МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

ОПТИЧНІ ВИМІРЮВАННЯ

МЕТРОЛОГІЧНА ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАННЯ

Методичні вказівки
до самостійної роботи студентів
напряму підготовки 6.051004 "Оптотехніка"

Київ
НТУУ «КПІ»
2011

Оптичні вимірювання: Метрологічна обробка результатів вимірювання: Метод. вказівки до самостійної роботи студентів напряму підготовки 6.051004 "Оптотехніка" / Уклад.: Л.А. Міхеєнко, М.С. Рибалко. – К.: НТУУ «КПІ», 2011. – 38с.

Гриф надано Методичною радою НТУУ «КПІ»
(Протокол № від 2011 р.)

Електронне навчальне видання

ОПТИЧНІ ВИМІРЮВАННЯ

МЕТРОЛОГІЧНА ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАННЯ

Методичні вказівки
до самостійної роботи студентів
напряму підготовки 6.051004 "Оптотехніка"

Укладачі: Міхеєнко Леонід Андрійович
Рибалко Марина Сергіївна

Відповідальний
Редактор Колобродов Валентин Георгійович

Рецензент Порєв Володимир Андрійович

ВСТУП

Методичні вказівки з дисципліни «Оптичні вимірювання» призначені для студентів приладобудівного факультету НТУУ «КПІ», які навчаються по оптичним і спорідненим приладобудівним спеціальностям.

В методичних вказівках розглядаються питання метрології, оптичних вимірювань, характеристик і параметрів вимірювальної апаратури, отримання та обробки вимірювальної інформації.

Крім теоретичного розділу методичні вказівки містять практичні приклади і довідковий матеріал щодо метрологічної обробки результатів вимірювання в лабораторних роботах і науково-дослідній роботі студентів.

1. Вихідні положення теорії вимірювань

1.1.Основні визначення та поняття

Вимірювання – це знаходження значення фізичної величини дослідним шляхом за допомогою спеціальних технічних засобів. Кожного разу, коли ведуть вимірювання, знаходять яку частину одиниці або ціле число одиниць складає вимірювана величина. Одиницею вимірювання є умовно прийнята м і р а, що увійшла до практики вимірювань.

Обов'язковими компонентами будь-якого вимірювання є метод вимірювання і засіб вимірювання.

Оптичні вимірювання – це такі вимірювання, коли вимірювальна інформація міститься в параметрах оптичного випромінювання. Методи і засоби оптичних вимірювань зручно класифікувати по тих оптичних явищах, які лежать в їх основі:

інтерференція – інтерференційні вимірювання – інтерферометри;

рефракція – рефрактометричні вимірювання – рефрактометри;

поляризація – поляризаційні вимірювання – поляриметри;

і т. п.

Якість вимірювань характеризується похибкою вимірювань (Δ), під якою розуміють відхилення результату вимірювання від дійсного значення вимірюваної величини.

За формою виразу розрізняють абсолютні (Δ) і відносні (δ) похибки.

Абсолютна похибка - похибка, виражена в одиницях вимірюваної величини:

$$\Delta = a - a_o,$$

де a_o – дійсне значення вимірюваної величини, a – результат вимірювання.

Відносна похибка - похибка, виражена в долях дійсного значення вимірюваної величини:

$$d = \frac{a - a_o}{a_o}$$

Похибка характеризує недосконалість вимірювань; їх позитивною характеристикою є точність (T). Точність це якість вимірювань, що відображає близькість їх результатів до дійсного значення вимірюваної величини.

Вимірювання тим точніше, чим менша його похибка. Проте абсолютні похибки в загальному випадку залежать від значення вимірюваної величини, тому не підходять для кількісної характеристики точності. Отже, точність кількісно характеризується числом, рівним зворотному значенню відносної похибки

$$T = \frac{1}{d}, \qquad d = 1\% = \frac{1}{100}, \qquad T = 100 .$$

Хоча таким чином і можливо ввести кількісну характеристику точності, в метрології точність характеризується побічно, за допомогою похибки вимірювання.

Введення фізичних величин і встановлення їх одиниць є необхідною передумовою вимірювань. Проте всяке вимірювання завжди виконується стосовно конкретного об'єкта. І загальне визначення вимірюваної фізичної величини необхідно конкретизувати, враховуючи властивості даного об'єкта і мету вимірювання.

Реальні об'єкти замінюються моделями, параметри яких можна визначити. Наприклад, вимірювання діаметру диска. Ми вважаємо, що диск має форму круга. Круг і діаметр круга поняття математичні, тобто абстрактні. Круг – це модель диска, а діаметр круга – вимірюваний параметр моделі.

Ідеалізація, необхідна для побудови моделі і обумовлює неминучу невідповідність між параметром моделі і реальною властивістю об'єкта. Ця невідповідність називається пороговою.

Похибка, обумовлена пороговою невідповідністю, повинна бути меншою від повної похибки вимірювання. Якщо ця складова похибки перевищує межу похибки вимірювання, що припускається, то вимірювання з необхідною точністю стає неможливим, що свідчить про непридатність моделі і необхідність її заміни.

Похибки вимірювання не можна знайти безпосередньо за її визначенням, оскільки дійсне значення вимірюваної величини невідоме. Завдання оцінювання похибки полягає в тому, щоб охарактеризувати невизначеність отриманого при вимірюванні результату. Невизначеність результату вимірювання найчастіше характеризується вказівкою меж похибки результату вимірювань. Якщо ці межі знаходять так, що вони відповідають деякій вірогідності, то їх називають довірчими межами похибки результату вимірювань або довірчою похибкою. Якщо ж межі похибки оцінюють так, що є підстави стверджувати, що похибки, які виходить за ці межі, зустріти не можна, то їх називають граничними похибками вимірювання. Природно, що під граничною похибкою розуміють максимальну похибку, яку не можуть перевищити похибки даного вимірювання.

Точність вимірювання повинна відповідати меті вимірювання. Недостатня точність може привести до ухвалення помилкових рішень, а зайва точність веде до невиправданої витрати засобів.

1.2. Види вимірювань

За способом знаходження числового значення шуканої фізичної величини розрізняють прямі, непрямі, сукупні і сумісні вимірювання.

При прямих вимірюваннях шукане значення величини знаходять безпосередньо з дослідних даних – прямим порівнянням вимірюваної величини із мірами або за допомогою вимірювального приладу, проградуйованого в одиницях вимірювання (ваги з шкалою, термометр, амперметр).

При непрямих вимірюваннях шукане значення величини знаходять за допомогою обчислень на підставі відомої залежності між цією величиною і величинами, що піддаються прямим вимірюванням (наприклад, знаходження об'єму по довжині, ширині, висоті).

Сукупні вимірювання – це вимірювання, при яких значення декількох однорідних величин знаходять на основі вимірювань різних комбінацій цих величин і вирішення відповідних систем рівнянь.

Сумісні вимірювання – це одночасні вимірювання двох і більше різнорідних величин для знаходження параметрів залежності між ними (наприклад, вимірювання швидкості).

Прямі вимірювання можуть бути здійснені декількома методами.

Методом безпосередньої оцінки (наприклад, по стрілочному приладу).

Диференціальним методом (безпосередньо знаходиться різниця між шуканою величиною і відомою).

Нульовим або компенсаційним методом (вимірювана величина врівноважується відомою величиною).

Методом <u>збігів</u> (різниця між вимірюваною величиною і відомою, відтворною мірою, вимірюють використовуючи збіг відміток шкал – ноніусна шкала).

Вимірювання ділять на статичні та динамічні.

Під <u>статичним</u> режимом засобу вимірювань розуміють режим, при якому вихідний сигнал можна вважати незмінним.

Під <u>динамічним</u> режимом розуміють режим, при якому вихідний сигнал змінюється в часі так, що цю зміну необхідно враховувати.

