповідь: } I_p(x, y) = I_r(r) = A_r^2 + \frac{A_o^2}{L^2} + \frac{2A_r A_o}{L} \cos \left(\frac{\pi}{\lambda L} r^2 \right);$$

$$r_{m,\max} = \sqrt{2m\lambda L}; \quad r_2 - r_1 = 0,33 \text{ мм}; \quad r_{10} - r_9 = 0,13 \text{ мм}.$$

РОЗДІЛ 8

ПОЛЯРИЗАЦІЯ СВІТЛА

Поляризація світла – це фізична характеристика оптичного випромінювання, яка описує поперечну анізотропію світлових хвиль, тобто нееквівалентність різних напрямків в площині, що перпендикулярна світловому променю [8].

Поняття «поляризації світла» було введено англійським вченим І. Ньютоном в 1705 році. Перші дослідження поляризації світла з використанням кристалів ісландського шпату були проведені голландським вченим Х. Гюйгенсом в 1690 році.

8.1. Лінійно поляризоване світло. Закон Малюса

Світло являє собою поперечні електромагнітні хвилі, в яких *завжди* вектори напруженості електричного \vec{E} і магнітного \vec{H} полів утворюють з вектором швидкості \vec{v} розповсюдження хвилі праву декартову трійку векторів (рис. 8.1).

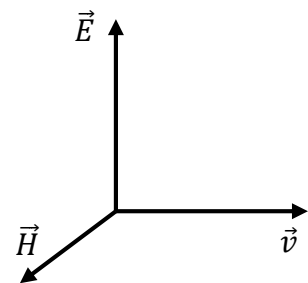


Рис. 8.1. Векторна модель світла

Світло називається *лінійно або плоско поляризованим* у випадку, коли вектори \vec{E} і \vec{v} лежать в площині поляризації, яка утворена цими векторами (рис. 8.2,а). Для природнього світла вектор \vec{E} займає рівноймовірну орієнтацію в просторі (рис. 8.2,б).

Якщо природнє світло проходить через пластинку із турмаліна, то на виході пластинки утворюється лінійно поляризоване світло, яке має такі властивості (рис. 8.3,а):

1. При обертанні пластинки навколо променя його інтенсивність на виході із пластинки не змінюється і дорівнює

$$I_{lp} = \frac{1}{2} I_n, \quad (8.1)$$

де I_n – інтенсивність природнього променя.

2. Вектор \vec{E}_{lp} лінійно поляризованого світла паралельний оптичній осі oo кристала турмаліна.

3. Якщо на пластинку із турмаліна падає лінійно поляризоване світло \vec{E}_{lp1} , то на виході пластинки також буде лінійно поляризоване світло \vec{E}_{lp2} , інтенсивність якого змінюється по закону

$$I_{lp2} = I_{lp1} \cos^2 \varphi, \quad (8.2)$$

де φ – кут між площиною поляризації променя, що падає на пластинку, і оптичною віссю кристала.

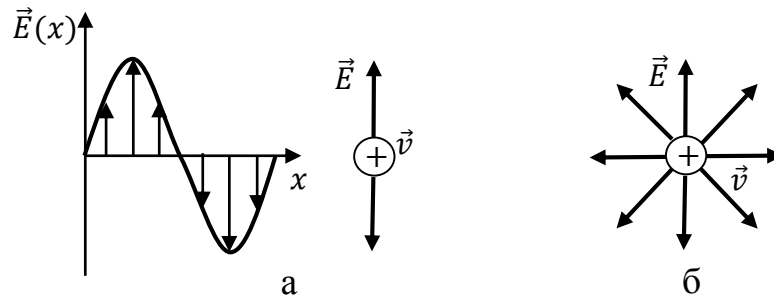


Рис. 8.2. Векторна модель світла: а – лінійно поляризованого; б – природнього

Формули (8.1) і (8.2) описують закон Малюса для природнього і лінійно поляризованого світла. В загальному випадку закон Малюса має вигляд:

$$I_{lp2} = \frac{1}{2} I_n \cos^2 \varphi. \quad (8.3)$$

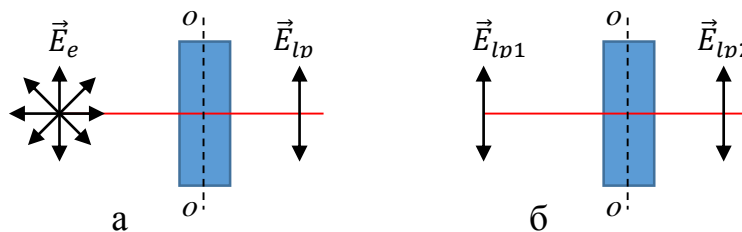


Рис. 8.3. Проходження світла через пластинку із турмаліна: а – природнього світла; б – лінійно поляризованого світла

Доведемо закон Малюса (8.3), вважаючи, що

1. Електромагнітні хвилі є поперечними.

2. Пластинка турмаліна пропускає світло, в якого вектор \vec{E}_n має орієнтацію уздовж оптичної осі кристала oo .

Розглянемо оптичну схему для дослідження закону Малюса, яка складається із двох пластинок турмаліна (рис. 8.4,а). Із векторної діаграми цієї схеми (рис. 8.4,б) маємо

$$E_{lp2} = E_{lp1} \cos \varphi. \quad (8.4)$$

Тоді інтенсивність світла на виході із другої пластинки буде дорівнювати

$$I_{lp2} = |E_{lp2}|^2 = I_{lp1} \cos^2 \varphi. \quad (8.5)$$

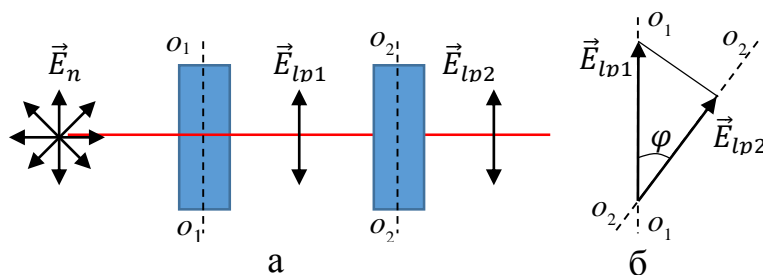


Рис. 8.4. Дослідження закону Малюса:
а – оптична система; б – векторна діаграма

Перша пластинка турмаліна, яка перетворює природне світло в лінійно поляризоване, називається *поляризатором*, а друга пластинка, за допомогою якої досліджується поляризоване світло, називається *аналізатором*.

8.2. Поляризація світла при відбиванні та заломленні на межі двох діелектриків

Нехай на межу двох діелектриків падає під кутом ε_1 природне світло (рис. 8.5). Енергетичний коефіцієнт відбиття такої межі визначається за формулою Френеля (3.72) [9]

$$R = \frac{1}{2}(R_{\parallel} + R_{\perp}) = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{\operatorname{tg}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2')}{\operatorname{tg}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2')} \right]^2 + \left[\frac{\sin(\varepsilon_1 - \varepsilon_2')}{\sin(\varepsilon_1 + \varepsilon_2')} \right]^2 \right\}, \quad (8.6)$$

де ε_2' – кут заломлення; R_{\parallel} і R_{\perp} – часткові енергетичні коефіцієнти відбиття для світла, яке поляризовано в площині падіння і в площині, перпендикулярній до

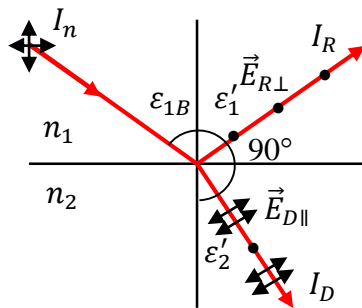


Рис. 8.5. Визначення кута Брюстера

площини падіння, відповідно.

Якщо $\varepsilon_1 + \varepsilon_2' = 90^\circ$, то $\text{tg}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2') = \infty$, а $R_{\parallel} = 0$. Це означає, що при падінні природнього світла під кутом Брюстера $\varepsilon_B = 90^\circ - \varepsilon_2'$ відбитий промінь буде повністю поляризований в площині, перпендикулярній до площини падіння.

Із закону заломлення (1.9) [9] отримаємо формулу для розрахунку кута Брюстера: $n_1 \sin \varepsilon_B = n_2 \sin \varepsilon_2' = n_2 \sin(90^\circ - \varepsilon_B) = n_2 \cos \varepsilon_B$. Звідки

$$\text{tg} \varepsilon_B = \frac{n_2}{n_1}. \quad (8.7)$$

Іноді кут Брюстера називають *кутом повної поляризації*, так як відбитий промінь лінійно поляризований. Крім того, відбитий і заломлений промені будуть перпендикулярними один до одного, так як $\varepsilon_B + \varepsilon_2' = 90^\circ$ (рис. 8.5).

Заломлений промінь буде частково поляризованим і має компоненту $E_{D\parallel}$ більшу за $E_{D\perp}$, так як складова природнього світла $E_{n\parallel}$ не відбивається ($R_{\parallel} = 0$).

Для характеристики частково поляризованого світла використовують поняття ступені поляризації, яка визначається двома способами:

$$1. \quad P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}, \quad (8.8)$$

де $I_{max} = |E_{\parallel}|^2$ і $I_{min} = |E_{\perp}|^2$ – інтенсивності лінійно поляризованих складових у відповідній площині (рис. 8.6,а).

$$2. \quad P = \frac{I_{lp}}{I_{lp} + I_n}, \quad (8.9)$$

де I_{lp} і I_n – інтенсивність лінійно поляризованої і природньої складових в частково поляризованому світлі (рис. 8.6,б).

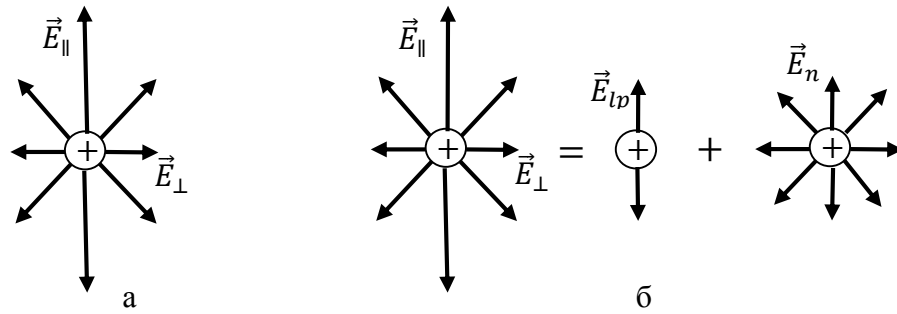


Рис. 8.6. Частково поляризоване світло (а) і його векторна модель (б)

Закон Малюса для поляризованого при відбиванні світла вперше було досліджено за допомогою приладу Нерренберга, який складається із двох

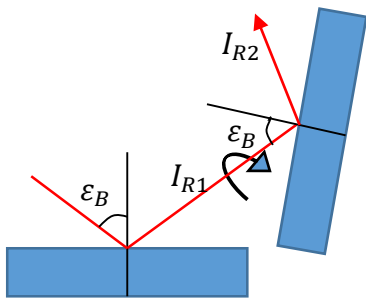


Рис. 8.7. Схема приладу Нерренберга

скляних пластинок, розташування яких показано на рис. 8.7. На першу пластинку падає під кутом Брюстера природне світло, яке після відбивання перетворюється в лінійно поляризований промінь, який падає під кутом Брюстера на другу пластинку.

Якщо обертати другу пластинку навколо падаючого променя, то інтенсивність відбитого

променя I_{R2} буде змінюватись за законом Малюса (8.3), де φ – кут між площинами падіння променя на першу і другу пластинку.

При падінні променя на пластинку під кутом Брюстера заломлений промінь буде частково поляризованим і матиме ступінь поляризації $P \approx 15 \dots 20\%$. Для збільшення ступеня поляризації заломленого променя використовують оптичну систему з багатьма пластинками, яка називається *стопою*. Якщо на стопу, що має 10 пластинок, падає під кутом Брюстера промінь природнього світла, то на виході стопи утворюється частково поляризований промінь, який має ступінь поляризації $P \approx 95 \dots 98\%$.

Отримання лінійно поляризованого світла при падіння променя під кутом Брюстера на межу двох діелектриків має істотний недолік – відбитий промінь має малу інтенсивність порівняно з падаючим променем.

8.3. Подвійне променезаломлення

Подвійне променезаломлення – це роздвоєння світлових променів при проходженні через анізотропне середовище (наприклад, кристал), яке обумовлене залежністю показника заломлення цього середовища від орієнтації електричного вектору світлової хвилі [8].

В 1670 році італійський вчений Еразм Бартоліні спостерігав явище подвійного променезаломлення, яке виникає при проходженні природнього світла через пластинку із ісландського шпату (CaCO_3) (рис. 8.8). Для одного із променів справедливий закон заломлення і тому він називається *звичайним*, а для другого променя закон заломлення не виконується і тому він називається *незвичайним*.

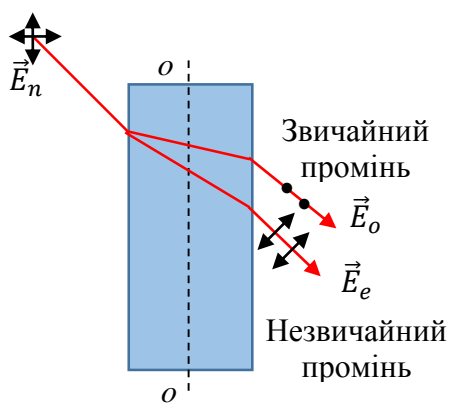


Рис. 8.8. Подвійне променезаломлення

Промені на виході із пластинки

ісландського шпату мають такі властивості:

1. Звичайний промінь паралельний незвичайному променю.
2. Звичайний \vec{E}_o і незвичайний \vec{E}_e промені лінійно поляризовані у взаємно перпендикулярних площинах.
3. Обидва промені мають однакову інтенсивність.

В кристалі ісландського шпату існує напрямок, уздовж якого не відбувається подвійне променезаломлення. Цей напрямок називається *оптичною віссю кристала*. Кристали, які мають одну оптичну вісь, називаються *одновісними* (наприклад, ісландський шпат). Існують кристали, які мають дві оптичні осі, і тому їх називають *двовісними*. В кристалах з центром симетрії подвійне променезаломлення не спостерігається.

Площина, яка проходить через падаючий промінь і оптичну вісь кристала, називається *головним перетином або головною площиною кристала*.

Звичайний промінь завжди поляризований в площині, перпендикулярній до головної площини кристала, а площина поляризації незвичайного променя співпадає з головною площиною кристала.

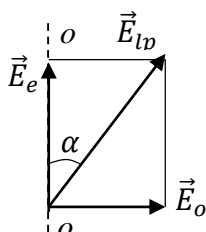


Рис. 8.9. Векторна схема проходження лінійно поляризованого світла через кристал

Якщо на кристал ісландського шпату надає лінійно поляризоване світло, то інтенсивність звичайного I_o і незвичайного променя I_e залежить від кута α між площиною поляризації падаючого променя і оптичною віссю кристала. Встановимо цю залежність, використовуючи рис. 8.9.

$$E_o = E_{lp} \sin \alpha; \quad E_e = E_{lp} \cos \alpha. \quad (8.10)$$

Тоді

$$I_o = |E_o|^2 = I_{lp} \sin^2 \alpha; \quad I_e = |E_e|^2 = I_{lp} \cos^2 \alpha. \quad (8.11)$$

Інтенсивність цих променів будуть однаковими, коли $\alpha = 45^\circ$.

8.4. Поляризаційні прилади

Прилади, що призначені для перетворення природнього світла в лінійно поляризоване світло, називаються *поляризаторами*.

Лінійно поляризоване світло можна отримати двома методами:

1. Використання закону Брюстера, згідно якому при падінні променя на межу двох діелектриків під кутом Брюстера, відбитий промінь буде лінійно поляризованим.

2. Використання явища подвійного променезаломлення, при якому звичайний і незвичайний промені будуть лінійно поляризованими.

Перший метод має великі втрати інтенсивності і тому мало застосовується.

Другий метод застосовується в двох типів пристроїв:

1. Пристрої, які створюють тільки один лінійно поляризований промінь (поляризаційні прилади).

2. Пристрої, які створюють два лінійно поляризовані промені, що розведені в просторі (двоєко заломлюючи прилади).

8.4.1. Поляризаційні пристрої

Призма Ніколя

Така призма складається із двох призм із ісландського шпату, які склеєні уздовж грані AB канадським бальзамом, що має показник заломлення $n_b = 1,550$ (рис. 8.10). Ісландський шпат має показник заломлення при довжині хвилі $\lambda = 5893 \text{ \AA}$ для звичайного променя $n_o = 1,658$, а показник заломлення незвичайного променя змінюється в межах $n_e = 1,486 \dots 1,658$ в залежності від напрямку розповсюдження променя. Оптична вісь кристала утворює кут 48° з вхідною гранню призми.

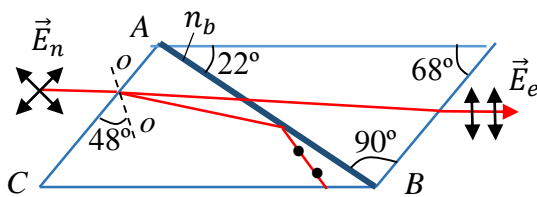


Рис. 8.10. Призма Ніколя

Природне світло утворює в першій призмі звичайний і незвичайний промені. Звичайним промінь за рахунок повного внутрішнього відбивання повністю відбивається від грані AB , так як

$n_o > n_b$. Незвичайний промінь проходить через другу призму, так як $n_e \approx n_b$, і утворює на виході призми лінійно поляризований промінь.

На нижню грань наносять чорне покриття, яке поглинає звичайний промінь. Максимальна розбіжність вхідного пучка (апертурний кут) становить 28° . Враховуючи широке застосування цього поляризатора його часто називають *ніколем*.

Призма Глана-Фуко

Ця призма складається із двох прямокутних призм, виготовлених із ісландського шпату, які мають повітряний проміжок уздовж гіпотенузи AB (рис. 8.11). Оптичні осі цих призм розташовані перпендикулярно до площини падіння. Природне світло нормально падає на вхідну грань першої призми і

утворює усередині призми звичайний і незвичайний промені, які розповсюджуються в одному напрямку. В результаті повного внутрішнього відбивання звичайний промінь повністю відбивається від грані AB , а незвичайний промінь проходить через другу призму, утворюючи на виході лінійно поляризоване світло.

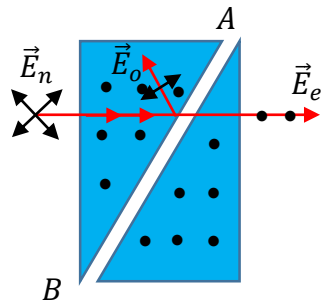


Рис. 8.11. Призма Глана-Фуко

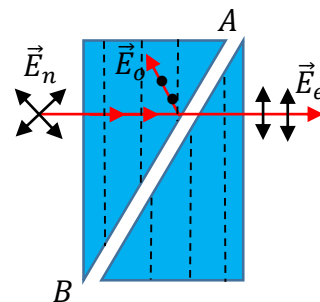


Рис. 8.12. Призма Тейлора

Для зменшення втрат при відбиванні незвичайного променя на гранях AB Тейлор запропонував інший варіант такої призми, в якій оптичні осі окремих призм розташовані в площині падіння паралельно до входньої грані (рис. 8.12).

8.4.2. Двоєко заломлюючі призми

Призма Волостона

Призма складається із двох призм ACD і ABC , що виготовлені із ісландського шпату ($n_o \geq n_e$), які склеєні по грані AC . Оптичні осі цих призм

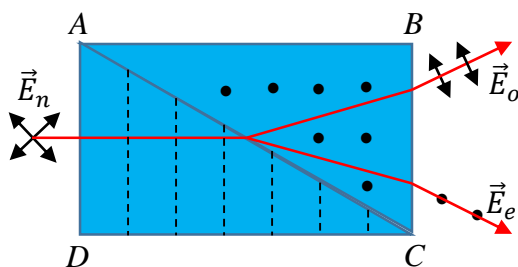


Рис. 8.13. Призма Волостона

взаємно перпендикулярні (рис. 8.13). На входню грань AD нормально падає промінь природнього світла. В призмі ACD утворюються звичайний і незвичайний промені, які розповсюджуються в одному напрямку.

В призмі ABC звичайний промінь становиться незвичайним, а незвичайний – звичайним, так як оптичні осі призм

взаємно перпендикулярні. Ці промені мають різні показники заломлення $n_e/n_o < 1$, а $n_o/n_e > 1$. Тому промені відхиляються в різні сторони від напрямку, який вони мали в призмі ACD .

Призма Рошона

Призма складається із двох призм ACD і ABC , що виготовлені із ісландського шпату ($n_o \geq n_e$), які склеєні по грані AC . Оптичні осі цих призм взаємно перпендикулярні (рис. 8.14).

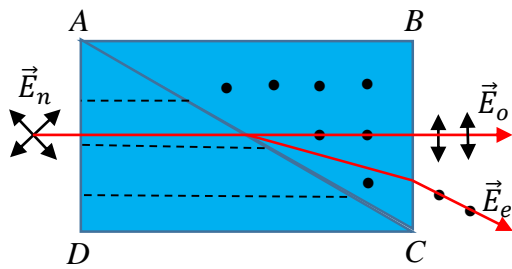


Рис. 8.14. Призма Рошона

На вхідну грань AD нормально падає промінь природнього світла. В призмі ACD утворюються звичайний і незвичайний промені, які розповсюджуються уздовж оптичної осі і мають однакові показники заломлення $n_o = n_e = 1,658$.

В призмі ABC звичайний промінь не змінює напрямок розповсюдження, а незвичайний промінь відхиляється, так як його показник заломлення в цій призмі $n_e = 1,486$. Перевагою цієї призми є прямолінійність розповсюдження звичайного променя.

Призма із скла і ісландського шпату

Призма складається із двох призм ACD і ABC , перша призма виготовлена із скла з показником заломлення $n_g = 1,49$, а друга призма – із ісландського

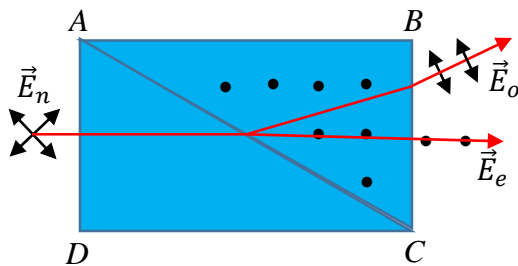


Рис. 8.15. Призма із скла і ісландського шпату

шпату, оптична вісь якої перпендикулярна до площини падіння вхідного променя (рис. 8.15).

На вхідну грань першої призми нормально падає природнє світло. В другій призмі утворюється звичайний і незвичайний промені, які мають показники

заломлення $n_o = 1,658$ і $n_e = 1,486$ відповідно. Незвичайний промінь

проходить через другу призму без відхилення так як $n_e \approx n_g$, а звичайний промінь відхиляється.

Існує велике різноманіття поляризаційних приладів, які побудовані на основі двояко заломлюючих призм.

В пластині турмаліна відбувається подвійне променезаломлення із сильним поглинанням звичайного променя. Тому на виході пластини утворюється лінійно поляризований незвичайний промінь.

Широке розповсюдження в якості поляризаторів знайшли *поляроїди*, які являють собою тонкий шар кристалів герпатиту, що нанесені на прозору плівку або скло. Кристалам герпатиту властиве подвійне променезаломлення з поглинанням звичайного променя. Це дає можливість отримувати дешеві поляризатори великих розмірів.

8.5. Еліптично поляризоване світло

Розглянемо взаємодію двох когерентних хвиль, які лінійно поляризовані у взаємно перпендикулярних площинах і розповсюджуються в одному напрямку. Таку взаємодію хвиль можна реалізувати за допомогою установки, що зображена на рис. 8.16. Природне світло нормально падає на ніколь, який формує на виході лінійно поляризовану хвилю \vec{E}_{lp} , яка проходить через пластинку із ісландського шпату. Пластинка має оптичну вісь, яка паралельна до її поверхні.

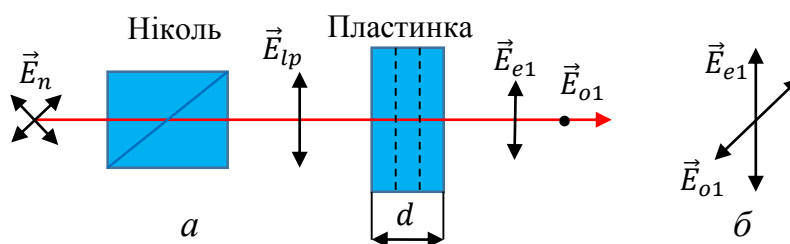


Рис. 8.16. Схема для отримання еліптично поляризованого світла (а) і його векторна модель (б)

В результаті подвійного променезаломлення в пластинці утворюються звичайний і незвичайний промені, які розповсюджуються в одному напрямку і мають на виході із пластинки різницю фаз

$$\Delta\varphi = k \cdot \Delta d = \frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e)d, \quad (8.12)$$

де d – товщина пластинки.