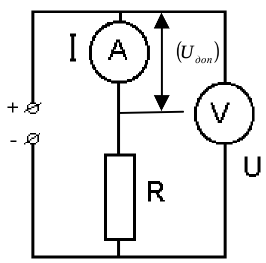
1.3. Види похибок вимірювань

По внеску в загальну похибку вимірювання (Δ_e) розрізняють:

<u>Методичні</u> похибки (Δ_M), які виникають внаслідок недостатньої розробленості теорії явищ, покладених в основу вимірювання, зокрема через порогову невідповідність.

Наприклад, вимірювання опору резистора по формулі $R = \dfrac{U}{I}$ супроводжується методичними похибками:

1

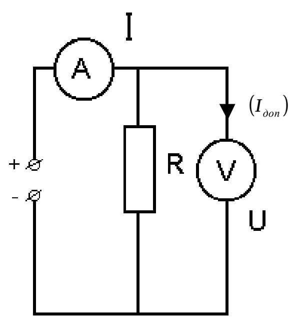


Вольтметр показує додаткове падіння напруги $(U_{дод})$ на амперметрі.

$R_A > 0$

$\Delta R \approx (U_{дод})$

2

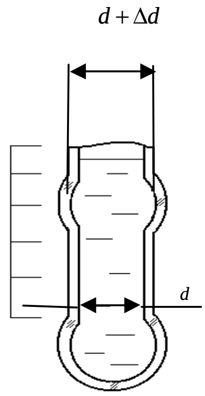


Показання амперметра завищені на величину струму $(I_{дод})$, що проходить через вольтметр.

$R_V < \infty$

$\Delta R \approx (I_{дод})$

Інструментальні похибки (Δ_i) – виникають через недосконалість засобів вимірювання.



Наприклад, похибки термометра через нерівномірність діаметра трубки (Δd).

Особисті похибки (Δ_o) – помилки оператора.

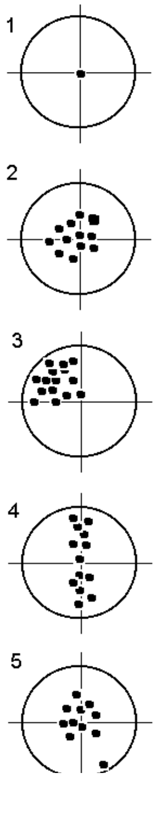
Сумарна похибка рівна сумі окремих складових:

$$\Delta_\Sigma = \Delta_M + \Delta_i + \Delta_o$$

По причинах виникнення розрізняють систематичні і випадкові похибки.

Систематична похибка – складова похибки, яка залишається постійною або закономірно змінюється при повторних вимірюваннях однієї і тієї ж величини. Виявлена і оцінена систематична похибка виключається з результату вимірювання шляхом поправки.

Випадкова похибка обумовлена розсіюванням результатів і для окремих вимірювань індивідуально непередбачувана. Будь-які закономірності, характерні для даних похибок, виявляються лише на значному числі результатів.



Груба похибка – похибка, що істотно перевищує похибку, виправдану умовами вимірювання, методом, кваліфікацією оператора. Грубі похибки виявляються статистичними методами і виключаються.

Приклад – стрілянина по мішені:

1 – похибки відсутні

2 – Присутні тільки випадкові похибки

3 – Присутні випадкова і постійна систематична похибки

4 – Присутні випадкова і змінна систематична похибки

5 – Присутні й випадкова і груба похибки.

По наявності або відсутності функціонального зв'язку між похибкою вимірювання і значенням вимірюваної величини розрізняють адитивну і мультиплікативну похибки.

Адитивна похибка не залежить від значення вимірюваної величини.

Мультиплікативна похибка (виходить шляхом множення) залежить від значення вимірюваної величини.

Властивості випадкових похибок.

Спостереженнями були встановлені наступні властивості випадкових похибок:

1. Випадкові похибки не можуть перевершувати по абсолютній величині певної межі.
2. Позитивні і негативні випадкові похибки однаково часто зустрічаються у ряді вимірювань.
3. Чим більше абсолютна величина випадкової похибки, тим рідше вона зустрічається у ряді вимірювань.
4. Середнє арифметичне з випадкових похибок вимірювання однієї величини за однакових умов наближається до нуля при необмеженому збільшенні числа вимірювань.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\Delta_1+\Delta_2+\ldots+\Delta_n\right)=0 \qquad (1.1)$$

1.4. Засоби вимірювань

Засоби вимірювань ділять на міри, вимірювальні перетворювачі, вимірювальні прилади, вимірювальні установки, і вимірювальні системи.

Міра – засіб вимірювання, відтворюючий фізичну величину відомого (заданого) розміру.

Вимірювальний перетворювач – засіб вимірювання, призначений для перетворення сигналів вимірювальної інформації у форму доцільну для передачі, обробки, зберігання. Вимірювальна інформація на виході перетворювача, як правило, недоступна для безпосереднього сприйняття оператором (термопара).

Вимірювальний прилад – засіб вимірювання, призначений для перетворення сигналів вимірювальної інформації у форму, доступну для безпосереднього сприйняття оператором. Загальною для всіх вимірювальних приладів є наявність відлікових шкал і пристроїв.

Вимірювальна установка – сукупність функціонально і конструктивно об'єднаних засобів вимірювань і допоміжних пристроїв, призначена для раціональної організації вимірювання. Вимірювальна установка дозволяє передбачити певний метод вимірювання і заздалегідь оцінити похибку вимірювання (оптична лава і тому подібне).

1.5. Характеристики вимірювального приладу

Будь-який вимірювальний прилад (засіб вимірювання) можна розглядати як перетворювач вхідного сигналу x у вихідний сигнал y. Вимірювана приладом величина (переміщення об'єкта, потужність випромінювання і т. д.) служить вхідним сигналом. Вихідний сигнал матиме різний вигляд залежно від способу видачі інформації (переміщення стрілки гальванометра, зміна напруги і т. д.).

Розрізняють динамічний і статичний режими вимірювань. У першому випадку вхідний і вихідний сигнали змінюються з часом, в другому – зберігають постійні значення.

Закони перетворення сигналів при динамічному і статичному режимах виражаються відповідно через динамічні і статичні характеристики.

Динамічна характеристика виражається аналітично у вигляді диференціального рівняння, що зв'язує вхідну величину x і вихідну y і їх похідні

$$f_1\left[x^{(n)}, x^{(n-1)} \ldots x\right] = f_2\left[y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots y\right]$$

Відношення зображень вихідного і вхідного сигналів за нульових початкових умов називається передавальною функцією приладу.

Статичною характеристикою називають залежність між сталими значеннями вихідного і вхідного сигналів (рис. 1.1):

$$y = f(x) \tag{1.2}$$

Статичну характеристику можна отримати з динамічної при рівності нулю всіх похідних. Для вимірювальних приладів, забезпечених відліковою шкалою, залежність (1.2) є також рівнянням шкали. Статичну характеристику називають також функцією перетворення сигналу (ФПС) або градуювальною характеристикою.

Залежно від завдань вимірювання, ФПС може бути лінійною, нелінійною, такою, що проходить і не проходить через початок координат.

Найменші значення сигналів x і y називаються нижніми межами вимірювання приладу по входу і виходу, а найбільші – відповідно верхніми межами.

Діапазон вимірювання (R) рівний різниці між верхніми і нижніми межами вимірювань.