Визначимо амплітуди звичайного E_{o1} і незвичайного E_{e1} променів на виході із пластики, якщо площина поляризації променя E_{lp} , що падає на пластинку, утворює кут α з оптичною віссю кристала. Із рис. 8.17 маємо

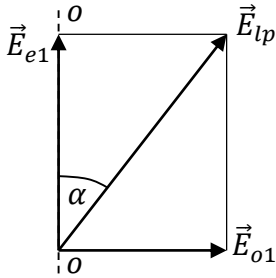
$$E_{o1} = E_{lp} \sin\alpha; \quad E_{e1} = E_{lp} \cos\alpha. \quad (8.13)$$

Амплітуди звичайного і незвичайного променів змінюються у часі по закону

$$E_e = E_{e1} \cos\omega t; \quad E_o = E_{o1} \cos(\omega t - \Delta\varphi). \quad (8.14)$$

Систему рівнянь (8.14) представимо у

Рис. 8.17. Векторна модель отримання еліптично поляризованого світла вигляді одного рівняння, яке не залежить від часу t .



$$\frac{E_e}{E_{e1}} = \cos\omega t;$$

$$\frac{E_o}{E_{o1}} = \cos(\omega t - \Delta\varphi) = \cos\omega t \cos\Delta\varphi + \sin\omega t \sin\Delta\varphi =$$

$$= \frac{E_e}{E_{e1}} \cos\Delta\varphi + \sqrt{1 - \left(\frac{E_e}{E_{e1}}\right)^2} \sin\Delta\varphi.$$

$$\frac{E_o}{E_{o1}} - \frac{E_e}{E_{e1}} \cos\Delta\varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{E_e}{E_{e1}}\right)^2} \sin\Delta\varphi.$$

Піднесемо праву і ліву частину останнього співвідношення до квадрату

$$\left(\frac{E_o}{E_{o1}}\right)^2 - 2 \frac{E_o}{E_{o1}} \frac{E_e}{E_{e1}} \cos\Delta\varphi + \left(\frac{E_e}{E_{e1}}\right)^2 \cos^2\Delta\varphi = \sin^2\Delta\varphi - \sin^2\Delta\varphi \left(\frac{E_e}{E_{e1}}\right)^2,$$

або

$$\left(\frac{E_o}{E_{o1}}\right)^2 - 2 \frac{E_o}{E_{o1}} \frac{E_e}{E_{e1}} \cos\Delta\varphi + \left(\frac{E_e}{E_{e1}}\right)^2 = \sin^2\Delta\varphi, \quad (8.15)$$

Зробимо заміну змінних в рівнянні (8.15): $E_o = x$, $E_{o1} = a$, $E_e = y$, $E_{e1} = b$. Тоді рівняння (8.15) матиме вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{xy}{ab}\cos\Delta\varphi = \sin^2\Delta\varphi. \quad (8.15')$$

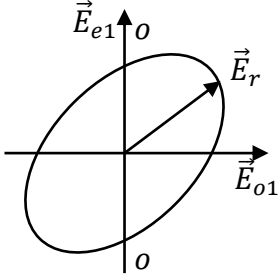


Рис. 8.18. Векторна модель еліптично поляризованого світла

Рівняння (8.15') являє собою рівняння еліпса, який довільно орієнтований відносно оптичної осі кристала oo (рис. 8.18). Тому результуюча амплітуда поля на виході пластинки буде формувати еліптично поляризоване світло. Напівосі еліпса a і b , а також його орієнтація залежать від кута α та різниці фаз $\Delta\varphi$ (8.12).

Розглянемо рівняння (8.15) для трьох часткових випадків.

1. Різниця фаз $\Delta\varphi$ між звичайним E_o і незвичайним E_e променями дорівнює $\pi/2$. Визначимо товщину пластинки, яка забезпечує цей випадок. Із формули (8.12) маємо

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d = \frac{\pi}{2}; \Rightarrow d = \frac{\lambda}{4(n_o - n_e)}. \quad (8.16)$$

При цьому різниця ходу між звичайним і незвичайним променями дорівнює

$$\Delta d = (n_o - n_e)d = \frac{1}{4}\lambda. \quad (8.17)$$

Тому пластинка із одновісного кристалу, яка забезпечує виконання умови (8.16), називається *пластинкою товщиною $\lambda/4$, або четверть хвильовою пластинкою*.

Для такої пластинки рівняння (8.15) і (8.15') матимуть вигляд (рис. 8.19)

$$\frac{E_o^2}{E_{o1}^2} + \frac{E_e^2}{E_{e1}^2} = 1; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (8.18)$$

Вирази (8.18) являють собою рівняння еліпса, який має напівосі

$$a = E_{o1} = E_{lp}\sin\alpha; \quad b = E_{e1} = E_{lp}\cos\alpha. \quad (8.19)$$

Якщо $\alpha = 45^\circ$, то $a = b = R$, а рівняння (8.18) перетворюються в рівняння кола

$$E_o^2 + E_e^2 = E_{o1}^2; \quad x^2 + y^2 = R^2. \quad (8.20)$$

Тому такий вид поляризації називається *циркулярним або поляризованим по колу*.

Таким чином, **для отримання циркулярно поляризованого світла необхідно щоб лінійно поляризоване світло проходило через четверть хвильову пластинку і $\alpha = 45^\circ$** . В силу принципу оберненості в оптиці циркулярно поляризоване світло при проходженні через четверть хвильову пластинку становиться лінійно поляризованим.

Напрямок обертання результуючого вектору $\vec{E}_r = \vec{E}_o + \vec{E}_e$ в еліптично поляризованому світлі залежить від різниці ходу $\Delta\varphi$.

1. Якщо $\Delta\varphi = \pi/2$, то обертання відбувається по годинниковій стрільці (вправо, додатне). Із (8.14) маємо $E_e = E_{e1} \cos\omega t$; $E_o = E_{o1} \sin\omega t$. При $t = 0 \Rightarrow E_e = E_{e1}$; $E_o = 0$, а при $t > 0 \Rightarrow E_e < E_{e1}$; $E_o > 0$. Тобто вектор \vec{E}_r обертається вправо (рис. 8.19).

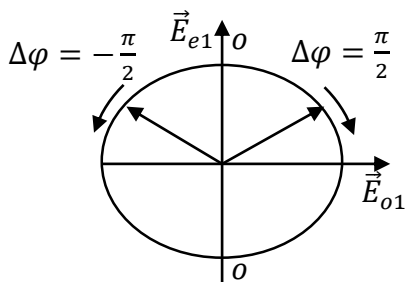


Рис. 8.19. Дія четверть хвильової пластинки

2. Якщо $\Delta\varphi = -\pi/2$, то обертання відбувається проти годинникової стрілки (вліво, від'ємне). Із (8.14) маємо $E_e = E_{e1} \cos\omega t$; $E_o = -E_{o1} \sin\omega t$. При $t = 0 \Rightarrow E_e = E_{e1}$; $E_o = 0$, а при $t > 0 \Rightarrow E_e < E_{e1}$; $E_o < 0$. Тобто вектор \vec{E}_r обертається вліво (рис. 8.19).

Розрахуємо товщину четверть хвильової пластинки, що виготовлена із ісландського шпату, для якого $n_o - n_e = 0,172$. Із формули (8.16) для довжини хвилі $\lambda = 0,589$ мкм маємо $d = 0,86$ мкм. Виготовити таку пластинку технологічно складно, тому виготовляють пластинку товщиною

$$d = \left(m + \frac{1}{4}\right) \frac{\lambda}{(n_o - n_e)}. \quad (8.21)$$

2. Різниця фаз $\Delta\varphi$ дорівнює π . Таку різницю фаз забезпечує пластинка, яка має товщину

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e)d = \pi; \Rightarrow d = \frac{\lambda}{2(n_o - n_e)}. \quad (8.22)$$

Тому таку пластинку називають *пластинкою товщиною $\lambda/2$, або півхвильовою пластинкою*.

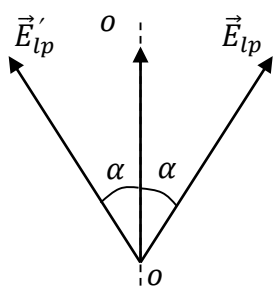


Рис. 8.20. Дія півхвильової пластинки

Якщо виконується умова (8.22) рівняння (8.15) і

(8.15') матимуть вигляд

$$\frac{E_o^2}{E_{o1}^2} + \frac{E_e^2}{E_{e1}^2} + 2 \frac{E_o}{E_{o1}} \frac{E_e}{E_{e1}} = 0; \Rightarrow \frac{E_o}{E_{o1}} + \frac{E_e}{E_{e1}} = 0; \quad (8.23)$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0; \Rightarrow y = -\frac{b}{a}x. \quad (8.23')$$

Вирази (8.23) і (8.23') є рівняннями прямої, які

свідчать про те, що при проходженні лінійно поляризованого світла через півхвильову пластинку світло залишається лінійно поляризованим з поворотом площини поляризації на кут 2α (рис.8.20).

3. Різниця фаз $\Delta\varphi$ дорівнює 2π . Таку різницю фаз забезпечує пластинка, яка має товщину

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e)d = 2\pi; \Rightarrow d = \frac{\lambda}{n_o - n_e}. \quad (8.24)$$

Тому таку пластинку називають *пластинкою товщиною λ , або хвильовою пластинкою*.

Якщо виконується умова (8.24) рівняння (8.15) і (8.15') матимуть вигляд

$$\frac{E_o^2}{E_{o1}^2} + \frac{E_e^2}{E_{e1}^2} - 2 \frac{E_o}{E_{o1}} \frac{E_e}{E_{e1}} = 0; \Rightarrow \frac{E_o}{E_{o1}} - \frac{E_e}{E_{e1}} = 0; \quad (8.25)$$

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0; \Rightarrow y = \frac{b}{a}x. \quad (8.25')$$

Вирази (8.25) і (8.25') є рівняннями прямої, які свідчать про те, що при проходженні лінійно поляризованого світла через хвильову пластинку світло залишається лінійно поляризованим із незмінною орієнтацією площини поляризації.

8.6. Компенсатори

Поляризатори можна використовувати в якості аналізаторів поляризованого світла. Але при цьому неможливо відрізнити циркулярно поляризоване світло від природнього (рис. 8.21), або еліптично поляризоване світло від частково поляризованого. Прилади, що призначені для дослідження еліптично поляризованого світла, використовують *компенсатори*, які змінюють різницю фаз між звичайним і незвичайним променями. Компенсатор

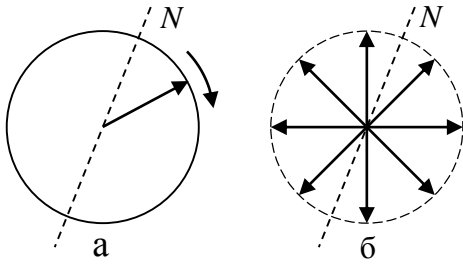


Рис. 8.21. Векторна модель циркулярно поляризованого світла (а) і природнього світла (б)

Бабіне складається із двох призм виготовлених із кварцу, оптичні осі яких взаємно перпендикулярні і паралельні до

вхідної грані (рис. 8.22)

Принци роботи таких приладів полягає в наступному. Еліптично поляризоване світло з невідомою різницею фаз $\Delta\varphi_x$ між звичайним і

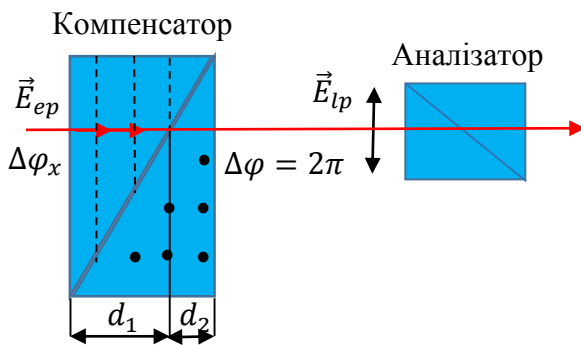


Рис. 8.22. Компенсатор Бабіне

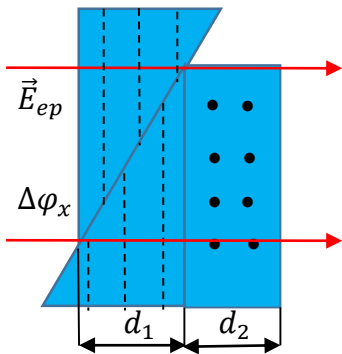
незвичайним променями нормально падає на вхідну грань першої призми. В цій призмі утворюються звичайний і незвичайний промені, які надходять в другу призму, де звичайний промінь перетворюється в незвичайний і

навпаки. При цьому виникає додаткова різниця фаз між цими променями

$$\Delta\varphi_c = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d_1 + \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)(d_1 - d_2). \quad (8.26)$$

Вертикальним переміщенням компенсатора змінюють відрізки d_1 і d_2 , або різницю фаз $\Delta\varphi_c$ до виконання умови $\Delta\varphi_x + \Delta\varphi_c = 2\pi$. При цьому вхідне еліптично поляризоване світло перетворюється згідно (8.24) в лінійно

поляризоване світло, яке реєструється аналізатором. Тоді різниця фаз досліджуваного еліптично поляризованого світла дорівнює



$$\Delta\varphi_x = 2\pi - \Delta\varphi_c. \quad (8.27)$$

Рис. 8.23. Компенсатор Солейля

Головним недоліком компенсатора Бабіне є неможливість досліджувати широкі пучки світла із-за невизначеності відрізків d_1 і d_2 . Для усунення цього недоліку використовують компенсатор Солейля, в якого відрізок d_1 змінний, а відрізок d_2

постійний (рис. 8.23).

8.7. Інтерференція поляризованого світла

Розглянемо інтерференцію двох хвиль, що поляризовані в одній площині і розповсюджуються в одному напрямку. Таку інтерференцію можна отримати за допомогою оптичної схеми, яка наведена на рис. 8.24.

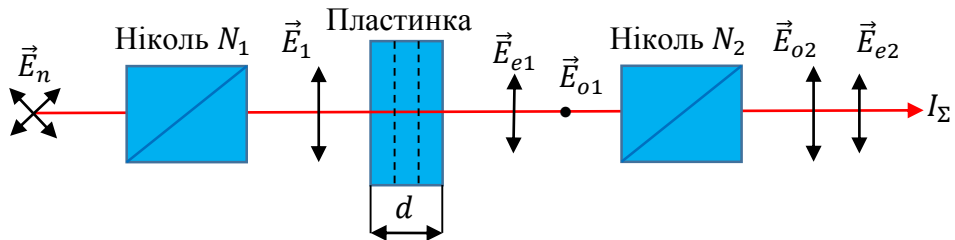


Рис. 8.24. Схема для дослідження інтерференції поляризованого світла.

Принцип роботи такої схеми полягає в наступному. Природне світло після проходження ніколя N_1 перетворюється в лінійно поляризоване, яке нормально падає на плоскопаралельну пластинку. Пластинка виготовлена із одновісного кристалу (ісландський шпат, кварц), оптична вісь якого паралельна поверхні пластинки. Після проходження пластинки утворюється звичайний і незвичайний промені, які мають різні амплітуди E_{o1} і E_{e1} , що зсунуті по фазі на величину

$$\Delta\varphi = kd = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d, \quad (8.28)$$

де d – товщина пластинки.

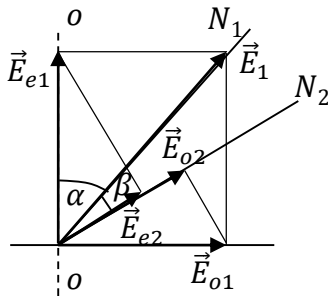
Промені E_{o1} і E_{e1} після проходження ніколя N_2 будуть поляризовані в площині пропускання цього ніколя і матимуть амплітуди E_{o2} і E_{e2} . Так як ці промені розповсюджуються в одному напрямку і являються когерентними, то виникає інтерференція світла.

Визначимо інтенсивність світла в інтерференційній картині, використовуючи формулу (5.16) [9]

$$I_{\Sigma} = I_{o2} + I_{e2} + 2\sqrt{I_{o2}I_{e2}}\cos\Delta\varphi, \quad (8.29)$$

де $I_{o2} = |E_{o2}|^2$ і $I_{e2} = |E_{e2}|^2$ – інтенсивності відповідних хвиль; $\Delta\varphi$ – різниця фаз (8.28).

Визначимо амплітуди E_{o2} і E_{e2} світлових хвиль, використовуючи векторне представлення цих хвиль (рис. 8.25), де α – кут між площиною поляризації ніколя



N_1 і оптичною віссю oo пластинки; β – кут між площинами поляризації ніколів N_1 і N_2 . Із рис. 8.25 знаходимо:

$$E_{o1} = E_1 \sin\alpha; \quad E_{e1} = E_1 \cos\alpha; \quad (8.30)$$

$$E_{o2} = E_{o1} \sin(\alpha + \beta) = E_1 \sin\alpha \sin(\alpha + \beta); \quad (8.31)$$

$$E_{e2} = E_{e1} \cos(\alpha + \beta) = E_1 \cos\alpha \cos(\alpha + \beta). \quad (8.32)$$

Рис. 8.25. Визначення амплітуд хвиль E_{o2} і E_{e2}

Підставимо (8.31) і (8.32) до (8.29)

$$\begin{aligned} I_{\Sigma} &= I_1 [\sin\alpha \sin(\alpha + \beta)]^2 + I_1 [\cos\alpha \cos(\alpha + \beta)]^2 + \\ &+ 2I_1 \sqrt{[\sin\alpha \sin(\alpha + \beta)][\cos\alpha \cos(\alpha + \beta)]} \cos\Delta\varphi = \\ &= I_1 \left[\cos^2\beta - \sin 2\alpha \sin 2(\alpha + \beta) \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2} \right], \end{aligned} \quad (8.33)$$

де $I_1 = |E_1|^2$ – інтенсивність світла після ніколя N_1 .

Із рівняння (8.33) видно, що результуюча інтенсивність інтерференційної картини залежить від кутів α і β та різниці фаз $\Delta\varphi$.

Аналіз цього рівняння дозволяє зробити такі висновки:

1. Якщо пластинка в оптичній системі, що зображена на рис. 8.24, відсутня ($d = 0$), то $\Delta\varphi = 0$ і $I_{\Sigma} = I_1 \cos^2\beta$, тобто виконується закон Малюса (8.2).

2. Якщо площини поляризації ніколів N_1 і N_2 паралельні ($\beta = 0$) (рис. 8.26), то

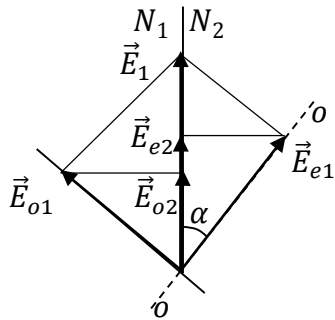


Рис. 8.26. Векторна модель інтерференції світла, коли $\beta = 0$

$$I_{\Sigma\parallel} = I_1 \left[1 - \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2} \right]. \quad (8.34)$$

3. Якщо площини поляризації ніколів N_1 і N_2 взаємно перпендикулярні ($\beta = \pi/2$), то (рис. 8.27)

$$I_{\Sigma\perp} = I_1 \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}. \quad (8.35)$$

4. Із формул (8.34) і (8.35) видно, що $I_{\Sigma\parallel} + I_{\Sigma\perp} = I_1$. Це означає, що інтерференційні картини при куті β рівному 0° і 90° доповнюють одна одну, тобто світлим смугам в одній картині відповідають темні смуги в другій картині і навпаки.

5. Визначимо амплітуди світлових хвиль E_{o2} і E_{e2} для двох випадків, коли:

- $\beta = 0$, то

$$E_{o2} = E_1 \sin^2 \alpha \text{ і } E_{e2} = E_1 \cos^2 \alpha. \quad (8.36)$$

- $\beta = 90^\circ$, то

$$E_{o2} = E_{e2} = E_1 \sin\alpha \cos\alpha. \quad (8.37)$$

Це означає, що для випадку, коли $\beta = 90^\circ$, темні смуги інтерференційної картини мають нульову інтенсивність, так як $E_{o2} = E_{e2}$ при будь-якому куті α . Для випадку, коли $\beta = 90^\circ$, темні смуги мають нульову інтенсивність, коли $\sin\alpha = \cos\alpha$, або $\alpha = 45^\circ$.

6. Якщо площина поляризації одного із ніколів N_1 або N_2 співпадає з оптичною віссю пластинки, то на виході установки утворюється одна хвиля, а інтерференційна картина зникає. Це явище використовується для визначення оптичної осі кристала.

7. Розгляньте явище, що було відкрите в 1818 році Араго, називається *хроматичною поляризацією*, яка проявляється у вигляді кольорових плям, при

проходженні білого світла через оптичну систему, що представлена на рис. 8.24 [8]. Такий вид поляризації використовується при дослідженні кристалів і напруги прозорих твердих матеріалах.

8.8. Математичне представлення різних видів поляризації

Процес отримання еліптично поляризованого світла було розглянуто п. 8.5. Узагальнене рівняння (8.15) цього виду поляризації можна представити у вигляді:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{xy}{ab}\cos\Delta\varphi = \sin^2\Delta\varphi, \quad (8.38)$$

де $x = E_o$; $a = E_{o1}$; $y = E_e$; $b = E_{e1}$.

Рівняння (8.38) являє собою рівняння еліпса, який довільно орієнтований відносно оптичної осі oo кристала (рис. 8.28). Орієнтація еліпса визначається кутом α , а форма еліпса – кутом ε . В залежності від цих кутів еліптично

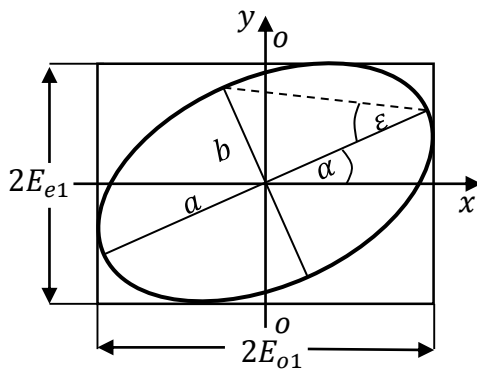


Рис. 8.28. Траєкторія при еліптичній поляризації

поляризоване світло перетворюється в лінійно поляризоване світло, а також в циркулярно поляризоване світло з обертанням результуючого вектора $\vec{E}_r = \vec{E}_o + \vec{E}_e = \vec{x} + \vec{y}$ вправо або вліво.

В загальному випадку еліпс (8.38) розташований всередині прямокутника розміром $2E_{o1} \times 2E_{e1}$ і дотикається його контуру в чотирьох точках (рис. 8.28). Якщо

третій доданок в рівнянні (8.38) не дорівнює нулю, то осі еліпса не паралельні осям x і y .

Розглянемо часткові випадки, коли

1. $\Delta\varphi = 0$. Тоді $\sin\Delta\varphi = 0$ і $\cos\Delta\varphi = 1$, а рівняння (8.38) перетворюється в рівняння прямої $y = (b/a)x$ (рис. 8.29,а). Аналогічно, якщо $\Delta\varphi = \pi$. Тоді

$\sin\Delta\varphi = 0$ і $\cos\Delta\varphi = -1$, а рівняння (8.38) перетворюється в рівняння прямої $y = -(b/a)x$ (рис. 8.29,б).

2. $\Delta\varphi = \pi/2$ і $E_{o1} = E_{e1} = R$. Тоді $\sin\Delta\varphi = 1$ і $\cos\Delta\varphi = 0$, а рівняння (8.38) перетворюється в рівняння кола $E_x^2 + E_y^2 = R^2$ (рис. 8.29,в). Аналогічно, при $\Delta\varphi = -\pi/2$ маємо рівняння кола.