По входу $\quad R_x = x_B - x_H$

По виходу $\quad R_y = y_B - y_H$

Похідна вихідного сигналу по вхідному називається чутливістю вимірювального приладу (S) або статичним передавальним коефіцієнтом (т. А)

$$S = \frac{dy}{dx}$$

$f,(x^{(n)},x^{(n+1)},...x)$

$f,(y^{(n)},y\ \ ,...y)$

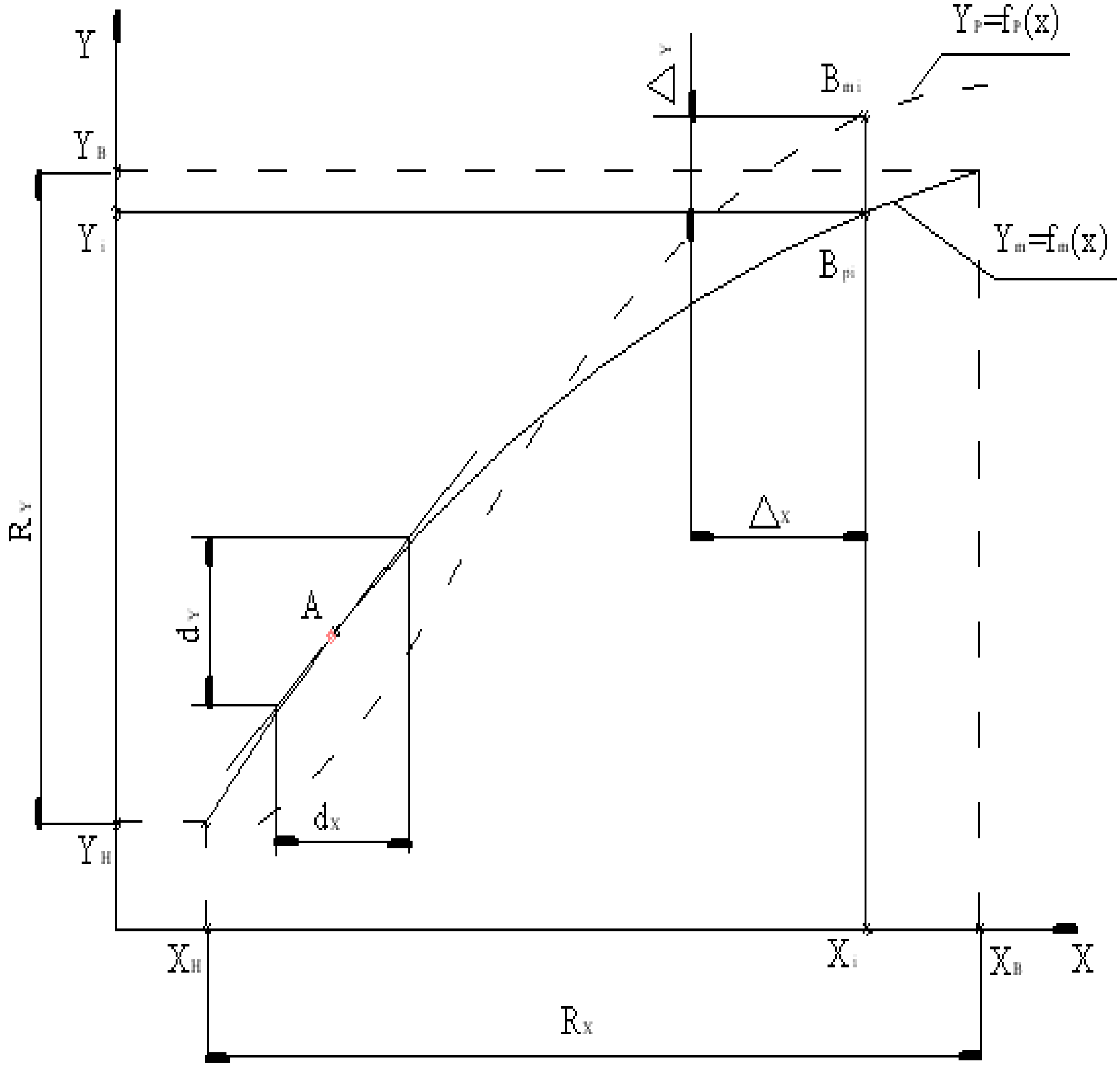


Рис.1.1. Функція перетворення сигналу засобів вимірювання

Середня чутливість ($\bar{S}$) рівна відношенню діапазонів вимірювання по виходу і входу

$$\bar{S} = \frac{R_y}{R_x}$$

По графіку ФПС часто оцінюють похибки вимірювального приладу, для чого на графік теоретичної характеристики наносять графік вихідного сигналу реального приладу. Абсолютна похибка $(\Delta x, \Delta y)$ – різниця ординат кривих $f_m(x)$ і $f_p(x)$ по виходу (Δy) і входу (Δx) (т. В).

Відносна похибка (d_x, d_y) – відношення абсолютної похибки до поточного значення вимірюваного параметра

$$d_x = \frac{\Delta x}{x}; \quad d_y = \frac{\Delta y}{y}$$

Відношення абсолютної похибки до діапазону вимірювань називається приведеною відносною похибкою (γ_c, γ_y).

$$\gamma_x = \frac{\Delta x}{R_x} \quad ; \quad \gamma_y = \frac{\Delta y}{R_y}$$

Найбільш допустиме значення приведеної відносної похибки ($\gamma_{\max}$), виражене у відсотках, називається класом точності вимірювального приладу (А).

$$А = \gamma_{\max} \cdot 100$$

По класу точності, який вказується на шкалі приладу, і по діапазону вимірювання можна визначити максимальну похибку:

$$\left.\begin{matrix} A = 2 \\ R_x = 100\ \text{мА} \end{matrix}\right\} \begin{matrix} g_{\max} = \dfrac{A}{100} = \dfrac{2}{100} = 0{,}02 \\ \Delta X_{\max} = g_{\max} R_x = 0{,}02 \cdot 100 = 2\ \text{мА} \end{matrix}$$

Для приладів, що працюють в нульовому (що стежить) режимі часто використовують термін "порогова чутливість", під яким розуміють найменший приріст вхідного сигналу (Δx_n), що забезпечує виявлення вихідного сигналу (y_n). Іншими словами, якщо вхідний сигнал X знаходиться в межах $\pm Dx_n$, то він не може бути виявлений даним приладом.

2. Метрологічна обробка результатів вимірювань

2.1. Випадкові величини і способи їх описання

Випадковою називають таку величину, яка залежно від випадку приймає те або інше чисельне значення. Оскільки закономірності в появі цих значень немає, аналіз таких величин може проводитися тільки методами теорії вірогідності.

Для характеристики випадкової величини необхідно знати сукупність можливих значень цієї величини, а також вірогідність, з якою ці значення можуть з'являтися.

Повністю властивості випадкової величини описуються функцією розподілу $F(x)$, яка визначає вірогідність того, що випадкова величина X_p буде менша, ніж $x_ф$

$$F(x)=P(X_p < x_ф)$$

де X_p – певна випадкова величина (реалізація), $x_ф$ – фіксоване значення випадкової величини.

Функція розподілу (рис. 2.1) визначена таким чином, що $F(-\infty)=0$, а $F(+\infty)=1$.

Разом з функцією $F(x)$, званою інтегральною, широко застосовується диференціальна функція, яку зазвичай називають щільністю розподілу $f(c)$

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}$$

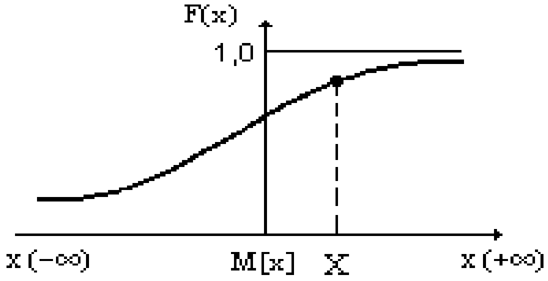


Рис. 2.1. Функція розподілу

Щільність розподілу – функція розмірна

$$\dim(x)=\dim\frac{1}{x}$$

Щільність розподілу (рис. 2.2) вказує як часто з'являється випадкова величина X_p у деякій околиці точки $x_ф$ – при повторному досліді

$$P(x_1<x_p<x_2)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx=F(x_2)\text{-F}(x_1)$$

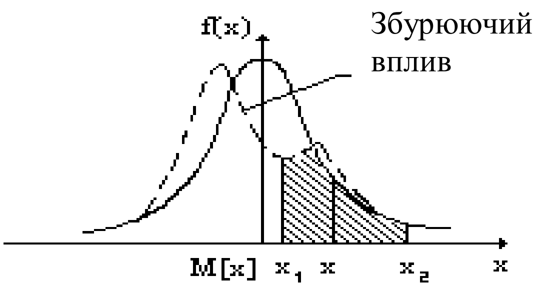


Рис. 2.2. Щільність розподілу

Площа під кривою f(x) рівна вірогідності появи будь-якого з можливих значень *x* тобто рівна 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$$

Для практичних цілей замість повного статистичного опису властивостей сукупності випадкових величин *x* часто обмежуються тільки вказівкою деяких особливих характеристик цієї сукупності – моментів розподілу – початкових (M) і центральних (η).