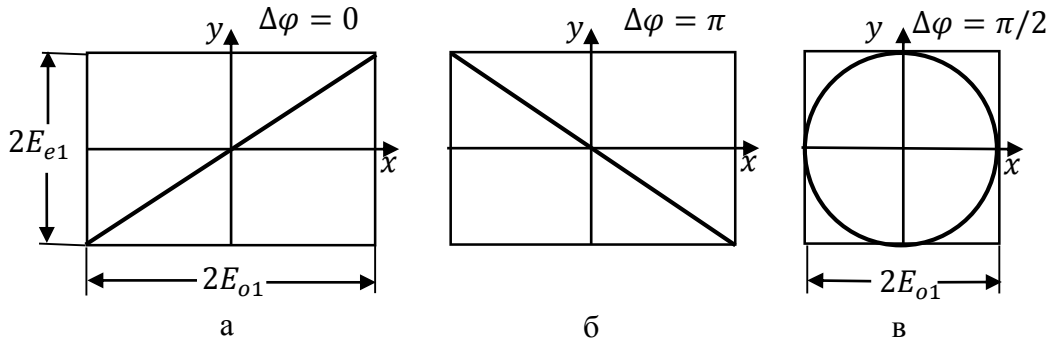


Рис. 8.29. Траєкторії, які відповідають лінійній і циркулярній поляризації

Із рівняння (8.38) і рис. 8.28 можна отримати такі співвідношення:

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{b}{a}; \quad (8.39)$$

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\frac{b}{a}}{1-(\frac{b}{a})^2} \cos\Delta\varphi; \quad (8.40)$$

$$\sin2\varepsilon = \frac{2\frac{b}{a}}{1+(\frac{b}{a})^2} \sin\Delta\varphi. \quad (8.41)$$

Додатковою характеристикою еліптично поляризованого світла є напрямок обертання результуючого вектору $\vec{E}_r = \vec{E}_o + \vec{E}_e = \vec{x} + \vec{y}$. Якщо різниця фаз $\Delta\varphi$ лежить в межах від 0 до π , то вектор \vec{E}_r обертається за годинниковою стрілкою (вправо). Якщо різниця фаз $\Delta\varphi$ лежить в межах від π до 2π , то вектор \vec{E}_r обертається проти годинникової стрілкою (вліво).

Різні види поляризації наглядно демонструють у вигляді відповідної точки P в тривимірному просторі:

1. В сферичній системі координат – це сфера Пуанкаре (рис. 8.30).
2. В декартовій системі координат – це параметри Стокса.



Рис. 8.30. Сфера Пуанкаре

Сфера Пуанкаре має сферичні координати $r, 2\alpha, 2\varepsilon$, де радіус r характеризує інтенсивність світла; азимутальний кут 2α – «географічну довготу»; кут еліптичності 2ε – «географічну широту». «Північний полюс» відповідає правоциркулярній поляризації; «південний полюс» – лівоциркулярній поляризації. Точки на «екваторі» – лінійній поляризації для певного азимутального кута. Інші точки «північної» півкулі відповідають правоеліптичній поляризації, а інші точки «південної» півкулі – лівоеліптичній поляризації. Уздовж меридіана змінюється еліптичність від лінійної поляризації ($\varepsilon = 0$) до циркулярної поляризації ($\varepsilon = \pm 45^\circ$). Паралель містить усі еліпси однакової форми, але різної орієнтації. Дві крайні точки любого діаметра сфери відповідають «ортогональним» станам поляризації, тобто право- і лівоциркулярній поляризації, лінійним і еліптичним поляризаціям з різницею азимутів $\Delta\alpha = 90^\circ$.

При дослідженні змін стану поляризації сфера Пуанкаре являє собою корисний допоміжний засіб.

Параметри Стокса S_0, S_1, S_2, S_3 розглядають в декартовій системі координат x, y, z (рис. 8.30).

Радіус сфери Пуанкаре дорівнює $r = S_0 = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$. Перерахунок сферичних координат $r, 2\alpha, 2\varepsilon$ в декартові координати x, y, z здійснюється за формулами сферичної геометрії (табл. 8.1). Так як сферичні координати розраховуються за формулами (8.40) і (8.41), то параметри Стокса також можна визначити через амплітуди $a = E_{o1}$, $b = E_{e1}$ і різницю фаз $\Delta\varphi$. Сміслові значення параметрів Стокса наведені в табл. 8.1.

Параметри S_0, S_1, S_2, S_3 можна записати у вигляді вектору або матриці із одного стовпця.

Таблиця 8.1

Розрахунок параметрів Стокса

Параметри Стокса	Розрахунок за сферичними координатами	Розрахунок за компонентами електричного поля	Примітка
S_0	$S_0 = r$	$a^2 + b^2$	Інтенсивність
S_1	$r \cdot \cos 2\varepsilon \cdot \cos 2\alpha$	$a^2 - b^2$	Параметр переважної горизонтальної поляризації
S_2	$r \cdot \cos 2\varepsilon \cdot \sin 2\alpha$	$2a^2 b^2 \cos \Delta\varphi$	Параметр переважної діагональної поляризації
S_3	$r \cdot \sin 2\alpha$	$2a^2 b^2 \sin \Delta\varphi$	Параметр переважної циркулярної поляризації

В табл. 8.2 наведені параметри Стокса, що розраховані для декількох станів поляризації. Інтенсивність світла при цьому нормувалась до $S_0 = 1$. Результати наочно показують сенс параметрів Стокса: для S_1 крайні значення ± 1 досягаються при горизонтальній і вертикальній лінійній поляризації; для S_2 – при лінійній поляризації з орієнтацією площини поляризації під кутом $\pm 45^\circ$; для S_3 – при циркулярній поляризації.

Для випадку неполяризованого світла $a = b$, $S_0 = 1$, а $S_1 = 0$. Так як $\Delta\varphi$ має довільні значення, то в середньому $\sin \Delta\varphi = \cos \Delta\varphi = 0$. При цьому також $S_2 = S_3 = 0$.

Таблиця 8.2

Вектори Стокса для деяких станів поляризації

	Лінійна поляризація				Циркулярна поляризація	
	горизонтальна	вертикальна	+45°	-45°	права	ліва
α	0	+90°	+45°	-45°	-	-
$\cos 2\alpha$	1	-1	0	0	-	-
$\sin 2\alpha$	0	0	1	-1	-	-
ε	0	0	0	0	+45°	-45°
$\cos 2\varepsilon$	1	1	1	1	0	0
$\sin 2\varepsilon$	0	0	0	0	1	-1
S_0	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

8.9. Приклади розрахунку поляризації світла

Приклад 8.1. Граничний кут повного внутрішнього відбивання на межі деякої речовини з повітрям дорівнює 45°. Визначте:

- кут повної поляризації на межі речовина–повітря і повітря–речовина;
- частковий і загальний енергетичні коефіцієнти відбиття при падінні променя під кутом повної поляризації;
- ступінь поляризації заломленого променя, коли відбитий промінь повністю поляризований.

Розв'язання. а) Із формули для кута повного внутрішнього відбивання (1.10) [12] знаходимо $n_1 = \frac{n_2}{\sin \varepsilon_{\text{пво}}} = \frac{1}{\sin 45^\circ} = 1,414$. Тоді за формулою (8.7) визначаємо кут повної поляризації (кут Брюстера) на межі речовина–повітря:

$$\varepsilon_{B1} = \arctg\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \arctg\left(\frac{1}{1,414}\right) = 35^\circ 16'.$$

Кут повної поляризації при зворотному напрямку розповсюдження із повітря в речовину дорівнює:

$$\varepsilon_{B2} = \arctg\left(\frac{n_1}{n_2}\right) = \arctg\left(\frac{1,414}{1}\right) = 54^\circ 44'.$$

б) Частковий енергетичний коефіцієнт відбиття при $\varepsilon_1 = \varepsilon_B$ визначаємо за формулою (8.6) $R_{\perp} = \sin^2(\varepsilon_{B2} - \varepsilon'_2) = \sin^2(54^\circ 44' - 35^\circ 16') = 0,111$. При цьому інший частковий енергетичний коефіцієнт відбиття $R_{\parallel} = 0$, а повний енергетичний коефіцієнт (по відношенню до падаючого природного світла) дорівнює

$$R = 0,5 \cdot 0,111 = 0,055.$$

в) Ступінь поляризації заломленого променя при $\varepsilon_1 = \varepsilon_B$ визначаємо за формулою (8.10)

$$P_D = \frac{R_{\perp}}{2 - R_{\perp}} = \frac{0,111}{2 - 0,111} = 0,059.$$

При цьому $P_R = 1$, а відбитий промінь повністю поляризований в площині, яка перпендикулярна до площини падіння.

Приклад 8.2. Вузкий пучок природного світла I_n падає під кутом Брюстера до поверхні скляної плоскопаралельної пластинки ($n = 1,5$). Визначте інтенсивності і ступені поляризації променів 1, 2, 3 і 4 (рис. 8.31) без врахування поглинання світла.

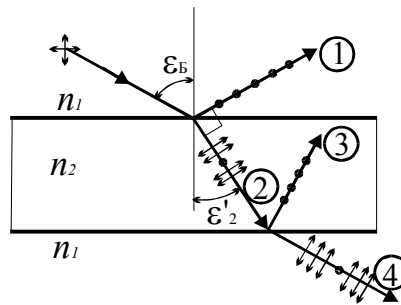


Рис.8.31. До прикладу 8.2

Часткові енергетичні коефіцієнти відбиття на межі повітря–скло і скло–повітря знаходимо за формулою (8.6):

$$R_{\perp B} = \sin^2(\varepsilon_B - \varepsilon'_2) = \sin^2(56,31^\circ - 33,69^\circ) = 0,148 \text{ і } R_{\parallel} = 0.$$

Падаючий промінь природного світла представимо у вигляді двох некогерентних складових, які лінійно поляризовані у взаємно перпендикулярних площинах: $I_n = I_{\parallel} + I_{\perp}$, причому $I_{\parallel} = 0,5I_n$ і $I_{\perp} = 0,5I_n$.

Для першого променя $I_{H1} = R_{HB}I_H = 0$ і $I_{\perp 1} = R_{\perp B}I_{\perp} = R_{\perp B}0,5I_n = 0,074I_n$, а повна інтенсивність $I_1 = I_{H1} + I_{\perp 1} = 0,074I_n$ і ступінь поляризації $P_1 = 1$.

Для другого променя згідно з законом збереження енергії на верхній поверхні пластинки

$$I_{H2} = I_H - I_{H1} = I_H = 0,5I_n \text{ і } I_{\perp 2} = I_{\perp} - I_{\perp 1} = 0,5I_n - 0,5I_n R_{\perp B} = 0,5I_n(1 - R_{\perp B}),$$

а повна інтенсивність

$$I_2 = I_{H2} + I_{\perp 2} = 0,5I_n + 0,5I_n(1 - R_{\perp B}) = 0,5I_n(2 - R_{\perp B}) = 0,926I_n$$

і ступінь поляризації

$$P_2 = \frac{I_{H2} - I_{\perp 2}}{I_{H2} + I_{\perp 2}} = \frac{1 - (1 - R_{\perp B})}{1 + (1 - R_{\perp B})} = \frac{R_{\perp B}}{2 - R_{\perp B}} = 0,080.$$

В третьому промені, як і в першому, відсутня паралельна складова, оскільки другий промінь падає під кутом Брюстера на нижню поверхню пластинки (скло–повітря) і він повністю лінійно поляризований: $I_{H3} = 0$ і $P_3 = 1$. Повна інтенсивність $I_3 = I_{\perp 3} = R_{\perp B}I_{\perp 2} = 0,5I_n(1 - R_{\perp B})R_{\perp B} = 0,063I_n$.

Для четвертого променя паралельна складова проходить, як і для другого променя, без зміни: $I_{H4} = I_H = 0,5I_n$. Згідно з законом збереження енергії на нижній поверхні пластинки

$$I_{\perp 4} = I_{\perp 2} - I_{\perp 3} = 0,5I_n[(1 - R_{\perp B}) - (1 - R_{\perp B})R_{\perp B}] = 0,5I_n(1 - R_{\perp B})^2,$$

а повна інтенсивність

$$I_4 = I_{H4} + I_{\perp 4} = 0,5I_n + 0,5I_n(1 - R_{\perp B})^2 = 0,5I_n[1 + (1 - R_{\perp B})^2] = 0,863I_n$$

і ступінь поляризації

$$P_4 = \frac{I_{H4} - I_{\perp 4}}{I_{H4} + I_{\perp 4}} = \frac{1 - (1 - R_{\perp B})^2}{1 + (1 - R_{\perp B})^2} = 0,159.$$

Приклад 8.3. Для порівняння яскравості освітлення двох поверхонь природнім світлом одну із них (менш яскраву) розглядають безпосередньо, а

другу – через два поляризатора. Яке є відношення яскравостей (інтенсивностей I_1/I_2), якщо освітлення обох поверхонь здається однаковим при куті між площинами пропускання поляризаторів, що дорівнює 70° ? Кожен поляризатор відбиває і поглинає 10% енергії світла, яке падає на нього.

Розв'язання. Нехай друга поверхня, що розглядається безпосередньо, має яскравість (інтенсивність) $I_2 = I_n$. Перша поверхня створює на виході системи

“поляризатор–аналізатор” інтенсивність $I_1 = \frac{1}{2} T_{\parallel} T_A I_n \cos^2 \varphi$. Тоді

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{2}{T_n T_a \cos^2 \varphi} = \frac{2}{0,9 \cdot 0,9 \cos^2 70^\circ} = 21,1.$$

Приклад 8.4. На ніколь падає частково поляризоване світло. Спочатку ніколь встановлюють так, що його площина пропускання паралельна площині коливань лінійно поляризованого світла. Якщо ніколь повернути на кут 60° , то інтенсивність світла, яке пройшло через нього, зменшиться у 3 рази. Знайдіть відношення інтенсивностей природного I_n і лінійно поляризованого $I_{\text{лп}}$ світла і ступінь його поляризації.

Розв'язання. У початковому положенні ніколь, по умові прикладу, повністю пропускає лінійно поляризоване світло і половину інтенсивності природного світла. Тому загальна інтенсивність світла, яке пройшла через ніколь, дорівнює:

$$I_1 = 0,5I_n + I_{\text{лп}}.$$

У наступному положенні ніколя інтенсивність лінійно поляризованого світла, яке пройшла через ніколь, визначається законом Малюса (8.2). При цьому інтенсивність природного світла також зменшиться у два рази. Тому загальна інтенсивність світла, яке пройшла через ніколь, дорівнює:

$$I_2 = 0,5I_n + I_{\text{лп}} \cos^2 \alpha.$$

З умови прикладу маємо, що $I_1 = 3I_2$, тобто $0,5I_n + I_{лн} = 1,5I_n + 3I_{лн} \cos^2 \alpha$. Після перетворень маємо: $I_n = I_{лн} (1 - 3 \cos^2 \alpha)$,

$$\text{або } \frac{I_n}{I_{лн}} = 1 - 3 \cos^2 60^\circ = 0,25.$$

Визначимо ступінь поляризації частково поляризованого світла за формулою (8.8), для чого знайдемо значення максимальної I_{max} і мінімальної I_{min} інтенсивностей.

Максимальна інтенсивність $I_{max} = I_1 = 0,5I_n + I_{лн}$, якщо врахувати, що $I_n = 0,25I_{лн}$, то $I_{max} = 0,125I_{лн} + I_{лн} = 1,125I_{лн}$.

Мінімальна інтенсивність відповідає положенню ніколя, коли його площина пропускання перпендикулярна до площини коливань лінійно поляризованого світла. При такому положенні ніколя поляризоване світло буде повністю загасено, а через ніколь пройде тільки половина інтенсивності природного світла. Таким чином, $I_{min} = 0,5I_n = 0,125I_{лн}$.

Підставив відповідні значення I_{max} і I_{min} в (8.8) визначимо ступінь поляризації

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{1,125I_{лн} - 0,125I_{лн}}{1,125I_{лн} + 0,125I_{лн}} = 0,8.$$

Приклад 8.5. Частково поляризоване світло, яке складається із компонент, поляризованих по колу (інтенсивністю I_c) і природнього (інтенсивністю I_n) проходить через четвертьхвильову пластинку і аналізатор. При обертанні останнього знайдено, що інтенсивність світла на виході системи змінюється від I_{max} до I_{min} , причому $\frac{I_{max}}{I_{min}} = 3$. Знайдіть відношення I_c/I_n .

Розв'язання. Четвертьхвильова пластинка вносить додаткову різницю фаз $\pi/2$ між двома ортогональними складовими електричного вектора. Тому при проходженні пластинки циркулярно поляризоване світло ($\Delta\varphi = \pi/2$)

перетворюється в лінійно поляризоване світло ($\Delta\varphi = \pi$) з тією ж інтенсивністю, і навпаки. Природне світло не змінюється, так як в ньому фазовий зсув змінюється хаотично. У відповідності до закону Малюса (8.2) інтенсивність лінійно поляризованої компоненти на виході системи змінюється від I_c до нуля, а природньої – завжди дорівнює $I_n/2$. Таким чином,

$$\frac{I_{max}}{I_{min}} = \frac{I_c + I_n/2}{I_n/2} = 3.$$

Звідки знаходимо, що $\frac{I_c}{I_n} = 1$.

Приклад 8.6. Лінійно поляризований світловий промінь падає на поляризатор, який обертається навколо осі променя з кутовою швидкістю $\omega = 21$ рад/с. Знайдіть світлову енергію, що проходить через поляризатор за один оберт, якщо потік енергії в пучку, що падає на цю систему, складає величину $\Phi_0 = 4,0$ мВт.

Розв'язання. Закон Малюса (8.2) можна однаково правильно записати і для інтенсивності (I_{np}), що пройшла через поляризатор, і для світлового потоку, і, як у випадку даного прикладу, для потоку світлової енергії - Φ_{np} . Без врахування втрат енергії в самому поляризаторі закон Малюса буде мати вигляд: $I_{np} = I_0 \cos^2 \varphi$ або $\Phi_{np} = \Phi_0 \cos^2 \varphi$, де I_0 та Φ_0 - інтенсивність та потік енергії відповідно, що характеризують світловий промінь, який падає на поляризатор.

Як відомо, потік Φ світлової енергії це світлова енергія W за одиницю часу:

$$\Phi = \frac{dW}{dt} = dW \frac{1}{\frac{d\varphi}{\omega}} = \frac{dW}{d\varphi} \omega. \quad (8.42)$$

В (8.42) ми врахували, що $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, а $dt = \frac{d\varphi}{\omega}$.

З (8.42) випливає, що швидкість, із якою зі зміною кута змінюється світлова енергія, дорівнює

$$\frac{dW}{d\varphi} = \frac{\Phi}{\omega} \Rightarrow dW = \frac{\Phi}{\omega} d\varphi. \quad (8.43)$$

Повна енергія знаходиться шляхом інтегрування (8.43):

$$W = \int_0^{2\pi} \frac{\Phi_0 \cdot \cos^2 \varphi}{\omega} d\varphi \equiv 4 \int_0^{\pi/2} \frac{\Phi_0 \cdot \cos^2 \varphi}{\omega} d\varphi. \quad (8.44)$$

Враховавши, що табличний інтеграл

$$\int \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}, \quad (8.45)$$

і підставивши визначений інтеграл $\int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{4}$ в (8.45), маємо:

$$W = 4 \frac{\Phi_0}{\omega} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi \cdot \Phi_0}{\omega} = \frac{3,14 \cdot 4 \text{ мВт}}{21 \text{ рад/с}} = 0,6 \text{ мДж}.$$

Приклад 8.7. На плоскопаралельну пластинку із одновісного від'ємного кристала падає плоска монохроматична хвиля під кутом $\varepsilon_1 > 0$. Оптична вісь кристала лежить у площині падіння і утворює кут $\alpha > 0$ з поверхнею пластинки. Користуючись принципом Гюйгенса, побудуйте наближено напрямки розповсюдження звичайного і незвичайного променів.

Розв'язання. Представимо падаючий пучок двома крайніми променями 1 і 2 (рис.8.32). Для плоскої хвилі фронт буде перпендикулярним до цих променів. Промінь 1 першим приходять на поверхню пластинки у точці В, яка згідно принципу Гюйгенса служить точковим джерелом випромінювання в кристалі вторинних звичайних і незвичайних хвиль. Через точку В проводимо оптичну вісь кристала під кутом α до поверхні пластинки.

За час розповсюдження променя 2 від точки С до точки А на поверхні кристалу навколо точки В виникають вторинні хвилі з сферичним фронтом для звичайної хвилі і еліпсоїдом обертання для незвичайної хвилі. Будуємо коло

радіусом $BM=AC/n_o$ з центром в точці B для фронту звичайної хвилі і еліпс з малою піввіссю $BM=AC/n_o$ уздовж оптичної осі кристалу і великою піввіссю $BN=AC/n_e$ для фронту незвичайної хвилі. Із точки A проводимо дотичні AM до кола і AN до еліпса, які і будуть новими хвильовими фронтами для звичайного і незвичайного променів відповідно. Тоді напрямок розповсюдження звичайного променя в кристалі визначається лінією, яка проходить через точки B і M , а незвичайного – через точки B і N . Із точки A проводимо промені, які паралельні звичайному і незвичайному променям, що виходять із точки B . На виході із нижньої поверхні пластинки усі промені ідуть паралельно падаючим променям 1 і 2. Звичайний промінь буде лінійно поляризованим у площині, яка перпендикулярна до площини падіння, а незвичайний – у площині падіння.

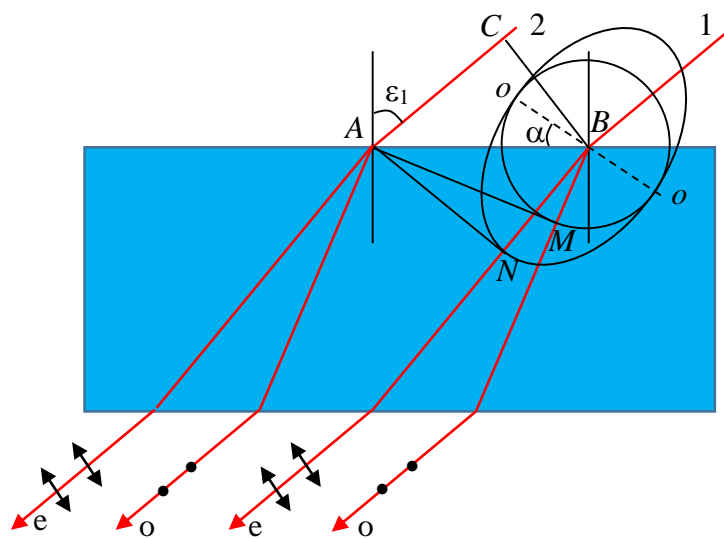


Рис. 8.32. До прикладу 8.7

Приклад 8.8. Пучок монохроматичного світла проходить через поляризатор і клиновидну пластинку, яка вирізана із кварцу з оптичною віссю, що паралельна ребру клина і утворює кут 45° з площиною пропускання поляризатора. Як буде змінюватися характер поляризації світла за пластинкою по її висоті?

Розв'язання. Клин представляє собою фазову пластинку змінної товщини, на виході якої складаються дві ортогонально поляризовані хвилі – звичайна і

незвичайна. В результаті складання цих хвиль в загальному випадку утворюється еліптично поляризоване світло. Конкретний вигляд такого світла залежить від різниці фаз (8.12), яка вноситься клиновидною пластинкою змінної товщини d :

$$\Delta\varphi = k \cdot \Delta d = \frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e)d.$$

У різних розрізах клиновидної пластинки будуть різні значення різниці фаз $\Delta\varphi$. Проти тих розрізів, де:

- $\Delta\varphi = 2\pi m$, світло буде лінійно поляризованим в площині поляризації падаючого світла;
- $\Delta\varphi = \pi(2m+1)$, світло буде лінійно поляризованим в площині, яка перпендикулярна площині поляризації падаючого світла;
- $\Delta\varphi = (\pi/2)(2m+1)$, світло буде циркулярно поляризованим.

Між цими розрізами світло буде еліптично поляризованим.

Приклад 8.9. Кварцова пластинка, яка має товщину 0,5 мм і вирізана паралельно оптичній осі, розташована між поляризатором і аналізатором. Оптична вісь пластинки нахилена під кутом 45° до площини пропускання поляризатора. При яких довжинах хвиль в інтервалі 0,5–0,6 мкм інтенсивність світла на виході системи не буде залежати від повороту аналізатора? Показник подвійного променезаломлення $n_e - n_o = 0,009$.

Розв'язання. Розглянемо рис. 8.16. Кварцова пластинка, яка вирізана паралельно оптичній осі, буде фазовою пластинкою. Так як $\alpha = 45^\circ$, то $E_e = E_o$. Щоб інтенсивність світла на виході аналізатора при його повороті була постійною, необхідно, щоб світло, яке проходить через нього, було циркулярно поляризоване, тобто фазова пластинка повинна бути четвертьхвильовою,

товщина якою $d = \frac{\lambda}{4} (2m + 1) \frac{1}{n_e - n_o}$.