Початковим моментом k-*го* порядку випадкової величини x називають математичне очікування k-го степеня

$$m_k(x) = M[x]^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx$$

Серед початкових моментів найбільш важливим є перший

$$m_1(x) = M[x] = m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$$

Перший початковий момент характеризує положення центру розподілу – точки, до якої тяжіє сукупність значень випадкової величини (значення x- координати центру тяжіння фігури, підкреслений віссю абсцис і кривою розподілу цієї випадкової величини).

Центральним моментом k-го порядку випадкової величини x називають математичне очікування k-го степеня її відхилення від середнього значення

$$h_k(x) = M[x - M[x]]^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[x])^k f(x)dx$$

Перший центральний момент завжди рівний 0

$$h_1(x) = M[x - M[x]] = M[x] - M[x] = 0$$

Другий центральний момент $h_2(x)$ характеризує розсіювання випадкової величини x, розкид її значень відносно центру групування і називається дисперсією $\mathrm{D}[x]$

$$h_2(x) = M[x - M[x]]^2 = D[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[x])^2 f(x)dx$$

Розмірність дисперсії відмінна від розмірності випадкової величини x, тому замість дисперсії часто застосовують додатній корінь з неї, який називають середнім квадратичним відхиленням. (С.К.В)

$$\text{СКВ} = \sigma[x] = \sigma_x = +\sqrt{D[x]}$$

Способи статистичного опису властивостей випадкових величин відносяться до їх нескінченної сукупності. Оскільки на практиці число спостережень n значень величини x обмежене, за даними такої випадкової вибірки $x_1,\ x_2 \dots\ x_n$ визначити дійсні значення невідомих параметрів розподілу m_x і σ_x неможливо. Замість їх визначаються тільки їх статистичні оцінки, які будучи функціями членів вибірки, відхиляються від дійсних значень відповідних параметрів.

Оцінкою дійсного значення математичного очікування випадкової величини x є <u>середнє арифметичне вибірки</u>

$$M[x] \approx \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (2.1)$$

При великому числі n значень випадкової величини x у вибірці, оцінки їх С.К.В. можна обчислювати за формулою

$$s_x \approx \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)^2}{n}}$$

Для малих n застосовують формулу Бесселя, в яку вводиться поправочний множник для зменшення зсуву

$$s \approx \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x)^2}{n-1}}$$

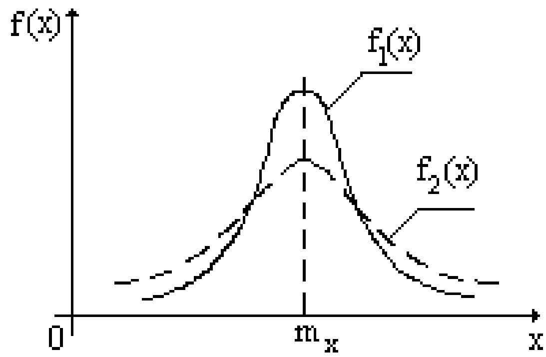
У практиці точних вимірювань найчастіше мають справу з нормальним розподілом результатів вимірювання (рис. 2.3).

Для цього розподілу функція щільності розподілу і інтегральна функція визначається виразами:

$$f_н(x) = \frac{1}{s_x\sqrt{2p}}\, e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2s_x^{\ 2}}}$$

$$F_н(x) = \frac{1}{s_x\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2s_x^{\ 2}}}\, dx$$

де s_x і m_x - с.к.в. і мат. очікування випадкової величини x



$s_{1x} < s_{2x}$

Рис. 2.3. Щільність розподілу нормального закону

Особливості нормального розподілу

1. Крива щільності розподілу симетрична щодо ординати, що проходить через точку m_x.
2. Крива має один максимум при $x = m_x$

$$f_н(x)_{max} = \frac{1}{s_x \sqrt{2p}}$$

3. При $|x| \to \infty$ гілки кривої асимптотично наближаються до осі абсцис.

4. $\int_{-s_x}^{+s_x} f_н(x)dx = 0,683$ $\int_{-3s_ч}^{+3s_ч} f_н(x)dx = 0,997$

$\int_{-2s_x}^{+2s_x} f_н(x)dx = 0,954$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f_н(x)dx = 1$

2.2. Оцінка точності вимірювання однієї величини

Нехай дійсне значення деякої величини, яке потрібно виміряти рівне a_0. Для підвищення точності вимірювання a_0 проводять декілька (n) незалежних вимірювань. Внаслідок наявності неминучих похибок вимірювання, в кожному вимірі величина набуває значення *a*, відмінного від a_0 на величину похибки Δ_i

$$a_1 = a_0 + D_1$$

$$a_2 = a_0 + D_2$$

$$...$$

$$a_n = a_0 + D_n$$

Вважатимемо, що похибки вимірювань обумовлені дією тільки випадкових чинників і є випадковими. З властивості випадкових похибок відомо, що середнє арифметичне випадкових похибок рівно нулю при достатньо великому числі вимірювань (1.1):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i ,=0$$

тому використовувати його для оцінки точності вимірювань не можна.

Найкращим критерієм є середня квадратична похибка, квадрат якої рівний середньому арифметичному квадратів окремих випадкових похибок

$$s_D{}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i{}^2 ; \qquad D_i = a_i - a_0$$

Оскільки на практиці в більшості випадків значення a_0 невідомо (за винятком вимірювань в порівнянні з еталоном), середньоквадратична похибка визначається по формулі Бесселя

$$s_\Delta = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(a_i - \bar{a}\right)^2} , \tag{2.2}$$

де як оцінка дійсного значення вимірюваної величини a_0 приймається її середньоарифметичне значення $\overline{a}$, тобто вважають $a_0 = \overline{a}$,. Ця рівність тим точніше, чим більше *n*.

Важливою властивістю середньоквадратичної похибки є її надійність при обмеженому числі вимірювань.

Похибки вимірювань зазвичай підкоряються нормальному закону розподілу з параметрами (рис. 2.4)

$m_D = 0$ – математичне очікування

s_D – середньоквадратичне відхилення

$$f_н(D) = \frac{1}{s_D\sqrt{2p}} e^{-\frac{(D-m_D)^2}{2s_D^2}} = \frac{1}{s_D\sqrt{2p}} e^{-\frac{D^2}{2s_D^2}}$$

Результат вимірювання також є в цьому випадку нормально розподіленою величиною ($a_i = a_0 + D_i$) з параметрами

$$m_a = a_0 \approx \overline{a}$$

$$s_a = s_\Delta$$

$$f_н(a) = \frac{1}{s_a\sqrt{2p}} e^{-\frac{(a-m_a)^2}{2s_a^2}} \approx \frac{1}{s_\Delta\sqrt{2p}} e^{-\frac{(a-\overline{a})^2}{2s_\Delta^2}}$$

Як випливає з нормального закону розподілу, похибка вимірювання Δ величини a в окремих вимірюваннях з вірогідністю 0,997 не перевершує $\pm 3s_a$. Це значення похибки приймається як максимальне

$$\Delta_{a\max} = \pm 3s_a = \pm 3s_\Delta$$

Практично всі результати окремих вимірювань величини a (99,7%) знаходяться в межах

$$(\overline{a} - 3s_a) < a_i < (\overline{a} + 3s_a) \qquad (2.3)$$

Ті виміри $a_{i,}$ похибка яких по абсолютному значенню перевершує $3s_a$ відкидається як явні викиди (рис.2.4).