Оскільки в спектральному діапазоні $\lambda_1 - \lambda_2 = 0,5 - 0,6$ мкм можливо декілька довжин хвиль, для яких кварцова пластинка буде четверть хвильовою, то визначимо спочатку діапазон можливих значень m .

$$\text{Для } \lambda_1 = 0,5 \text{ мкм } m_{\max} = 2 \frac{n_e - n_o}{\lambda_1} d - \frac{1}{2} = 2 \frac{0,009}{0,5} 500 - \frac{1}{2} = 17,5,$$

а для $\lambda_2 = 0,6$ мкм $m_{\min} = 14,5$. Тому в спектральному діапазоні $\lambda_1 - \lambda_2$ можливо три довжини хвилі ($m = 15, 16$ і 17), для яких кварцова пластинка буде четверть хвильовою. Ці довжини хвиль визначаємо за формулою

$$\lambda = \frac{4(n_e - n_o)d}{2m + 1}.$$

При $m = 15 - \lambda = 0,581$ мкм; при $m = 16 - \lambda = 0,545$ мкм; при $m = 17$ величина $\lambda = 0,514$ мкм.

Приклад 8.10. Розрахуйте параметри вектору Стокса для горизонтально-право еліптично поляризованого світла, в якому для осей виконується умова: $a = 2b$, $r = S_0 = 1$.

Розв'язання. Вектор Стокса визначається параметрами S_0, S_1, S_2, S_3 , які розрахуємо за формулами, що наведені в табл. 8.1, за координатами сфери Пуанкаре $r, 2\alpha, 2\varepsilon$.

Із умови прикладу маємо $S_0 = r = 1$.

Із рис. 8.27 видно, що для горизонтальної поляризації кут $\alpha = 0$.

За формулою (8.39) знаходимо кут $\varepsilon = \arctg \frac{b}{a} = \arctg \frac{1}{2} = 26,57^\circ$.

Тоді $\sin 2\varepsilon = \sin 57,14^\circ = 0,84$; $\cos 2\varepsilon = \cos 57,14^\circ = 0,54$.

За формулами табл. 8.1 знаходимо параметри Стокса

$$S_1 = r \cdot \cos 2\varepsilon \cdot \cos 2\alpha = 0,54$$

$$S_2 = r \cdot \cos 2\varepsilon \cdot \sin 2\alpha = 0$$

$$S_3 = r \cdot \sin 2\alpha = 0$$

Приклад 8.11. Світловий пучок, який має вектор Стокса $S_0 = 1$; $S_1 = 0,5$; $S_2 = 0,5$; $S_3 = 0,5$, проходить через поляризатор. При якій орієнтації поляризатора інтенсивність світла після поляризатора буде максимальною?

Розв'язання. Визначимо спочатку тип поляризації вихідного пучка. Ступінь поляризації визначається за формулою [5]

$$P = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0} = \frac{\sqrt{0,5^2 + 0,5^2 + 0,5^2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (8.46)$$

Так як ця величина менша за одиницю, то світло частково поляризоване і являє собою суміш природньої і еліптично поляризованої компонент. Максимальна інтенсивність світла, що пройшло через поляризатор, буде у випадку, коли площина пропускання буде співпадати з великою піввіссю еліпса. Її положення визначимо за допомогою формул із табл. 8.1:

$$S_1 = \cos 2\varepsilon \cdot \cos 2\alpha = 0,5; S_2 = \cos 2\varepsilon \cdot \sin 2\alpha = 0,5.$$

Звідки $\operatorname{tg} 2\alpha = 1$; $2\alpha = 45^\circ$; $\alpha = 22,5^\circ$. Таким чином, поляризатор необхідно орієнтувати під кутом $22,5^\circ$ до осі ox .

8.10. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 8.1. Промінь монохроматичного природного світла падає під кутом 45° на поверхню скла. Визначте коефіцієнт відбиття і ступінь поляризації відбитого і заломленого променів, коли показник заломлення дорівнює: а) 1,5; б) 1,62; в) 1,73.

Відповідь: а) $R = 0,050$; $P_R = 0,831$; $P_D = 0,048$; б) $R = 0,063$; $P_R = 0,769$; $P_D = 0,051$; в) $R = 0,083$; $P_R = 0,747$; $P_D = 0,068$.

Задача 8.2. Під яким кутом до горизонту повинно знаходитись Сонце, щоб його промені, що відбиті від поверхні озера, були б найбільше поляризовані? Яка при цьому ступінь поляризації заломленого променя?

Відповідь: $\varepsilon_{1B} = 36^\circ 56'$; $P_D = 0,04$.

Задача 8.3. Визначте коефіцієнт відбиття і ступінь поляризації відбитого і заломленого променів при падінні монохроматичного природного світла на скло ($n = 1,5$) під кутами: а) 15° ; б) 30° ; в) 45° .

Відповідь: а) $R = 0,040$; $P_R = 0,091$; $P_D = 0,004$; б) $R = 0,041$; $P_R = 0,397$; $P_D = 0,017$; в) $R = 0,005$; $P_R = 0,831$; $P_D = 0,044$.

Задача 8.4. Промінь природного монохроматичного світла падає на поверхню скла під кутом Брюстера. Визначте кут падіння, коефіцієнт відбиття і ступінь поляризації заломленого променя, коли показник заломлення скла дорівнює: а) 1,5; б) 1,62; в) 1,73.

Відповідь: а) $\varepsilon_B = 56^\circ 19'$; $R = 0,074$; $P_D = 0,079$; б) $\varepsilon_B = 58^\circ 19'$; $R = 0,100$; $P_D = 0,112$; в) $\varepsilon_B = 59^\circ 58'$; $R = 0,125$; $P_D = 0,142$.

Задача 8.5. Визначте показник заломлення скла, якщо при падінні на його поверхню природного променя світла заломлений промінь буде мати найбільшу ступінь поляризації при куті падіння: а) 30° ; б) 35° .

Відповідь: а) $n = 1,7320$; б) $n = 1,4281$.

Задача 8.6*. Яким повинен бути показник заломлення прозорої речовини, для якої граничний кут повного внутрішнього відбиття дорівнює куту повної поляризації?

Відповідь: $n = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} = 1,272$.

Задача 8.7*. Промінь природного світла падає на поверхню скла під кутом повної поляризації. Виразіть через показник заломлення скла ($n = 1,5$) і розрахуйте: а) коефіцієнт відбиття; б) ступінь поляризації заломленого променя.

Вказівка: Розкрийте у формулі (8.6) для R_\perp синус і косинус суми, а потім введіть умову Брюстера $\sin \varepsilon_B / \cos \varepsilon_B = n$ з врахуванням співвідношення $\varepsilon_2' = 90^\circ - \varepsilon_B$.

$$\text{Відповідь: а) } R = \frac{1}{2} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^2 = 0,7396; \text{ б) } P_D = \frac{(n+1)^2 - 4n^2}{(n+1)^2 + 4n^2} = 0,0798.$$

Задача 8.8. На бічну грань призми ($n = 1,5$) під кутом Брюстера падає пучок монохроматичного світла, яке лінійно поляризоване у площині головного перерізу призми. Яким повинен бути кут заломлення призми, щоб світло пройшло через неї без втрати на відбиття?

$$\text{Відповідь: } \theta = 2(90^\circ - \varepsilon_B) = 67^\circ 23'.$$

Задача 8.9. Промінь природного світла проходить через плоскопаралельну пластину (n) під кутом повної поляризації. Визначте ступінь поляризації променя, який пройшов через пластину, коли:

а) $n = 1,45$; б) $n = 1,62$; в) $n = 1,73$.

$$\text{Відповідь: } P_D = \frac{1 - (1 - R_\perp)^2}{1 + (1 - R_\perp)^2}; R_\perp = \sin^2(\varepsilon_3 - \varepsilon_2'); \varepsilon_B = \arctg(n);$$

а) $P_D = 0,1342$; б) $P_D = 0,2005$; в) $P_D = 0,2789$.

Задача 8.10. Стопа Столетова складається з десяти тонких плоскопаралельних скляних пластинок ($n = 1,5$), на які промінь природного світла падає під кутом повної поляризації. Визначте ступінь поляризації променя, який виходить із стопи. Підберіть число пластинок, при якому ступінь поляризації променя, який виходить із стопи, досягає значень 0,5; 0,99; 0,999.

$$\text{Відповідь: } P_D = 0,9218; N = 4; 17; 24.$$

Задача 8.11. Чому дорівнює ступінь поляризації світла, яке складається із лінійно поляризованого і природного світла у співвідношенні: а) 0,5; б) 1; в) 10.

$$\text{Відповідь: а) } 0,047; \text{ б) } 0,333; \text{ в) } 0,833.$$

Задача 8.12. При яких умовах промінь світла, який падає на бічну грань призми з кутом заломлення 60° , проходить через неї без втрат на відбивання?

Відповідь: Світло повинно бути лінійно поляризованим у площині падіння і на гранях призми повинно бути $R_{\Pi} = 0$. З цих умов випливає, що показник заломлення скла призми повинен бути $n = \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right)^{-1} = 1,732$.

Задача 8.13. Знайдіть кут φ між площинами поляризатора і аналізатора, якщо інтенсивність природного світла, яке пройшло через них, зменшилась: а) в 2 рази; б) в 4 рази; в) в 8 раз; г) в 12 раз.

Відповідь: $\varphi = \arccos \sqrt{2I_A/I_n}$. а) 0° ; б) 45° ; в) 60° ; г) $65^\circ 54'$.

Задача 8.14. Природне світло проходить через поляризатор і аналізатор. Кожен із них відбиває і поглинає 8% падаючого на нього світла. Визначте кут φ між площинами пропускання поляризатора і аналізатора, якщо інтенсивність світла на виході аналізатора становить: а) 40%; б) 30%; в) 20%; г) 9% інтенсивності природного світла.

Відповідь: а) $13^\circ 32'$; б) $32^\circ 39'$; в) $46^\circ 34'$; г) $62^\circ 32'$.

Задача 8.15. Визначте кут повної поляризації для променя, який відбивається від поверхні чорного скла ($n = 1,65$). Яку частину інтенсивності падаючого природного світла відбиває скло? На який кут відносно площини поляризації відбитого променя необхідно повернути площину пропускання поляроїда ($T_p = 0,75$), щоб інтенсивність зменшилась ще в два рази?

Відповідь: $\varepsilon_B = 58^\circ 47'$; $I_R/I_n = 0,107$; $\varphi = 35^\circ 15'$.

Задача 8.16. Кут між площинами поляризатора і аналізатора дорівнює 45° . Як зміниться інтенсивність світла, яке пройшло через них, якщо цей кут зменшити до 30° ? Чому повинен дорівнювати цей кут, щоб інтенсивність на виході аналізатора зменшилася в 4 рази?

Відповідь: Зменшиться в 1,5 рази. $\varphi = 69^\circ 18'$.

Задача 8.17. Лінійно поляризоване світло інтенсивністю 100 Вт/м^2 проходить послідовно через два поляризатора, площини пропускання яких утворюють з площиною поляризації падаючого світла кути α_1 і α_2 (по часовій стрілці уздовж променя). Визначте інтенсивність світла, яке пройшло через систему, коли:

а) $\alpha_1 = 20^\circ$, $\alpha_2 = 50^\circ$; б) $\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 45^\circ$; в) $\alpha_1 = -15^\circ$, $\alpha_2 = 30^\circ$.

Відповідь: $I = I_o \cos^2 \alpha_1 \cos^2(\alpha_2 - \alpha_1)$;

а) $66,22 \text{ Вт/м}^2$; б) $50,0 \text{ Вт/м}^2$; в) $46,65 \text{ Вт/м}^2$.

*Задача 8.18**. Пучок неполяризованого світла проходить послідовно через три поляризатора. Площина пропускання третього поляризатора відносно першого орієнтована під кутом $\beta = 30^\circ$. Визначте кут орієнтації другого поляризатора α , при якому інтенсивність світла на виході системи максимальна. Яка ця інтенсивність?

Відповідь: $\alpha = \frac{\beta}{2} = 15^\circ$; $I_{\max} = \frac{1}{2} I_n \cos^4\left(\frac{\beta}{2}\right) = 0,435 I_n$.

*Задача 19**. Поляризоване по колу світло з інтенсивністю I_c падає на стопу із трьох поляризаторів. Перший і останній із них схрещені, а головна площина середнього утворює кут φ з головною площиною першого. Визначте інтенсивність світла на виході із системи.

Відповідь: $I_3 = \frac{1}{8} I_c \sin^2 \varphi$.

Задача 20. Природне світло проходить через два поляризатори, головні площини яких утворюють кут 45° . Після другого поляризатора світло відбивається від дзеркала і проходить у зворотному напрямку. Визначте відношення інтенсивності світла на вході і виході цієї системи.

Відповідь: $\frac{I_n}{I_4} = \left(\frac{1}{2} \cos^4 45^\circ\right)^{-1} = 8$.

Задача 8.21. Визначте за допомогою формул Френеля ступінь поляризації світла, що відбилось від поверхні скла марки К8, якщо кут падіння світла $\varepsilon_1 = 30^\circ$.

$$\text{Відповідь: } P_R = \frac{R_{\perp} - R_{\parallel}}{R_{\perp} + R_{\parallel}} = \frac{\cos^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2') - \cos^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2')}{\cos^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2') + \cos^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2')} = 0,444.$$

Задача 8.22.* Виведіть формулу для ступеня поляризації світла, що заломлюється на межі “повітря – скло”, якщо промінь світла падає на межу під кутом Брюстера, а скло має показник заломлення n .

$$\text{Відповідь: } P_D = \frac{4n^2 - (n^2 + 1)^2}{4n^2 + (n^2 + 1)^2}.$$

Задача 8.23. Природне світло падає на систему, що складається із трьох послідовно розташованих однакових поляроїдів. Напрямок поляризації середнього поляроїда утворює кут $\alpha = 45^\circ$ з напрямками поляризації других поляроїдів. У скільки разів зменшиться інтенсивність світла в цій системі, якщо у кожному поляроїді втрачається $R_p = 9\%$ світлового потоку за рахунок відбивання та поглинання.

$$\text{Відповідь: } \frac{I_n}{I_3} = \frac{2}{(1 - R_p)^3 \cos^4 \alpha} = 15.$$

Задача 8.24. У скільки разів ослаблюється світло, що проходить два ніколя, якщо у кожному із них втрачається $R_p = 8\%$ світла за рахунок відбивання та поглинання, а площина поляризації ніколів утворює кут $\alpha = 45^\circ$?

$$\text{Відповідь: } \frac{I_n}{I_2} = \frac{2}{(1 - R_p)^2 \cos^2 \alpha} = 4,73.$$

Задача 8.25. На шляху частково поляризованого світла поставили аналізатор. При деякому положенні аналізатора інтенсивність світла, яке пройшло через нього, стала мінімальною. Коли площину пропускання аналізатора повернули на кут $\alpha = 30^\circ$, інтенсивність світла збільшилась у два рази. Визначте ступінь поляризації частково поляризованого світла.

Вказівка. Скористайтесь прикладом 8.4.

Відповідь: $I_{\max} = 0,5I_0 + I_{lp} = 1,167I_0$; $I_{\min} = 0,5I_0$; $P = 0,4$.

Задача 8.26.* Суміш лінійно поляризованого і поляризованого по колу світла проходить через аналізатор. При повороті аналізатора на кут $\varphi = 30^\circ$ від положення, яке відповідає максимальній інтенсивності світла, що пройшло через нього, інтенсивність зменшилась на 20%. Знайдіть відношення інтенсивностей лінійно поляризованого і поляризованого по колу світла.

Відповідь: $\frac{I_l}{I_c} = 4$.

Задача 8.27. Ступінь поляризації частково поляризованого світла $P = 0,25$. Знайдіть відношення інтенсивності поляризованої складової до інтенсивності природньої складової.

Відповідь: $\frac{I_l}{I_n} = \frac{1}{3}$.

Задача 8.28. На ніколь падає частково поляризоване світло, ступінь поляризації якого дорівнює 0,5. Спочатку ніколь розташовано так, що інтенсивність світла, яке пройшло через нього, стала максимальною. У скільки разів зменшиться інтенсивність світла, якщо площину пропускання ніколя повернути на кут 60° ?

Вказівка. Скористайтесь прикладом 8.4.

Відповідь: Зменшиться в 1,5 рази.

Задача 8.29. Природне світло проходить через поляризатор і аналізатор. Кожен із них відбиває і поглинає 8% падаючого на нього світла. Визначте кут φ

між площинами пропускання поляризатора і аналізатора, якщо інтенсивність світла на виході аналізатора склала 30% інтенсивності природного світла.

$$\text{Відповідь: } \varphi = \arccos \sqrt{\frac{2I'}{I_n T_P T_A}} = 32,7^\circ.$$

Задача 8.30. Пучок неполяризованого монохроматичного світла ($\lambda = 0,589$ мкм) падає на поверхню одновісного кристалу перпендикулярно до його оптичної вісі. Знайдіть довжини хвиль і швидкості розповсюдження звичайного і незвичайного променів у кристалі: а) ісландського шпату ($n_o = 1,658$, $n_e = 1,486$); б) кварцу ($n_o = 1,54$, $n_e = 1,55$). Який колір мають ці промені у кристалі?

Відповідь: а) $\lambda_o = 0,355$ мкм; $\lambda_e = 0,396$ мкм; $v_o = 1,81 \cdot 10^{10}$ см/с;

$v_e = 2,02 \cdot 10^{10}$ см/с; б) $\lambda_o = 0,383$ мкм; $\lambda_e = 0,380$ мкм;

$v_o = 1,95 \cdot 10^{10}$ см/с; $v_e = 1,93 \cdot 10^{10}$ см/с; в) жовтий.

Задача 8.31. Пучок природного світла падає під кутом -50° на пластинку із одновісного додатного кристала. Користуючись принципом Гюйгенса, побудуйте наближено напрямки розповсюдження звичайного і незвичайного променів: а) коли оптична вісь лежить у площині падіння і паралельна поверхні пластинки; б) коли оптична вісь лежить у площині падіння під кутом 45° до поверхні пластинки; в) коли оптична вісь перпендикулярна до площини падіння і паралельна поверхні пластинки.

Вказівка: Скористайтесь прикладом 8.6.

Задача 8.32. Пучок природного світла ($\lambda = 0,589$ мкм) нормально падає на пластинку із ісландського шпату ($n_o = 1,658$, $n_e = 1,486$) товщиною $h = 0,03$ мм, яка вирізана паралельно оптичній осі. Визначте: а) оптичну різницю ходу і різницю фаз звичайного і незвичайного промінів на виході пластинки; б) найменшу товщину пластинки, при якій вона стає чверть хвильовою;

в) найменшу товщину пластинки, при якій лінійно поляризоване світло не змінюється при проходженні пластинки.

Відповідь: а) $\Delta d = (n_o - n_e)h = 5,16$ мкм; $\Delta\varphi = k(n_o - n_e)h = 55$ рад;

$$\text{б) } d_{\min} = \frac{\lambda}{4(n_o - n_e)} = 0,86 \text{ мкм}; \text{ в) } d_{\min} = \frac{\lambda}{(n_o - n_e)} = 3,42 \text{ мкм}.$$

Задача 8.33*. Дві однопроменеві поляризаційні призми з повітряним прошарком виготовлені із ісландського шпату ($n_o = 1,658$, $n_e = 1,486$). В першій призмі оптична вісь перпендикулярна до площини падіння, в другій – паралельна (рис. 8.31). а) Як буде поляризоване світло на виході призм? б) Яка призма і в скільки разів пропускає більше світла? в) В яких границях повинен знаходитись кут α , щоб із призми виходив тільки один промінь поляризованого світла?

Відповідь: а) Із призми виходить незвичайний промінь: із першої – поляризований горизонтально, а із другої – вертикально. б) Друга призма пропускає більше світла в 1,92 рази. в) $n_o^{-1} < \sin \alpha < n_e^{-1}$; $37^\circ 06' < \alpha < 42^\circ 18'$.

Задача 8.34. Двохпроменева поляризаційна призма Волластона, яка виготовлена із ісландського шпату ($n_o = 1,658$, $n_e = 1,486$), має кут $\alpha = 15^\circ$ (рис. 8.32). Розрахуйте, на який кут будуть розведені звичайний і незвичайний промені.

Відповідь: $\varphi = 2(n_o - n_e) \operatorname{tg} \alpha = 5^\circ 17'$.

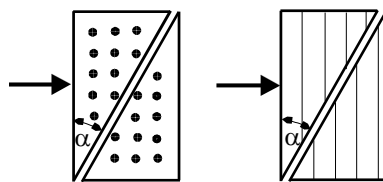


Рис. 8.31. До задачі 8.33

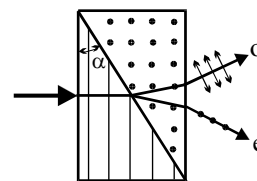


Рис. 8.32. До задачі 8.34

Задача 8.35. На кварцову пластинку, яка вирізана паралельно оптичній осі, нормально падає лінійно поляризоване монохроматичне світло ($\lambda = 0,5$ мкм, $n_o = 1,5442$, $n_e = 1,5533$). При якій умові і при якій мінімальній

товщині пластинки світло, яке виходить із неї: а) буде циркулярно поляризоване; б) не зазнає ніяких змін?

Відповідь: а) Кут між площиною поляризації променя і оптичною віссю пластинки повинен бути 45° ; $d_{\min} = 13,7$ мкм. б) Кут між площиною поляризації променя і оптичною віссю пластинки може бути довільним; $d_{\min} = 54,9$ мкм.

Задача 8.36. Циркулярно поляризоване світло, яке проходить через кварцову фазову пластинку, розглядається через аналізатор, площина пропускання якого повернута на кут α відносно оптичної осі пластинки. Визначте: а) інтенсивність світла на виході системи; б) при якому куті α ця інтенсивність буде максимальною і мінімальною?

Відповідь: а) $I = I_0(1 + \sin 2\alpha \sin \Delta\varphi)$; б) кварц додатній кристал ($\Delta\varphi > 0$); при $\alpha_1 = \pi/4$ $I = I_{\max}$, при $\alpha_2 = 3\pi/4$ $I = I_{\min}$.

Задача 8.37. Кварцова фазова пластинка ($n_o = 1,54$, $n_e = 1,55$) товщиною 0,045 мм встановлена між схрещеними поляризатором і аналізатором. На систему нормально падає природне монохроматичне світло ($\lambda = 0,6$ мкм). Знайдіть частину світла, яке пройшло через систему, якщо кут α між оптичною віссю пластинки і площиною пропускання поляризатора дорівнює: а) 30° ; б) 50° .

Вказівка: Скористайтесь формулою (8.35).

Відповідь: $\frac{I_{\Sigma\perp}}{I_n} = \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}$; а) 0,188; б) 0,242.

Задача 8.38.* Клинь із одновісного кристала розташований на шляху монохроматичного світла ($\lambda = 0,5$ мкм), яке поляризоване по колу. Оптична вісь клину паралельна його ребру. Світло, яке пройшло через клин, розглядається через аналізатор, площина пропускання якого утворює кут в 45° з ребром клина. Визначте число світлих інтерференційних смуг, які спостерігаються на поверхні

клин, максимальна товщина якого 0,05 см, коли клин виготовлений із: а) кварцу; б) ісландського шпату.

Відповідь: $I = 2I_0(1 + \cos\Delta\varphi)$; $m = \frac{d_{\max}|n_e - n_o|}{\lambda}$; а) 10; б) 172.

Задача 8.39. Кварцова фазова пластинка ($n_e - n_o = 0,01$) товщиною 0,07 мм розташована між поляризатором і аналізатором так, що кут $\alpha = 45^\circ$. Система освітлюється білим світлом. Якого кольору буде світло на виході, коли аналізатор і поляризатор: а) паралельні; б) схрещені?

Відповідь: а) $\lambda = 0,7$ мкм, червоний колір; б) залишковий синьо-зелений.

Задача 8.40. Кварцова фазова пластинка ($n_e - n_o = 0,009$) розташована між схрещеними поляризатором і аналізатором так, що кут $\alpha = 45^\circ$. Визначте мінімальну товщину пластинки, при якій одна лінія водню з $\lambda_1 = 6563 \text{ \AA}$ буде сильно ослабленою, а друга з $\lambda_2 = 4102 \text{ \AA}$ буде мати максимальну інтенсивність.

Відповідь: 0,07 мм.

Задача 8.41. Кварцова пластина, яка вирізана паралельно оптичній осі, встановлена між схрещеними поляризаторами так, що її оптична вісь утворює кут $\alpha = 45^\circ$ з площинами поляризації поляризаторів. При якій мінімальній товщині пластини світло з довжиною хвилі $\lambda_1 = 643$ нм буде проходити через систему з максимальною інтенсивністю, а світло з $\lambda_2 = 546$ нм буде сильно ослаблене? Різницю показників заломлення вважати рівною $n_e - n_o = 0,009$.

Відповідь: $d = 0,25$ мм при $m = 3$.

Задача 8.42. Вузкий промінь природного світла з $\lambda = 589$ нм падає нормально на поверхню призми Волластона, яка зроблена із ісландського шпату. Оптичні осі обох частин призми взаємно перпендикулярні, як на рис. 8.32. Знайдіть кут між напрямками променів за призмою, якщо заломлюючий кут половини призми Волластона дорівнює 30 градусам.