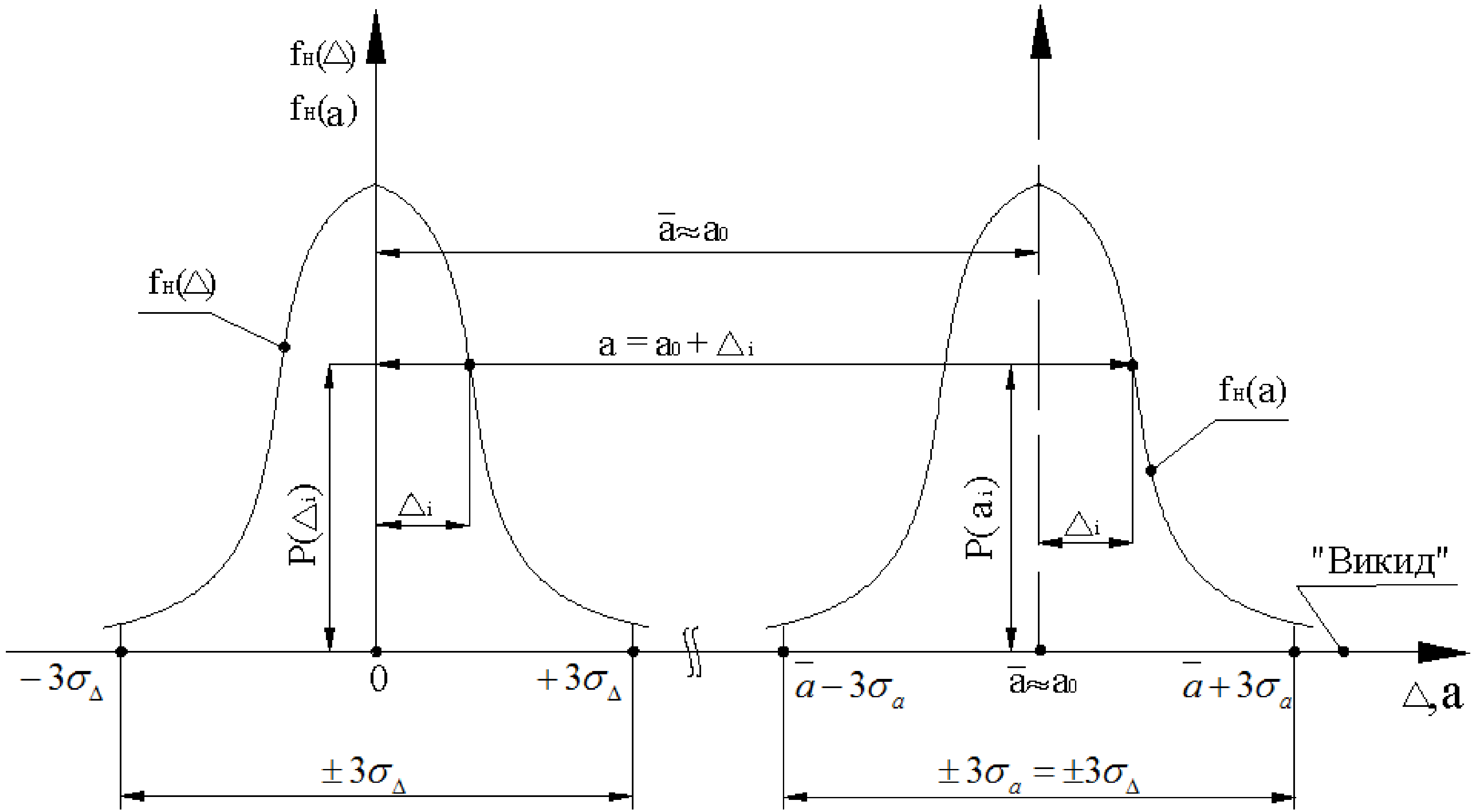


Рис. 2.4. Розподіл результату вимірювання однієї величини

Таким чином як дійсне значення вимірюваної величини a_0 ми приймаємо середнє арифметичне значення, а оцінку точності проводимо за значенням s_a або $\Delta_{a\max}$.

2.3. Оцінка точності визначення середнього арифметичного

Оскільки число вимірів n зазвичай обмежене, то рівність $\bar{a} = a_0$ не виконується точно, а середнє арифметичне $\bar{a}$ є випадковою величиною з характеристиками:

$$m_{\bar{a}} = a_0 \qquad \text{мат. очікування}$$

$$s_{\bar{a}} = \frac{1}{\sqrt{n}} s_a \qquad \text{середньоквадратичне відхилення}$$

З виразу $s_{\bar{a}} = \frac{1}{\sqrt{n}} s_a$ витікає, що при одній і тій же точності окремих вимірювань s_a значення $s_{\bar{a}}$, зменшується із збільшенням числа вимірів пропорційно корню квадратному з n.

У межі

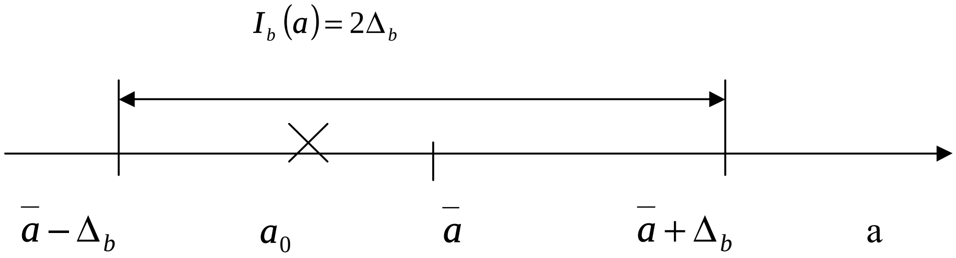
$$n \to \infty$$

$$s_{\bar{a}} \to 0$$

$$\bar{a} \to a_0$$

Для оцінки абсолютної похибки $\Delta_{\bar{a}} = \left|\bar{a} - a_0\right|$ користуються поняттям довірчого інтервалу I_b і довірчої вірогідності b.

Довірчим інтервалом $I_b(a)$, відповідним довірчій вірогідності b називається інтервал завдовжки $2\Delta_b$, центром якого є обчислене значення середнього арифметичного $\bar{a}$ і всередині якого з вірогідністю b знаходиться дійсне значення вимірюваної величини a_0 (рис. 2.5).



$$\left(\bar{a} - \Delta_b\right) < a_0 < \left(\bar{a} + \Delta_b\right) \qquad (2.4)$$

Рис. 2.5. Довірчий інтервал

Іншими словами, вірогідність Р того, що абсолютна похибка $\left|\bar{a} - a_0\right| = \Delta_{\bar{a}}$, не перевершить Δ_b, рівна довірчій вірогідності b

$$P\left(\left|\bar{a} - a_0\right| = \Delta_{\bar{a}} \leq \Delta_b\right) = b$$

Довірчий інтервал характеризує абсолютну похибку Δ_b визначення a_0 за значенням $\bar{a}$, а довірча вірогідність – відповідну цій точності гарантійну надійність. По даній довірчій вірогідності b можна визначити довірчий інтервал і навпаки. Залежно від важливості вимірювань, що проводяться, довірча вірогідність b приймається рівною 0,5; 0,6; ... 0,9; 0,99.

Абсолютну похибку Δ_b зазвичай виражають через відносну довжину довірчого інтервалу t_b

$$\Delta_b = t_b s_{\bar{a}} = t_b \frac{s_a}{\sqrt{n}}$$

Для обмеженого числа вимірювань ($n < 10$) для визначення значення t_b і заданій вірогідності b, користуються законом розподілу Стьюдента

$$\left.\begin{aligned}\Delta_b &= t_b \frac{s_a}{\sqrt{n}} \\ \Delta_b &= \left|\bar{a} - a_0\right|\end{aligned}\right\}, \quad \left|\bar{a} - a_0\right| = t_b \frac{s_a}{\sqrt{n}}, \quad t_b = \frac{\left|\bar{a} - a_0\right|}{s_a}\sqrt{n} \qquad (2.5)$$

Для цього закону розраховані таблиці вірогідності з двома входами – b і $n-1$, за допомогою яких по заданій довірчій вірогідності b і числу вимірювань n визначається відносний довірчий інтервал t_b (табл.. 2.1).