Відповідь: $\alpha \approx 11^\circ$.

*Задача 4.43**. Між двома поляризаторами, які схрещені, розмістили кварцовий клин з заломлюючим кутом $\theta = 3,5^\circ$. Оптична вісь клина паралельна його ребру і складає кут 45 градусів з площиною пропускання поляризаторів. При проходженні через цю систему світла з $\lambda = 550$ нм спостерігається система інтерференційних смуг. Ширина кожної смуги $\Delta x = 1,0$ мм. Визначте різницю показників заломлення кварцу для звичайного і незвичайного променів вказаної довжини хвилі.

Відповідь: $\Delta n = \frac{\lambda}{\theta \cdot \Delta x} = 0,009$.

Задача 8.44. Розрахуйте параметри вектору Стокса для вертикально-право еліптично поляризованого світла, в якому для осей виконується умова: $2a = b$, $r = S_0 = 1$.

Відповідь: $S_0 = 1; S_1 = 0,6; S_2 = 0; S_3 = 0$.

Задача 8.45. Розрахуйте параметри вектору Стокса для горизонтально-лінійно поляризованого світла, в якому $r = S_0 = 1$.

Відповідь: $S_0 = 1; S_1 = 1; S_2 = 0; S_3 = 0$.

РОЗДІЛ 9

ОПТИЧНО АНІЗОТРОПНІ СЕРЕДОВИЩА

Анізотропія – залежність фізичних властивостей (механічних, оптичних, електричних і т.п.) від напрямку.

Оптична анізотропія – залежність оптичних властивостей середовища (показника заломлення) від напрямку розповсюдження оптичного випромінювання і його поляризації [8].

9.1. Розповсюдження світла в анізотропних середовищах

В ізотропних середовищах напрямки коливань вектора напруженості електричного поля \vec{E} світлової хвилі і вектора електричної індукції \vec{D} співпадають, тобто

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \quad (9.1)$$

де ε_0 – електрична стала; $\varepsilon = n^2$ – діелектрична проникність; n – показник заломлення середовища.

В анізотропному середовищі напрямки векторів \vec{E} і \vec{D} не співпадають. Однак в такому середовищі існують три напрямки, уздовж яких ці вектори співпадають. Ці напрямки називаються *головними осями тензора діелектричної проникності*. Уздовж головних осей справедливі співвідношення

$$D_x = \varepsilon_0 \varepsilon_x E_x; \quad D_y = \varepsilon_0 \varepsilon_y E_y; \quad D_z = \varepsilon_0 \varepsilon_z E_z. \quad (9.2)$$

Параметри $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ називаються *головними значеннями діелектричної проникності* кристала. Для ізотропного середовища $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon$. Одновісний кристал ісландського шпату має діелектричні проникності $\varepsilon_x = \varepsilon_y = n_o^2$ і $\varepsilon_z = n_e^2$.

Випромінювання від точкового джерела S в ізотропному середовищі розповсюджується в усіх напрямках з однаковою швидкістю. Тому для такого

середовища хвильова поверхня являє собою сферу, а напрямок розповсюдження променя \vec{S} співпадає з напрямком розповсюдження хвильової поверхні \vec{N} (рис. 9.1,а), тобто $\vec{S} \parallel \vec{N}$.

Для анізотропного середовища швидкість світла залежить від напрямку розповсюдження і тому хвильовий фронт буде відмінний від сферичної поверхні. В цьому випадку напрямок розповсюдження променя \vec{S} не співпадає з напрямком розповсюдження хвильової поверхні \vec{N} (рис. 9.1,б), тобто $\vec{S} \nparallel \vec{N}$. Тому в анізотропних середовищах розрізняють швидкість по променю v_S і швидкість по нормалі до хвильової поверхні v_N .

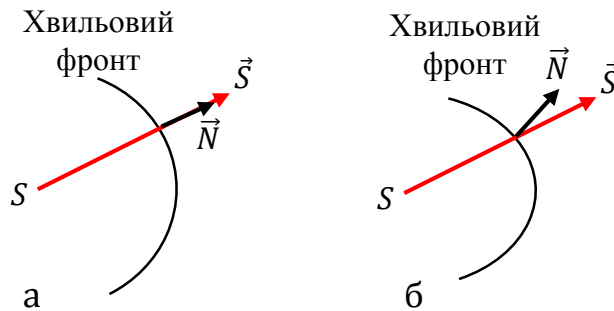


Рис. 9.1. Розповсюдження світла: а – в ізотропному середовищі; б – в анізотропному середовищі

9.2. Рівняння хвильових нормалей і променеве рівняння

Для визначення швидкостей по нормалі v_N і по променю v_S використовують променеве рівняння і рівняння по нормалі.

Напрямок розповсюдження хвильової поверхні \vec{N} будемо задавати за допомогою направляючих косинусів або складових вектору

$$\vec{N} = \cos\alpha\vec{x}_0 + \cos\beta\vec{y}_0 + \cos\gamma\vec{z}_0 = \{N_x, N_y, N_z\}, \quad (9.3)$$

а напрямок розповсюдження світлової енергії по променю – вектором $\vec{S} = \{S_x, S_y, S_z\}$.

Із рівнянь Максвелла для анізотропного середовища можна отримати рівняння хвильових нормалей

$$\frac{N_x^2}{v_x^2 - v_N^2} + \frac{N_y^2}{v_y^2 - v_N^2} + \frac{N_z^2}{v_z^2 - v_N^2} = 0, \quad (9.4)$$

де $v_x = \frac{c}{n_x}$, $v_y = \frac{c}{n_y}$, $v_z = \frac{c}{n_z}$ – параметри анізотропного середовища, які визначають швидкість розповсюдження світла уздовж головних діелектричних осей кристала.

Квадратичне рівняння (9.4) має два розв'язки v'_N і v''_N , які визначають рух хвильової поверхні уздовж вектора \vec{N} , заданого компонентами $\{N_x, N_y, N_z\}$. При цьому вектор електричної індукції \vec{D} світлового поля буде перпендикулярним до вектора \vec{N} ($\vec{D} \perp \vec{N}$).

Аналогічним чином можна отримати *променеве рівняння*

$$\frac{v_x^2 S_x^2}{v_S^2 - v_x^2} + \frac{v_y^2 S_y^2}{v_S^2 - v_y^2} + \frac{v_z^2 S_z^2}{v_S^2 - v_z^2} = 0. \quad (9.5)$$

Квадратичне рівняння (9.5) має два розв'язки v'_S і v''_S , які визначають швидкості розповсюдження променя уздовж вектора \vec{S} , заданого компонентами $\{S_x, S_y, S_z\}$. При цьому вектор напруженості електричного поля \vec{E} світлової хвилі буде перпендикулярним до вектора \vec{S} ($\vec{E} \perp \vec{S}$).

9.3. Еліпсоїд хвильових нормалей і променевий еліпсоїд

Швидкості v'_N, v''_N і v'_S, v''_S можна також визначити за допомогою допоміжних поверхонь, які називаються еліпсоїдом хвильових нормалей і променевим еліпсоїдом.

Для отримання рівняння цих поверхонь використаємо формулу для щільності електромагнітної енергії в анізотропному середовищі, яка в системі Гауса визначається як

$$\omega = \frac{1}{8\pi} (\vec{D} \vec{E}) = \frac{1}{8\pi} (D_x E_x + D_y E_y + D_z E_z), \quad (9.6)$$

де вектори електричної індукції \vec{D} і напруженості \vec{E} мають складові, які пов'язані між собою співвідношеннями (9.2)

$$D_x = \varepsilon_x E_x; D_y = \varepsilon_y E_y; D_z = \varepsilon_z E_z. \quad (9.7)$$

Використовуючи (9.7) зробимо заміну змінних в (9.6) $E_i = D_i / \varepsilon_i$:

$$\omega = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{D_x^2}{\varepsilon_x} + \frac{D_y^2}{\varepsilon_y} + \frac{D_z^2}{\varepsilon_z} \right). \quad (9.8)$$

Зробимо також заміну змінних в (9.8) $x_i = D_i / \sqrt{8\pi\omega}$ з урахуванням того, що $\varepsilon_i = n_i^2$. Тоді рівняння (9.8) матиме вигляд

$$\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1. \quad (9.9)$$

Рівняння (9.9) описує еліпс з півосями n_x, n_y, n_z і називається *еліпсоїдом хвильових нормалей*.

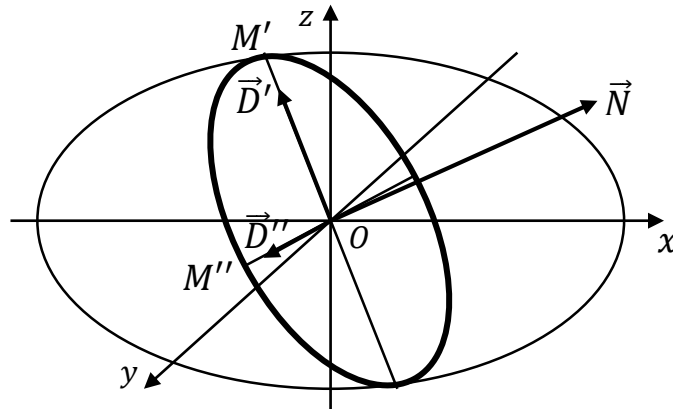


Рис. 9.2. Метод визначення швидкості розповсюдження хвильової поверхні в анізотропному середовищі

Використовуючи рівняння еліпсоїда (9.9) визначимо швидкості v'_N і v''_N уздовж довільного напрямку \vec{N} (рис. 9.2). Проведемо через початок координат площину, перпендикулярну вектору \vec{N} . Ця площина в перетині з еліпсоїдом (9.9) утворює еліпс, який має напівосі OM' і OM'' , які дорівнюють показникам заломлення n' і n'' . Вимірявши відрізки OM' і OM'' , визначаємо швидкості $v'_N = c/n'$ і $v''_N = c/n''$. Дві світлові хвилі, що поширюються із швидкістю v'_N і v''_N

будуть лінійно поляризованими, для яких вектори електричної індукції \vec{D}' і \vec{D}'' паралельні напівосям еліпса OM' і OM'' .

Аналогічним чином, використовуючи співвідношення (9.6) і (9.7), можна отримати *рівняння променевого еліпсоїда*:

$$\varepsilon_x x^2 + \varepsilon_y y^2 + \varepsilon_z z^2 = 1, \quad (9.10)$$

напівосі якого дорівнюють $1/\sqrt{\varepsilon_x}$, $1/\sqrt{\varepsilon_y}$, $1/\sqrt{\varepsilon_z}$.

9.4. Променева поверхня і поверхня нормалей

Нехай в анізотропному середовищі знаходиться точкове джерело світла, що випромінює електромагнітні хвилі, які мають швидкості v'_S і v''_S . За час t світло пройде відстані $v'_S t$ і $v''_S t$, які утворюють *променеві поверхні* або *хвильові поверхні*.

Аналогічно можна побудувати *поверхні нормалей* для швидкостей v'_N і v''_N .

Розглянемо променеву поверхню у двовісних кристалах, використовуючи променеве рівняння (9.5).

$$\frac{v_x^2 S_x^2}{v_S^2 - v_x^2} + \frac{v_y^2 S_y^2}{v_S^2 - v_y^2} + \frac{v_z^2 N_z^2}{v_S^2 - v_z^2} = 0. \quad (9.11)$$

Зробимо в цьому рівнянні заміну змінних

$$x = S_x v_s, \quad y = S_y v_s, \quad z = S_z v_s. \quad (9.12)$$

При цьому згідно (9.3) маємо рівняння

$$x^2 + y^2 + z^2 = v_S^2 (S_x^2 + S_y^2 + S_z^2) = v_S^2. \quad (9.13)$$

Після підстановки (9.12) до (9.11) маємо

$$\frac{x^2 v_x^2}{v_S^2 - v_x^2} + \frac{y^2 v_y^2}{v_S^2 - v_y^2} + \frac{z^2 v_z^2}{v_S^2 - v_z^2} = 0. \quad (9.14)$$

Розглянемо рівняння (9.13) і (9.14) в площинах xu , uz , xz .

В площині xu $z = 0$, а рівняння (9.14) має два розв'язки:

$$\left(\frac{x^2 v_x^2}{v_S^2 - v_x^2} + \frac{y^2 v_y^2}{v_S^2 - v_y^2} \right) (v_S^2 - v_z^2) = 0. \\ v_S^2 = x^2 + y^2 = v_z^2; \quad (9.15)$$

$$\frac{x^2 v_x^2}{v_S^2 - v_x^2} + \frac{y^2 v_y^2}{v_S^2 - v_y^2} = 0. \quad (9.16)$$

Рівняння (9.15) являє собою рівняння кола з радіусом v_z .

Зробимо ряд перетворень в рівнянні (9.16).

$$\begin{aligned} x^2 v_x^2 (v_S^2 - v_y^2) + y^2 v_y^2 (v_S^2 - v_x^2) &= 0. \\ x^2 v_x^2 v_S^2 + y^2 v_y^2 v_S^2 &= x^2 v_x^2 v_y^2 + y^2 v_x^2 v_y^2 = v_x^2 v_y^2 (x^2 + y^2) = v_x^2 v_y^2 v_S^2. \\ \frac{x^2}{v_y^2} + \frac{y^2}{v_x^2} &= 1. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Співвідношення (9.17) є рівнянням еліпса з півосями v_y і v_x . На рис. 9.3,а зображені коло і еліпс для випадку, коли $v_x > v_y > v_z$.

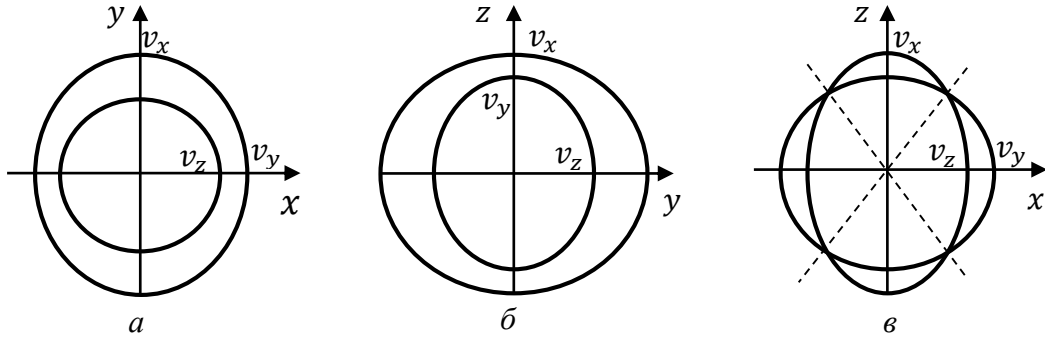


Рис. 9.3. Переріз променевої поверхні анізотропного середовища в площині:
а – xy ; б – yz ; в – xz

Аналогічно можна розглянути променеви поверхню в площинах xz і yz .

Коло і еліпс в площині yz зображені на рис. 9.3,б і описуються рівняннями

$$y^2 + z^2 = v_x^2; \quad (9.18)$$

$$\frac{y^2}{v_z^2} + \frac{z^2}{v_y^2} = 1. \quad (9.19)$$

Коло і еліпс в площині xz зображені на рис. 9.3,в і описуються рівняннями

$$x^2 + z^2 = v_y^2; \quad (9.20)$$

$$\frac{x^2}{v_z^2} + \frac{z^2}{v_x^2} = 1. \quad (9.21)$$

Із рис. 9.3,в видно, що в площині xz коло перетинає еліпс в 4-х точках. Лінії, проведені через протилежні точки, утворюють дві оптичні осі кристала.

Розглянемо променеву поверхню в одновісному кристалі, для якого $v_x = v_y > v_z$. Такі кристали називаються *додатними*. Тоді звичайний промінь має променеву поверхню у вигляді сфери, а незвичайний промінь – у вигляді еліпсоїда обертання навколо осі \vec{oz} (рис. 9.4,а). В цьому випадку сфера дотикається еліпсоїду у 2-х точках уздовж осі \vec{oz} , яка називається *оптичною віссю кристала*.

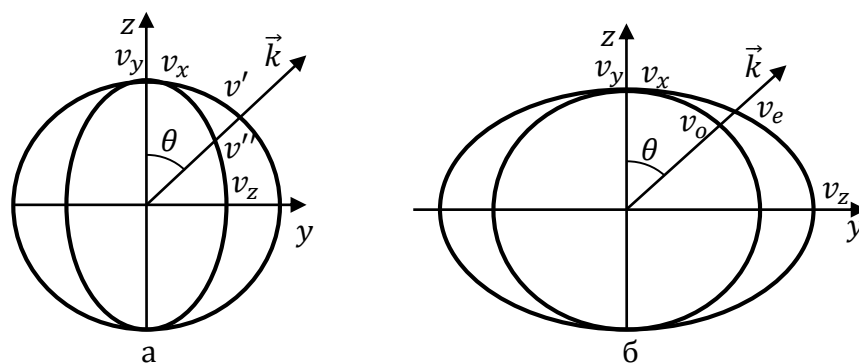


Рис. 9.4. Хвильові поверхні звичайного і незвичайного променів в:
а – додатному кристалі; б – від’ємному кристалі

Додатний кристал (наприклад, кварц) має показники заломлення

$$n_o = \frac{c}{v_x} < n_e = \frac{c}{v_z}. \quad (9.22)$$

В одновісних кристалах променева поверхня для звичайного променя є сфера. При цьому звичайний промінь поляризований у площині, перпендикулярній до головної площини кристала, тобто $\vec{E}_o \perp \vec{oz}$ для любого напрямку розповсюдження променя. Тому значення показника заломлення n_o не залежать від напрямку розповсюдження світла.

Незвичайний промінь поляризований в головній площині кристала. Тому вектор \vec{E}_o утворює певний кут θ з оптичної віссю кристала \vec{oz} , який може змінюватись в межах від 0° до 90° . Це означає, що в залежності від напрямку розповсюдження променя показник заломлення незвичайного променя змінюється в межах

$$\frac{c}{v_x} \leq n_e(\theta) \leq \frac{c}{v_z}. \quad (9.23)$$

Знайдемо залежність фазової швидкості в одновісному кристалі від напрямку розповсюдження. Рівняння хвильових нормалей (9.4) при $v_z = v_e$ і $v_x = v_y = v_o$ можна представити у вигляді [5]

$$(v^2 - v_o^2)[(N_x^2 + N_y^2)(v^2 - v_o^2) + N_z^2(v^2 - v_e^2)] = 0. \quad (9.24)$$

Напрямок нормалі \vec{N} зручно виразити через кут θ з віссю \vec{oZ} . Для площини yz із рис. 9.4,а знаходимо, що $N_y = \sin \theta$, $N_z = \cos \theta$. Тоді рівняння (9.24) матиме вигляд

$$(v^2 - v_o^2)[\sin^2 \theta (v^2 - v_o^2) + \cos^2 \theta (v^2 - v_e^2)] = 0. \quad (9.25)$$

Рівняння (9.25) має два розв'язки:

$$v' = v_o \text{ і } v''(\theta) = \sqrt{v_o^2 \cos^2 \theta + v_e^2 \sin^2 \theta}. \quad (9.26)$$

В кристалі ісландського шпату, який є від'ємним кристалом, справедливі співвідношення

$$v_x = v_y < v_z; \quad n_o = \frac{c}{v_x} = 1,658 > n_e > \frac{c}{v_z} = 1,486. \quad (9.27)$$

В цьому випадку сферична променева поверхня знаходиться всередині еліпсоїда обертання (променевої поверхні незвичайного променя) і має дві точки дотику уздовж оптичної осі кристала \vec{oZ} (рис. 9.4,б).

Із розглянутої теорії анізотропних середовищ одновісних кристалів маємо:

1. Падаючий промінь природнього світла утворює всередині кристала два променя (звичайний і незвичайний).
2. Звичайний промінь має постійні фазову швидкість v_o і показник заломлення n_o , а для незвичайного променя ці параметри залежать від напрямку розповсюдження променя.
3. Променева (фазова) поверхня звичайного променя має форму сфери, а для незвичайного променя – еліпсоїда обертання.

4. Звичайний промінь лінійно поляризований у площині перпендикулярній до головної площини кристала, а незвичайний промінь – у головній площині кристала.

5. Розглянуте явище називається *подвійним променезаломленням*.

9.5. Фотопружність

Фотопружність – п'єзооптичний ефект, який проявляється у створенні оптичної анізотропії в ізотропних твердих тілах під дією механічних навантажень [8]. Фотопружність була відкрита німецьким вченим Т.І. Зеєбеком в 1823 році і англійським вченим Д. Брюстером в 1816 році.

Фотопружність – це залежність діелектричної проникності речовини від деформації, яка проявляється у вигляді подвійного променезаломлення та дихроїзму, що виникає під дією механічних навантажень. При одновісному розтягуванні або стисканні ізотропне тіло набуває властивостей оптично одновісного кристала з оптичною віссю, що паралельна осі розтягування або стискання.

Для малих одновісних розтягувань або стискань виконується співвідношення Брюстера

$$\Delta n = n_o - n_e = k_f P, \quad (9.26)$$

де Δn – величина подвійного променезаломлення; k_f – коефіцієнт пропорційності; $P = F/S$ – тиск на поверхню досліджуваного зразка площею S ; F – сила, що діє на зразок (рис. 9.5).

Для дослідження явища фотопружності можна використати установку, схема якої наведена на рис. 9.5. Природне світло \vec{E}_n перетворюється поляризатором N_1 в лінійно поляризоване \vec{E}_1 , яке нормально падає на ізотропний прозорий зразок (пластинку) товщиною d . Під дією зовнішньої сили \vec{F} ізотропний зразок стає анізотропним одновісним кристалом. В результаті

подвійного променезаломлення на виході зразка утворюються звичайний \vec{E}_o і незвичайний \vec{E}_e промені, які формують еліптично поляризоване світло. Різниця фаз між цими променями

$$\Delta\varphi = k(n_o - n_e)d = \frac{2\pi}{\lambda} k_f \frac{F}{S} d. \quad (9.27)$$

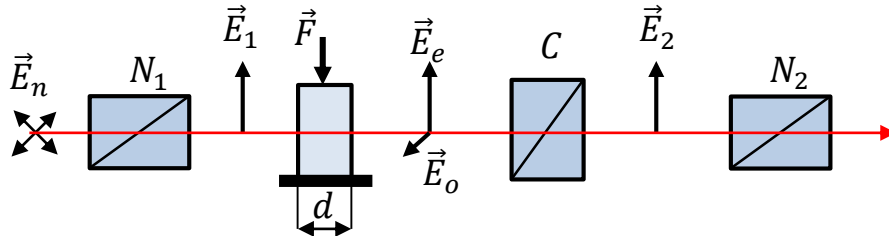


Рис. 9.5. Схема установки для дослідження фотопружності

Властивості цього світла досліджуються за допомогою компенсатора Бабіне C і аналізатора N_2 . Явище фотопружності широко використовується для дослідження внутрішньої механічної напруженості або механічних властивостей прозорих об'єктів.

9.6. Лінійний електрооптичний ефект Поккельса

Ефект Поккельса – це лінійний електрооптичний ефект, який визиває зміну показника заломлення світла в кристалах, що знаходяться в електричному полі, пропорційну напруженості електричного поля [8]. Як наслідок цього ефекту в кристалах виникає подвійне променезаломлення або змінюється його величина. Ефект Поккельса спостерігається тільки у п'єзоелектриків. Цей ефект був виявлений в 1894 році німецьким фізиком Ф. Поккельсом.

Математично ефект Поккельса описується формулою

$$\Delta n = n_o - n_e = pE_0, \quad (9.28)$$

де E_0 – напруженість зовнішнього електричного поля, $E_0 = U_0/l$; U_0 і l – напруга і відстань між пластинами плоского конденсатора, в середині якого знаходиться кристал (рис. 9.6).

Цей ефект широко використовується для модуляції світла за допомогою *комірки Поккельса*, схема якої наведена на рис. 9.6. Комірка складається із двох схрещених поляризаторів N_1 і N_2 , між яким знаходиться кристал, що має значний ефект Поккельса. Природне світло \vec{E}_n перетворюється поляризатором N_1 в лінійно поляризоване \vec{E}_1 , яке нормально падає на ізотропний прозорий кристал (пластинку) товщиною d .