Табл. 2.1

Закон розподілу Стьюдента

n-1 \ β	0,1	0,2	0,3
1	0,158	0,325	0,510
2	0,142	0,289	0,445
3	0,137	0,277	0,224

. . .(Повністю таблиця 2.1 приводитися в додатку)

При достатньо великому числі вимірювань n користуються нормальним законом розподілу.

В інженерній практиці найчастіше для вказівки точності вимірювання величини a замість довірчого інтервалу застосовують запис вигляду

$$a_0 = \bar{a} \pm 3s_{\bar{a}}\ , \qquad (2.6)$$

який справедливий з вірогідністю 0,997.

2.4. Оцінка точності обчислень (точність непрямих вимірювань)

При непрямих вимірюваннях, величини $a, b,...r$ є даними для визначення за допомогою обчислень деякої величини *R,* яка є відомою функцією $a, b,...r$

$$R = f(a, b...r)$$

В цьому випадку виникає необхідність у визначенні похибки ΔR, обумовленої похибками вимірювання величин $a, b,...r - \Delta a, \Delta b,...\Delta r$.

Виміряні значення величин a, $b...r$ можна представити у вигляді:

$$a = a_0 + \Delta a$$

$$b = b_0 + \Delta b$$

$$r = r_0 + \Delta r$$

Тоді:

$$R = f\left[(a_0 + \Delta a), (b_0 + \Delta b), ...(r_0 + \Delta r)\right]$$

Розкладаючи функцію R в ряд Тейлора по ступенях $\Delta a, \Delta b, ...\Delta r$, отримуємо:

$$R = f(a_0 b_0, ...r_0) + \left(\frac{df}{da}\Delta a + \frac{df}{db} + ... + \frac{df}{dr}\Delta r\right) + \text{(члени вищих порядків)}$$

У розкладі, зважаючи на малу величину похибок *Da,Db…Dr,* можна знехтувати членами другого і вищих порядків малих величин.

Тоді, якщо R_0 – дійсне значення величини *R*, то:

$$R_0 = f(a_0, b_0, ...r_o),$$

а похибка ΔR буде рівна:

$$\Delta R = R - R_0 = \frac{df}{da}\Delta a + \frac{df}{db}\Delta b + ... + \frac{df}{dr}\Delta r$$

Власні похідні $\frac{df}{da}, \frac{df}{db}, ...\frac{df}{dr}$ називають коефіцієнтами впливу похибок вимірювання (первинних похибок) *Da, b, r*. Власні похідні функції *R* повинні обчислюватися для дійсних значень параметрів $a_0, b_0, ...r_0$, від яких вони залежать:

$$\frac{df}{da} = f'a(a_0, b_0, \ldots r_0)$$

$$\frac{df}{db} = f_b'(a_0, b_0, \ldots r_0)$$

$$\frac{df}{dr} = f_r'(a_0, b_0, \ldots r_0)$$

Проте на практиці дійсні значення виміряних величин $a_0, b_0, \ldots r_0$ невідомі, тому коефіцієнти впливу обчислюють для середніх значень виміряних параметрів $\overline{a}, \overline{b}, \ldots \overline{r}$, які відрізняються від дійсних значень на величину того ж порядку що і похибки вимірювання

$$\frac{d\overline{f}}{da} = f_a'(\overline{a}, \overline{b}, \ldots \overline{r})$$

$$\frac{d\overline{f}}{db} = f_b'(\overline{a}, \overline{b}, \ldots \overline{r}) \qquad (2.7)$$

$$\frac{d\overline{f}}{dr} = f_r'(\overline{a}, \overline{b}, \ldots \overline{r})$$

Це приводить до появи невеликих похибок другого порядку у формулі ΔR, що неістотно, оскільки ΔR обчислюється також з точністю до незначних величин другого порядку. Оскільки похибки вимірювання $\Delta a, \Delta b, \ldots \Delta r$ є випадковими величинами, то величина R і похибка її обчислення DR є також випадковими величинами. Тому за дійсне значення величини R приймають її найбільш вірогідне значення

$$R_0 \approx \overline{R} = f(\overline{a}, \overline{b}, \ldots \overline{r}) \qquad (2.8)$$

де:

$$\overline{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\overline{b} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} b_i$$

. . .

$$\bar{r} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i \,,$$

а точність її обчислення оцінюють середньоквадратичною похибкою $s_{\bar{R}}$, у якій значення *Da*,*Db*….*r* замінені середніми квадратичними похибками

$$s_{\bar{R}} = \sqrt{\left(\frac{d\bar{f}}{da}\right)^2 s_{\bar{a}}^2 + \left(\frac{d\bar{f}}{db}\right)^2 s_{\bar{b}}^2 + \ldots + \left(\frac{d\bar{f}}{dr}\right)^2 s_{\bar{r}}^2} \qquad (2.9)$$

де:

$$s_{\bar{a}} = \frac{1}{\sqrt{n}} s_a \,, \qquad s_a = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(a_i - \bar{a}\right)^2} \,,$$

$$s_{\bar{b}} = \frac{1}{\sqrt{n}} s_b \,, \qquad s_b = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(b_i - \bar{b}\right)^2} \,,$$

. . .

$$s_{\bar{r}} = \frac{1}{\sqrt{n}} s_r \,, \qquad s_r = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(r_i - \bar{r}\right)^2} \,.$$

Значення $s_{\bar{a}}, s_{\bar{b}}, \ldots s_{\bar{r}}$ характеризують точність визначення дійсних значень $a_0, b_0, \ldots r_0$.

При нормальному законі розподілу похибок вимірювання з вірогідністю 0,997:

$$a_0 = \bar{a} \pm 3s_{\bar{a}}$$

$$b_0 = \bar{b} \pm 3s_{\bar{b}}$$

$$r_0 = \bar{r} \pm 3s_{\bar{r}}$$

Відповідно дійсне значення величини *R* визначається з вірогідністю

$$0{,}683 \qquad R_0 = \overline{R} \pm s_{\overline{R}},$$

$$0{,}954 \qquad R_0 = \overline{R} \pm 2s_{\overline{R}},$$

$$0{,}997 \qquad R_0 = \overline{R} \pm 3s_{\overline{R}}.$$

Ступінь впливу первинних похибок $\Delta a, \Delta b, \ldots \Delta r$ вимірювання величин $a, b, \ldots r$ на точність обчислення значення R визначається відносною часткою кожного доданку у формулі для $s_{\overline{R}}$

$$\text{K}_a = \frac{1}{s_{\overline{R}}^{\,2}} \left(\frac{d\overline{f}}{da} \right)^2 s_{\overline{a}}^{\,2} 100\%,$$

$$\text{K}_b = \frac{1}{s_{\overline{R}}^{\,2}} \left(\frac{d\overline{f}}{db} \right)^2 s_{\overline{b}}^{\,2} 100\%, \qquad (2.10)$$

.

$$\text{K}_r = \frac{1}{s_r^{\,2}} \left(\frac{d\overline{f}}{dr} \right)^2 s_{\overline{r}}^{\,2} 100\%$$

Для підвищення точності визначення значення R_0 (зменшення $s_{\overline{R}}$) необхідно в першу чергу підвищувати точність вимірювання однієї з величин $a, b, \ldots r,$, коефіцієнт К яких має найбільше значення.

Розглянута методика справедлива, коли вимірювання величин $a, b, \ldots r$ проводиться незалежно один від одного.