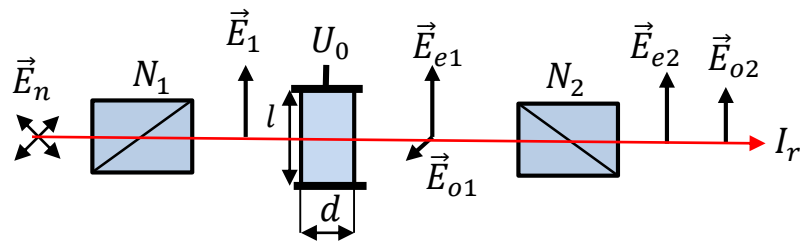


Рис. 9.6. Комірка Поккельса

Кристал розташований між плоскими пластинами конденсатора, які знаходяться під дією зовнішньої напруги U_0 . Під дією цієї напруги всередині конденсатора виникає електричне поле з напруженістю $E_0 = U_0/l$. Під дією зовнішнього електричного поля, ізотропний кристал стає анізотропним одновісним кристалом. В результаті подвійного променезаломлення на виході кристала утворюються звичайний \vec{E}_{o1} і незвичайний \vec{E}_{e1} промені, які проходять через аналізатор N_2 і утворюють два променя \vec{E}_{o2} і \vec{E}_{e2} , що поляризовані в одній площині аналізатора.

Якщо зовнішня напруга відсутня, тобто $U_0 = 0$, то світло не проходить через комірку Поккельса, так як поляризатори схрещені ($\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2$), то згідно закону Малюса (8.2) $I_r = 0$ (рис. 9.7).

Якщо до конденсатора прикласти напругу U_0 , то кристал стане анізотропним і на виході утворюються звичайний \vec{E}_{o1} і незвичайний \vec{E}_{e1} промені, між якими буде різниця фаз

$$\Delta\varphi = k(n_o - n_e)d = \frac{2\pi}{\lambda} p \frac{U_0}{l} d. \quad (9.29)$$

Площина поляризації променя \vec{E}_1 після поляризатора N_1 утворює кут $\alpha = 45^\circ$ з напрямком вектора напруженості електричного поля \vec{E}_0 всередині конденсатора (рис. 9.8). В цьому випадку на виході кристала утворюються два лінійно поляризовані промені однакової амплітуди $|\vec{E}_{o1}| = |\vec{E}_{e1}|$.

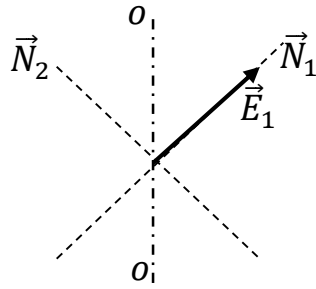


Рис. 9.7. Векторна діаграма перетворення світла в комірці Поккельса, коли $U_0 = 0$

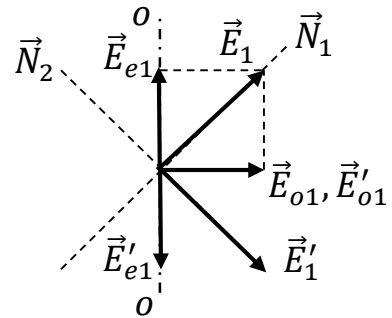


Рис. 9.8. Векторна діаграма перетворення світла в комірці Поккельса, коли $U_0 \neq 0$

Нехай зовнішня напруга U_0 має величину, яка забезпечує згідно (9.29) різницю фаз $\Delta\varphi = \pi$. Тоді на виході кристала утворюється лінійно поляризований промінь, вектор \vec{E}'_1 якого утворює кут 90° з вектором \vec{E}_1 , тобто його площина поляризації співпадає з площиною пропускання поляризатора N_2 ($\vec{E}'_1 \parallel \vec{N}_2$). В цьому випадку згідно закону Малюса (8.2) результуюча інтенсивність світла на виході комірки Поккельса буде мати максимальне значення $I_r = I_{max}$.

Зробимо ряд зауважень стосовно ефекту Поккельса:

1. Комірка Поккельса широко використовується в LCD моніторах і модуляторах лазерного випромінювання в волоконно оптичних лініях зв'язку.
2. Ефект Поккельса мало інерційний з постійною часу 10^{-10} секунди, що дозволяє передавати великий об'єм інформації при модуляції світла.

3. Крім розглянутого вище поперечного ефекту Поккельса існує поздовжній ефект Поккельса, коли напрямок напруженості зовнішнього електричного поля \vec{E}_0 співпадає з напрямком розповсюдження світла.

4. Величину напруги U_0 на конденсаторі можна значно зменшити, якщо відстань l між пластинами конденсатора становить десятки мікрометрів.

9.7. Квадратичний електрооптичний ефект Керра

Квадратичний електрооптичний ефект Керра – це виникнення подвійного променезаломлення в оптично ізотропних речовинах (рідинах, склі, кристалах з центром симетрії) під дією однорідного електричного поля [8]. Цей ефект був відкритий шотландським фізиком Дж. Керрі в 1875 році. Розташована в електричному полі ізотропна речовина стає анізотропною, набуваючи властивостей одновісного кристала, вісь якого направлена уздовж поля.

Можлива схема спостереження ефекту Керрі наведена на рис. 9.9. Між схрещеними поляризатором N_1 і аналізатором N_2 знаходиться комірка Керра (плоский конденсатор, заповнений прозорою ізотропною речовиною). За відсутності електричного поля світло перетворюється поляризатором N_1 в лінійно поляризоване, яке не проходить через схрещений аналізатор N_2 .

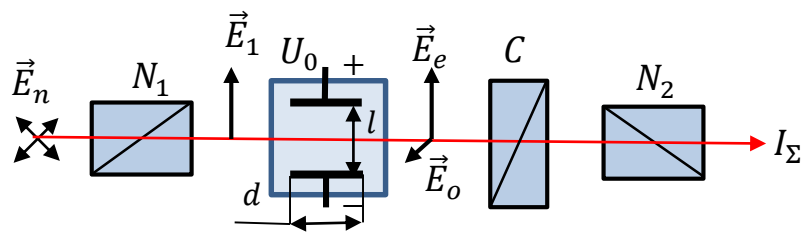


Рис. 9.9. Схема для дослідження ефекту Керра

При наявності електричного поля лінійно поляризована хвиля \vec{E}_1 в речовині розпадається на дві лінійно поляризовані хвилі \vec{E}_e (незвичайна хвиля, що поляризована уздовж електричного поля) і \vec{E}_o (звичайна хвиля, що поляризована перпендикулярно електричному полю). Ці хвилі мають в речовині

різні швидкості розповсюдження, внаслідок чого світло на виході із комірки Керра становиться еліптично поляризованим, властивості якого досліджуються за допомогою компенсатора Бабіне C і аналізатора N_2 . Згідно ефекту Керра величина подвійного променезаломлення

$$\Delta n = n_o - n_e = bnE_0^2, \quad (9.30)$$

де b – коефіцієнт пропорційності; n – показник заломлення речовини при відсутності поля; E_0 – напруженість зовнішнього електричного поля. При цьому різниця фаз між звичайним і незвичайним променями визначається як

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d\Delta n = 2\pi dBE_0^2, \quad (9.30)$$

де $B = bn/\lambda$ – постійна Керра.

9.8. Магнітооптичні явища

Магнітооптика – це розділ фізики, який вивчає зміни оптичних властивостей речовини під дією магнітного поля. Основні магнітооптичні явища пов'язані з ефектом Зеємана, який проявляється в розщепленні магнітним полем енергетичних спектральних ліній атомів. Особливістю магнітооптичних явищ є те, що в магнітному полі, крім звичайної оптичної анізотропії, яка виникає під дією електричного поля, виникає також циркулярна анізотропія, пов'язана з нееквівалентністю двох напрямків обертання в площині, перпендикулярній полю.

В магнітооптиці розглядають три магнітооптичні ефекти: Фарадея, Зеємана і Коттона – Муттона.

1. *Ефект Фарадея* проявляється в обертанні площини поляризації лінійно поляризованого світла, що розповсюджується в речовині уздовж постійного магнітного поля, в якому знаходиться речовина. Цей ефект був відкритий в 1845 році англійським фізиком М. Фарадеєм.

2. *Ефект Зеємана* – це розщеплення енергетичних рівнів атомів або молекул під дією зовнішнього магнітного поля, що проявляється в розщепленні

спектральних ліній. Цей ефект був відкритий в 1896 році голландським фізиком П. Зеєманом.

В залежності від напрямку магнітного поля розглядають поперечний і поздовжній ефекти Зеємана (рис. 9.10). При поперечному ефекті утворюються три лінійно поляризовані спектральні лінії $\omega_0 - \Delta\omega$, ω_0 і $\omega_0 + \Delta\omega$: лінія ω_0 поляризована уздовж вектора напруженості \vec{H}_0 зовнішнього магнітного поля, а дві симетричні лінії $\omega_0 - \Delta\omega$ і $\omega_0 + \Delta\omega$ поляризовані перпендикулярно вектору \vec{H}_0 .

При поздовжньому ефекті утворюються дві симетричні спектральні лінії $\omega_0 - \Delta\omega$ і $\omega_0 + \Delta\omega$ з циркулярною поляризацією в протилежних напрямках.

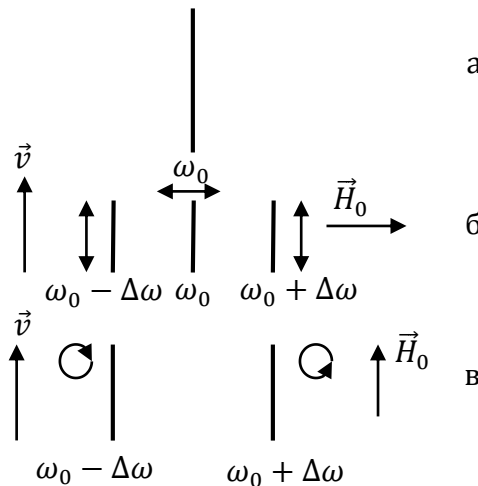


Рис. 9.10. Простий ефект Зеємана: а – без поля (ω_0 – частота неполяризованої спектральної лінії); б – зеєманівський триплет (напрямок спостереження перпендикулярний полю); в – циркулярно поляризовані хвилі (при спостереженні уздовж поля). Стрілками показано напрямки поляризації.

Ефект Зеємана можна пояснити на основі електронної теорії дисперсії Лоренца, згідно якої частота зміщення $\Delta\omega = \frac{1}{2c} \frac{e}{m} H_0$, де e і m – заряд і маса електрона.

3. **Ефект Коттона – Муттона** проявляється у виникненні подвійного променезаломлення в речовині, яка розміщена в магнітному полі, вектор

напруженості \vec{H}_0 якого перпендикулярний до напрямку розповсюдження світла. Детально цей ефект був досліджений французькими фізиками Е. Коттоном і А. Муттоном в 1907 році.

Основною характеристикою цього ефекту є залежність

$$\Delta n = n_e - n_o = C\lambda H_0^2, \quad (9.32)$$

де C – постійна Коттона – Муттона.

9.9. Оптично активні середовища

Оптична активність – це здатність середовища визивати обертання площини поляризації світла, яке проходить через неї [8]. Вперше явище оптичної активності було виявлено в 1811 році французьким вченим Д.Ф. Араго у кварці. В 1815 році французький вчений Ж.Б. Біо відкрив оптичну активність чистих рідин, розчинів і парів речовин.

Якщо оптична активність проявляється без зовнішньої дії на речовину, то така активність називається *природньою*. До таких речовин належать кварц, розчин цукру, нікотин та інші.

Розглянемо схему, яка дозволяє дослідити явище оптичної активності (рис. 9.11). Природнє світло \vec{E}_n проходить поляризатор N_1 , вузько смуговий фільтр F і перетворюється в лінійно поляризовану монохроматичну хвилю \vec{E}_1 , яка проходить через кварцову пластинку K уздовж її оптичної осі. При цьому подвійне променезаломлення відсутнє, а на виході пластини формується лінійно поляризована хвиля \vec{E}'_1 з поворотом площини поляризації на кут ψ . За допомогою аналізатора N_2 визначається кут ψ .

Експериментальні дослідження показують, що кут повороту ψ площини поляризації визначається за формулою

$$\psi = \psi_0 l, \quad (9.33)$$

де ψ_0 – питома оптична активність, яка вимірюється в град/мм; l – товщина кварцової пластини в мм. Оптична активність залежить від довжини хвилі як $\psi_0 \sim \lambda^{-2}$. тому в схемі, що зображена на рис. 9.11, використовується вузько смуговий фільтр.

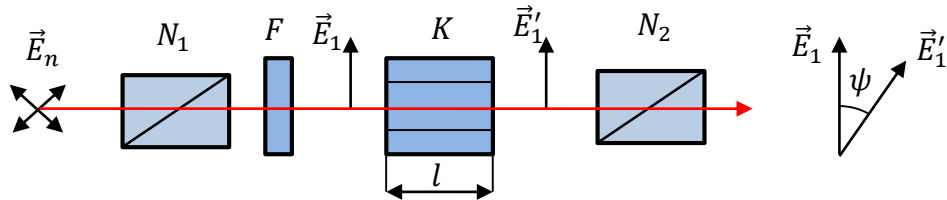


Рис. 9.11. Схема для вимірювання кута повороту площини поляризації при оптичній активності

Біо встановив, що

1. Для розчину кут обертання площини поляризації ψ лінійно залежить від товщини шару розчину l і концентрації c активної речовини:

$$\psi = [\alpha]lc, \quad (9.34)$$

де $[\alpha]$ – називається *питомою оптичною активністю*.

2. Обертання відбувається або по часовій стрілці ($\psi > 0$), або проти неї ($\psi < 0$), якщо дивитись назустріч променів світла. Відповідно до цього оптично активні речовини, які проявляють природню оптичну активність, розділяють на *правообертальні* (додатне обертання) і *лівообертальні* (від'ємне обертання).

Феноменологічну теорію оптичної активності розробив в 1823 році французький вчений О.Ж. Френель, який пояснив оптичну активність відмінністю показників заломлення середовища n_+ і n_- для право- і лівополяризованих по колу компонентів лінійно поляризованого світла.

Лінійно поляризовану хвилю \vec{E}_1 представимо у вигляді суми двох хвиль з однаковими амплітудами \vec{E}_{1+} і \vec{E}_{1-} , які поляризованих по колу в протилежних напрямках (рис. 9.12), тобто

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{1+} + \vec{E}_{1-}; \quad E_{1+} = E_{1-} = 0,5E_1. \quad (9.35)$$

Якщо швидкості v_+ і v_- розповсюдження хвиль \vec{E}_{1+} і \vec{E}_{1-} однакові, то після проходження речовини вектори \vec{E}_{1+} і \vec{E}_{1-} цих хвиль повернуться на однакові кути φ_+ і φ_- , а їх результуюча $\vec{E}'_1 = \vec{E}'_{1+} + \vec{E}'_{1-}$ створює лінійно поляризовану хвилю \vec{E}'_1 , вектор якої паралельний вхідному вектору \vec{E}_1 (рис. 9.12,а). В цьому випадку оптична активність не спостерігається.

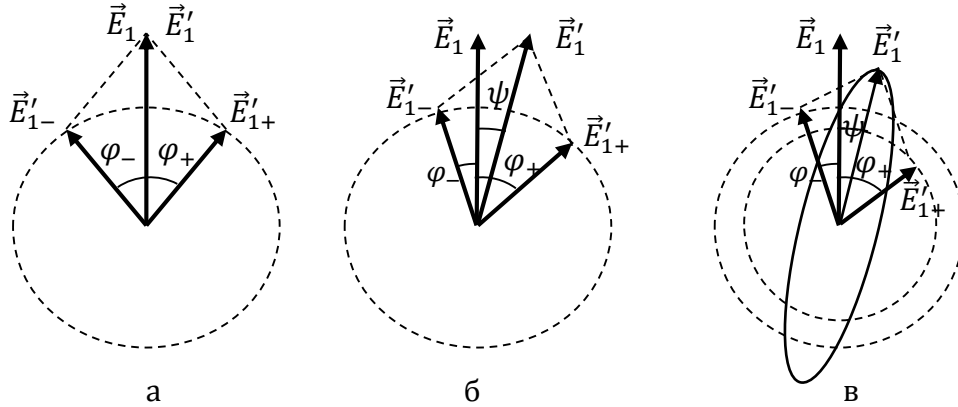


Рис. 9.12. Феноменологічна модель Френеля оптичної активності:
а – активність відсутня; б – активність присутня; в – дихроїзм

Якщо $v_+ \neq v_-$, то вектори \vec{E}_{1+} і \vec{E}_{1-} повернуться на різні кути φ_+ і φ_- , їх результуючий вектор $\vec{E}'_1 = \vec{E}'_{1+} + \vec{E}'_{1-}$ створює лінійно поляризовану хвилю \vec{E}'_1 , вектор якої повернеться на кут ψ відносно вхідного вектора \vec{E}_1 (рис. 9.12,б), тобто в цьому випадку спостерігається оптична активність. Із рис. 9.2,б знаходимо, що $\varphi_+ - \psi = \psi + \varphi_-$. Звідки

$$\psi = \frac{1}{2}(\varphi_+ - \varphi_-). \quad (9.36)$$

Нехай монохроматична хвиля \vec{E}_1 має частоту ω . Тоді фази хвиль \vec{E}'_{1+} і \vec{E}'_{1-} будуть визначатися співвідношеннями

$$\varphi_+ = \omega \left(t - \frac{l}{v_+} \right) \text{ і } \varphi_- = \omega \left(t - \frac{l}{v_-} \right). \quad (9.37)$$

Після підстановки (9.37) до (9.36) маємо вираз, отриманий Френелем, для кута повороту площини поляризації

$$\psi = \frac{1}{2} \omega \left(\frac{l}{v_-} - \frac{l}{v_+} \right) = \frac{1}{2} \frac{2\pi\nu}{c} l (n_- - n_+) = \frac{\pi l}{\lambda} (n_- - n_+), \quad (9.38)$$

де λ – довжина хвилі в вакуумі. Із (9.38) видно, що кут повороту ψ може бути значним навіть при малій різниці $n_- - n_+$, так як $l \gg \lambda$.

Цим пояснюється надзвичайно висока чутливість методів, заснованих на вимірюванні оптичної активності. Наприклад, при вимірювання різниці показників заломлення вони в 10000 разів більш чутливі, ніж інтерференційні методи.

Розглянуте явище, коли швидкості розповсюдження циркулярно поляризованих хвиль v_+ і v_- або їх показників заломлення n_+ і n_- неоднакові, називається *круговим подвійним променезаломленням*.

Коттоном була виявлена відмінність у показниках поглинання для право- і лівополяризованих по колу променів, яка називається *круговим дихроїзмом*, або ефектом Коттона. Внаслідок цього ефекту лінійно поляризоване світло \vec{E}_1 перетворюється на виході кварцової пластини в еліптично поляризоване \vec{E}'_1 за рахунок відмінності в амплітудах \vec{E}'_{1+} і \vec{E}'_{1-} (рис. 9.12,в).

Величина дихроїзму визначається різницею показників поглинання для право α_+ і ліво α_- поляризованих по колу променів

$$\Delta\alpha = \alpha_+ - \alpha_-. \quad (9.39)$$

Різниця показників поглинання $\Delta\alpha$ визначає півосі еліпса, а різниця $\Delta n = n_- - n_+$ – кут нахилу еліпса (рис. 9.2,в). Явище дихроїзму вимірюється за допомогою дихографа в області смуг поглинання, де важко виміряти кругове подвійним променезаломленням. Вимірюючи параметри Δn і $\Delta\alpha$ можна дослідити явища оптичної активності або внутрішній стан речовини.

9.10. Ефект Фарадея

Ефект Фарадея проявляється в обертанні площини поляризації лінійно поляризованого світла, що розповсюджується в речовині уздовж постійного

магнітного поля, в якому знаходиться речовина. Цей ефект був відкритий в 1845 році англійським фізиком М. Фарадеєм. Він є підтвердженням прямого зв'язку між оптичними і електромагнітними явищами.

Розглянемо схему, яка дозволяє дослідити ефект Фарадея (рис. 9.13). Природне світло \vec{E}_n проходить поляризатор N_1 і вузько смуговий фільтр F і перетворюється в лінійно поляризовану монохроматичну хвилю \vec{E}_1 , яка проходить через прозорий стержень, що здатний обертати площину поляризації. Стержень знаходиться в поздовжньому магнітному полі (всередині соленоїда) між схрещеними поляризаторами N_1 і N_2 . Розглянута схема називається *коміркою Френеля*.

Якщо через соленоїд не протікає струм, то магнітне поле відсутнє, і на виході поляризатора інтенсивність згідно закону Малюса дорівнює нулю.

Якщо через соленоїд протікає струм, то виникає магнітне поле з напруженістю $H_0 \neq 0$, а на виході стержня формується лінійно поляризована хвиля \vec{E}'_1 з поворотом площини поляризації на кут ψ , який визначається за формулою

$$\psi = V l H_0, \quad (9.40)$$

де l – довжина стержня; V – константа пропорційності, яка залежить від властивостей речовини, довжини хвилі випромінювання і температури і називається *постійною Верде*.

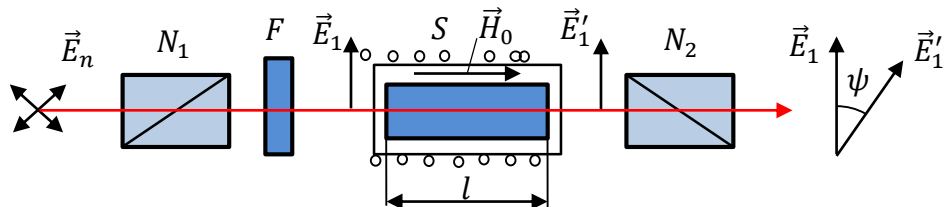


Рис. 9.13. Схема для вимірювання кута повороту площини поляризації при ефекті Фарадея

Феноменологічне пояснення ефекту Фарадея можна дати на основі гіпотези Френеля стосовно оптичної активності речовини. В загальному випадку

речовину, що знаходиться в магнітному полі, неможливо характеризувати одним показником заломлення. Під дією магнітного поля показники заломлення n_+ і n_- для циркулярно право і ліво поляризованого світла стають різними. Внаслідок цього при проходженні через середовище уздовж магнітного поля лінійно поляризоване світло у вигляді його циркулярно право- і ліво поляризованих складових розповсюджуються з різними фазовими швидкостями, набуваючи різницю хода, що лінійно залежить від оптичної довжини шляху. В результаті площина поляризації лінійно поляризованого монохроматичного світла з довжиною хвилі λ , яке пройшло шлях l , обертається на кут

$$\psi = \frac{\pi l}{\lambda} (n_+ - n_-). \quad (9.41)$$

В області не дуже сильних магнітних полів різниця $(n_+ - n_-)$ лінійно залежить від напруженості магнітного поля H_0 і в загальному випадку кут обертання згідно ефекту Фарадея описується співвідношенням (9.40).

Ефект Фарадея по своїй природі тісно пов'язаний з ефектом Зеємана розщеплення енергетичних рівнів атомів і молекул магнітним полем. При поздовжньому відносно магнітного поля спостереженні спектральні компоненти зеємановського розщеплення стають циркулярно поляризованими. Відповідну циркулярну анізотропію виявляє і спектральний хід показника заломлення. Таким чином, ефект Фарадея є наслідком ефекту Зеємана.

Особливістю ефекту Фарадея є незалежність напрямку кута повороту площини поляризації від напрямку розповсюдження світла (уздовж поля або проти поля). Тому багатократне проходження світла через середовище, що знаходиться в магнітному полі, призводить до зростання кута повороту площини поляризації. Ця особливість знайшла широке застосування в пристроях, де використовується ефект Фарадея.

9.11. Приклади розрахунку штучного подвійного променезаломлення світла, оптичної активності та ефекту Фарадея

Приклад 9.1. Елемент Керра (заповнена нітробензолом посудина, в якій розміщені пластини плоского конденсатора) розташований між паралельними поляризатором і аналізатором. Оптична вісь елемента Керра утворює кут 45° з площиною пропускання поляризатора. Довжина пластин конденсатора 100 мм. Постійна Керра для монохроматичного світла ($\lambda = 600$ нм) дорівнює $2,2 \cdot 10^{-12}$ м/В². Визначте мінімальне значення напруженості електричного поля конденсатора, при якому: а) на виході аналізатора становиться темно; б) інтенсивність світла на виході системи не залежить від кутового положення аналізатора.

Розв'язання. На рис. 9.14 представлена схема інтерференції поляризованого світла, в якій функції фазової пластинки виконує елемент Керра. При $\alpha = 45^\circ$ і $\beta = 0^\circ$ інтенсивність світла на виході системи визначається формулою (8.34), яку представимо у вигляді

$$I_{\Sigma \parallel} = \frac{1}{2} I_n \cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2},$$

де різниця фаз згідно формул (8.28) і (9.31) дорівнює

$$\Delta\varphi = kd = \frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e) d = 2\pi B E_0^2 d, \quad (9.42)$$

де B – постійна Керра.

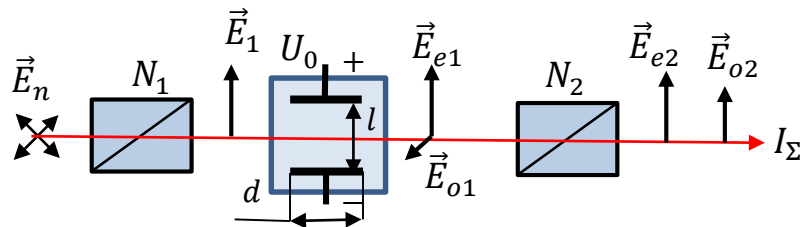


Рис. 9.14. До прикладу 9.1

а) Інтенсивність світла на виході системи буде дорівнювати нулю ($I_{\Sigma \parallel} = 0$), коли $\cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2} = 0$. Ця умова виконується при різниці фаз $\Delta\varphi = (2m + 1)\pi$. Тоді

із рівняння (9.42) отримаємо $E_0 = \sqrt{\frac{2m+1}{2Bd}}$. Мінімальна напруженість буде при $m = 0$:

$$E_o^{\min} = \sqrt{\frac{1}{Bd}} = \sqrt{\frac{1}{2,2 \cdot 10^{-12} \cdot 0,1}} = 2,1 \cdot 10^6 \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

б) Інтенсивність світла на виході системи не буде залежати від кута повороту аналізатора у випадку, коли на аналізатор падає циркулярно поляризоване світло, тобто елемент Керра являє собою четверть хвильову пластинку, яка утворює різницю фаз $\Delta\varphi = (2m+1)\pi/2$, і $\alpha = 45^\circ$. Таку різницю фаз забезпечує елемент Керра з напруженістю електричного поля $E_0 = \sqrt{\frac{2m+1}{2Bd}}$.

Мінімальна напруженість буде при $m = 0$:

$$E_0^{\min} = \sqrt{\frac{1}{4Bd}} = \sqrt{\frac{1}{4 \cdot 2,2 \cdot 10^{-12} \cdot 0,1}} = 1,07 \cdot 10^6 \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Приклад 9.2. Між схрещеними поляризатором і аналізатором розташована кварцова пластинка, яка вирізана перпендикулярно до її осі. Визначте мінімальну товщину пластинки, при якій світло з довжиною хвилі $\lambda_1 = 436$ нм буде повністю затримуватися системою, а світло з довжиною хвилі $\lambda_2 = 550$ нм за аналізатором зменшиться наполовину порівняно з світлом за поляризатором. Постійна обертання кварцу для цих довжин хвиль дорівнює $\alpha_1 = 41,5$ град/мм і $\alpha_2 = 25,94$ град/мм відповідно.

Розв'язання. Розглянемо рис. 9.11. При проходженні лінійно поляризованого світла уздовж оптичної осі кварцу відбувається обертання площини поляризації на кут ψ , який розраховується за формулою (9.33). Інтенсивність на виході системи розраховується за формулою (8.3)

$$I = \frac{1}{2} I_n \sin^2 \psi = I_1 \sin^2 \psi,$$

де $I_1 = 0,5I_n$ – інтенсивність світла за поляризатором.

Визначимо товщини пластинки кварцу, при яких для довжини хвилі λ_1 буде виконуватись умова $I = 0$. Із (8.3) випливає, що ця умова буде виконуватися при $\psi_1 = \pi m_1$, або, як випливає із (9.33), при товщині пластинки $d_{m_1} = \frac{\pi m_1}{\alpha_1}$.

Розрахуємо значення d_{m_1} для різних m_1 : $d_{11} = 4,34$ мм; $d_{21} = 8,67$ мм; $d_{31} = 13,01$ мм.

Визначимо товщини пластинки кварцу, при яких для довжини хвилі λ_2 буде виконуватись умова $I = 0,5I_1$. Із формули (8.3) маємо: $\sin^2 \psi_2 = 0,5$. Звідки $\psi_2 = \frac{\pi}{4} + m_2 \frac{\pi}{2}$. Цей кут забезпечує пластинка кварцу товщиною $d_{m_2} = \frac{\pi(2m_2 + 1)}{4\alpha_2}$.

Розрахуємо значення d_{m_2} для різних m_2 : $d_{12} = 1,74$ мм; $d_{22} = 5,20$ мм; $d_{32} = 8,67$ мм.

Порівнюючи числа d_{m_1} і d_{m_2} , знаходимо, що вони мають однакове значення $d_{m_1} = d_{m_2} = 8,67$ мм. Такою повинна бути мінімальна товщина кварцової пластинки.

Приклад 9.3. Трубка з бензолом довжиною $L = 26$ см знаходиться в поздовжньому магнітному полі соленоїда, який розташований між двома поляризаторами. Кут між площинами пропускання поляризаторів складає 45° . Знайти мінімальну напруженість магнітного поля, при якій світло з $\lambda = 589$ нм буде проходити через цю систему тільки в одному напрямі (оптичний вентиль). Як буде вести себе цей оптичний вентиль, якщо змінити напрям магнітного поля на протилежний?

Розв'язання. Як працює такий пристрій? Чому він називається оптичним вентилем?

Розглянемо рис. 9.15. Після поляризатора P_1 лінійно поляризоване світло попадає в трубку з речовиною (в даному випадку – бензолом), яка в поздовжньому магнітному полі за рахунок магнітооптичного ефекту Фарадея обертає площину поляризації світла. Величина кута обертання за формулою

(9.40) і залежить від величини поля H_0 , довжини робочої речовини l та властивостей самої речовини (постійної Верде V). Величину магнітного поля в даному випадку визначається параметрами соленоїда i , в першу чергу, - величиною струму в ньому. Він підбирається таким, що кут $\varphi = 45^\circ$. Це означає, що лінійно поляризоване світло після проходження ним соленоїда співпадає за поляризацією з напрямом пропускання поляризатора Π_2 і пройде через нього без поглинання. Але, як відомо, будь-яка оптична схема, яка складається, з оптичних елементів обов'язково повинна мати відбиваючі поверхні. Це означає, що крім "прямого" променя, існує "обернений" промінь, який вкрай потрібно погасити. (Його наявність може спричинити багато неприємностей, аж до зникнення генерації лазером). Відбитий промінь може бути частково поляризованим або навіть повністю неполяризованим. Після проходження поляризатора Π_2 "справа наліво" він виходить з нього повністю поляризованим і попадає в робочу речовину, яка знаходиться в соленоїді. Із теорії ефекту Фарадея відомо, що напрям обертання площини поляризації залежить від напрямку магнітного поля (а він залежить від напрямку струму в соленоїді і не змінився) і не залежить від напрямку розповсюдження світла. Тобто площина поляризації відбитого "зворотного" світла ще раз повернеться на кут $\varphi = 45^\circ$. Таким чином, на вхід поляризатора Π_1 світло прийде з площиною поляризації, повернутою на кут 90° , а це буде напрямом найменшого пропускання і світло через поляризатор Π_1 пройти не зможе. Ось чому пристрій, пропускання світла яким в одному, "прямому напрямку" - максимальне, а в зворотному – мінімальне, називається *оптичним вентиляем*.

Повернемося до розв'язування прикладу. Стала Верде для бензолу $V = 2,59 \frac{\text{кут. хв.}}{\text{А}}$. З формули (9.40) знаходимо величину напруженості магнітного поля при умові, що відомі інші величини:

$$H = \frac{\varphi}{VL} = \frac{45 \cdot 60}{2,59 \cdot 0,26} \frac{\text{кут.хв.} \cdot \text{А}}{\text{кут.хв.} \cdot \text{м}} = 4 \cdot 10^3 \frac{\text{А}}{\text{м}}$$

(Розмірність отриманої величини А/м – це розмірність напруженості магнітного поля).

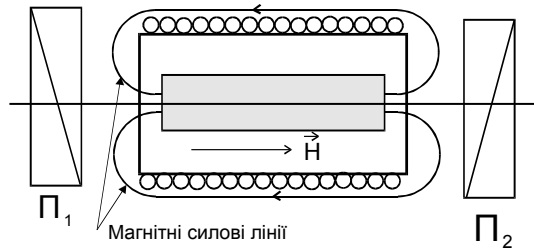


Рис. 9.15. До прикладу 9.3

9.12. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 9.1. Між схрещеними поляризатором і аналізатором, які освітлюються вузьким неполяризованим монохроматичним світлом ($\lambda = 500$ нм), розташований горизонтально по нормалі до променя кубик із плексигласу з стороною $a = 0,5$ см. Площина поляризатора орієнтована під кутом 45° до горизонту. На кубик діє сила \vec{F} у вертикальному напрямку. Коефіцієнт фотопружності плексигласу дорівнює $k = 2 \cdot 10^{-11}$ м²/Н.

Знайдіть: а) При якій силі тиску F світло, що вийшло із кубика, буде поляризованим по колу? б) Якою буде при цьому доля світла, яка пройшла через систему? в) Якою буде доля світла, яке пройшло через систему, коли $F = 62,5$ Н? г) Якою вона стане, якщо аналізатор повернути на кут 90° ?

$$\text{Відповідь: а) } F = \frac{\lambda a}{4k} = 31,25 \text{ Н; б) } \frac{I_{\perp}}{I_n} = 25\%; \text{ в) } \frac{I_{\perp}}{I_n} = 0; \text{ г) } \frac{I_{\parallel}}{I_n} = 50\% .$$

Задача 9.2. Визначте показник штучного подвійного променезаломлення $(n_e - n_o)$ при спостереженні ефекту Керра в нітробензолі в електричному полі з напруженістю $E_0 = 3000$ В/см. Постійна Керра нітробензолу при $\lambda = 589$ нм дорівнює $B = 2,2 \cdot 10^{-12}$ м/В². Знайдіть різницю фаз $\Delta\varphi$, яку створює елемент Керра з довжиною пластин конденсатора $d = 4$ см.

$$\text{Відповідь: } (n_e - n_o) = B\lambda E_0^2 = 0,12 \cdot 10^{-6}; \Delta\varphi = 2\pi B d E_0^2 = 2,85^\circ .$$

Задача 9.3. Елемент Керра із задачі 9.2, який розташований між схрещеними поляризатором і аналізатором, освітлюється природнім світлом так, що силові лінії електричного поля орієнтовані під кутом 45° відносно площини пропускання поляризатора. Визначте: а) долю світла, яке пройшло через систему; б) при якій найменшій напруженості електричного поля інтенсивність світла на виході системи не залежить від обертання аналізатора?

Відповідь: а) $\frac{I_{\perp}}{I_n} = 0,03\%$; б) $E_o = 17000 \text{ В/см}$.

Задача 9.4. Елемент Керра, який заповнений нітробензолом, встановлено між поляризатором і аналізатором так, що пластини конденсатора ($d = 10 \text{ см}$) нахилені під кутом 45° до площини пропускання поляризатора. Система освітлюється природнім монохроматичним світлом. Визначте: а) постійну Керра для даного світла, якщо найменше значення напруженості електричного поля, при якому положення аналізатора не впливає на інтенсивність світла за ним, $E_o = 10^6 \text{ В/м}$; б) при якій найменшій напруженості електричного поля інтенсивність світла на виході системи із схрещеними поляризатором і аналізатором буде максимальною?

Відповідь: а) $B = 25 \cdot 10^{-13} \text{ м/В}$; б) $E_o = 1,4 \cdot 10^6 \text{ В/м}$.

Задача 9.5. Елемент Керра з відстанню між пластинами конденсатора $l = 1 \text{ мм}$, який заповнений нітробензолом, розташований між поляризатором і аналізатором. Напрямок електричного поля в конденсаторі утворює кут 45° з площиною пропускання поляризатора. Система освітлюється неполяризованим монохроматичним світлом, для якого постійна Керра $B = 2,2 \cdot 10^{-12} \text{ м/В}^2$. Визначте довжину пластин конденсатора d , якщо мінімальна напруга між ними, при якій інтенсивність світла на виході системи не змінюється при обертанні аналізатора, $U_0 = 1 \text{ кВ}$.

Відповідь: $d = 133,6 \text{ мм}$.

Задача 9.6. Комірку Керра розмістили між двома схрещеними поляризаторами так, що напрямок електричного поля \vec{E}_0 в конденсаторі утворює кут 45° з площинами пропускання поляризаторів. Конденсатор має довжину $d = 100$ мм та заповнений нітробензолом (постійна Керра $B = 2.2 \cdot 10^{-10}$ см/В). Через систему проходить світло з $\lambda = 500$ нм. Визначте мінімальну напруженість електричного поля E_0 в конденсаторі, при якому інтенсивність світла, що проходить через цю систему, не буде залежати від повороту заднього поляризатора.

$$\text{Відповідь: } E_{\min} = \frac{1}{\sqrt{4Bd}} = 10,6 \text{ кВ/см}$$

Задача 9.7. Пластика кварцу товщиною 1 мм, яка вирізана перпендикулярно до його оптичної осі і розташована між паралельними поляризатором і аналізатором, повертає при деякій довжині хвилі світла площину поляризації на кут 20° . При якій найменшій товщині кварцової пластинки природне світло даної довжини хвилі буде: а) повністю ослаблене; б) ослаблене у три рази; в) найбільш яскравим?

$$\text{Відповідь: а) } d = 4,5 \text{ мм; б) } d = 1,76 \text{ мм; в) } d = 9 \text{ мм.}$$

Задача 9.8. Пластика кварцу товщиною 1 мм, яка вирізана перпендикулярно до його оптичної осі, розташована між схрещеними поляризатором і аналізатором. Визначте долю монохроматичного природного світла на виході системи для: а) $\lambda = 500$ нм; $\alpha = 29,7$ град/мм; б) $\lambda = 526,9$ нм; $\alpha = 27,54$ град/мм; в) $\lambda = 589,3$ нм; $\alpha = 21,68$ град/мм.

$$\text{Відповідь: а) } 50\%; \text{ б) } 49,35\%; \text{ в) } 41,52\%.$$

Задача 9.9. Питома постійна обертання цукру дорівнює $66,5$ град/дм при довжині хвилі 589 нм і концентрації її розчину у воді 10^3 кг/м³. Яка концентрація цукру у розчину, якщо при довжині кювети 15 см кут обертання площини поляризації складає: а) 10° ; б) 15° ; в) 20° ?

Відповідь: а) 100 кг/м³; б) 150 кг/м³; в) 200 кг/м³.

Задача 9.10. Постійна Верде для сірковуглецю дорівнює $V = 5,4626 \cdot 10^{-2}$ кут. хв./А. а) Визначте кут повороту площини поляризації світла при його проходженні через шар сірковуглецю товщиною $d = 1$ см, який знаходиться в поздовжньому магнітному полі з напруженістю $H_0 = 8 \cdot 10^5$ А/м. б) Яка частина природного світла пройде через елемент Фарадея, який розташований між схрещеними поляризатором і аналізатором?

Відповідь: а) $\psi = VH_0 d = 7^\circ 15'$; б) $I_{\perp} / I_n = 2\%$.

Задача 9.11. Визначте постійну Верде для заліза, якщо відомо, що його шар товщиною 10^{-3} см повертає площину поляризації на 130° у магнітному полі $H_0 = 8 \cdot 10^5$ А/м при $\lambda = 589$ нм.

Відповідь: $V = 980$ кут. хв./А.

Задача 9.12. Деяка речовина знаходиться у поздовжньому магнітному полі соленоїда, який розташований між паралельними поляризаторами. Довжина кювети з речовиною 30 см. При протилежних напрямленнях магнітного поля напруженістю $H_0 = 5,65 \cdot 10^4$ А/м кути повороту площини поляризації, які відраховані по шкалі гоніометра, складають $\varphi_1 = 5^\circ 10'$ і $\varphi_2 = 3^\circ 20'$. Визначте: а) постійну Верде речовини; б) при якому куті між площинами поляризаторів світло зможе проходити тільки в одному напрямку?; в) яка при цьому повинна бути напруженість магнітного поля?

Вказівка: скористайтесь прикладом 18.3.

Відповідь: а) $V = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2dH_0} = 3,25 \cdot 10^{-3}$ кут.хв./А; б) $\psi = 45^\circ$;

в) $H_0 = 2,77 \cdot 10^6$ А/м.

Задача 9.13. На шляху розповсюдження монохроматичних променів з довжиною хвилі $\lambda = 589$ нм між поляризатором і аналізатором розташували

скляну трубку довжиною $d = 200$ мм, в яку налили розчин глюкози. За допомогою кутомірного пристрою по затемненню поля було зафіксовано положення аналізатора при відсутності і при наявності розчину у трубці. Різниця відліків $\psi = 37^\circ$, що відповідає куту повороту площини поляризації досліджуваного розчину. Знайдіть концентрацію глюкози у воді, якщо питома постійна обертання $[\alpha] = 52,5$ (град·л/г·дм).

$$\text{Відповідь: } c = \frac{\Psi}{[\alpha] \cdot d} = 0,352 \frac{\text{г}}{\text{л}}.$$

Задача 9.14. Розчин камфори в етиловому спирті з концентрацією $c_1 = 0,526$ г/л, який знаходиться у скляній трубці, повертає площину поляризації на кут $\psi_1 = 47^\circ$. Знайдіть концентрацію c_2 розчину камфори в етиловому спирті у другій трубці той же довжини, якщо площина поляризації при цьому повернулась на кут $\psi_2 = 54^\circ$.

$$\text{Відповідь: } c_2 = c_1 \frac{\Psi_2}{\Psi_1} = 0,604 \frac{\text{г}}{\text{л}}.$$

Задача 9.15. Кварцову пластину, що вирізана перпендикулярно до оптичної осі і має товщину $d_1 = 3$ мм, розташували між двома паралельними ніколями. При цьому площина поляризації світла у пластині повернулась на кут $\psi_1 = 65^\circ$. Знайдіть товщину d_2 кварцової пластини, при якій монохроматичне світло, яке використовується при вимірюваннях, не пройде через аналізатор.

$$\text{Відповідь: } d_2 = d_1 \frac{\Psi_2}{\Psi_1} = 4,15 \text{ мм}.$$

Задача 9.16. Кварцова пластинка товщиною $d = 3,03$ мм, що вирізана перпендикулярно до оптичної осі, розташована між схрещеними поляризатором і аналізатором. Визначте долю монохроматичного природного світла на виході системи, якщо постійна обертання кварцу $\alpha = 27,54$ град/мм.

Відповідь: $\frac{I'}{I_0} = \frac{1}{2} \sin^2(\alpha d) = 0,493$.

Задача 9.17. Природне монохроматичне світло падає на систему з двох схрещених поляризаторів, між якими знаходиться кварцова пластинка, яка вирізана перпендикулярно до оптичної осі. Знайдіть мінімальну товщину пластинки, при якій ця система буде пропускати $\eta=0,30$ світлового потоку, якщо постійна обертання кварцу $\alpha=17$ кут. град /мм.

Відповідь: $d_{\min} = (1/\alpha) \arcsin \sqrt{2\eta} = 3$ мм.

РОЗДІЛ 10

РОЗСІЮВАННЯ СВІТЛА

Розсіювання світла обумовлено поглинанням світлової енергії молекулами і атомами середовища і випромінювання світла цими частинками [6].

10.1. Природа процесів розсіювання

Процес розсіювання світла складається із сприйняття частинками (молекулами і атомами) енергії електромагнітної хвилі, що розповсюджується в середовищі, і випромінювання цієї енергії в тілесний кут, вершиною якого є частинка. В неперервних середовищах розсіювання відбувається за рахунок дифракції світла на оптичних неоднорідностях середовища.

Розрізняють такі типи розсіювання:

1. *Розсіювання Релея*, коли розміри частинок r_m середовища набагато менші за розміри довжини хвилі λ світла, $r_m < \lambda/15$.
2. *Розсіювання Мі* для довільних розмірів частинок. Для малих частинок розсіювання Мі перетворюється в розсіювання Релея.
3. *Розсіювання Мандельштама-Бріллюена* на акустичних хвилях.
4. *Комбінаційне розсіювання* при квантових енергетичних переходах в частинках.

Розсіяне однією частинкою світло може бути розсіяне іншими частинками (багатократне розсіювання).

10.2. Розсіювання Релея

10.2.1. Модель елементарного розсіювача

Для фізико-математичного моделювання цього типу розсіювання середовище розглядається у вигляді сукупності диполів, аналогічно електронній теорії дисперсії світла, яка була розглянута в розділі 4.

Нехай через середовище розповсюджується монохроматична хвиля, напруженість електричного поля якої описується рівнянням

$$E = E_0 \cos \omega t. \quad (10.1)$$

Під дією цього поля електрон в диполі здійснює коливання з частотою ω . Диполь, що коливається, стає джерелом електромагнітного випромінювання,

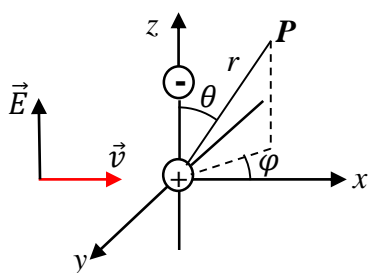


Рис. 10.1. Модель розсіювання світла диполем

тобто відбувається випромінювання світлової хвилі.

Розглянемо систему координат xz , в центрі якої знаходиться диполь (рис.10.1). Нехай на диполь діє плоска монохроматична хвиля (10.1), яка лінійно поляризована в площині xz і розповсюджується уздовж осі x . В цьому

випадку на електрон диполя діють дві сили:

1. Сила Кулона

$$\vec{F}_1 = e\vec{E}, \quad (10.2)$$

де e – заряд електрона.

2. Пружна сила, яка повертає електрон в початкове положення

$$\vec{F}_2 = -k_2 \vec{z}, \quad (10.3)$$

де k_2 – коефіцієнт пружності; \vec{z} – вектор, що характеризує зміну відстані між зарядами диполя.

Під дією цих сил електрон здійснює коливання уздовж осі z з частотою ω . Запишемо рівняння руху електрона на основі закону Ньютона:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_1 + F_2 = eE_0 \cos \omega t - k_2 z, \quad (10.4)$$

де m – маса електрона.

Розв'язок диференціального рівняння (10.4) будемо шукати у вигляді

$$z = z_0 \cos \omega t. \quad (10.5)$$

Тоді

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} z_0 \cos \omega t \right) = -z_0 \omega \left(\frac{d}{dt} \sin \omega t \right) = -z_0 \omega^2 \cos \omega t. \quad (10.6)$$

Після підстановки (10.2), (10.3) і (10.6) до (10.4) маємо

$$-m z_0 \omega^2 \cos \omega t = e E_0 \cos \omega t - k_2 z_0 \cos \omega t;$$

$$z_0 (k_2 - m \omega^2) = e E_0;$$

$$z_0 = \frac{e}{m} \frac{E_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad (10.7)$$

де $\omega_0 = \sqrt{k_2/m}$ – власна частота коливань диполя.

Таким чином, відстань між зарядами диполя змінюється по закону

$$z = \frac{e}{m} \frac{E_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t. \quad (10.8)$$

При зміщенні електрона на величину (10.8) виникає дипольний момент

$$p(t) = ez = \frac{e^2}{m} \frac{E_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t. \quad (10.9)$$

Дипольний момент, який змінюється в часі, створює змінне електромагнітне поле, яке в точці $P(r, \theta, \varphi)$ сферичної системи координат описується функціями (рис. 10.1):

$$E_\theta = c B_\varphi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^2 \sin\theta}{c^2} \frac{p}{r} \left(t - \frac{r}{c} \right); \quad E_r = E_\varphi = 0; \quad B_r = B_\theta = 0, \quad (10.10)$$

де θ і φ – полярний і аксіальні кути відповідно, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$; r – відстань від диполя до точки $P(r, \theta, \varphi)$, де визначається поле, $0 \leq r < \infty$.

Підкреслимо, що по лінії коливань диполя випромінювання відсутнє.

Щільність потоку енергії в напрямку кутів θ і φ , визначається вектором Пойтінга (2.56). Модуль цього вектору дорівнює

$$S(r, \theta, \varphi, t) = |[\vec{E} \times \vec{H}]| = E_\theta H_\varphi = \frac{1}{\mu_0} E_\theta B_\varphi =$$

$$= \frac{1}{c\mu_0} \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^2 \sin\theta}{c^2 r} p \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]^2 = \frac{\omega^4}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2\theta}{r^2} p^2 \left(t - \frac{r}{c} \right). \quad (10.11)$$

Інтенсивність розсіювання знаходимо шляхом усереднення функції (10.11) в часі. Згідно (2.60) з урахуванням (10.9) маємо

$$I(r, \theta, \varphi) = \langle S(r, \theta, \varphi, t) \rangle_t = \frac{\omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2\theta}{r^2} \left[\frac{e^2}{m} \frac{E_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \right]^2. \quad (10.12)$$

Перейдемо в (10.12) від частоти ω до довжини хвилі λ використовуючи співвідношення $\omega = 2\pi c/\lambda$

$$I(r, \theta, \varphi) = \frac{\pi^2 c \sin^2\theta}{2\epsilon_0 r^2 \lambda^4} \left[\frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \right]^2 E_0^2. \quad (10.13)$$

Потік енергії випромінювання $d\Phi(\theta, \varphi)$ в тілесному куті $d\Omega = dS/r^2$, який опирається на елемент площі сфери dS дорівнює

$$d\Phi(\theta, \varphi) = I(r, \theta, \varphi) dS = I(r, \theta, \varphi) r^2 d\Omega. \quad (10.14)$$

Звідси знаходимо силу світла, яку випромінює диполь в напрямку, що заданий кутами θ і φ ,

$$J_{1d}(\theta, \varphi) = \frac{d\Phi(\theta, \varphi)}{d\Omega} = \frac{\pi^2 \sin^2\theta}{\lambda^4} \left[\frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \right]^2 I_0, \quad (10.15)$$

де $I_0 = 0,5c\epsilon_0 E_0^2$ – інтенсивність світла, що розповсюджується в середовищі.