3. Приклади оцінки точності вимірювань

3.1. Приклад оцінки точності вимірювання однієї величини

Розглянемо послідовність обробки і оцінки точності вимірів одної величини на конкретному прикладі.

В результаті семи прямих вимірів діаметра світловодного волокна d отримані наступні значення в (мм): 2,475; 2,525; 2,527; 2,590; 2,493; 2,532; 2,498. Визначити справжнє значення діаметра волокна, оцінити точність вимірювань. Найти похибку визначення справжнього діаметра волокна (довірчий інтервал) при довірчій ймовірності β=0,6.

Порядок розрахунків.

1. Складаємо розрахункову таблицю (табл. 3.1) для значень діаметра волокна d_i, над якими ведуться спостереження. В таблиці приведені значення діаметра, різниці $\Delta_i = d_i - \bar{d}$ та Δ_i^2.

Таблиця 3.1.

i	d_i	$\Delta_i = d_i - \bar{d}$	Δ_i^2.
1	2,475	-0,045	0,002025
2	2,525	+0,005	0,000025
3	2,527	+0,007	0,000049
4	2,590	+0,070	0,004900
5	2,493	-0,027	0,000729
6	2,532	+,012	0,000144
7	2,498	-0,022	0,000484
Σ	17,640	0,000	0,008356

Визначаємо середнє арифметичне значення діаметра волокна по формулі (2.1):

$$\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} d_i = \frac{1}{7}\cdot 17{,}640 = 2{,}520\,мм$$

Приймемо реальне значення діаметра волокна рівним:

$$d_0 = \bar{d} = 2{,}520 \text{ мм}$$

2. Визначаємо характеристики точності вимірювань, для чого розраховуємо різницю $\Delta_i = d_i - \bar{d}$. Сума цієї різниці повинна бути рівна нулю або близькою до нього (при округленні значень d).

Підносимо різницю до квадрату, підраховуємо їхню суму і середньоквадратичне відхилення похибки вимірювання діаметра волокна по формулі (2.2):

$$s_d = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_1^n \Delta_i^2} = \sqrt{\frac{1}{6}\cdot 0.008356} = 10^{-1}\cdot 0.374 = 0.0374\text{мм}$$

Максимальна похибка вимірювання d може досягати значення (2.3):

$$\Delta_{d\max} = \pm 3s_d = \pm 0.112\text{мм}$$

де s_d і $\Delta_{d\max}$ характеризують точність пристрою, за допомогою якого виконувалося вимірювання (припускається, що форма січення волокна кругла, пороговою невідповідністю можна знехтувати).

3. Знаходимо похибку визначення $\bar{d}$ при довірчій вірогідності β=0,6.

Обчислюємо середньоарифметичне відхилення $\bar{d}$ по формулі:

$$s_{\bar{d}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot s_d = \frac{0.0374}{\sqrt{7}} = 0.0141\text{мм}$$

Визначаємо відносну довжину інтервалу t_β по значенням довірчої вірогідності β=0,6 і числа степенем волі n-1=7-1=6 за допомогою таблиці додатку:

$$t_{0.6} = t_\beta(0.6;6) = 0.906.$$

Вираховуємо абсолютну похибку визначення $\bar{d}$ по формулам (2.5-2.6):

$$\Delta_{0,6} = t_{0.6}\cdot s_{\bar{d}} = 0.906 * 0,0141 = 0,0128\text{мм}$$

Таким чином, з вірогідністю 0,6 явне значення діаметра d_0 відрізняється від прийнятого $\bar{d}$=2,520мм на величину не більше, ніж 0,0128мм.

Довірчий інтервал у відповідності з (2.4) має вигляд:

$$I_{0.6}(d)=(\bar{d}-\Delta_{0.6}<d_0<\bar{d}+\Delta_{0.6})=(2.5072<d_0<2.5328)\text{мм}$$

3.2 Приклад оцінки точності непрямих вимірювань

Виконуються вимірювання фокусної відстані оптичної системи методом збільшення [2].

Значення передньої фокусної відстані оптичної системи вираховується по формулі [2]:

$$f=(l'/l)x,$$

де l – величина предмета.

l' – величина зображення.

x – відстань від переднього фокуса системи до предмета.

В результаті вимірювань отримані значення величини l',l та x (в мм), представлені в розрахунковій таблиці (табл. 3.2).

Визначити значення фокусної відстані, точність цього значення, ступінь впливу первинних похибок, визначити довірчий інтервал з вірогідністю 0,6.

Таблиця 3.2

i	l_i	l_i'	x_i
1	20.07	38.21	52.19
2	19.95	38.38	52.62
3	20.03	38.19	52.45
4	19.90	38.35	52.71
5	20.05	38.37	52.56

1. Вираховуємо середнє значення виміряних величин по формулам (2.8):

$$\bar{l} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} l_i = \frac{1}{5}\cdot 100.0 = 20.0\text{мм}$$

$$\bar{l'} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} l_i^{'} = \frac{1}{5}\cdot 191.5 = 38.3\text{мм}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i = \frac{1}{5}\cdot 262.5 = 52.5\text{мм}$$

2. Вираховуємо по формулам (2.9) середньоквадратичне відхилення виміряних величин, для чого і складаємо розрахункову таблицю (табл. 3.3):

Таблиця 3.3

i	$\Delta l_i = l_i - \bar{l}$	$(\Delta l_i)^2$	$\Delta l_i^{'} = l_i^{'} - \bar{l'}$	$(\Delta l_i^{'})^2$	$\Delta x_i = x_i - \bar{x}$	$(\Delta x_i)^2$
1	0,07	0,0049	-0,09	0,0081	-0,31	0,0961
2	-0,05	0,0025	0,08	0,0064	0,12	0,0144
3	0,03	0,0009	-0,11	0,0121	-0,08	0,0064
4	-0,10	0,0100	0,05	0,0025	0,21	0,0441
5	0,05	0,0025	0,07	0,0049	0,06	0,0036
Σ	0	0,0208	0	0,0340	0	0,1646

$$s_l = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}(\Delta l_i)^2} = \sqrt{\frac{0.0208}{4}} = 0.072\text{мм}$$

$$s_{l'} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}(\Delta l_i^{'})^2} = \sqrt{\frac{0.0340}{4}} = 0.092\text{мм}$$

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}(\Delta l_x)^2} = \sqrt{\frac{0.1646}{4}} = 0.203\text{мм}$$

Вони характеризують точність окремих виміряних величин l’,l та x.

3. Вираховуємо середньоквадратичне відхилення для $\bar{l}$, $\bar{l'}$ та $\bar{x}$ по формулі (2.9):

$$s_{\bar{l}} = \frac{1}{\sqrt{n}} s_l = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 0.072 = 0.032 = 3.2\cdot 10^{-2}\ \text{мм}$$

$$s_{\bar{l'}} = \frac{1}{\sqrt{n}} s_{l'} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 0.092 = 0.041 = 4.1 \cdot 10^{-2}\ мм$$

$$s_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{n}} s_{x} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 0.203 = 0.091 = 9.5 \cdot 10^{-2}\ мм$$

4. Вираховуємо значення фокусної відстані системи по формулі (2.8):

$$f_0 \cong \bar{f} = \frac{\bar{l'}}{\bar{l}} \cdot \bar{x} = \frac{38.3}{20.0} \cdot 52.5 = 100.54 мм$$

5. Вираховуємо $\sigma_{\bar{f}}$, для чого спочатку вираховуємо власну похідну по формулі (2.7):

$$\frac{df}{dl} = -\frac{l' \cdot x}{l^2}; \quad (\frac{d\bar{f}}{dl}) = -\frac{\bar{l'} \cdot \bar{x}}{\bar{l}^2} = -\frac{38.3 \cdot 52.5}{400} = -5.025;$$

$$\frac{df}{dl'} = -\frac{x}{l}; \quad (\frac{d\bar{f}}{dl'}) = \frac{\bar{x}}{\bar{l}} = \frac{52.5}{20} = 2.625;$$

$$\frac{df}{dx} = -\frac{l'}{l}; \quad (\frac{d\bar{f}}{dx}) = \frac{\bar{l'}}{\bar{l}} = \frac{38.3}{20} = 1.915.$$