10.2.2. Розсіювання Релея

Якщо розміри частинки (молекули) набагато менші за довжину хвилі, то усі елементарні диполі частинки випромінюють когерентно. Під розсіюванням Релея зазвичай розуміють розсіювання молекулами середовища, тому що розміри молекул завжди набагато менші довжини хвилі видимого світла.

Елементарні розсіювачі (диполі), що належать різним молекулам, випромінюють некогерентно, тому що, по-перше, відстань між молекулами достатньо велика і, по-друге, внаслідок руху молекул відбувається флуктуація щільності середовища. З урахуванням цих обставин вважають, що інтенсивність розсіяної хвилі від однієї молекули збільшується пропорційно квадрату числа N_0

диполів в неї. Концентрацію молекул позначимо N . Тоді в одиниці об'єму буду знаходитись $N_0 N$ диполів.

Із електронної теорії дисперсії світла відоме співвідношення

$$\frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{(n^2 - 1)3\epsilon_0}{N_0 N(n^2 + 2)}, \quad (10.16)$$

де n – показник заломлення середовища. Після підстановки (10.16) до (10.15) отримаємо формулу для сили світла, яку розсіює одна молекула

$$J_{1m}(\theta, \varphi) = J_{1d}(\theta, \varphi) N_0^2 = \frac{9\pi^2 \sin^2 \theta}{N^2 \lambda^4} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right)^2 I_0, \quad (10.17)$$

Повний потік світла, розсіяний диполем в усіх напрямках, визначається шляхом інтегрування сили світла в тілесному куті $\Omega = 4\pi$:

$$\begin{aligned} \Phi_{1m} &= \iint_{4\pi} J_{1m}(\theta, \varphi) d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi J_{1m}(\theta, \varphi) d\varphi \sin\theta d\theta = \\ &= \frac{24\pi^3}{N^2 \lambda^4} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right)^2 I_0. \end{aligned} \quad (10.18)$$

Оскільки різні молекули розсіюють некогерентно, то потік світла, розсіяний одиницею об'єму середовища, розраховується множенням виразу (10.18) на концентрацію N молекул. Для газів показник заломлення $n \approx 1$ і тому в формулі (10.18) можна прийняти $n^2 + 2 \approx 3$, $n^2 - 1 = 2(n - 1)$. Тоді потік світла, розсіяний одиницею об'єму середовища, визначається за формулою

$$\Phi_v = \frac{32\pi^3 (n-1)^2}{3N\lambda^4} I_0. \quad (10.19)$$

Із формули (10.19) видно, що **потік розсіяного випромінювання обернено пропорційний четвертій степені довжини хвилі.** Така залежність розсіювання від довжини хвилі називається *законом Релея*.

Законом Релея, пояснюється, наприклад, голубий колір неба і червоний колір Сонця при сході і заході. При сході і заході спостерігається світло, в якому в результаті розсіювання згідно до закону Релея короткохвильова частина спектра (фіолетовий колір) ослаблена значно сильніше довгохвильової частини спектра (червоний колір). В результаті інтенсивність довгохвильової частини спектра зростає і сприймається оком червонуватий колір Сонця. Відносна зміна

інтенсивності різних частин спектра буде помітною лише при достатньо великій відстані. Тому Сонце в зеніті, коли світло проходить незначну товщу атмосфери і розсіювання незначне, колір Сонця майже не змінюється.

При спостереженні неба вдень в око потрапляє розсіяне випромінювання, в якому значно присутня короткохвильова частина спектра, що відповідає голубому кольору. Поза межами атмосфери небо сприймається чорним, а око потрапляють лише прямі промені від зірок.

10.2.3. Кутовий розподіл, поляризація і ослаблення світла при розсіюванні Релея

Кутовий розподіл сили світла, розсіяного однією молекулою поляризованого випромінювання, описується формулою (10.17). **Таке світло аксіально-симетричне відносно лінії, що проходить через диполь в напрямку коливань електричного вектора \vec{E} падаючої хвилі (рис. 10.2). Перпендикулярно до напрямку розповсюдження падаючої хвилі уздовж коливань вектора \vec{E} розсіювання відсутнє. Максимальне розсіювання спостерігається в площині, перпендикулярній напрямку коливань вектора \vec{E} . Розсіяне випромінювання поляризоване – електричний вектор коливається в площині, яка проходить через лінію коливань диполя (вісь z). Якщо розсіювання від різних молекул можна вважати некогерентним, то сила розсіяного випромінювання одиницею об'єму середовища знаходиться множенням (10.17) на концентрацію N молекул. Тому властивості світла, розсіяного однією молекулою, повністю зберігаються для світла, розсіяного в об'ємі.**

Для розрахунку кутового розподілу сили світла, розсіяного однією молекулою неполяризованої хвилі, представимо її у вигляді суми двох хвиль \vec{E}_{\parallel} і \vec{E}_{\perp} , які лінійно поляризовані у взаємно перпендикулярних площинах (див. підрозділ 3.5):

$$\vec{E} = \vec{E}_{\perp} + \vec{E}_{\parallel}, \quad (10.20)$$

Ці поляризовані хвилі мають однакову інтенсивність:

$$I_{\perp} = I_{\parallel} = 0,5I_0, \quad (10.21)$$

де I_0 – інтенсивність хвилі, що розповсюджується в середовищі.

Зрозуміло, що **розсіювання неполяризованого світла повинно бути аксіально-симетричне відносно напрямку променя**. Тому достатньо знайти силу розсіяного світла в площині xz (рис. 10.1) в напрямку, який утворює кут φ з віссю x (рис. 10.3). Направимо вектор \vec{E}_{\perp} уздовж осі z , а вектор \vec{E}_{\parallel} – уздовж осі y . Тоді результуюча сила розсіяного однією молекулою природнього світла згідно (10.17) дорівнює

$$\begin{aligned} J_{n1m}(\varphi) &= J_{\perp 1m}(\varphi) + J_{\parallel 1m}(\varphi) = \\ &= \frac{9\pi^2}{N^2\lambda^4} \left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^2 \left[I_{\perp} \sin^2\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) + I_{\parallel} \sin^2\left(\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi\right) \right] = \\ &= \frac{9\pi^2}{2N^2\lambda^4} \left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^2 [1 + \cos^2\varphi]. \end{aligned} \quad (10.22)$$

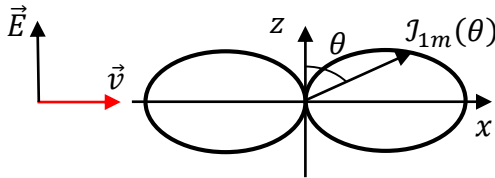


Рис. 10.2. Кутівий розподіл сили світла розсіяного випромінювання від поляризованої хвилі

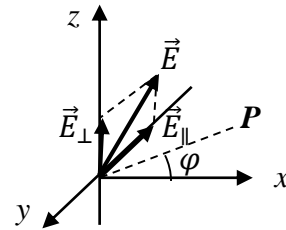


Рис. 10.3. До розрахунку розсіювання природнього світла

Залежність (10.22) наведена на рис. 10.4. Сила розсіяного світла аксіально-симетрична відносно напрямку розповсюдження падаючої хвилі. Розсіювання вперед і назад однакові і розподілені симетрично відносно центра розсіювання.

В формулі (10.22) складова $J_{\perp 1m}(\varphi)$ описує розсіяну лінійно поляризовану хвилю, електричний вектор якої коливається колінеарно осі z , а складова $J_{\parallel 1m}(\varphi)$ – лінійно поляризовану хвилю, електричний вектор якої коливається колінеарно осі y . Щоб звільнитися в опису розсіювання від координатної системи, назовемо

площиною спостереження площину, яка проходить через падаючий промінь і точку спостереження. Тоді можна стверджувати, що складова $J_{\perp 1m}(\varphi)$ в (10.22) описує розсіяну хвилю, електричний вектор якої коливається перпендикулярно площини спостереження, а складова $J_{\parallel 1m}(\varphi)$ – хвилю, електричний вектор якої коливається в площині спостереження. Таким чином, при розсіюванні природнього світла спостерігається частково поляризоване розсіяне випромінювання, ступінь поляризації якого залежить від кута φ і визначається формулою

$$P(\varphi) = \frac{J_{\perp 1m}(\varphi) - J_{\parallel 1m}(\varphi)}{J_{\perp 1m}(\varphi) + J_{\parallel 1m}(\varphi)} = \frac{\sin^2 \varphi}{1 + \cos^2 \varphi}. \quad (10.23)$$

Аналіз функції (10.23) показує:

1. При кутах $\varphi = 0$ і $\varphi = \pi$ обидві компоненти поляризації присутні з однаковою інтенсивністю.
2. При інших кутах φ в розсіюванні більше компонента $J_{\perp 1m}(\varphi)$.
3. В напрямку, перпендикулярному падаючому променю, розсіяне світло повністю поляризоване ($P(\varphi = \pi/2) = 1$).

В результаті розсіювання світло, яке проходить через середовище, ослаблюється, тобто зменшується його інтенсивність. Встановимо закон зменшення інтенсивності пучка променів, які пройшли середовище товщиною l .

Розглянемо паралелепіпед середовища об'ємом dv , на вхідну грань якого площею ds падає пучок променів з інтенсивністю I (рис. 10.5). На вихідній грані інтенсивність пучка зменшиться на величину dI за рахунок розсіювання. Для знаходження величини dI скористаємося формулою (10.19), яку представимо у вигляді:

$$\Phi_v = \gamma_s I_0, \quad (10.24)$$

де γ_s – коефіцієнт розсіювання,

$$\gamma_s = \frac{32\pi^3(n-1)^2}{3N\lambda^4}. \quad (10.25)$$

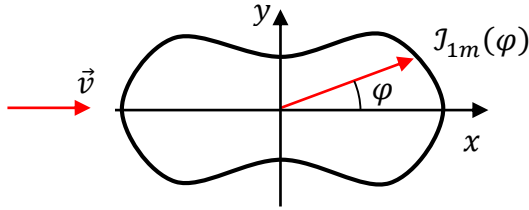


Рис. 10.4. Кутовий розподіл сили світла розсіяного випромінювання від неполяризованої хвилі

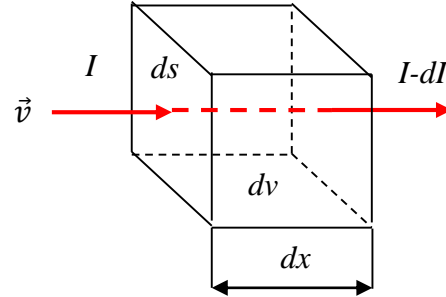


Рис. 10.5 Модель для визначення закону зменшення інтенсивності світла за рахунок розсіювання

Нехай на вхідну грань паралелепіпеда надходить потік випромінювання $d\Phi = Ids$. За рахунок розсіювання цей потік, який пройшов відстань dx до вихідної грані, зменшиться згідно (10.24) на величину

$$dIds = -\Phi_v dv = -\gamma_s Idv = -\gamma_s Idsdx.$$

Звідси отримуємо диференціальне рівняння, яке дозволяє розрахувати закон зміни інтенсивності світла, яке проходить середовище товщиною l :

$$dI = -\gamma_s Idsdx. \quad (10.26)$$

Розв'язком цього рівняння є функція $I(l)$:

$$\int_{I(0)}^{I(l)} \frac{dI}{I} = -\int_0^l \gamma_s dx. \Rightarrow \ln I(l) - \ln I(0) = -\gamma_s l. \Rightarrow I(l) = I(0)e^{-\gamma_s l}. \quad (10.27)$$

Отримана формула (10.27) відповідає закону Бугера (4.49) [9].

10.3. Розсіювання Мі

Теорія Релея добре описує не тільки розсіювання на молекулах, але і малих сферичних частинках, радіус яких менший $0,03\lambda$. При збільшенні розміру частинок відбувається істотне відхилення від законів розсіювання Релея.

Розсіювання Мі відбувається на частинках сферичної форми довільного радіусу r_s . Для дослідження такого виду розсіювання використовують рівняння Максвелла, розв'язком яких є нескінченні ряди зі змінною $\alpha = kr_s = 2\pi r_s/\lambda$. Тому закономірності розсіювання залежать не від радіусу частинок, а від

відносного їх розміру порівняно з довжиною хвилі. Якщо $\alpha < 0,2$, то розсіювання становиться релєєвским, тобто розсіювання Релея є граничним випадком розсіювання Мі.

Великі частинки складаються з багатьох молекул, диполі яких під впливом електромагнітної хвилі стають джерелами вторинних хвиль, що утворюють розсіяне випромінювання. В цьому відношенні механізми розсіювання Мі і Релея однакові.

Відмінність цих двох розсіювань полягає в наступному:

1. Частинка великих розмірів знаходиться в неоднорідному електричному полі світлової хвилі, що призводить до випромінювання молекулами хвиль з різними початковими фазами.

2. Розсіяні молекулами хвилі інтерферують між собою з різними фазами, які залежать від відстані між молекулами частинки і точкою спостереження, а також від початкових фаз випромінювання молекулами. Це призводить до виникнення максимумів і мінімумів в розсіяному світлі в залежності від напрямку спостереження.

3. Із збільшенням відносного розміру частинок виникає асиметрія стосовно розсіювання уздовж напрямку поширення світла (рис. 10.6 і 10.7). При значних розмірах частинок спостерігається переважне розсіювання вперед, а також виникнення додаткових бокових максимумів.

4. Розсіяне світло частково поляризовано, що характерно для обох видів розсіювання. Стан поляризації залежить від оптичних властивостей частинок і напрямку, в якому спостерігається розсіяне світло.

5. **Важливою особливістю розсіювання Мі є його слабка залежність від довжини хвилі для частинок, розміри яких набагато більші за довжину хвилі, що істотно відрізняється від розсіювання Релея.** Завдяки цьому, наприклад, хмари і туман білі. Мала прозорість туману обумовлена сильним розсіюванням малими краплями води.

6. В залежності від спектрального діапазону для одних і тих же частинок може спостерігатися розсіювання Релея або Мі. Наприклад, для частинок розміром $r_s = 0,1$ мкм маємо: для видимого діапазону $\alpha = \frac{2\pi 0,1}{0,5} = 1,3$ – розсіювання Мі; для інфрачервоного діапазону $\alpha = \frac{2\pi 0,1}{10} = 0,06$ – розсіювання Релея.

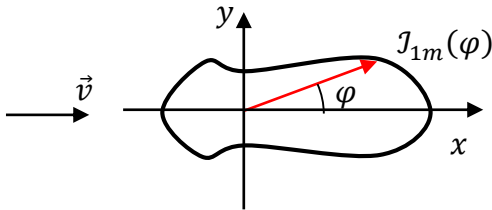


Рис. 10.6. Розсіювання Мі, коли $r_s \approx \lambda/4$

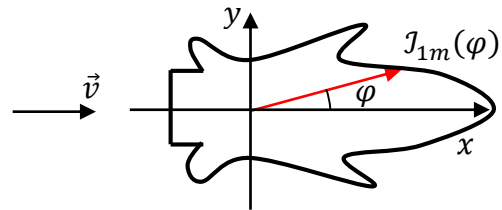


Рис. 10.7. Розсіювання Мі, коли $r_s \approx \lambda$

10.4. Розсіювання Мандельштама – Бріллюена

Такий вид розсіювання відбувається на акустичній хвилі, яка розповсюджується в середовищі. Звукова хвиля являє собою пружні коливання, які визивають гармонічні зміни показників заломлення і пропускання середовища, тобто в середовищі виникає гармонічна дифракційна ґратка із змінним коефіцієнтом пропускання.

При дифракції світла на такій ґратці виникають два дифракційні максимуми першого порядку. Амплітуда пропускання ґратки змінюється з частотою звукової хвилі Ω_v . Тому амплітуда поля в дифракційних максимумах змінюється по закону

$$E(t) = E_0 \cos \Omega_v t \cos \omega t = \frac{1}{2} E_0 [\cos(\omega + \Omega_v) t + \cos(\omega - \Omega_v) t], \quad (10.28)$$

де ω – частота падаючої хвилі. Таким чином, в розсіяному світлі дві сателітні частоти, розташовані симетрично відносно основної частоти (рис. 10.8). Сателіт з частотою $\omega - \Omega_v$ називається *стоксовим*, а з частотою $\omega + \Omega_v$ –

антистоксовим. Вони являються компонентами розсіювання Мандельштама – Бріллюена.

При дифракції світла відбувається відхилення променя, що еквівалентно розсіюванню світла. Встановимо взаємозв'язок між частотою звукової хвилі Ω_v , частотою світла ω і кутом дифракції φ_1 . Із рівняння дифракційної ґратки, яка знаходиться в середовищі з показником заломлення n , для першого порядку дифракції маємо

$$nds\sin\varphi_1 = \lambda. \quad (10.29)$$

Частоту звукової хвилі представимо у вигляді

$$\Omega_v = \frac{2\pi v_v}{d} = \frac{2\pi v_v}{\lambda} n\sin\varphi_1 = 2\omega n \frac{v_v}{c} n\sin\frac{\varphi_1}{2}, \quad (10.30)$$

де v_v – швидкість розповсюдження звукових хвиль в середовищі. Для малих кутів дифракції $\sin\varphi_1 \approx 2\sin(\varphi_1/2)$. Співвідношення (10.30) називається *формулою Мандельштама – Бріллюена.*

10.5. Комбінаційне розсіювання світла

Комбінаційне розсіювання світла (КРС) речовиною (ефект Рамана) супроводжується помітною зміною частоти розсіяного світла. Якщо джерело випромінює лінійчатий спектр, то при КРС в спектрі розсіяного випромінювання виявляються додаткові лінії, число і розташування яких тісно пов'язано з будовою речовини. Такий тип розсіювання світла є аналогом люмінесценції. КРС було відкрито в 1928 році радянським фізиком Г.С. Ландау і індійським фізиком Ч.В. Раманом.

При КРС перетворення первинного світлового потоку супроводжується зазвичай переходом молекул розсіювання на інші коливні або обертальні енергетичні рівні. При цьому частоти нових ліній в спектрі розсіювання являються комбінацією частоти падаючого світла і частот коливних або обертальних частот молекули розсіювання. Звідси і назва «комбінаційне розсіювання світла». Класична інтерпретація КРС дозволяє зрозуміти тільки

сутність комбінаційних частот, але не в змозі пояснити кількісні закономірності. КРС являється квантовим по своїй природі і може бути описано лише квантовою теорією.

Кожна молекула має електронні і коливні енергетичні рівні. Згідно квантової теорії, процес КРС складається із двох процесів – поглинання первинного фотона з енергією $h\nu$ і випромінення фотона з енергією $h\nu'$, які відбуваються в результаті взаємодії електронів молекули з електричним полем падаючої світлової хвилі. КРС часто пов'язане з переходами коливних рівнів молекул. Молекула поглинає квант падаючого випромінювання з енергією $\mathcal{E}_a = h\nu$. Частина цієї енергії $\mathcal{E}_{ci} = h\nu_i$ поглинається і молекула переходить на більш високий коливний рівень. Енергія, що залишилася, випромінюється з енергією $\mathcal{E}_s = h(\nu - \nu_i)$ (рис.10.9). Так утворюється стоксова компонента.

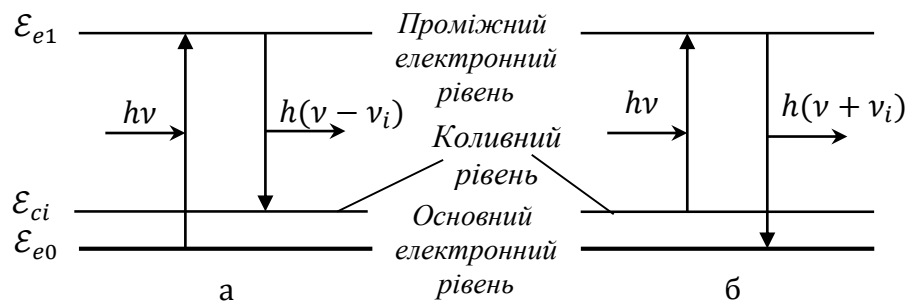


Рис. 10.9. Енергетична модель формування стоксового (а) і антистоксового (б) комбінаційного розсіювання

Антистоксова компонента утворюється у випадку, коли коливні рівні молекул достатньо збуджені при відповідній температурі. Квант випромінювання $\mathcal{E}_a = h\nu$ поглинається молекулою, що знаходиться на збудженому коливному рівні. Після поглинання молекула переходить на більш низький коливний рівень, вивільнена при цьому енергія $\mathcal{E}_{ci} = h\nu_i$ приєднується до енергії поглинання, а молекула випромінює квант з енергією $\mathcal{E}_s = h(\nu + \nu_i)$ (рис.10.9). Так утворюється антистоксова компонента.

Кожна молекула має свій набір коливних частот. Спектр КРС складається із системи супутників, розташованих симетрично відносно лінії збудження з частотою ν (рис. 10.10). Кожному супутнику з частотою $\nu - \nu_i$ (червоний, або стоксовий супутник) відповідає супутник з частотою $\nu + \nu_i$ (фіолетовий, або антистоксовий супутник), де ν_i – одна із власних частот коливань молекули.

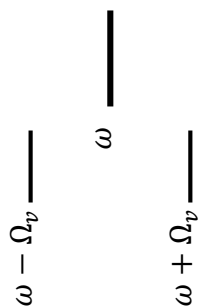


Рис. 10.8. Спектральні компоненти розсіювання Мандельштама – Бріллюена

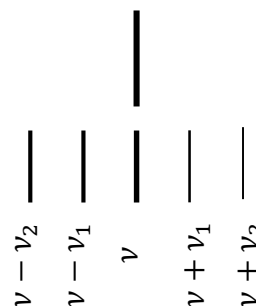


Рис. 10.10. Спектральні компоненти комбінаційного розсіювання

Зрозуміло, що при низьких температурах число молекул, які можуть приймати участь в випромінюванні стоксових компонент, значно більше числа молекул, які можуть приймати участь в випромінюванні антистоксових компонент. Цим пояснюється, що інтенсивність стоксових компонент більша антистоксових.

КРС дає прямий метод дослідження будови молекул шляхом вимірювання частот власних коливань, досліджувати симетрію молекул та склад молекулярної суміші.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Борн М. Основы оптики : монография / М. Борн, Э. Вольф. – М. : Наука, 1973. – 720 с.
2. Гудмен Дж. Введение в Фурье-оптику : монография / Дж. Гудмен. – М. : Мир, 1970. – 364 с.
3. Годжаев Н. М. Оптика: учеб. для студ. высш. учеб. завед. / Н. М. Годжаев. – М. : Высш. шк., 1977. – 432 с.
4. Колобродов В. Г. Дифракційна теорія оптичних систем : підруч. / В. Г. Колобродов, Г. С. Тимчик. – Київ : НТУУ «КПІ», 2011. – 140 с.
5. Стафеев С. К. Основы оптики : учеб. пособие / С.К. Стафеев, К.К. Боярский, Г.Л. Башнина. – СПб.: Питер, 2006. – 336 с.
6. Матвеев А.Н. Оптика : учеб. пособие / А. Н. Матвеев. – М. : Высш. шк., 1985. – 351 с.
7. Коваленко В. Ф. Розв'язування задач з курсу «Загальна фізика» (Р. «Оптика») : навч. посіб. / В. Ф. Коваленко, В. Г. Колобродов. – Київ : ВТЦ «Київ. ун-т», 2005. – 188 с.
8. Физический энциклопедический словарь / гл. ред. А. М. Прохоров. – М. : Сов. энциклопедия, 1984. – 944 с.
9. Колобродов В. Г. Хвильова оптика. Електромагнітна теорія світла та інтерференція: підруч. / В. Г. Колобродов. – Ч. 1. – Київ : НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2017. – 208 с.
10. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стинга; пер. с англ. – М. : Наука, 1979. – 832 с.
11. Прудников А. П. Интегралы и ряды. Элементарные функции : монография / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – М. : Наука, 1981. – 798 с.