А також їхні квадрати:

$$(\frac{d\bar{f}}{dl})^2 = 25.30; \quad (\frac{d\bar{f}}{dl'})^2 = 6.90; \quad (\frac{d\bar{f}}{dx})^2 = 3.66.$$

По формулі (2.9):

$$s_{\bar{f}}^2 = (\frac{d\bar{f}}{dl})^2 \cdot s_{\bar{l}}^2 + (\frac{d\bar{f}}{dl'})^2 \cdot s_{\bar{l'}}^2 + (\frac{d\bar{f}}{dx})^2 \cdot s_{\bar{x}}^2 =$$

$$= 25.30 \cdot 10.5 \cdot 10^{-4} + 6.90 \cdot 16.7 \cdot 10^{-4} + 3.66 \cdot 82.8 \cdot 10^{-4} = 10^{-4} \cdot (266 + 115 + 303) = 684 \cdot 10^{-4}\ мм^2$$

Звідки $s_{\bar{l}} = \sqrt{684} \cdot 10^{-2} = 26{,}2 \cdot 10^{-2} = 0{,}262 мм$

6. Ступінь впливу первинних похибок визначаємо по формулі (2.10):

$$\mathrm{K}_l = \frac{1}{s_{\bar{f}}^2} \left(\frac{d\bar{f}}{dl} \right)^2 s_{\bar{l}}^2 100\% = \frac{266}{684} \cdot 100 = 38.8\%;$$

$$\mathrm{K}_{l'} = \frac{1}{s_{\bar{f}}^2} \left(\frac{d\bar{f}}{dl'} \right)^2 s_{\bar{l'}}^2 100\% = \frac{115}{684} \cdot 100 = 16.8\%;$$

$$K_x = \frac{1}{s_{\bar f}^{\,2}}\left(\frac{d\bar f}{dx}\right)^2 s_{\bar x}^{\,2} 100\% = \frac{303}{684}\cdot 100 = 44.4\% .$$

Найбільшу роль в похибці розрахунку $\bar f$ має первинна похибка Δx (44.4%) і, в основному, за рахунок малої точності вимірювання – x ($s_x \approx 2s_{l'}$).

Значне підвищення точності визначення фокусної відстані системи може бути досягнуто за рахунок збільшення точності вимірювання x та l.

7. Визначаємо довірчий інтервал f при довірчій вірогідності β=0.6 по формулі (2.5):

$$\Delta_\beta = t_\beta \cdot \sigma_{\bar f} .$$

По таблиці t_β додаток для β=0.6 та n-1=4 знаходимо $t_\beta(0.6,4)=0.941$ та $\Delta_\beta=0.941\cdot 0.262=0.246$

Тобто, $f_0 = \bar f \pm \Delta_b \approx 100.54 \pm 0.246\,мм$ з вірогідністю 0.6.

Крім того

$$f_0 = \bar f \pm s_{\bar f} = 100.54 \pm 0.262\,мм \text{ при } \beta=0.689$$

$$f_0 = \bar f \pm 2s_{\bar f} = 100.54 \pm 0.524\,мм \text{ при } \beta=0.952$$

і практично достовірно, що $f_0 = \bar f \pm 3s_{\bar f} = 100.54 \pm 0.786\,мм$.

Остаточно, для інженерних робіт, результат вимірювання представляємо у вигляді:

$$f = 100.54 \pm 0.79\,мм .$$

Література

1. Агекян Т.А. «Основы теории ошибок»-М.: наука, 1972.
2. Афанасьев В.А. «Оптические измерения»-М.: Вища школа, 1981.
3. Рего К.Г. «Метрологическая обработка результатов технических измерений»-К.:Техніка, 1987.
4. Румшинський Л.З. «Математическая обработка результатов эксперимента»- М.: наука, 1971.

Додаток

Розподіл Стьюдента

β / n-1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
1	0.158	0.325	0.510	0.727	1	1.376	1.963
2	142	289	445	617	0.816	1.061	1.336
3	137	277	424	584	765	0.978	1.250
4	134	271	414	569	741	941	1.190
5	132	267	408	559	727	920	1.156
6	131	265	404	553	718	906	1.134
7	130	263	402	549	711	896	1.119
8	130	262	399	546	706	889	1.108
9	129	261	398	543	703	883	1.100
10	129	260	397	542	700	879	1.093
11	129	260	396	540	697	876	1.088
12	128	259	395	539	695	873	1.083
13	128	259	394	538	694	870	1.079
14	128	258	393	537	692	868	1.076
15	128	258	393	536	691	866	1.074
16	128	258	392	535	690	865	1.071
17	128	257	392	534	689	863	1.069
18	127	257	392	534	688	862	1.067
19	127	257	391	533	688	861	1.066
20	127	257	391	533	687	860	1.064
21	127	257	391	532	686	859	1.063
22	127	256	390	532	686	858	1.061
23	127	256	390	532	685	858	1.060
24	127	256	390	531	685	857	1.059
25	127	256	390	531	684	856	1.058
26	127	256	390	531	684	856	1.058
27	127	256	389	531	684	855	1.057
28	127	256	389	530	683	855	1.056
29	127	256	389	530	683	854	1.055
30	127	256	389	530	683	854	1.055
40	126	255	388	529	681	851	1.050
60	126	254	387	527	679	848	1.046
120	126	254	386	526	677	845	1.041
∞	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036
n-1 / β	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7

Розподіл Стьюдента
(продовження)

0.8	0.9	0.95	0.98	0.99	0.999	β / n-1
3.08	6.31	12.17	31.8	63.7	636.6	1
1.886	2.92	4.30	6.96	9.92	31.6	2
1.638	2.35	3.18	4.54	5.84	12.94	3
1.533	2.13	2.77	3.75	4.60	8.61	4
1.476	2.02	2.57	3.36	4.03	6.86	5
1.440	1.943	2.45	3.14	3.71	5.96	6
1.415	1.895	2.36	3.00	3.50	5.40	7
1.697	1.860	2.31	2.90	3.36	5.04	8
1.383	1.833	2.26	2.82	3.25	4.78	9
1.372	1.812	2.23	2.76	3.17	4.59	10
1.363	1.796	2.20	2.72	3.11	4.49	11
1.356	1.782	2.18	2.68	3.06	4.32	12
1.350	1.771	2.16	2.65	3.01	4.22	13
1.345	1.761	2.14	2.62	2.98	4.14	14
1.341	1.753	2.13	2.60	2.95	4.07	15
1.337	1.746	2.12	2.58	2.92	4.02	16
1.333	1.740	2.11	2.57	2.90	3.96	17
1.330	1.734	2.10	2.55	2.88	3.92	18
1.328	1.729	2.09	2.54	2.86	3.88	19
1.325	1.725	2.09	2.53	2.84	3.85	20
1.323	1.721	2.08	2.52	2.83	3.82	21
1.321	1.717	2.07	2.51	2.82	3.79	22
1.319	1.714	2.07	2.50	2.81	3.77	23
1.318	1.711	2.06	2.49	2.80	3.74	24
1.316	1.708	2.06	2.48	2.79	3.72	25
1.315	1.706	2.06	2.48	2.78	3.71	26
1.314	1.703	2.05	2.47	2.77	3.69	27
1.313	1.701	2.05	2.47	2.76	3.67	28
1.311	1.699	2.04	2.46	2.76	3.66	29
1.310	1.697	2.04	2.46	2.75	3.65	30
1.303	1.684	2.02	2.42	2.70	3.55	40
1.296	1.671	2.00	2.39	2.66	3.46	60
1.289	1.658	1.980	2.36	2.62	3.37	120
1.282	1.645	1.960	2.33	2.58	3.29	∞
0.8	0.9	0.95	0.98	0.99	0.999	n-1 / β

Зміст